中国科学: 数学　2023 年　第 53 卷　第 7 期: 993～1006
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

论 文

Lorentz 流形 $M^n \times \mathbb{R}$ 中带边类空图超曲面的一类各向异性逆平均曲率流

高雅, 毛井*

湖北大学数学与统计学学院应用数学湖北省重点实验室, 武汉 430062
E-mail: echo-gaoya@outlook.com, jiner120@163.com

收稿日期: 2022-04-27; 接受日期: 2023-02-09; 网络出版日期: 2023-04-27; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11801496 和 11926352)、霍英东教育基金会高等院校青年教师基金 (批准号: 161004)、应用数学湖北省重点实验室和科技大数据湖北省重点实验室 (批准号: 2021KF004) 资助项目

摘要　令 $M^n \times \mathbb{R}$ 是 $n+1$ 维 Lorentz 流形, 其中 M^n 为 Ricci 曲率非负、曲率张量及其一阶协变导数有界且含有一个极点的 n $(n \geqslant 2)$ 维完备 Riemann 流形, $\mathbb{R}$ 是 1 维 Euclid 空间, Ω 是 $M^n \times \mathbb{R}$ 中的有界类空凸超曲面. 本文考虑 $M^n \times \mathbb{R}$ 中定义在 Ω 上的类空图超曲面沿着具有退化 Neumann 边值条件的一类各向异性逆平均曲率流的演化过程, 证明该流的长时间存在性. 此外, 通过适当的伸缩变换后可以得到, 当 $t \to \infty$ 时, 演化类空图超曲面光滑地收敛为定义在 Ω 上的一个常值函数的图曲面.

关键词　各向异性逆平均曲率流　类空超曲面　Lorentz 流形　Neumann 边值条件

MSC (2020) 主题分类　53E10, 35K10

1　引言

Gerhardt [13] 和 Urbas [27] 首先考虑了 $n+1$ $(n \geqslant 2)$ 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个紧致的、星形的 $C^{2,\gamma}$ 超曲面 $\mathcal{W}_0^n$ 沿着几何流

$$\frac{\partial}{\partial t} X = \frac{1}{F} \nu \tag{1.1}$$

的演化过程, 其中, F 是关于演化超曲面 $\mathcal{W}_t^n := X(\mathbb{S}^n, t) = X_t(\mathbb{S}^n)$ 的主曲率的正凹函数且具有对称性、单调性和一次齐次性, ν 是 $\mathcal{W}_t^n$ 的单位外法向量, $\mathbb{S}^n$ 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 n 维单位球面. 他们分别证明了几何流的长时间存在性, 并且证明了, 经过适当的伸缩变换后, 几何流指数收敛到一个指定半径的球面. 此时, 这种流称为逆曲率流. 特别地, 若 $F = H$, 其中 H 为演化超曲面 $\mathcal{W}_t^n$ 的平均曲率, 则流的方程退化为 $\frac{\partial}{\partial t} X = \frac{1}{H} \nu$, 此时该流称为逆平均曲率流; 若 $F = K^{1/n}$, 其中 K 为演化超曲面 $\mathcal{W}_t^n$ 的 Gauss 曲率, 则流的方程变为 $\frac{\partial}{\partial t} X = \frac{1}{K^{1/n}} \nu$, 此时该流称为逆 Gauss 曲率流.

英文引用格式: Gao Y, Mao J. An anisotropic inverse mean curvature flow for spacelike graphic hypersurfaces with boundary in the Lorentz manifold $M^n \times \mathbb{R}$ (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 993–1006, doi: 10.1360/SSM-2022-0072

逆曲率流在数学和理论物理研究中有着许多重要的应用. 通过定义逆平均曲率流的弱解, Huisken 和 Ilmanen [17] 及 Ilmanen [18] 利用逆平均曲率流工具证明了 Riemann-Penrose 不等式, 该不等式为彻底解决广义相对论中著名的 Penrose 猜想提供了可能性. 利用逆平均曲率流, Brendle 等 [1] 得到了 n ($n \geqslant 3$) 维 ADSS (anti-de Sitter-Schwarzschild) 流形中平均凸的星形超曲面上的最优 Minkowski 不等式. 值得一提的是, Chen 和 Mao [3] 将 Brendle 等关于 ADSS 空间中逆平均曲率流长时间存在性、渐近行为的结论极大地拓展到了一般的逆曲率流 (1.1) 的情形. 此外, 利用逆曲率流, 空间形式 (甚至 warping 函数满足一定假设条件的 warped 乘积流形) 中的 Alexandrov-Fenchel 型及其他类型的几何不等式也可以被证明出来 (参见文献 [10, 11, 19, 20, 23]).

可见, 研究逆曲率流是十分有意义的. 众所周知, 经典的逆平均曲率流 (或逆 Gauss 曲率流) 是尺度不变的. 自然地, 我们会问: "非尺度不变的逆曲率流是否有类似的结论呢?"

在此之前, 本文作者及其合作者已经研究了部分非尺度不变的逆曲率流. 例如, Mao 和 Tu [24] 研究了 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中定义在 $\mathbb{S}^n$ 的一片凸区域上的、与给定的开对称 (凸) 锥正交的星形图超曲面沿着一类各向异性逆平均曲率流 (非尺度不变) 的演化过程, 证明了流的长时间存在性, 并且经过适当的伸缩变换后, 该流的解所对应的演化超曲面收敛为某一球面上的一片凸区域.

在此基础上, 进一步地, 我们想要研究如下问题:

• 在 Lorentz 流形中, 非尺度不变的逆曲率流是否有类似的结论呢?

在回答这个问题之前, 先研究这个问题的动机和意义.

• Halldorsson [15] 给出了平面 $\mathbb{R}^2$ 中浸入曲线收缩流所有自相似解的分类. 作为该工作的延续, 在 Lorentz-Minkowski 平面 $\mathbb{R}^2_1$ (特殊的低维 Lorentz 流形) 中的伸缩变换和等距变换意义下, Halldorsson 在文献 [16] 中给出了 $\mathbb{R}^2_1$ 中类空曲线在平均曲率流下进行演化时所有可能的自相似解的分类. 而对于 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^2_1$ 中的平均曲率流, 两者之间有一些显著的差异: (1) 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 不难知道, 沿着平均曲率流演化的简单闭曲线的长度是非增的, 这也是 $\mathbb{R}^2$ 中平均曲率流被称为曲线收缩流的原因. 然而, 在 $\mathbb{R}^2_1$ 中, 由于曲线的曲率在类光点爆破, 所以此时不考虑简单闭曲线的平均曲率流. 我们可以在 $\mathbb{R}^2_1$ 中定义具有有限 Minkowski 长度 (但没有端点) 的类空曲线或类时曲线的平均曲率流. 对于 $\mathbb{R}^2_1$ 中在平均曲率流下演化的类空曲线, 演化的类空曲线的长度可能减少也有可能增加. (2) Halldorsson [16] 展示了 $\mathbb{R}^2_1$ 中一些曲线的例子, 它们最初是不相交的, 但在平均曲率流下演化的过程中会相交. 除此之外, 还给出了 $\mathbb{R}^2_1$ 中平均曲率流方程的解不唯一的例子. 这些行为与 $\mathbb{R}^2$ 中平均曲率流的自相似解的分类问题中出现的 (曲线的) 行为完全不同, 因为在 $\mathbb{R}^2$ 中曲线曲率是有界的.

• $\mathbb{R}^{n+1}$ 中著名的 Bernstein 定理 (即完全非参数化极小超曲面是超平面) 只适用于 $n \leqslant 7$ 的情形 (详细证明可参见文献 [26]); Calabi [2] (对于 $n \leqslant 4$) 和 Cheng 和 Yau [4] (对于所有的 n) 证明了在平坦的 $n+1$ 维 Lorentz-Minkowski 空间 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ 中, 完备极大类空超曲面是全测地的. 特别地, 在 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ 中的完全 (非参数化的) 极大类空超曲面只能是类空超平面.

通过以上两个例子可以看出, 研究 Riemann 几何中的经典结果是否可以拓展到伪 Riemann 几何中是有意义的. 同时, 在某些方面, Riemann 几何设定下的问题与伪 Riemann 几何设定下的类似问题之间存在本质的区别. 于是, 基于前期的研究基础, 本文通信作者与合作者进一步研究了伪 Riemann 几何中非尺度不变的逆平均曲率流: 在 Lorentz-Minkowski 平面 $\mathbb{R}^2_1$ 中, Gao 等 [6] 研究了 (定义在双曲线的一段上的) 类空图曲线沿着具有退化的 Neumann 边值条件的各向异性的 (非尺度不变) 逆平均曲率流的演化过程, 并证明了流的长时间存在性, 且经过适当的伸缩变换后, 演化类空曲线收敛为一条 (半径是唯一确定的) 双曲线上的一段. 在 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ ($n \geqslant 2$) 中, 该结论的高维情形已被 Gao 和 Mao [9] 彻底地解决.

