

一类高次缺插值样条函数

陈 天 平

(复 旦 大 学)

在文献[1]中, Meir 和 Sharma 提出了一种五次缺插值样条函数, 文献[2,3]改进了文献[1]中的结果.

最近, 沙震用类似方法讨论了七次、十一次样条. 本文目的是给出一种一般的处理方法, 不仅大大改进了已有结果, 而且可用来讨论一般的插值偶次导数的样条.

在 § 1 中, 通过 Hermite 插值样条讨论一种 H-B 插值样条给出收敛速度估计和渐近展开.

在 § 2 中, 用 § 1 中结果讨论一类高次缺插值样条, 给出收敛速度估计、渐近展开及饱和函数类.

§ 1 设 $f(x) \in C^r[0, 1]$, $x_v = \frac{v}{n}$, $v = 0, 1, \dots, n$ 是区间 $[0, 1]$ 的一个分划, $h = \frac{1}{n}$,

$S_{n,1}(x) = S_{n,1}(f, x)$ 为满足下述条件的 Hermite 插值样条函数:

- (i) 在 $[x_v, x_{v+1}]$ 上, $v = 0, 1, \dots, n-1$, $S_{n,1}(x)$ 是 $2r+1$ 次多项式;
- (ii) $S_{n,1}^{(p)}(x_v) = f^{(p)}(x_v)$, $p = 0, 1, \dots, r$.

在文献[4]中, 我们证明了

定理 A 设 $f(x) \in C^s[0, 1]$ ($r \leq s \leq 2r+1$), 则当 $q \leq s$ 时,

$$\|S_{n,1}^{(q)}(f; x) - f^{(q)}(x)\| = O(h^{s-q} \omega(f^{(s)}; h)). \quad (1)$$

如 $f(x) \in C^{2r+2}[0, 1]$, 则

$$f^{(q)}(x) - S_{n,1}^{(q)}(f; x) = h^{2r+2-q} f^{(2r+2)}(x_v) R^{(q)}\left(\frac{x-x_v}{h}\right) + O(h^{2r+2-q} \omega(f^{(2r+2)}; h)), \quad (2)$$

其中 $R(x) = x^{r+1}(x-1)^{r+1}/(2r+2)!$

设 $S_{n,2}(x) = S_{n,2}(f; x)$ 为满足下述条件的 H-B 插值样条,

- (i) 在 $[x_v, x_{v+1}]$ 上, $v = 0, 1, \dots, n-1$, $S_{n,2}(x)$ 是 $2r+1$ 次多项式;
- (ii) $S_{n,2}^{(2p)}(x_v) = f^{(2p)}(x_v)$, $v = 0, 1, \dots, n$, $p = 0, 1, \dots, r$.

当 $x \in (x_v, x_{v+1})$ 时,

$$S_{n,2}(f; x) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^r h^{2j} f^{(2j)}(x_{v+i}) v_{i,j} \left(\frac{x-x_v}{h}\right), \quad (3)$$

其中 $v_{i,j}(x)$ ($i = 0, 1, j = 0, 1, \dots, r$) 为满足下列条件的 $2r+1$ 次多项式

$$v_{i,j}^{(2l)}(k) = \delta_{i,k} \cdot \delta_{j,l} \quad (i, k = 0, 1, j, l = 0, 1, \dots, r).$$

直接验证易得

本文 1980 年 8 月 28 日收到.

$$\begin{cases} 1 \equiv v_{0,0}(x) + v_{1,0}(x), \\ x \equiv v_{1,0}(x), \\ \frac{x^k}{k!} \equiv \begin{cases} v_{0,\frac{k}{2}}(x) + \sum_{p=0}^{\frac{k}{2}} \frac{v_{1,p}(x)}{(k-2p)!} & \text{当 } k \text{ 是偶数,} \\ \sum_{p=0}^{[\frac{k}{2}]} \frac{v_{1,p}(x)}{(k-2p)!} & \text{当 } k \text{ 是奇数.} \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

