中国科学: 数学 2020 年 第 50 卷 第 2 期: 231～252

SCIENTIA SINICA Mathematica

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

创刊 70 周年特邀综述

关于测度值过程的随机分析

王凤雨[1*], 任盼盼[2,3]

1. 天津大学应用数学中心, 天津 300072;
2. Department of Mathematics, Swansea University, Bay Campus, Swansea SA1 8EN, UK;
3. Mathematical Institute, University of Oxford, Oxford OX2 6GG, UK

E-mail: wangfy@tju.edu.cn, 673788@swansea.ac.uk

收稿日期: 2019-09-21; 接受日期: 2019-10-31; 网络出版日期: 2020-01-03; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11771326 和 11831014) 资助项目

摘要 本文介绍使用随机分析方法研究测度值过程的若干最新进展, 并提出一些有待研究的问题, 期望为读者进入该领域从事研究工作提供帮助. 首先回顾关于测度函数的外在导数 (extrinsic derivative)、内蕴导数 (intrinsic derivative) 和 L 导数, 刻画它们之间的关系, 使用这些导数和参考测度构造 Dirichlet 型, 并研究这些 Dirichlet 型的泛函不等式以刻画相应测度值扩散过程的分布性质; 然后通过解像 (image) 依赖的随机微分方程, 构造 Wasserstein 空间上的扩散过程, 并研究其遍历性以及在偏微分方程中的应用; 最后介绍分布依赖 (McKean-Vlasov) 随机微分方程的 L 导数公式.

关键词 测度值过程 Dirichlet 型 Wasserstein 空间 随机微分方程 谱空隙

MSC (2010) 主题分类 60J68, 60H03

1 引言

随机分析是概率论和纯数学的交叉领域, 一方面使用分析的方法研究随机过程, 另一方面发展概率论工具研究基础数学中的问题. 扩散过程是研究粒子做连续随机运动的数学模型, 其微观特征 (轨道性质) 是运动的连续性和不规则性, 宏观特征 (分布性质) 则联系着算子半群理论和偏微分 (Fokker-Planck-Kolmogorov) 方程, 因而是随机分析中的重要研究对象. 在随机分析中, Dirichlet 型理论和随机微分方程理论是研究扩散过程的两个重要工具. 前者使用能量 (梯度) 和参考测度 (平稳分布) 确定预 Dirichlet 型, 通过证明其可闭性和闭包的正则 (regular) 性或拟正则 (quasi-regular) 性, 确定相应的扩散过程 (参见文献 [1,2]); 后者则通过解 (强解或鞅解) 由 Brown 运动驱动的随机微分方程直接构造扩散过程 (参见文献 [3,4]). 下面以 $\mathbb{R}^d$ 上对称扩散过程的构造为例加以说明.

设 W_t 为 d 维 Brown 运动, $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$, X_t 是如下随机微分方程的解:

$$dX_t = \nabla V(X_t)dt + \sqrt{2}dW_t.$$

英文引用格式: Wang F Y, Ren P P. Stochastic analysis for measure-valued processes (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 231–252, doi: 10.1360/SSM-2019-0225

令 $L = \Delta + \nabla V$, 则由 Itô 公式, 有

$$df(X_t) = Lf(X_t)dt + \sqrt{2}\langle \nabla f(X_t), dW_t\rangle, \quad f \in C^2(\mathbb{R}^d).$$

从而, X_t 是由 L 生成的扩散过程, 即 $P_t f := \mathrm{E}[f(X_t)]$ 满足 $\frac{dP_t f}{dt}|_{t=0} = Lf$, $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$. 称 P_t 为该扩散过程的 (扩散) 半群, L 为 (无穷小) 生成元.

另一方面, 令 $\mu(dx) = \mathrm{e}^{V(x)}dx$. 由分部积分公式, 有

$$\mathscr{E}(f,g) := \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f, \nabla g\rangle d\mu = -\int_{\mathbb{R}^d} fLgd\mu, \quad f,g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

从而 $(\mathscr{E}, C_0^\infty(\mathbb{R}^d))$ 可闭, 并且可以证明其闭包是一个正则 Dirichlet 型. 由 Dirichlet 理论, 该 Dirichlet 型所联系着的唯一扩散过程以 L 为生成元.