在以上工作的基础上, 本文进一步地探究了 $n+1$ 维 Lorentz 流形 $M^n \times \mathbb{R}$ 中的各向异性逆平均曲率流, 具体如下:

令 M^n 为 Ricci 曲率非负、曲率张量及其一阶协变导数有界且含有一个极点 (具体定义可见注 1.3) 的 n $(n \geqslant 2)$ 维完备 Riemann 流形, $\{\omega^i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ 是 M^n 上的局部坐标, 则 M^n 上的度量 $\widetilde{\sigma}$ 可表示为 $\widetilde{\sigma} = \widetilde{\sigma}_{ij} d\omega^i \otimes d\omega^j$. 这里使用了 Einstein 指标求和惯例—上标和下标同时出现某指标时, 需要对该指标进行求和. 如果没有特殊说明, 下文中将默认使用这一惯例.

令 $N := M^n \times \mathbb{R}$ 是具有形如

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_L := \widetilde{\sigma}_{ij} d\omega^i \otimes d\omega^j - d\omega^0 \otimes d\omega^0, \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{1.2}$$

的度量的 $n+1$ $(n \geqslant 2)$ 维 Lorentz 流形. 令 Ω 是 $M^n \times \mathbb{R}$ 中的有界类空凸超曲面, 并且对于任意 $x \in \Omega$, 有 $\langle x, x \rangle_L = -1$ (该处记号的具体解释可见注 1.3). 本文探究定义在 Ω 上的类空图沿着各向异性、Neumann 边值条件退化的逆平均曲率流的演化过程, 得到如下的主要结论:

定理 1.1 令 $\alpha < 0$, $\Sigma^n := \{(x, s(x)) \mid x \in \partial\Omega, s(x) > 0\}$ 是 $M^n \times \mathbb{R}$ 中可定向的 $C^{2,\alpha}$- 类时超曲面, 且 Σ^n 上的类空法向量满足 $\mu_{\Sigma^n}(x) = \mu_{\Sigma^n}(x, s(x))$. 令 $X_0 : \Omega \to M^n \times \mathbb{R}$ 使得 $\Omega_0 := X_0(\Omega)$ 是一个紧致严格平均凸的 $C^{2,\gamma}$- 类空超曲面, 并且可以写成区域 Ω 上的图, 其中 $0 < \gamma < 1$. 进一步地假设 $\Omega_0 = \mathrm{graph}_\Omega u_0$ 是定义在区域 Ω 上正函数 $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ 的类空图, 并且 Ω_0 满足

$$\partial\Omega_0 \subset \Sigma^n, \quad \langle \mu \circ X_0, \nu_0 \circ X_0 \rangle_L |_{\partial\Omega} = 0,$$

其中, ν_0 是 Ω_0 的过去指向的类时单位法向量, μ 是定义在 $\Sigma^n \cap \partial\Omega = \partial\Omega$ 上的类空法向量. 则

(1) 存在由唯一确定的嵌入映射

$$\begin{aligned} &X \in C^{2+\gamma, 1+\frac{\gamma}{2}}(\Omega \times [0, \infty), M^n \times \mathbb{R}) \cap C^\infty(\Omega \times (0, \infty), M^n \times \mathbb{R}), \\ &X(\partial\Omega, t) \subset \Sigma^n, \quad \text{当 } t \geqslant 0 \text{ 时} \end{aligned}$$

所给出的一族严格平均凸的类空超曲面 Ω_t, 满足如下方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} X = \dfrac{1}{|X|^\alpha H} \nu, & \text{在 } \Omega \times (0, \infty) \text{ 中}, \\ \langle \mu \circ X, \nu \circ X \rangle_L = 0, & \text{在 } \partial\Omega \times (0, \infty) \text{ 上}, \\ X(\cdot, 0) = \Omega_0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中, H 是演化超曲面 $\Omega_t := X(\Omega, t) = X_t(\Omega)$ 的平均曲率, ν 是 Ω_t 上过去指向的类时单位法向量, $|X| := |\langle X, X \rangle_L|^{1/2}$ 是 $X(\cdot, t)$ 上由 Lorentz 度量 $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ 诱导的范数.

(2) Ω_t 均是定义在 Ω 上的图, 即

$$\Omega_t = \mathrm{graph}_\Omega u(\cdot, t),$$

此时, $X(\Omega, t) = \{x, u(x, t) \mid x \in \Omega, t \in [0, \infty)\}$.

(3) 通过适当的伸缩变换后, 演化类空超曲面收敛于某常值函数所对应的图超曲面.

注 1.1 (1) 本文所需要的区域 Ω 是 Lorentz 流形 $M^n \times \mathbb{R}$ 中的 "单位" (由于 Ω 是类空的, 所以这里的 "单位" 指的是: 对于任意 $x \in \Omega$, 都有 $\langle x, x \rangle_L = -1$) 有界类空凸超曲面. 由于本文中探究的

流是非尺度不变的, 所以这里的 "单位" 是必要的, "非尺度不变" 的含义是: 若存在嵌入映射 $X(\lambda x, t)$ 使得演化超曲面可写成如下图函数的形式:

$$X(\lambda x, t) = (\lambda x, u(\lambda x, t)), \quad x \in \Omega,$$

则此时 $u(\lambda x, t)$ 不再是方程 (1.3) 的解. 引理 3.3 (梯度估计) 的证明中运用了区域 Ω 的凸性, 故区域凸性假设也是必要的.

(2) 若 $\alpha = 0$, 则方程 (1.3) 退化成尺度不变的逆平均曲率流. 此时, 本文先验估计的思路对于尺度不变的流仍然适用, 但具体的证明过程需要进行相应的调整. 例如, 若 $\alpha = 0$, 则引理 3.1 (C^0 估计) 中的 (3.1) 需调整为

$$\varphi(t) = -\frac{t}{n} + c,$$

此时仍可以得到解的 C^0 估计 (参见文献 [9, 注 1.1]).

注 1.2 (1) 由于区域 Ω 是 "单位" 的, 所以有 $h^{\Omega}_{ij} h^{\Omega}_{kl} = g^{\Omega}_{ij} g^{\Omega}_{kl}$, 其中 g^{Ω} 和 h^{Ω} 分别是区域 Ω 上的第一和第二基本形式. 因此, n 维完备 Riemann 流形 M^n 上 Ricci 曲率的正定性与区域 Ω 上 Ricci 曲率的正定性等价.

(2) 引理 3.3 (梯度估计) 中运用极值原理得到了解的梯度估计, 而要满足极值原理所需的条件, 区域 Ω 的 Ricci 曲率必须是非负的, 所以 M^n 上 Ricci 曲率非负的假设是必要的.

注 1.3 由于 Riemann 流形 M^n 含有一个极点, 即在该点处的切空间通过指数映射同流形 M^n 是微分同胚的 (该定义参见文献 [14,21]), 于是在流形 M^n 上, 可以建立整体的坐标. 不妨令 $\{\widetilde{\partial}_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 是 M^n 上由整体坐标诱导的基底, 进一步假设 $\widetilde{\partial}_r$ 是 $\mathbb{R}$ 的基底, 则 $\{\widetilde{\partial}_1, \ldots, \widetilde{\partial}_n, \widetilde{\partial}_r\}$ 是 $M^n \times \mathbb{R}$ 上的基底.

因此, 由于存在 $M^n \times \mathbb{R}$ 上的整体坐标, 对于任意 $x \in \Omega \subset M^n \times \mathbb{R}$, x 可以表示为基底的唯一的线性组合, 不妨记为 $x = x^i \widetilde{\partial}_i + x^r \widetilde{\partial}_r$, 则 $\langle x, x \rangle_L = \langle x^i \widetilde{\partial}_i + x^r \widetilde{\partial}_r, x^j \widetilde{\partial}_j + x^r \widetilde{\partial}_r \rangle_L$.