类似定理 A, 我们可以证明

定理 1 设 $f(x) \in C^s[0, 1] (s = 2r, 2r+1)$, 则当 $q \leq s$ 时,

$$\|S_{n,2}^{(q)}(f; x) - f^{(q)}(x)\| = O(h^{s-q}\omega(f^{(s)}; h)),$$

当 $s = 2r+2$ 时, 成立着

$$\begin{aligned} f^{(q)}(x) - S_{n,2}^{(q)}(x) &= h^{2r+2-q} Q^{(q)}\left(\frac{x-x_v}{h}\right) f^{(2r+2)}(x) + O(h^{2r+2-q}\omega(f^{(2r+2)}; h)) \\ &\quad (x_v < x < x_{v+1}), \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$Q(x) = R(x) - \sum_{p=0}^r [R^{(2p)}(0)v_{0,p}(x) + R^{(2p)}(1)v_{1,p}(x)].$$

证 设 $S_{n,1}(f; x)$ 为 Hermite 插值样条, 则

$$\begin{aligned} S_{n,2}(f; x) &= S_{n,1}(f; x) + \sum_{p=0}^r h^{2p} \left\{ [f^{(2p)}(x_v) - S_{n,1}^{(2p)}(x_v)] v_{0,p}\left(\frac{x-x_v}{h}\right) \right. \\ &\quad \left. + [f^{(2p)}(x_{v+1}) - S_{n,1}^{(2p)}(x_{v+1})] v_{1,p}\left(\frac{x-x_v}{h}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

由定理 A, 当 $s = 2r, 2r+1$ 时,

$$\begin{aligned} \|S_{n,2}^{(q)}(f; x) - f^{(q)}(x)\| &= \|S_{n,1}^{(q)}(f; x) - f^{(q)}(x)\| + O(h^{s-q}\omega(f^{(s)}; h)) \\ &= O(h^{s-q}\omega(f^{(s)}; h)), \end{aligned}$$

当 $s = 2r+2$ 时, 把(2)式代入(6)式即得(5)式. 证毕.

§ 2 设 $x_v = \frac{v}{n}$, $r = 3k$, $S_n(x)$ 为以 x_v 为节点的 $2r+1$ 次样条函数, 它满足

(i) $S_n(x) \in C^{2r-2k}[0, 1]$; (ii) 在 $[x_v, x_{v+1}]$ 上, $v = 0, 1, \dots, n-1$, 是 $2r+1$ 次多项式; (iii) $S_n^{(2p)}(x_v) = f^{(2p)}(x_v)$, $p = 0, 1, \dots, r-k$, $v = 0, 1, \dots, n$; (iv) $S_n^{(2i+1)}(0) = f^{(2i+1)}(0)$, $i = 0, 1, \dots, 2k-1$.

我们证明

定理 2 如果基函数 $v_{i,j}(x)$ 满足

$$\det \begin{pmatrix} v'_{0,r-k+1}(1) & v'_{1,r-k+1}(1) & v'_{0,r-k+2}(1) & v'_{1,r-k+2}(1) & \cdots & v'_{0,r}(1) & v'_{1,r}(1) \\ v^{(3)}_{0,r-k+1}(1) & v^{(3)}_{1,r-k+1}(1) & v^{(3)}_{0,r-k+2}(1) & v^{(3)}_{1,r-k+2}(1) & \cdots & v^{(3)}_{0,r}(1) & v^{(3)}_{1,r}(1) \\ \dots\dots\dots \\ v^{2(r-k)-1}_{0,r-k+1}(1) & v^{2(r-k)-1}_{1,r-k+1}(1) & v^{2(r-k)-1}_{0,r-k+2}(1) & v^{2(r-k)-1}_{1,r-k+2}(1) & \cdots & v^{2(r-k)-1}_{0,r}(1) & v^{2(r-k)-1}_{1,r}(1) \end{pmatrix} \neq 0,$$