随机微分方程的构造方法有利于研究扩散过程轨道性质和分布的正则性 (参见文献 [5]), 而使用 Dirichlet 型则有利于通过建立泛函不等式来刻画过程的分析性质 (参见文献 [6]). 这两种构造方法也被应用于无穷维模型, 例如, 使用 Dirichlet 型和 Malliavin 分析构造路径和环空间上的 Ornstein-Uhlenbeck 过程, 使用随机偏微分方程来构造 Banach 空间上的扩散过程. 本文致力于使用这两种方法研究测度值过程 (也称为超过程) 以及在偏微分方程中的应用. 这类模型在大尺度下描述粒子系统的随机演化行为 (参见文献 [7]).

第 2 节介绍关于测度的外在导数、内蕴导数和 L 导数以及它们之间的关系. 第 3 节介绍测度所组成空间上的三个重要分布, 即 Poisson 分布、Gamma 分布和 Dirichlet 分布. 在此基础上, 第 4 节研究测度值扩散过程 Dirichlet 型的泛函不等式, 主要考虑 Poincaré 不等式, 它等价于生成算子的谱空隙以及半群的指数式收敛速度的下界估计, 因此非常重要. 一般地, 设 $(E, \mathscr{B}, \mu)$ 为概率空间, $(\mathscr{E}, \mathscr{D}(\mathscr{E}))$ 为 $L^2(\mu)$ 上的对称 Dirichlet 型, $1 \in \mathscr{D}(\mathscr{E})$ 且 $\mathscr{E}(1,1) = 0$, 则对于常数 $\lambda > 0$, Poincaré 不等式

$$\mu(f^2) \leqslant \frac{1}{\lambda}\mathscr{E}(f,f) + \mu(f)^2, \quad f \in \mathscr{D}(\mathscr{E})$$

等价于相应的 Markov 半群 P_t 具有指数式收敛

$$\|P_t - \mu\|_2 := \sup_{\mu(f^2)\leqslant 1} \|P_t f - \mu(f)\|_{L^2(\mu)} \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0,$$

也等价于生成算子的谱空隙 $\mathrm{gap}(L) \geqslant \lambda$, 即 0 为 L 的单重特征值且 $-L$ 的谱集与区间 $(0,\lambda)$ 不交. 因而,

$$\mathrm{gap}(L) = \mathrm{gap}(\mathscr{E}) := \inf\{\mathscr{E}(f,f) : f \in \mathscr{D}(\mathscr{E}), \mu(f) = 0, \mu(f^2) = 1\}.$$

第 5 节引入像依赖的随机微分方程来构造 Wasserstein 空间上的扩散过程, 研究这类过程的指数遍历性并通过建立 Feynman-Kac 公式来解 Wasserstein 空间上的偏微分方程. 第 6 节研究分布依赖的随机微分方程, 建立关于初始分布的 L 导数公式.

2 测度函数的导数

为引入关于测度的导数, 先介绍一些测度所组成的空间. 设 (E, ρ) 为 Polish 空间. 令 $\mathbb{M}$ 为 E 上有限测度所组成的空间, $\mathscr{P}$ 为其中的所有概率测度全体. 在弱拓扑下, 它们都是 Polish 空间, 参见文献 [8]. 这里, 测度序列 $\{\mu_n\}_{n\geqslant 1}$ 弱收敛到 μ, 是指

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(f) = \mu(f), \quad f \in C_b(E),$$

其中 $\mu(f) := \int_E f d\mu$. 此外, 对于 $p > 0$, 考虑 Wasserstein 空间

$$\mathscr{P}_p := \{\mu \in \mathscr{P} : \mu(\rho_o^p) < \infty\},$$

其中 $\rho_o := \rho(o, \cdot)$ 为到固定点 $o \in E$ 的距离. 在该空间上赋予 Wasserstein 距离

$$\mathbb{W}_p(\mu_1, \mu_2) := \inf_{\pi \in \mathscr{C}(\mu_1, \mu_2)} \left(\int_{E \times E} \rho(x, y)^p \pi(dx, dy) \right)^{\frac{1}{1 \vee p}},$$