余下内容结构如下: 第 2 节利用类空图的假设将流的发展方程转化为关于图函数的单个二阶抛物型偏微分方程. 第 3 节给出演化方程解的 C^0 估计、时间导数估计和梯度估计的详细证明. 第 4 节给出解的高阶导数估计, 并推导出演化方程解的长时间存在性. 在第 5 节, 经过适当伸缩变换后, 将准确地刻画流的收敛性.

2 标量方程

本节首先简要介绍 Lorentz 流形 N 中一些相关的概念.

定义 2.1 令 $q \in N$, 对于任意的 $\zeta \in T_q N$,

- 如果 $\langle \zeta, \zeta \rangle_L > 0$, 则 ζ 称为类空向量;
- 如果 $\langle \zeta, \zeta \rangle_L = 0$, 则 ζ 称为类光向量;
- 如果 $\langle \zeta, \zeta \rangle_L < 0$, 则 ζ 称为类时向量.

定义 2.2 令 V 为 N 中的 n 维图超曲面.

- 若 V 上每点处的切向量均为类空向量, 则 V 为类空图超曲面, 且 V 的法向量为类时向量;
- 若 V 上每点处的切向量均为类时向量, 则 V 为类时图超曲面, 且 V 的法向量为类空向量.

下面给出后续证明中需要用到的公式.

引理 2.1 令 $p := X(x,t)$, 假设 Ω 上的点可以用局部坐标 $\xi^1,\dots,\xi^n$ 表示, 即 $x = x(\xi^1,\dots,\xi^n)$. 令 ∂_i 是 Ω 上对应的标架, $\sigma_{ij} = g_\Omega(\partial_i,\partial_j)$ 是 Ω 上的 Riemann 度量. 进一步地, 记 $u_i := D_i u$、$u_{ij} := D_j D_i u$ 和 $u_{ijk} := D_k D_j D_i u$ 为 u 关于度量 g_Ω 的协变导数, 其中 D 是 Ω 上的协变导数. 令 ∇ 是 Ω_t 上关于度量 $g := u^2 g_\Omega - dr^2$ 的协变导数, 其中度量 $g := u^2 g_\Omega - dr^2$ 由 $M^n \times \mathbb{R}$ 中的 Lorentz 度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle_L$ 所诱导. 由此, 可以得到下列结论:

(1) Ω_t 上的切向量为 $X_i = \partial_i + u_i\partial_r$, 对应的过去指向的类时单位法向量为

$$\nu = -\frac{1}{v}\left(\partial_r + \frac{1}{u^2}u^j\partial_j\right),$$

其中, $u^j := \sigma^{ij}u_i$, $v := \sqrt{1-u^{-2}|Du|^2}$, Du 为 u 的梯度.

(2) Ω_t 上的度量分量为 $g_{ij} = u^2\sigma_{ij} - u_iu_j$, 其逆为

$$g^{ij} = \frac{1}{u^2}\left(\sigma^{ij} + \frac{u^iu^j}{u^2v^2}\right).$$

(3) Ω_t 上的第二基本型为

$$h_{ij} = \frac{1}{v}\left(u_{ij} + u\sigma_{ij} - \frac{2}{u}u_iu_j\right),$$

进一步地,

$$h^i_j = g^{ik}h_{jk} = \left[\frac{1}{uv}\delta^i_j + \frac{1}{uv}\left(\sigma^{ik} + \frac{\varphi^i\varphi^k}{v^2}\right)\varphi_{jk}\right].$$

于是可以得到平均曲率

$$H = \sum_{i=1}^n h^i_i = \frac{1}{uv}\left(n + \left(\sigma^{ij} + \frac{\varphi^i\varphi^j}{v^2}\right)\varphi_{ij}\right),$$

其中 $\varphi = \log u$.

(4) 令 $p = X(x,t) \in \Sigma^n$, 其中 $x \in \partial\Omega$, $\hat{\mu}(p)$ 是 Σ^n 在 p 点处的类空法向量. 在 x 点处, 令 $\mu = \mu^i(x_p)\partial_i(x)$, 其中 ∂_i 是 $T_x\Omega_t$ 上的基底. 则 $\langle\hat{\mu}(p),\nu(p)\rangle_L = 0 \Leftrightarrow \mu^i(x)u_i(x,t) = 0$.

这里省略引理 2.1 的证明过程, 详细过程可参见文献 [7, 引理 3.1] 的证明. Lorentz 流形中常用的更多公式和事实可参见文献 [8].

因为 $C^{2,\gamma}$- 类空超曲面 Ω_0 可以写成 Ω 上的图, 所以存在函数 $u_0 \in C^{2,\gamma}(\Omega)$ 使得映射 $X_0 : \Omega \to M^n \times \mathbb{R}$ 可表示为 $x \mapsto G_0 := (x, u_0(x))$. 对于某一时刻 t, 由嵌入映射 $X(\cdot,t) : \Omega \to M^n \times \mathbb{R}$ 给出的超曲面 Ω_t 可以表示为 Ω 上的图, 于是对函数 $u : \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}$ 有 $X(x,t) = (x, u(x,t))$.

运用与文献 [5] 中相同的方法 (也可参见文献 [12,13,25]), 方程 (1.3) 可以退化为如下同时具有初值和 Neumann 边值条件的标量方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{v}{u^\alpha H}, & \text{在 } \Omega \times (0,\infty) \text{ 中}, \\ \nabla_\mu u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \times (0,\infty) \text{ 上}, \\ u(\cdot,0) = u_0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}. \end{cases} \tag{2.1}$$

由引理 2.1 和 $\varphi(x,t)=\log u(x,t)$ 可知, 平均曲率可以写为

$$H=\sum_{i=1}^{n}h_i^i=\frac{\mathrm{e}^{-\varphi}}{v}\left(n+\left(\sigma^{ij}+\frac{\varphi^i\varphi^j}{v^2}\right)\varphi_{ij}\right).$$

因此, (2.1) 中的演化方程可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi=-\mathrm{e}^{-\alpha\varphi}(1-|D\varphi|^2)\frac{1}{[n+(\sigma^{ij}+\frac{\varphi^i\varphi^j}{v^2})\varphi_{ij}]}=:Q(\varphi,D\varphi,D^2\varphi).$$

方程 (1.3) 可以进一步地退化为如下具有初值和 Neumann 边值条件的标量方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=Q(\varphi,D\varphi,D^2\varphi), & \text{在 }\Omega\times(0,T)\text{ 中},\\ \nabla_\mu\varphi=0, & \text{在 }\partial\Omega\times(0,T)\text{ 上},\\ \varphi(\cdot,0)=\varphi_0, & \text{在 }\Omega\text{ 中}.\end{cases}\tag{2.2}$$

因为 Ω_0 是严格平均凸的, 所以 $(n+(\sigma^{ij}+\frac{\varphi_0^i\varphi_0^j}{v^2})\varphi_{0,ij})$ 在 Ω 中是正定的. 因此, 对于初始类空图超曲面 Ω_0,

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial\varphi_{ij}}\right|_{\varphi_0}=\frac{1}{u^{2+\alpha}H^2}\left(\sigma^{ij}+\frac{\varphi_0^i\varphi_0^j}{v^2}\right)$$

在 Ω 中是正定的. 基于以上事实, 运用文献 [12,13,25] 中的方法, 可以得到抛物型偏微分方程 (1.3) 的短时间存在性和唯一性.

引理 2.2 对于如定理 1.1 中所定义的初始超曲面 $X_0(\Omega)=\Omega_0$, 存在时间 $T>0$ 和抛物型偏微分方程 (2.2) 唯一的解 $\varphi\in C^{2+\gamma,1+\frac{\gamma}{2}}(\Omega\times[0,T])\cap C^\infty(\Omega\times(0,T])$, 其中 $\varphi(x,t)=\log u(x,t)$, 且矩阵 $(n+(\sigma^{ij}+\frac{\varphi^i\varphi^j}{v^2})\varphi_{ij})$ 在 Ω 中正定.

因此, 存在唯一的映射 $\tau:\Omega\times[0,T]\to\Omega$ 使得 $\tau(\partial\Omega,t)=\partial\Omega$. 由

$$\widehat{X}:\Omega\times[0,T)\to M^n\times\mathbb{R}:(x,t)\mapsto X(\tau(x,t),t)$$

定义的映射 $\widehat{X}$ 具有与定理 1.1 中定义映射相同的正则性, 并且 $\hat{X}$ 是方程 (1.3) 的唯一解.

令 T^* 是使得方程 (2.2) 存在解 $u\in C^{2+\gamma,1+\frac{\gamma}{2}}(\Omega\times[0,T^*))\cap C^\infty(\Omega\times(0,T^*))$ 的最大时间. 接下来给出区间 $[0,T]$ 上解的先验估计, 其中 $T<T^*$.