$f(x) \in C^s[0, 1] (2(r-k) \leq s \leq 2r+1)$, 则

$$\|S_n^{(q)}(f; x) - f^{(q)}(x)\| = O(h^{s-1-q}\omega(f^{(s)}; h)), \quad (q \leq s-1).$$

当 $f(x) \in C^{2r+2}[0, 1]$ 时, 存在 $2r+2$ 次多项式 $C(x)$ 满足, 当 $x \in [x_v, x_{v+1}]$ 时,

$$f^{(q)}(x) = S_n^{(q)}(x) + C^{(q)}\left(\frac{x-x_v}{h}\right)[f^{(2r+1)}(x_v) - f^{(2r+1)}(x_0)]h^{2r+1-q} \\ + O(h^{2r+1-q}\omega(f^{(2r+2)}; h)).$$

证 由 $v_{i,j}(x)$ 的定义, $v_{0,j}(x) = v_{1,j}(1-x)$, 故当 q 是奇数时,

$$v_{0,j}^{(q)}(x) = -v_{1,j}^{(q)}(1-x).$$

首先, 设 $s = 2r+1$. 由定义, 当 $x \in [x_v, x_{v+1}]$ 时,

$$S_n(x) = \sum_{p=0}^{r-k} h^{2p} \left[f^{(2p)}(x_v) v_{0,p} \left(\frac{x-x_v}{h} \right) + f^{(2p)}(x_{v+1}) v_{1,p} \left(\frac{x-x_v}{h} \right) \right] \\ + \sum_{p=r-k+1}^r h^{2p} \left[S_n^{(2p)}(x_v+) v_{0,p} \left(\frac{x-x_v}{h} \right) + S_n^{(2p)}(x_{v+1}-) v_{1,p} \left(\frac{x-x_v}{h} \right) \right]. \quad (7)$$

由是得到连续性方程

$$\sum_{p=r-k+1}^r h^{2p} \{ [S_n^{(2p)}(x_v+) - f^{(2p)}(x_v) + S_n^{(2p)}(x_{v+2}-) - f^{(2p)}(x_{v+2})] v_{0,p}^{(2i+1)}(1) \\ + [S_n^{(2p)}(x_{v+1}-) - f^{(2p)}(x_{v+1}) + S_n^{(2p)}(x_{v+1}+) - f^{(2p)}(x_{v+1})] v_{1,p}^{(2i+1)}(1) \} \\ = h^{2i+1} [S_{n,2}^{(2i+1)}(x_{v+1}+) - S_{n,2}^{(2i+1)}(x_{v+1}-)]. \\ \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \dots, r-k-1 \\ v = 0, 1, \dots, n-2 \end{matrix} \right) \quad (8)$$

固定 v , 相应的系数矩阵是 $(r-k) \times (r-k)$ 阶矩阵 ($r=3k$). 由定理的假设它是非奇异的. 而由定理 1, (8) 式右端等于 $O(h^{2r+1}\omega(f^{(2r+1)}; h))$, 故可解出

$$\begin{cases} [S_n^{(2p)}(x_v+) - f^{(2p)}(x_v)] + [S_n^{(2p)}(x_{v+2}-) - f^{(2p)}(x_{v+2})] = O(h^{2r+1-2p}\omega(f^{(2r+1)}; h)), \\ [S_n^{(2p)}(x_{v+1}-) - f^{(2p)}(x_{v+1})] + [S_n^{(2p)}(x_{v+1}+) - f^{(2p)}(x_{v+1})] = O(h^{2r+1-2p}\omega(f^{(2r+1)}; h)), \end{cases} \quad (9) \\ (p = r-k+1, \dots, r, v = 0, 1, \dots, n-2)$$