其中 $\pi \in \mathscr{C}(\mu_1, \mu_2)$ 是指 π 为 $E \times E$ 上一个概率测度, 满足边缘条件

$$\pi(\cdot \times E) = \mu_1, \quad \pi(E \times \cdot) = \mu_2.$$

这样的 π 称为 μ_1 和 μ_2 的一个耦合, 对应着将分布 μ_1 传输为分布 μ_2 的一个传输方案, 因而, $\mathbb{W}_p(\mu_1, \mu_2)^{1 \vee p}$ 也叫作分布 μ_1 和 μ_2 之间的以 ρ^p 为费率的最优传输费用 (参见文献 [9]). 易见, $\mathscr{P}_p$ 中的序列 $\{\mu_n\}_{n \geqslant 1}$ 在 $\mathbb{W}_p$ 下收敛到 μ 当且仅当它弱收敛到 μ 且

$$\lim_{R \to \infty} \sup_{n \geqslant 1} \int_{\{\rho_o \geqslant R\}} \rho_o^p d\mu_n = 0.$$

由此结合弱收敛拓扑下 $\mathscr{P}$ 的 Polish 性知, $(\mathscr{P}_2, \mathbb{W}_2)$ 也是 Polish 空间 (参见文献 [10]). 为了记号的统一, 令 $\mathscr{P}_0 = \mathscr{P}$, $\mathbb{W}_0$ 为 Prokhorov 度量:

$$\mathbb{W}_0(\mu_1, \mu_2) := \inf\{\varepsilon > 0 : \mu_1(A) \leqslant \varepsilon + \mu_2(A^\varepsilon), \mu_2(A) \leqslant \varepsilon + \mu_1(A^\varepsilon), A \in \mathscr{B}(E)\},$$

其中 $A^\varepsilon := \{x \in E : \inf_{y \in A} \rho(x, y) < \varepsilon\}$. 该度量诱导弱拓扑, 且 $(\mathscr{P}, \mathbb{W}_0)$ 是 Polish 空间.

类似地, 令 $\mathbb{M}_p = \{\eta \in \mathbb{M} : \eta(\rho_o^p) < \infty\}$, $p \geqslant 0$, 则

$$\mathbb{W}_p(\eta_1, \eta_2) := \{\eta_1(E) \wedge \eta_2(E)\} \mathbb{W}_p\left(\frac{\eta_1}{\eta_1(E)}, \frac{\eta_2}{\eta_2(E)}\right) + |\eta_1(E) - \eta_2(E)|, \quad \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{M}_p$$

为 $\mathbb{M}_p$ 上一个度量使得该空间为 Polish 空间. 特别地, $\mathbb{W}_0$ 诱导 $\mathbb{M}_0 = \mathbb{M}$ 上的弱拓扑 (参见文献 [11]).

文献中也考虑其他拓扑, 包括淡 (vague) 拓扑 (由紧支撑的连续函数诱导)、强拓扑 (由有界可测函数诱导) 和一致拓扑 (由全变差距离诱导). 其中第一个拓扑弱于弱拓扑, 另外两个强于弱拓扑. 弱拓扑和强拓扑产生相同的 Borel σ 代数, 这是因为 E 上开集 G 的示性函数可由有界连续函数单调上升逼近, 从而 $\eta \mapsto \eta(G)$ 在弱拓扑下可测. 由此以及单调类定理知, 对于 E 上的任何有界可测函数 h, $\eta \mapsto \eta(h)$ 在弱拓扑下可测. 容易验证, 当 E 局部紧时, 淡拓扑和弱拓扑所产生的 Borel σ 代数也是相同的. 然而, 当 E 具有不可测子集 A 时 (如 $E = \mathbb{R}^d$), 一致拓扑所产生的 Borel σ 代数严格地大于弱拓扑所产生的 Borel σ 代数, 这是因为集合 $A := \{\delta_x : x \in A\}$ 在一致拓扑下是闭集 (从而关于相应的 σ 代数可测), 而在弱拓扑下, $\psi : x \mapsto \delta_x$ 是 E 到 $\mathbb{M}$ 上的连续映射, $A = \psi^{-1}(A)$ 在 E 中不可测导出 A 在弱拓扑生成的 Borel σ 代数下不可测.

2.1 外在导数

为使用 Dirichlet 型构造扩散过程来刻画粒子系统的生灭行为, 文献 [12] 引入了外在导数的概念.

定义 2.1 (外在导数) 设 $p \geqslant 0$, $f : \mathbb{M}_p \to \mathbb{R}$. 如果对于所有的 $\eta \in \mathbb{M}_p$, $x \in E$,

$$D^E f(\eta)(x) := \lim_{s \downarrow 0} \frac{f(\eta + s\delta_x) - f(\eta)}{s} \in \mathbb{R}$$

存在, 则称 f 外在可导, $D^E f$ 为其外在导数.