3 C^0、$\dot{\varphi}$ 和梯度估计

引理 3.1 (C^0 估计) 令 φ 是方程 (2.2) 的解, $\alpha<0$, 对于正常数 c_1 和 c_2, 有

$$c_1\leqslant u(x,t)\Theta^{-1}(t,c)\leqslant c_2,\quad \forall\,x\in\Omega,\quad t\in[0,T],$$

其中 $\Theta(t,c):=\{-\frac{\alpha}{n}t+\mathrm{e}^{\alpha c}\}^{\frac{1}{\alpha}}$, 并且

$$\inf_{\Omega}\varphi(\cdot,0)\leqslant c\leqslant\sup_{\Omega}\varphi(\cdot,0).$$

证明 令 $\varphi(x,t)=\varphi(t)$ (与 x 无关) 是方程 (2.2) 的解, 且 $\varphi(0)=c$. 在这种情形下, (2.2) 的第一个方程退化为如下的常微分方程:

$$\frac{d}{dt}\varphi=-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-\alpha\varphi}.$$

因此,

$$\varphi(t)=\frac{1}{\alpha}\ln\bigg(-\frac{\alpha}{n}t+\mathrm{e}^{\alpha c}\bigg),\quad \alpha<0. \tag{3.1}$$

通过极值原理, 得到

$$\frac{1}{\alpha}\ln\bigg(-\frac{\alpha}{n}t+\mathrm{e}^{\alpha\varphi_1}\bigg)\leqslant\varphi(x,t)\leqslant\frac{1}{\alpha}\ln\bigg(-\frac{\alpha}{n}t+\mathrm{e}^{\alpha\varphi_2}\bigg), \tag{3.2}$$

其中, $\varphi_1:=\inf_\Omega\varphi(\cdot,0)$, $\varphi_2:=\sup_\Omega\varphi(\cdot,0)$. 引理由 $\varphi=\log u$ 得到. □

引理 3.2 ($\dot\varphi$ 估计) 令 φ 是方程 (2.2) 的解, Σ^n 是定理 1.1 中所定义的超曲面. 对于 $\alpha<0$, 有

$$\min\bigg\{\inf_\Omega(\dot\varphi(\cdot,0)\cdot\Theta(0)^\alpha),-\frac{1}{n}\bigg\}\leqslant\dot\varphi(x,t)\Theta(t)^\alpha\leqslant\max\bigg\{\sup_\Omega(\dot\varphi(\cdot,0)\cdot\Theta(0)^\alpha),-\frac{1}{n}\bigg\}.$$

证明 令 $\mathcal{M}(x,t)=\dot\varphi(x,t)\Theta(t)^\alpha$. 对 (2.2) 中的第一个演化方程两边求导数, 得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathcal{M}}{\partial t}=Q^{ij}D_{ij}\mathcal{M}+Q^kD_k\mathcal{M}-\alpha\Theta^{-\alpha}\bigg(\dfrac{1}{n}+\mathcal{M}\bigg)\mathcal{M}, & \text{在 } \Omega\times(0,T) \text{ 中},\\ \nabla_\mu\mathcal{M}=0, & \text{在 } \partial\Omega\times(0,T) \text{ 上},\\ \mathcal{M}(\cdot,0)=\dot\varphi_0\cdot\Theta(0)^\alpha, & \text{在 } \Omega \text{ 中},\end{cases} \tag{3.3}$$

其中 $Q^{ij}:=\frac{\partial Q}{\partial\varphi_{ij}}$, $Q^k:=\frac{\partial Q}{\partial\varphi_k}$. 再由极值原理即可得到估计. □

引理 3.3 (**梯度估计**) 令 φ 是方程 (2.2) 的解, Σ^n 是定理 1.1 中所定义的超曲面. 对 $\alpha<0$, 有

$$|D\varphi|\leqslant\sup_\Omega|D\varphi(\cdot,0)|<1,\quad \forall\,x\in\Omega,\quad t\in[0,T]. \tag{3.4}$$

证明 令 $\psi=\frac{|D\varphi|^2}{2}$. 对 ψ 求导数, 有

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\varphi_m\varphi^m=\dot\varphi_m\varphi^m=Q_m\varphi^m.$$

运用 (2.2) 中 φ 的演化方程, 有

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=Q^{ij}\varphi_{ijm}\varphi^m+Q^k\varphi_{km}\varphi^m-\alpha Q|D\varphi|^2.$$

交换协变导数顺序, 可得

$$\psi_{ij}=D_j(\varphi_{mi}\varphi^m)=\varphi_{mij}\varphi^m+\varphi_{mi}\varphi^m_j=(\varphi_{ijm}+R^l_{imj}\varphi_l)\varphi^m+\varphi_{mi}\varphi^m_j.$$

因此, 可以将 $\varphi_{ijm}\varphi^m$ 表示为 $\varphi_{ijm}\varphi^m=\psi_{ij}-R^l_{imj}\varphi_l\varphi^m-\varphi_{mi}\varphi^m_j$. 由于矩阵 Q^{ij} 正定以及区域 Ω 是 Ricci 非负的, 所以有

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=Q^{ij}\psi_{ij}+Q^k\psi_k-Q^{ij}R^l_{imj}\varphi_l\varphi^m-Q^{ij}\varphi_{mi}\varphi^m_j-\alpha Q|D\varphi|^2\leqslant Q^{ij}\psi_{ij}+Q^k\psi_k. \tag{3.5}$$

因为 Ω 是凸的, 所以运用与文献 [25, 第 1308 页, 引理 5] 的证明中相似的讨论, 有

$$\nabla_\mu\psi=-\sum_{i,j=1}^{n-1}h_{ij}^{\partial\Omega}\nabla_{e_i}\varphi\nabla_{e_j}\varphi\leqslant 0,\quad \text{在 } \partial\Omega\times(0,T) \text{ 上},$$

其中, $e_1,\dots,e_{n-1}\in T_x\partial\Omega$ 是 $x\in\partial\Omega$ 处切空间的标准正交标架. 为了方便计算, 令 $e_n:=\mu$, $h_{ij}^{\partial\Omega}$ 是边界 $\partial\Omega\subset\Sigma^n$ 上的第二基本型. 所以,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}\leqslant Q^{ij}\psi_{ij}+Q^k\psi_k, & \text{在 } \Omega\times(0,T) \text{ 中},\\ \nabla_\mu\psi\leqslant 0, & \text{在 } \partial\Omega\times(0,T) \text{ 上},\\ \psi(\cdot,0)=\dfrac{|D\varphi(\cdot,0)|^2}{2}, & \text{在 } \Omega \text{ 中}.\end{cases}$$

运用极值原理, 有 $|D\varphi|\leqslant\sup_\Omega|D\varphi(\cdot,0)|$. 因为 $G_0=\{(x,u(x,0))\mid x\in\Omega\}$ 是 $M^n\times\mathbb{R}$ 中的类空图, 所以

$$|D\varphi|\leqslant\sup_\Omega|D\varphi(\cdot,0)|<1,\quad \forall x\in\Omega,\quad t\in[0,T].$$

证毕. □

注 3.1 根据引理 3.3 中的梯度估计, 可知演化图 $G_t:=\{(x,u(x,t))\mid x\in\Omega,0\leqslant t\leqslant T\}$ 是类空的.

结合梯度估计和时间导数估计, 有如下结论:

推论 3.1 如果 φ 满足方程 (2.2), 则有

$$0<c_3\leqslant H\Theta\leqslant c_4<+\infty, \tag{3.6}$$

其中 c_3 和 c_4 是与 φ 无关的正常数.

4 Hölder 估计及解的长时间存在性

令 $\Phi=\frac{1}{|X|^\alpha H}$, $w=\langle X,\nu\rangle_L$, $\Psi=\frac{\Phi}{w}$. 可以得到如下的演化方程.