由端点条件

$$\sum_{p=r-k+1}^r h^{2p} \{ [S_n^{(2p)}(x_0+) - f^{(2p)}(x_0)] v_{0,p}^{(2i+1)}(0) + [S_n^{(2p)}(x_1-) - f^{(2p)}(x_1)] v_{1,p}^{(2i+1)}(0) \} \\ = h^{2i+1} f^{(2i+1)}(0) - \sum_{p=0}^r h^{2p} [f^{(2p)}(x_0) v_{0,p}^{(2i+1)}(0) + f^{(2p)}(x_1) v_{1,p}^{(2i+1)}(0)] \\ = O(h^{(2r+1)}\omega(f^{(2r+1)}; h)) \quad (i = 0, 1, \dots, r-k-1).$$

由是

$$\begin{cases} S_n^{(2p)}(x_0) - f^{(2p)}(x_0) = O(h^{2r+1-2p}\omega(f^{(2r+1)}; h)), \\ S_n^{(2p)}(x_1-) - f^{(2p)}(x_1) = O(h^{2r+1-2p}\omega(f^{(2r+1)}; h)), \end{cases} \quad (p = r-k+1, \dots, r) \quad (10)$$

由(9)式和(10)式即得对一切 $v = 0, 1, \dots, n$,

$$S_n^{(2p)}(x_v \pm) - f^{(2p)}(x_v) = O(h^{2r-2p}\omega(f^{(2r+1)}; h)), \\ (p = r-k+1, \dots, r)$$

利用定理 1, 立即可知, $s = 2r+1$ 时定理成立.

次设 $f(x) \in C^{2r+2}[0, 1]$, 把定理 1 中(5)式代入(8)式

$$\sum_{p=r-k+1}^r h^{2p} \{ [S_n^{(2p)}(x_v+) - f^{(2p)}(x_v) + S_n^{(2p)}(x_{v+2}-) - f^{(2p)}(x_{v+2})] v_{0,p}^{(2i+1)}(1) \}$$

$$\begin{aligned}
& + [S_n^{(2p)}(x_{v+1}-) - f^{(2p)}(x_{v+1}) + S_n^{(2p)}(x_{v+1}+) - f^{(2p)}(x_{v+1})]v_{1,p}^{(2i+1)}(1)\} \\
& = h^{2r+2}f^{(2r+2)}(x_{v+1})[Q^{(2i+1)}(1) - Q^{(2i+1)}(0)] + O(h^{2r+2}\omega(f^{(2r+2)}; h)). \\
& \quad \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \dots, r-k-1 \\ v = 0, 1, \dots, n-2 \end{matrix} \right) \tag{11}
\end{aligned}$$

结合端点条件, $S_n(f; x)$ 是唯一决定的. 适当减去一个 $2r+1$ 次多项式可设 $f^{(2r+2)}(0) = 0$, 故 $f^{(2r+2)}(x) = O(h^{-1}\omega(f^{(2r+2)}; h))$. 因此, 由(11)式, 存在常数 $C_{p,1}, C_{p,2}$, 使

$$\begin{aligned}
S_n^{(2p)}(x_v+) - f^{(2p)}(x_v) &= C_{p,1}h^{2r+1-2p}[f^{(2r+1)}(x_v) - f^{(2r+1)}(x_0)] \\
&+ O(h^{2r+1-2p}\omega(f^{(2r+2)}; h)), \\
S_n^{(2p)}(x_v-) - f^{(2p)}(x_v) &= C_{p,2}h^{2r+1-2p}[f^{(2r+1)}(x_v) - f^{(2r+1)}(x_0)] \\
&+ O(h^{2r+1-2p}\omega(f^{(2r+2)}; h)).
\end{aligned}$$