(1) 如果 f 外在可导且 $D^E f(\eta)(x)$ 关于 $(x, \eta) \in E \times \mathbb{M}_p$ 连续, 则记 $f \in C^{E,1}(\mathbb{M}_p)$; 如果除此之外 $D^E f$ 还是有界的, 则记 $f \in C_b^{E,1}(\mathbb{M}_p)$.

(2) 当 E 为完备 Riemann 流形时, 如果 $f \in C^{E,1}(\mathbb{M}_p)$, $D^E f(\eta)(x)$ 关于 x 可微, $\nabla\{D^E f(\eta)\}(x)$ 关于 $(x, \eta) \in E \times \mathbb{M}_p$ 连续, 则记 $f \in C^{E,1,1}(\mathbb{M}_p)$; 如果除此之外 $D^E f$ 和 $\nabla\{D^E f\}$ 还是有界的, 则记 $f \in C_b^{E,1,1}(\mathbb{M}_p)$.

对于 $\mathscr{P}$ 上的实函数 f, 由于 $\mu + s\delta_x \notin \mathscr{P}$ 使得 $f(\mu + s\delta_x)$ 无意义, 因此, 我们将外在导数修正为凸外在导数.

定义 2.2 (凸外在导数) 设 $p \geqslant 0$, $f : \mathscr{P}_p \to \mathbb{R}$. 如果对于所有的 $\mu \in \mathscr{P}_p$, $x \in E$,

$$\tilde{D}^E f(\mu)(x) := \lim_{s \downarrow 0} \frac{f((1-s)\mu + s\delta_x) - f(\mu)}{s} \in \mathbb{R}$$

存在, 则称 f 外在可导, $\tilde{D}^E f$ 为其凸外在导数.

(1) 如果 f 外在可导且 $\tilde{D}^E f(\mu)(x)$ 关于 $(x, \mu) \in E \times \mathscr{P}_p$ 连续, 则记 $f \in C^{E,1}(\mathscr{P}_p)$; 如果除此之外 $\tilde{D}^E f$ 还是有界的, 则记 $f \in C_b^{E,1}(\mathscr{P}_p)$.

(2) 当 E 为 Riemann 流形时, 如果 $f \in C^{E,1}(\mathscr{P}_p)$ 使得 $\tilde{D}^E f(\mu)(x)$ 关于 x 可导且 $\nabla\{\tilde{D}^E f(\mu)\}(x)$ 关于 (x, μ) 连续, 则记 $f \in C^{E,1,1}(\mathscr{P}_p)$; 如果除此之外 $\tilde{D}^E f$ 和 $\nabla\{\tilde{D}^E f\}$ 还是有界的, 则记 $f \in C_b^{E,1,1}(\mathscr{P}_p)$.

容易验证 (参见文献 [11]), 如果 $f \in C_b^{E,1}(\mathbb{M})$, 则 $f|_{\mathscr{P}} \in C_b^{E,1}(\mathscr{P})$, 且

$$\tilde{D}^E(f|_{\mathscr{P}})(\mu) = D^E f(\mu) - \mu(D^E f(\mu)), \quad \mu \in \mathscr{P}.$$

从而, 凸外在导数是外在导数的中心化.

2.2 内蕴导数与 L 导数

为刻画粒子系统中粒子的连续随机运动, 文献 [13,14] 引入了如下的内蕴导数概念. 为此, 我们需要空间 E 具有 Riemann 结构. 设 E 为完备 Riemann 流形, TM 为切丛, $\mathscr{B}(TM)$ 为可测向量场所组成的空间. 对于可测向量场 $\phi \in \mathscr{B}(TM)$, 考虑粒子沿着方向 ϕ 进行运动, 于是在短时间 s 时刻, $x \in E$ 处的粒子移动到了

$$\phi_s(x) := \exp_x[s\phi(x)],$$

其中 $0 \leqslant s \mapsto \exp_x[s\phi(x)]$ 是从 x 出发沿着 $\phi(x)$ 方向的测地线. 从而, 粒子系统的分布由原分布 μ 变成了它在映射 ϕ_s 下的像 $\mu \circ \phi_s^{-1}$, 由此可以定义沿着 ϕ 的方向导数. 为了使用 Riesz 表现定理确定导数, 我们选取 Hilbert 空间

$$L^2(\mathscr{B}(TM); \mu) := \{\phi \in \mathscr{B}(TM) : \mu(|\phi|^2) < \infty\}$$

为切空间. 由于仅当 $p \leqslant 2$ 时才有 $\eta \circ \phi_s^{-1} \in \mathbb{M}_p$ (或 $\eta \circ \phi_s^{-1} \in \mathscr{P}_p$) 对于所有的 $s \geqslant 0$、$\eta \in \mathbb{M}_p$ (或 $\eta \in \mathscr{P}_p$) 和 $\phi \in L^2(\mathscr{B}(TM); \eta)$ 成立, 因此, 我们只定义 $\mathbb{M}_p$ 或 $\mathscr{P}_p$ 上函数的内蕴导数.