引理 4.1 由定理 1.1 的假设有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}g_{ij}=-2\Phi h_{ij},\quad \frac{\partial}{\partial t}g^{ij}=2\Phi h^{ij},\quad \frac{\partial}{\partial t}\nu=\nabla\Phi,\\ &\partial_t h_{ij}-\Phi H^{-1}\Delta h_{ij}=-\Phi H^{-1}|A|^2h_{ij}-\frac{2\Phi}{H^2}H_iH_j-2\alpha\Phi u^{-1}H^{-1}u_iH_j+\alpha\Phi u^{-1}u_{ij}\\ &\qquad -\alpha(\alpha+1)\Phi u^{-2}u_iu_j-\Phi H^{-1}(\bar R^l_{0lj,i}+\bar R^k_{0ji,k}+H\bar R_{0ji0}+h_{ij}\bar R^l_{0l0})\\ &\qquad -\Phi H^{-1}(\bar R^l_{plj}h^p_i+\bar R^l_{pli}h^p_j+\bar R_{pjik}h^{kp}+\bar R_{pjil}h^{lp})\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial t}&=\mathrm{div}_g(u^{-\alpha}H^{-2}\nabla\Psi)-2H^{-2}u^{-\alpha}\Psi^{-1}|\nabla\Psi|^2\\ &\quad+\alpha\Psi^2+\alpha\Psi^2u^{-1}\nabla^iu\langle X,X_i\rangle_L-\alpha u^{-\alpha-1}H^{-2}\nabla_iu\nabla^i\Psi\\ &\quad-\Psi^2H^{-1}\bar R^i_{0ik}\langle X,X^k\rangle_L+\Psi^2H^{-2}wg^{ij}(\bar R^l_{0lj,i}+\bar R^k_{0ji,k}+H\bar R_{0ji0}+h_{ij}\bar R^l_{0l0})\end{aligned}$$

$$+\Psi^2H^{-2}wg^{ij}(\bar{R}^l_{plj}h^p_i+\bar{R}^l_{pli}h^p_j+\bar{R}_{pjik}h^{kp}+\bar{R}_{pjil}h^{lp})+\Psi^2H^{-1}w\bar{R}^i_{0i0}, \tag{4.1}$$

其中 $\bar{R}$ 是 $M^n\times\mathbb{R}$ 中的曲率张量.

证明　根据第二基本型的定义, 容易得到前三个演化方程, 这里省略具体的证明过程. 运用 Gauss 公式, 有 $\partial_t h_{ij}=-\nabla^2_{ij}\Phi-\Phi h_{ik}h^k_j-\Phi\bar{R}_{0i0j}$. 直接计算得

$$\nabla^2_{ij}\Phi=\Phi\bigg(-\frac{1}{H}H_{ij}+\frac{2H_iH_j}{H^2}\bigg)+2\alpha\Phi u^{-1}H^{-1}u_iH_j-\alpha\Phi u^{-1}u_{ij}+\alpha(\alpha+1)\Phi u^{-2}u_iu_j.$$

运用 Codazzi 方程、Gauss 公式和 Ricci 恒等式, 可以得到

$$\begin{aligned}\Delta h_{ij}=&H_{ij}-Hh_{ik}h^k_j+h_{ij}|A|^2+\bar{R}^l_{0lj,i}+\bar{R}^k_{0ji,k}+H\bar{R}_{0ji0}+h_{ij}\bar{R}^l_{0l0}\\&+\bar{R}^l_{plj}h^p_i+\bar{R}^l_{pli}h^p_j+\bar{R}_{pjik}h^{kp}+\bar{R}_{pjil}h^{lp},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\nabla^2_{ij}\Phi=&-\Phi H^{-1}\Delta h_{ij}-\Phi h_{ik}h^k_j+\Phi H^{-1}|A|^2h_{ij}+\frac{2H_iH_j\Phi}{H^2}\\&+2\alpha\Phi u^{-1}H^{-1}u_iH_j-\alpha\Phi u^{-1}u_{ij}+\alpha(\alpha+1)\Phi u^{-2}u_iu_j\\&+\Phi H^{-1}(\bar{R}^l_{0lj,i}+\bar{R}^k_{0ji,k}+H\bar{R}_{0ji0}+h_{ij}\bar{R}^l_{0l0})\\&+\Phi H^{-1}(\bar{R}^l_{plj}h^p_i+\bar{R}^l_{pli}h^p_j+\bar{R}_{pjik}h^{kp}+\bar{R}_{pjil}h^{lp}).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\partial_th_{ij}-\Phi H^{-1}\Delta h_{ij}=&-\Phi H^{-1}|A|^2h_{ij}-\frac{2\Phi}{H^2}H_iH_j-\Phi\bar{R}_{0i0j}\\&-2\alpha\Phi u^{-1}H^{-1}u_iH_j-\alpha(\alpha+1)\Phi u^{-2}u_iu_j+\alpha\Phi u^{-1}u_{ij}\\&-\Phi H^{-1}(\bar{R}^l_{0lj,i}+\bar{R}^k_{0ji,k}+H\bar{R}_{0ji0}+h_{ij}\bar{R}^l_{0l0})\\&-\Phi H^{-1}(\bar{R}^l_{plj}h^p_i+\bar{R}^l_{pli}h^p_j+\bar{R}_{pjik}h^{kp}+\bar{R}_{pjil}h^{lp}).\end{aligned}$$

而对平均曲率 H, 有

$$\begin{aligned}\partial_tH=&\,\partial_tg^{ij}h_{ij}+g^{ij}\partial_th_{ij}\\=&\,u^{-\alpha}H^{-2}\Delta H-2u^{-\alpha}H^{-3}|\nabla H|^2+u^{-\alpha}H^{-1}|A|^2\\&-2\alpha u^{-\alpha-1}H^{-2}\nabla_iu\nabla^iH+\alpha u^{-\alpha-1}H^{-1}\Delta u-u^{-\alpha}H^{-1}\bar{R}^i_{0i0}\\&-\alpha(\alpha+1)u^{-\alpha-2}H^{-1}|\nabla u|^2-u^{-\alpha}H^{-2}g^{ij}(\bar{R}^l_{0lj,i}+\bar{R}^k_{0ji,k})\\&-u^{-\alpha}H^{-2}g^{ij}(H\bar{R}_{0ji0}+h_{ij}\bar{R}^l_{0l0}+\bar{R}^l_{plj}h^p_i+\bar{R}^l_{pli}h^p_j+\bar{R}_{pjik}h^{kp}+\bar{R}_{pjil}h^{lp}).\end{aligned}$$

进一步地, $\partial_tw=-\Phi-\alpha\Phi u^{-1}\nabla^iu\langle X,X_i\rangle_L-\Phi H^{-1}\nabla^iH\langle X,X_i\rangle_L$. 运用 Weingarten 公式, 有

$$\begin{aligned}&w_i=-h^k_i\langle X,X_k\rangle_L,\\&w_{ij}=-h^k_{i,j}\langle X,X_k\rangle_L-h_{ij}+h^k_ih_{kj}\langle X,\nu\rangle_L=-(h_{ij,k}+\bar{R}_{0ikj})\langle X,X^k\rangle_L-h_{ij}+h^k_ih_{kj}w.\end{aligned}$$

因此,

$$\Delta w=-H-\nabla^iH\langle X,X_i\rangle_L-\bar{R}^i_{0ik}\langle X,X^k\rangle_L+|A|^2w,$$

$$\partial_t w=u^{-\alpha}H^{-2}\Delta w-u^{-\alpha}H^{-2}w|A|^2-\alpha u^{-\alpha-1}H^{-1}\nabla^i u\langle X,X_i\rangle_L+u^{-\alpha}H^{-2}\bar{R}^i_{0ik}\langle X,X^k\rangle_L.$$

因此,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Psi}{\partial t}&=\alpha\frac{1}{u^{1+\alpha}}\frac{1}{Hw}\frac{1}{u^{\alpha-1}Hw}-\frac{1}{u^\alpha H^2}\frac{1}{w}\partial_t H-\frac{1}{u^\alpha H}\frac{1}{w^2}\partial_t w\\
&=\alpha u^{-2\alpha}H^{-2}w^{-2}+\alpha(\alpha+1)u^{-2\alpha-2}H^{-3}w^{-1}|\nabla u|^2+2u^{-2\alpha}H^{-5}w^{-1}|\nabla H|^2\\
&\quad+2\alpha u^{-2\alpha-1}H^{-4}w^{-1}\nabla_i u\nabla^i H-\alpha u^{-2\alpha-1}H^{-3}w^{-1}\Delta u-u^{-2\alpha}H^{-4}w^{-1}\Delta H\\
&\quad-u^{-2\alpha}H^{-3}w^{-2}\Delta w+\alpha u^{-2\alpha-1}H^{-2}w^{-2}\nabla^i u\langle X,X_i\rangle_L-u^{-2\alpha}H^{-3}w^{-2}\bar{R}^i_{0ik}\langle X,X^k\rangle_L\\
&\quad+u^{-2\alpha}H^{-4}w^{-1}g^{ij}(\bar{R}^l_{0lj,i}+\bar{R}^k_{0ji,k}+H\bar{R}_{0ji0}+h_{ij}\bar{R}^l_{0l0})+u^{-2\alpha}H^{-3}w^{-1}\bar{R}^i_{0i0}\\
&\quad+u^{-2\alpha}H^{-4}w^{-1}g^{ij}(\bar{R}^l_{plj}h^p_i+\bar{R}^l_{pli}h^p_j+\bar{R}_{pjik}h^{kp}+\bar{R}_{pjil}h^{lp}).
\end{aligned}$$