代入定理 1 知, 存在着 $2r+2$ 次多项式 $C(x)$, 使当 $x \in (x_v, x_{v+1})$,

$$\begin{aligned}
f^{(q)}(x) &= S_n^{(q)}(x) - C^{(q)}\left(\frac{x-x_v}{h}\right)[f^{(2r+1)}(x_v) - f^{(2r+1)}(x_0)]h^{2r+1-q} \\
&+ O(h^{2r+1-q}\omega(f^{(2r+2)}; h)).
\end{aligned}$$

最后, 设 $2(r-k) \leq s \leq 2r$. 为了叙述简单, 令 s 为一偶数. 此时

$$\begin{aligned}
h^{2i+1}S_n^{(2i+1)}(x_{v+1}-) &= \sum_{p=0}^{\frac{s}{2}} h^{2p}[f^{(2p)}(x_v)v_{0,p}^{(2i+1)}(1) + f^{(2p)}(x_{v+1})v_{1,p}^{(2i+1)}(1)] \\
&+ \sum_{p=r-k+1}^{\frac{s}{2}} h^{2p}\{[S_n^{(2p)}(x_v+) - f^{(2p)}(x_v)]v_{0,p}^{(2i+1)}(1) \\
&+ [S_n^{(2p)}(x_{v+1}-) - f^{(2p)}(x_{v+1})]v_{1,p}^{(2i+1)}(1)\} \\
&+ \sum_{p=\frac{s}{2}+1}^r h^{2p}[S_n^{(2p)}(x_v+)v_{0,p}^{(2i+1)}(1) + S_n^{(2p)}(x_{v+1}-)v_{1,p}^{(2i+1)}(1)].
\end{aligned}$$

对于 $h^{2i+1}S_n^{(2i+1)}(x_{v+1}+)$ 也有类似关系式, 故有连续性方程

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=r-k+1}^{\frac{s}{2}} h^{2p}\{[S_n^{(2p)}(x_v+) - f^{(2p)}(x_v) + S_n^{(2p)}(x_{v+2}-) - f^{(2p)}(x_{v+2})]v_{0,p}^{(2i+1)}(1) \\
&+ [S_n^{(2p)}(x_{v+1}-) - f^{(2p)}(x_{v+1}) + S_n^{(2p)}(x_{v+1}+) - f^{(2p)}(x_{v+1})]v_{1,p}^{(2i+1)}(1)\} \\
&+ \sum_{p=\frac{s}{2}+1}^r h^{2p}\{[S_n^{(2p)}(x_v+) - S_n^{(2p)}(x_{v+2}-)]v_{0,p}^{(2i+1)}(1) \\
&+ [S_n^{(2p)}(x_{v+1}-) - S_n^{(2p)}(x_{v+1}+)]v_{1,p}^{(2i+1)}(1)\} \\
&= \sum_{p=0}^{\frac{s}{2}} h^{2p}\{[f^{(2p)}(x_{v+1})v_{0,p}^{(2i+1)}(0) + f^{(2p)}(x_{v+2})v_{1,p}^{(2i+1)}(0)] \\
&- [f^{(2p)}(x_v)v_{0,p}^{(2i+1)}(1) + f^{(2p)}(x_{v+1})v_{1,p}^{(2i+1)}(1)]\}. \quad (v = 1, 2, \dots, n-1) \tag{12}
\end{aligned}$$

把

$$f^{(2p)}(x_{v+2}) = \sum_{k=2p}^{s-1} \frac{f^{(k)}(x_{v+1})}{(k-2p)!} h^{k-2p} + \frac{f^{(s)}(\xi_{p,v+1})}{(s-2p)!} h^{s-2p}$$

代入(12)式右端, 并利用(4)式, 不难得到

$$\sum_{p=0}^{s/2} h^{2p} [f^{(2p)}(x_{v+1})v_{0,p}^{(2i+1)}(0) + f^{(2p)}(x_{v+2})v_{1,p}^{(2i+1)}(0)] \\ = h^{2i+1}f^{(2i+1)}(x_{v+1}) + O(h^s\omega(f^{(s)}; h)).$$