定义 2.3 (内蕴导数) 设 E 为完备 Riemann 流形, $p \in [0,2]$, f 为 $\mathbb{M}_p$ 或 $\mathscr{P}_p$ 上实函数. 对于 $\eta \in \mathbb{M}_p$ (或 $\eta \in \mathscr{P}_p$), 如果任给 $\phi \in L^2(\mathscr{B}(TM);\eta)$,

$$D^I_\phi f(\eta) := \lim_{s\downarrow 0} \frac{f(\eta\circ\phi_s^{-1}) - f(\eta)}{s} \in \mathbb{R}$$

存在, 且是 ϕ 的有界线性泛函, 则称 f 在 η 处内蕴可导. 此时, 存在唯一的 $D^I f(\eta) \in L^2(\mathscr{B}(TM);\eta)$, 使得

$$D^I_\phi f(\eta) = \langle D^I f(\eta), \phi\rangle_{L^2(\eta)} := \int_E \langle D^I f(\eta), \phi\rangle d\eta, \quad \phi \in L^2(\mathscr{B}(TM);\eta),$$

称 $D^I f(\eta)$ 为 f 在 η 处的内蕴导数. 如果 f 在所有 $\eta \in \mathbb{M}_p$ (或 $\eta \in \mathscr{P}_p$) 处内蕴可导, 则称其内蕴可导.

在文献 [13,14] 所给出的内蕴导数定义中, 使用由向量场 ϕ 所产生的流 $\hat{\phi}_s$ 来代替测地流 ϕ_s:

$$\frac{d}{ds}\hat{\phi}_s(x) = \phi(\phi_s(x)), \quad s \geqslant 0, \quad \phi_0(x) = x.$$

为保证该方程的适定性, 先假设 ϕ 是具有紧支撑的光滑向量场. 由于此时 $\frac{d}{ds}\hat{\phi}_s|_{s=0} = \frac{d}{ds}\phi_s|_{s=0}$, 且具有紧支撑的光滑向量场在 $L^2(\mathscr{B}(TM);\eta)$ 中稠密, 因此, 对于相当大的函数类, 这两种定义等价, 详细的讨论参见文献 [11].

此外, 为研究分布属于 $\mathscr{P}_2$ 的平均场随机微分方程, 也称为 McKean-Vlasov 或分布依赖的随机微分方程, 文献 [15] 在 $\mathscr{P}_2$ 上引入了下面的更强的导数, 该文献中称为 Lions 导数或 L 导数. 一般地, 我们把该导数定义到基于 Riemann 流形的 $\mathbb{M}_p$ 或 $\mathscr{P}_p$ 空间上, $p \in [0,2]$.

定义 2.4 (L 导数) 设 E 为完备 Riemann 流形, $p \in [0,2]$. 如果 $\mathbb{M}_p$ (或 $\mathscr{P}_p$) 上的实函数 f 内蕴可导且对于任意的 $\eta \in \mathbb{M}_p$ (或 $\eta \in \mathscr{P}_p$), 有

$$\lim_{\|\phi\|_{L^2(\eta)}\downarrow 0} \frac{|f(\eta\circ(\mathrm{Id}+\phi)^{-1}) - f(\eta) - D^I_\phi f(\eta)|}{\|\phi\|_{L^2(\eta)}} = 0,$$

则称 f 在 η 处 L 可导. 如果 f 在所有 $\eta \in \mathbb{M}_p$ (或 $\eta \in \mathscr{P}_p$) 处 L 可导, 则称该函数 L 可导, 此时将 $D^I f$ 记为 $D^L f$. 如果 f 是 L 可导的, 且存在 η 版本 $x \mapsto D^L f(\eta)(x)$ 使得它关于 $(x,\eta) \in E \times \mathscr{P}_2$ 连续, 则记 $f \in C^{L,1}(\mathbb{M}_p)$ 或 $f \in C^{L,1}(\mathscr{P}_p)$; 如果 $D^L f$ 还是有界的, 则记 $f \in C^{L,1}_b(\mathbb{M}_p)$ 或 $f \in C^{L,1}_b(\mathscr{P}_p)$.