为了证明 (4.1), 对 Ψ 求协变导数, 有

$$\begin{aligned}
\nabla_i\Psi&=-\alpha u^{-\alpha-1}H^{-1}w^{-1}\nabla_i u-u^{-\alpha}H^{-2}w^{-1}\nabla_i H-u^{-\alpha}H^{-1}w^{-2}\nabla_i w,\\
\nabla^2_{ij}\Psi&=\alpha(\alpha+1)u^{-\alpha-2}H^{-1}w^{-1}\nabla_i u\nabla_j u+\alpha u^{-\alpha-1}H^{-2}w^{-1}\nabla_i u\nabla_j H+\alpha u^{-\alpha-1}H^{-1}w^{-2}\nabla_i u\nabla_j w\\
&\quad-\alpha u^{-\alpha-1}H^{-1}w^{-1}\nabla^2_{ij}u+\alpha u^{-\alpha-1}H^{-2}w^{-1}\nabla_i H\nabla_j u+2u^{-\alpha}H^{-3}w^{-1}\nabla_i H\nabla_j H\\
&\quad+u^{-\alpha}H^{-2}w^{-2}\nabla_i H\nabla_j w-u^{-\alpha}H^{-2}w^{-1}\nabla^2_{ij}H+\alpha u^{-\alpha-1}H^{-1}w^{-2}\nabla_i w\nabla_j u\\
&\quad+u^{-\alpha}H^{-2}w^{-2}\nabla_i w\nabla_j H+2u^{-\alpha}H^{-1}w^{-3}\nabla_i w\nabla_j w-u^{-\alpha}H^{-1}w^{-2}\nabla^2_{ij}w.
\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}
u^{-\alpha}H^{-2}\Delta\Psi&=\alpha(\alpha+1)u^{-2\alpha-2}H^{-3}w^{-1}|\nabla u|^2+2u^{-2\alpha}H^{-5}w^{-1}|\nabla H|^2+2u^{-2\alpha}H^{-3}w^{-3}|\nabla w|^2\\
&\quad+2\alpha u^{-2\alpha-1}H^{-4}w^{-1}\nabla_i u\nabla^i H+2\alpha u^{-2\alpha-1}H^{-3}w^{-2}\nabla_i u\nabla^i w+2u^{-2\alpha}H^{-4}w^{-2}\nabla_i H\nabla^i w\\
&\quad-\alpha u^{-2\alpha-1}H^{-3}w^{-1}\Delta u-u^{-2\alpha}H^{-4}w^{-1}\Delta H-u^{-2\alpha}H^{-3}w^{-2}\Delta w.
\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(u^{-\alpha}H^{-2}\nabla\Psi)\\
&=-\alpha u^{-\alpha-1}H^{-2}\nabla_i\Psi\nabla^i u-2u^{-\alpha}H^{-3}\nabla_i\Psi\nabla^i H+u^{-\alpha}H^{-2}\Delta\Psi\\
&=(2\alpha^2+\alpha)u^{-2\alpha-2}H^{-3}w^{-1}|\nabla u|^2+5\alpha u^{-2\alpha-1}H^{-4}w^{-1}\nabla_i u\nabla^i H+3\alpha u^{-2\alpha-1}H^{-3}w^{-2}\nabla_i u\nabla^i w\\
&\quad+4u^{-2\alpha}H^{-5}w^{-1}|\nabla H|^2+4u^{-2\alpha}H^{-4}w^{-2}\nabla_i w\nabla^i H+2u^{-2\alpha}H^{-3}w^{-3}|\nabla w|^2\\
&\quad-\alpha u^{-2\alpha-1}H^{-3}w^{-1}\Delta u-u^{-2\alpha}H^{-4}w^{-1}\Delta H-u^{-2\alpha}H^{-3}w^{-2}\Delta w,
\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}
2H^{-1}w|\nabla\Psi|^2&=2\alpha^2u^{-2\alpha-2}H^{-3}w^{-1}|\nabla u|^2+2u^{-2\alpha}H^{-5}w^{-1}|\nabla H|^2+2u^{-2\alpha}H^{-3}w^{-3}|\nabla w|^2\\
&\quad+4\alpha u^{-2\alpha-1}H^{-4}w^{-1}\nabla_i u\nabla^i H+4\alpha u^{-2\alpha-1}H^{-3}w^{-2}\nabla_i u\nabla^i w\\
&\quad+4u^{-2\alpha}H^{-4}w^{-2}\nabla_i H\nabla^i w.
\end{aligned}$$

综上, 有

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\operatorname{div}(u^{-\alpha}H^{-2}\nabla\Psi)+2H^{-1}w|\nabla\Psi|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha u^{-2\alpha}H^{-2}w^{-2} + \alpha u^{-2\alpha-1}H^{-2}w^{-2}\nabla^i u\langle X, X_i\rangle_L + \alpha^2 u^{-2\alpha-2}H^{-3}w^{-1}|\nabla u|^2\\
&\quad + \alpha u^{-2\alpha-1}H^{-4}w^{-1}\nabla_i u\nabla^i H + \alpha u^{-2\alpha-1}H^{-3}w^{-2}\nabla_i u\nabla^i w - \Psi^2 H^{-1}\bar{R}^i_{0ik}\langle X, X^k\rangle_L\\
&\quad + \Psi^2 H^{-2} w g^{ij}(\bar{R}^l_{0lj,i} + \bar{R}^k_{0ji,k} + H\bar{R}_{0ji0} + h_{ij}\bar{R}^l_{0l0}) + \Psi^2 H^{-1} w\bar{R}^i_{0i0}\\
&\quad + \Psi^2 H^{-2} w g^{ij}(\bar{R}^l_{plj}h^p_i + \bar{R}^l_{pli}h^p_j + \bar{R}_{pjik}h^{kp} + \bar{R}_{pjil}h^{lp})\\
&= \alpha\Psi^2 + \alpha\Psi^2 u^{-1}\nabla^i u\langle X, X_i\rangle_L - \alpha u^{-\alpha-1}H^{-2}\nabla_i u\nabla^i\Psi - \Psi^2 H^{-1}\bar{R}^i_{0ik}\langle X, X^k\rangle_L\\
&\quad + \Psi^2 H^{-2} w g^{ij}(\bar{R}^l_{0lj,i} + \bar{R}^k_{0ji,k} + H\bar{R}_{0ji0} + h_{ij}\bar{R}^l_{0l0}) + \Psi^2 H^{-1} w\bar{R}^i_{0i0}\\
&\quad + \Psi^2 H^{-2} w g^{ij}(\bar{R}^l_{plj}h^p_i + \bar{R}^l_{pli}h^p_j + \bar{R}_{pjik}h^{kp} + \bar{R}_{pjil}h^{lp}).
\end{aligned}
$$

证毕. □

接下来, 定义缩放后的流 [1] $\widetilde{X} = X\Theta^{-1}$, 因此, $\widetilde{u} = u\Theta^{-1}$, $\widetilde{\varphi} = \varphi - \log\Theta$, 缩放后的平均曲率为 $\widetilde{H} = H\Theta$, 缩放后的标量方程为 $\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{u} = -\frac{v}{\widetilde{u}^\alpha\widetilde{H}}\Theta^{-\alpha} + \frac{1}{n}\widetilde{u}\Theta^{-\alpha}$. 通过关系 $\frac{dt}{ds} = \Theta^\alpha$, 定义 $t = t(s)$ 使得 $t(0) = 0$ 和 $t(S) = T$, 则 $\widetilde{u}$ 满足

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial s}\widetilde{u} = -\dfrac{v}{\widetilde{u}^\alpha\widetilde{H}} + \dfrac{\widetilde{u}}{n}, & \text{在 } \Omega\times(0,S) \text{ 中},\\
\nabla_\mu\widetilde{u} = 0, & \text{在 } \partial\Omega\times(0,S) \text{ 上},\\
\widetilde{u}(\cdot,0) = \widetilde{u}_0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}.
\end{cases}
\tag{4.2}
$$