同理

$$\sum_{p=0}^{s/2} h^{2p} [f^{(2p)}(x_v)v_{0,p}^{(2i+1)}(1) + f^{(2p)}(x_{v+1})v_{1,p}^{(2i+1)}(1)] \\ = h^{2i+1}f^{(2i+1)}(x_{v+1}) + O(h^s\omega(f^{(s)}; h)).$$

即(12)式右端等于 $O(h^s\omega(f^{(s)}; h))$. 用前面类似推导过程可得

$$\begin{cases} S_n^{(2p)}(x_v \pm) - f^{(2p)}(x_v) = O(h^{s-2p-1}\omega(f^{(s)}; h)), & p \leq \frac{s}{2}, \\ S_n^{(2p)}(x_v \pm) = O(h^{s-2p-1}\omega(f^{(s)}; h)), & p > \frac{s}{2}. \end{cases} \quad (13)$$

由于当 $x \in (x_v, x_{v+1})$ 时, $S_n^{(s)}(x)$ 为次数不高于 $2r+1-s$ 次多项式, 故

$$S_n^{(s)}(x) = \sum_{p=0}^{r-\frac{s}{2}} \left[S_n^{(s+2p)}(x_v+)v_{0,p}^*\left(\frac{x-x_v}{h}\right) + S_n^{(s+2p)}(x_{v+1}-)v_{1,p}^*\left(\frac{x-x_v}{h}\right) \right] h^{2p},$$

其中 $v_{i,p}^*(x)$ 为对应的 $2\left(r - \frac{s}{2}\right) + 1$ 次插值基函数. 于是

$$\begin{aligned} S_n^{(s)}(x) - f^{(s)}(x) &= [S_n^{(s)}(x_v+) - f^{(s)}(x_v) + f^{(s)}(x_v) - f^{(s)}(x)]v_{0,0}^*\left(\frac{x-x_v}{h}\right) \\ &\quad + [S_n^{(s)}(x_{v+1}-) - f^{(s)}(x_{v+1}) + f^{(s)}(x_{v+1}) - f^{(s)}(x)]v_{1,0}^*\left(\frac{x-x_v}{h}\right) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{r-\frac{s}{2}} h^{2p} [S_n^{(s+2p)}(x_v+)v_{0,p}^*\left(\frac{x-x_v}{h}\right) \\ &\quad + S_n^{(s+2p)}(x_{v+1}-)v_{1,p}^*\left(\frac{x-x_v}{h}\right)]. \end{aligned}$$

把(13)式代入即得 $S_n^{(s)}(x) - f^{(s)}(x) = O(h^{s-1}\omega(f^{(s)}; h))$. 应用 Rolle 定理即可证得定理.

系 设 $\|f^{(2r+2)}(x)\| \leq M$, 则 $\|S_n^{(q)}(f; x) - f^{(q)}(x)\| = O(n^{-(2r+1)+q})$. 如

$$f(x) \in C^{2r+2}[0, 1],$$

则当 $\|S_n^{(q)}(f; x) - f^{(q)}(x)\| = o(n^{-(2r+1)+q})$ 对某个 q 成立时, $f(x)$ 是一个次数不高于 $2r+1$ 的多项式.

这样, 我们在很一般的条件下(许多具体的样条都满足), 完全解决了这类缺插值样条函数的收敛速度估计、渐近展开、饱和度和饱和函数类等问题, 类似的其它类型(如 $r = 3k-1$)以及其它端点条件均可用同样方法讨论, 这里不再赘述.

参 考 文 献

- [1] Meir, A. & Sharma, A., *SIAM. J. Numer. Anal.*, **10** (1973), 433—442.
- [2] Swarz, B. K. & Varga, B. S., *ibid*, **10** (1973), 443—447.
- [3] 郭竹瑞, 数学学报, **18** (1975), 247—253.
- [4] 陈天平, 中国科学, 1980, 12: 1137—1146.