引理 4.2 令 X 是方程 (1.3) 的解, $\widetilde{X} = X\Theta^{-1}$ 是方程缩放后的解, 则

$$
\begin{aligned}
&D\widetilde{u} = Du\Theta^{-1}, \quad D\widetilde{\varphi} = D\varphi, \quad \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t}\Theta^{\alpha-1} + \frac{1}{n}u\Theta^{-1},\\
&\widetilde{g}_{ij} = \Theta^{-2}g_{ij}, \quad \widetilde{g}^{ij} = \Theta^2 g^{ij}, \quad \widetilde{h}_{ij} = h_{ij}\Theta^{-1}.
\end{aligned}
$$

证明 引理 4.2 中的式子通过直接的计算即可得出. □

引理 4.3 令 u 是方程 (2.2) 的解, $\varphi(x,t) = \log u(x,t)$, Σ^n 是定理 1.1 中所定义的超曲面. 则存在 $0<\beta<1$ 和 $C>0$ 使得放缩函数 $\widetilde{u}(x,s) := u(x,t(s))\Theta^{-1}(t(s))$ 满足

$$
[D\widetilde{u}]_\beta + \left[\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial s}\right]_\beta + [\widetilde{H}]_\beta \leqslant C(\|u_0\|_{C^{2+\gamma,1+\frac{\gamma}{2}}(M^n)}, n, \beta, \Omega),
\tag{4.3}
$$

其中 $[f]_\beta := [f]_{x,\beta} + [f]_{s,\frac{\beta}{2}}$ 是 f 在 $\Omega\times[0,S]$ 中与 x 和 s 相关的 Hölder 系数的和.

证明 利用前文中计算的演化方程, 由 M^n 的曲率张量及其一阶协变导数有界以及文献 [9, 引理 4.3] 的证明中相同的方法, 即可证得引理成立. □

接下来推导出如下的高阶导数估计.

引理 4.4 令 u 是方程 (2.2) 的解, 且 $\varphi(x,t) = \log u(x,t)$, Σ^n 是定理 1.1 中所定义的超曲面. 则对于任意的 $s_0\in(0,S)$, 存在 $0<\beta<1$ 和 $C>0$ 使得

$$
\|\widetilde{u}\|_{C^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(\Omega\times[0,S])} \leqslant C(\|u_0\|_{C^{2+\gamma,1+\frac{\gamma}{2}}(\Omega)}, n, \beta, \Omega).
\tag{4.4}
$$

1) 这里 $\widetilde{X}(\widetilde{x},\widetilde{u}) = X(x,u)\Theta^{-1}$ 的意思是, $\widetilde{u} = u\Theta^{-1}$, $x = \widetilde{x}$, $\widetilde{\partial}_i = \partial_i\Theta^{-1}$, 其中 $\widetilde{\partial}_i$ 是 $\widetilde{x}$ 对应的标架. 对于一般的 Riemann 流形, 我们并不能确定其是否可以被缩放, 所以并没有对 $x\in\Omega$ 进行缩放. 事实上, 本文后续计算都是在 $\widetilde{u}$ 的单个数量方程中进行的.

同时, 对于所有的 $k \in \mathbb{N}$, 都有

$$\|\widetilde{u}\|_{C^{2k+\beta,k+\frac{\beta}{2}}(\Omega\times[s_0,S])} \leqslant C(\|u_0(\cdot,s_0)\|_{C^{2k+\beta,k+\frac{\beta}{2}}(\Omega)}, n, \beta, \Omega). \tag{4.5}$$

证明 由引理 2.1 有

$$uvH = n + \left(\sigma^{ij} + \frac{\varphi^i\varphi^j}{v^2}\right)\varphi_{ij} = n + u^2\Delta_g\varphi.$$

因为 $u^2\Delta_g\varphi = \widetilde{u}^2\Delta_{\widetilde{g}}\widetilde{\varphi} = -|\widetilde{\nabla}\widetilde{u}|^2 + \widetilde{u}\Delta_{\widetilde{g}}\widetilde{u}$, 所以

$$\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t}\Theta^{\alpha-1} + \frac{1}{n}\widetilde{u} = \frac{uvH}{u^{1+\alpha}H^2}\Theta^{\alpha-1} - \frac{2v}{u^\alpha H}\Theta^{\alpha-1} + \frac{1}{n}\widetilde{u} = \frac{\Delta_{\widetilde{g}}\widetilde{u}}{\widetilde{u}^\alpha\widetilde{H}^2} - \frac{2v}{\widetilde{u}^\alpha\widetilde{H}} + \frac{1}{n}\widetilde{u} + \frac{n-|\widetilde{\nabla}\widetilde{u}|^2}{\widetilde{u}^{1+\alpha}\widetilde{H}^2}.$$

可知上式为 Hölder 系数连续的一致抛物型方程. 因此, 由线性方程理论 (具体可参见文献 [22, 第 4 章]) 即可得出不等式 (4.4).

令 $\widetilde{\varphi} = \log\widetilde{u}$, 缩放后的演化方程 (4.2) 如下:

$$\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial s} = -\mathrm{e}^{-\alpha\widetilde{\varphi}}\frac{v^2}{[n + (\sigma^{ij} + \frac{\widetilde{\varphi}^i\widetilde{\varphi}^j}{v^2})\widetilde{\varphi}_{ij}]} + \frac{1}{n},$$

其中 $v = \sqrt{1-|D\widetilde{\varphi}|^2}$.

进一步地, 可以对方程 (4.2) 中的第一式两边求导数, 得到关于 $D_i\widetilde{u}$ 的演化方程, 利用与前文相同的方法, 也可以得出关于 $D_i\widetilde{u}$ 的 $C^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}$- 估计, 即可得到 $\widetilde{u}$ 的 $C^{3+\beta,\frac{3+\beta}{2}}$- 估计. 重复如上步骤, 即可得到 $\widetilde{u}$ 对于任意 $k \in \mathbb{N}$ 的高阶导数估计. □

定理 4.1 在定理 1.1 的假设下, 可以得到 $T^* = +\infty$.

定理 4.1 的证明与文献 [25, 引理 8] 的证明非常相似, 这里省略具体的证明过程.

5 渐近行为

由定理 4.1 知, 流是长时间存在的, 则缩放后的方程 (2.2) 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s}\widetilde{\varphi} = \widetilde{Q}(\widetilde{\varphi}, D\widetilde{\varphi}, D^2\widetilde{\varphi}), & \text{在 } \Omega\times(0,\infty) \text{ 中}, \\ \nabla_\mu\widetilde{\varphi} = 0, & \text{在 } \partial\Omega\times(0,\infty) \text{ 上}, \\ \widetilde{\varphi}(\cdot,0) = \widetilde{\varphi}_0, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \end{cases} \tag{5.1}$$

其中,

$$\widetilde{Q}(\widetilde{\varphi}, D\widetilde{\varphi}, D^2\widetilde{\varphi}) := -\mathrm{e}^{-\alpha\widetilde{\varphi}}\frac{v^2}{[n + (\sigma^{ij} + \frac{\widetilde{\varphi}^i\widetilde{\varphi}^j}{v^2})\widetilde{\varphi}_{ij}]} + \frac{1}{n},$$

并且 $\widetilde{\varphi} = \log\widetilde{u}$. 应用与引理 3.3 中的 C^1- 估计类似的做法, 可以推导出 $\widetilde{u}(\cdot,s)$ 的估计如下:

引理 5.1 令 u 是方程 (2.1) 的解, 则有

$$|D\widetilde{u}(x,s)| \leqslant \sup_\Omega|D\widetilde{u}(\cdot,0)|\mathrm{e}^{-\lambda s}, \tag{5.2}$$

其中 λ 是正常数.

证明 令 $\widetilde{\psi}=\frac{|D\widetilde{\varphi}|^2}{2}$. 与引理 3.3 中的讨论类似, 通过 C^2 估计, 可以找到一个正常数, 使得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial s}\leqslant\widetilde{Q}^{ij}\widetilde{\psi}_{ij}+\widetilde{Q}^{k}\widetilde{\psi}_{k}-\lambda\widetilde{\psi}, & \text{在 } \Omega\times(0,\infty) \text{ 中},\\ D_\mu\widetilde{\psi}\leqslant 0, & \text{在 } \partial\Omega\times(0,\infty) \text{ 上},\\ \widetilde{\psi}(\cdot,0)=\dfrac{|D\widetilde{\varphi}(\cdot,0)|^2}{2}, & \text{在 } \Omega \text{ 中}.\end{cases}$$

运用极大值原理和 Hopf 引理, 可以得到 $\widetilde{\varphi}$ 的梯度估计, 而由 $\widetilde{\varphi}$ 和 $\widetilde{u}$ 的关系, 即可得到不等式 (5.2). □

引理 5.2 令 u 是方程 (2.1) 的解, 则当 $s\to+\infty$ 时, $\widetilde{u}(\cdot,s)$ 收敛于某实数.

证明 令 $f(t):=\mathcal{H}^n(\Omega_t)$, 其中 $\mathcal{H}^n(\Omega_t)$ 表示 Ω_t 上的 n 维 Hausdorff 测度, 即 Ω_t 的面积. 根据与文献 [9, 引理 5.2] 的证明类似的讨论, 可以得到缩放后的超曲面 $\widetilde{\Omega}_s=\Omega_t\Theta^{-1}$ 满足如下不等式:

$$\frac{\mathcal{H}^n(\Omega_0)}{\mathrm{e}^{n\varphi_2}}\leqslant\mathcal{H}^n(\widetilde{\Omega}_s)\leqslant\frac{\mathcal{H}^n(\Omega_0)}{\mathrm{e}^{n\varphi_1}},$$

其中, $\varphi_1=\inf_{M^n}\varphi(\cdot,0)$, $\varphi_2=\sup_{M^n}\varphi(\cdot,0)$. 由不等式可以看出 $\widetilde{\Omega}_s$ 的面积有界且界与 s 无关. 结合 (4.4)、引理 5.1 和 Arzelà-Ascoli 定理知, 对于 s, $\widetilde{u}(\cdot,s)$ 是列紧的, 并且当 $s\to+\infty$ 时, $|D\widetilde{u}(\cdot,s)|\to 0$. 则 $\widetilde{u}(\cdot,s)$ 一定会收敛到一个常值函数 r_∞ 且 r_∞ 满足

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{\varphi_2}}\left(\frac{\mathcal{H}^n(\Omega_0)}{\mathcal{H}^n(\Omega)}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant r_\infty\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}^{\varphi_1}}\left(\frac{\mathcal{H}^n(\Omega_0)}{\mathcal{H}^n(\Omega)}\right)^{\frac{1}{n}},$$

即

$$\frac{1}{\sup\limits_{\Omega}u_0}\left(\frac{\mathcal{H}^n(\Omega_0)}{\mathcal{H}^n(\Omega)}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant r_\infty\leqslant\frac{1}{\inf\limits_{\Omega}u_0}\left(\frac{\mathcal{H}^n(\Omega_0)}{\mathcal{H}^n(\Omega)}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{5.3}$$

引理得证. □

所以, 可以进一步地得到如下结论:

定理 5.1 缩放后的流 $\frac{d\widetilde{X}}{ds}=\frac{1}{|\widetilde{X}|^\alpha\widetilde{H}}\nu+\frac{1}{n}\widetilde{X}$ 长时间存在, 其解收敛到某一个固定的常数 r_∞, 且 r_∞ 满足 (5.3).

参考文献

1 Brendle S, Hung P K, Wang M T. A Minkowski inequality for hypersurfaces in the anti-de Sitter-Schwarzschild manifold. Comm Pure Appl Math, 2016, 69: 124–144

2 Calabi E. Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations. In: Global Analysis. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume 15. Providence: Amer Math Soc, 1970, 223–230

3 Chen L, Mao J. Non-parametric inverse curvature flows in the AdS-Schwarzschild manifold. J Geom Anal, 2018, 28: 921–949

4 Cheng S Y, Yau S T. Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces. Ann of Math (2), 1976, 104: 407–419

5 Ecker K. Regularity Theory for Mean Curvature Flow. Boston: Birkhäuser, 1992

6 Gao Y, Liu C Y, Mao J. An anisotropic inverse mean curvature flow for spacelike graphic curves in Lorentz-Minkowski plane $\mathbb{R}^2_1$. arXiv:2109.02191, 2021

7 Gao Y, Mao J. Inverse mean curvature flow for spacelike graphic hypersurfaces with boundary in Lorentz-Minkowski space $\mathbb{R}^{n+1}_1$. arXiv:2104.10600v4, 2021

8 Gao Y, Mao J. Inverse Gauss curvature flow in a time cone of Lorentz-Minkowski space $\mathbb{R}^{n+1}_1$. arXiv:2108.08686, 2021

9 Gao Y, Mao J. An anisotropic inverse mean curvature flow for spacelike graphic hypersurfaces with boundary in Lorentz-Minkowski space $\mathbb{R}^{n+1}_1$. Tohoku Math J (2), 2023, in press

10 Ge Y X, Wang G F, Wu J. Hyperbolic Alexandrov-Fenchel quermassintegral inequalities II. J Differential Geom, 2014, 98: 237–260
11 Ge Y X, Wang G F, Wu J, et al. A Penrose inequality for graphs over Kottler space. Calc Var Partial Differential Equations, 2015, 52: 755–782
12 Gerhardt C. Flow of nonconvex hypersurfaces into spheres. J Differential Geom, 1990, 32: 299–314
13 Gerhardt C. Curvature Problems. Somerville: International Press, 2006
14 Greene R E, Wu H. Function Theory on Manifolds Which Possess a Pole. Heidelberg: Springer-Verlag, 1979
15 Halldorsson H P. Self-similar solutions to the curve shortening flow. Trans Amer Math Soc, 2012, 364: 5285–5309
16 Halldorsson H P. Self-similar solutions to the mean curvature flow in the Minkowski plane $\mathbb{R}^{1,1}$. J Reine Angew Math, 2015, 2015: 209–243
17 Huisken G, Ilmanen T. The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality. J Differential Geom, 2001, 59: 353–437
18 Ilmanen T. Higher regularity of the inverse mean curvature flow. J Differential Geom, 2008, 80: 433–451
19 Li H Z, Wei Y. On inverse mean curvature flow in Schwarzschild space and Kottler space. Calc Var Partial Differential Equations, 2017, 56: 56–62
20 Li H Z, Wei Y, Xiong C W. A geometric inequality on hypersurface in hyperbolic space. Adv Math, 2014, 253: 152–162
21 Li J Y. Spectrum of the Laplacian on a complete Riemannian manifold with nonnegative Ricci curvature which possess a pole. J Math Soc Japan, 1994, 46: 213–216
22 Lieberman G M. Second Order Parabolic Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1996
23 Makowski M, Scheuer J. Rigidity results, inverse curvature flows and Alexandrov-Fenchel type inequalities in the sphere. Asian J Math, 2016, 20: 869–892
24 Mao J, Tu Q. A class of inverse curvature flows for star-shaped hypersurfaces evolving in a cone. arXiv:2104.08884v2, 2021
25 Marquardt T. Inverse mean curvature flow for star-shaped hypersurfaces evolving in a cone. J Geom Anal, 2013, 23: 1303–1313
26 Schoen R, Simon L, Yau S T. Curvature estimates for minimal hypersurfaces. Acta Math, 1975, 134: 275–288
27 Urbas J I E. On the expansion of starshaped hypersurfaces by symmetric functions of their principal curvatures. Math Z, 1990, 205: 355–372

An anisotropic inverse mean curvature flow for spacelike graphic hypersurfaces with boundary in the Lorentz manifold $M^n \times \mathbb{R}$

Ya Gao & Jing Mao

Abstract In this paper, we consider the evolution of spacelike graphic hypersurfaces defined over a spacelike hypersurface Ω (with convex boundary), in the $(n+1)$-dimensional Lorentz manifold $M^n \times \mathbb{R}$ along an anisotropic inverse mean curvature flow with the vanishing Neumann boundary condition, where M^n denotes an n-dimensional $(n \geqslant 2)$ complete Riemannian manifold with nonnegative Ricci curvature and possesses a pole, the curvature tensor and its first covariant derivative are bounded, and $\mathbb{R}$ is the one-dimensional Euclidean space. We prove that this flow exists for all the time. Moreover, after suitable rescaling, we show that the evolving spacelike graphic hypersurfaces converge smoothly to a constant function defined over Ω, as time tends to infinity.

Keywords anisotropic inverse mean curvature flow, spacelike hypersurface, Lorentz manifold, Neumann boundary condition

MSC(2020) 53E10, 35K10

doi: 10.1360/SSM-2022-0072