2.3 三种导数之间的关系

显然, L 可导强于内蕴可导. 事实上, 函数 f 在 η 处的内蕴导数是泛函

$$L^2(\mathscr{B}(TM);\eta) \ni \phi \mapsto f(\eta\circ\phi^{-1})$$

在 $\phi \equiv 0$ 处的 Gâteaux 导数, 而 L 导数则是该泛函在 $\phi \equiv 0$ 处的 Fréchet 导数. L 导数和 (凸) 外在导数之间有如下关系.

定理 2.1 [11] 设 E 为完备 Riemann 流形, $p \in [0,2]$.

(1) 如果 $f \in C^{E,1,1}_b(\mathbb{M}_p)$ (或 $f \in C^{E,1,1}_b(\mathscr{P}_p)$), 则 $f \in C^{L,1}_b(\mathbb{M}_p)$ (或 $f \in C^{L,1}_b(\mathscr{P}_p)$), 且

$$D^L f(\eta) = \nabla\{D^E f(\eta)\}, \quad \eta \in \mathbb{M}_p \quad (\text{或 } D^L f(\mu) = \nabla\{\tilde{D}^E f(\mu)\}, \quad \mu \in \mathscr{P}_p).$$

(2) 如果 $f \in C^{L,1}_b(\mathbb{M}_p)$ 或 $(f \in C^{L,1}_b(\mathscr{P}_p))$, 则对任意的 $s \in (0,1)$ 和 $\eta \in \mathbb{M}_p$ (或 $\mu \in \mathscr{P}_p$), 都有

$$f(\eta + s\delta_\cdot) \ (\text{或 } f((1-s)\mu + s\delta_\cdot)) \in C^1_b(E),$$

而且

$$D^L f(\eta)(x) = \lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{s} \nabla\{f(\eta + s\delta_.)\}(x), \quad x \in E$$
$$\left(\text{或 } D^L f(\mu)(x) = \lim_{s\downarrow 0} \frac{1}{s} \nabla\{f((1-s)\mu + s\delta_.)\}(x), \quad x \in E\right).$$

我们仅介绍 $D^L f(\eta) = \nabla\{D^E f(\eta)\}$ 的证明思路, 其中 $f \in C_b^{E,1,1}(\mathbb{M}_p)$. 详细的证明参见文献 [11].

(1) 先证明, 对于 E 上连续函数族 $\{h_s\}_{s\in[0,s_0]}$, 使得 $\|h_s\|_\infty < 1$, $h_0 = 0$ 且 $\dot{h}_s(x) := \frac{d}{ds} h_s(x)$ 关于 (s,x) 连续有界, 其中 $s_0 > 0$ 为常数, 有

$$\lim_{s\downarrow 0} \frac{f((1+h_s)\eta) - f(\eta)}{s} = \int_M \{D^E f(\eta)\} \dot{h}_0 d\eta.$$

由逼近方法知, 只需对于离散型测度

$$\eta = \sum_{i=1}^n s_i \delta_{x_i}, \quad n \geqslant 1, \quad s_i > 0, \quad x_i \in E$$

加以证明. 对于这样的 η, 当 $n = 1$ 时所求公式就是外在导数的定义. 对于一般 n, 可使用归纳法和外在导数的定义加以证明.

(2) 设 dx 为 Riemann 体积测度, 由逼近方法, 仅需要对满足以下条件的 η 证明:

$$\eta(dx) = \rho(x)dx, \quad \rho \in C_b^\infty(E), \quad \inf \rho > 0.$$

此时, 对于任意的紧支撑光滑向量场 ϕ, 存在 $s_0 > 0$, 使得

$$\rho_s(x) := \frac{d\eta \circ \phi_s^{-1}}{d\eta}, \quad \dot{\rho}_s(x) := \frac{d}{ds} \rho_s(x)$$

存在且关于 (s,x) 有界连续, 则由 (1) 以及计算出 $\dot{\rho}_0 = -\mathrm{div}_\eta \phi$, 可得

$$\begin{aligned} D_\phi^I f(\eta) &= \lim_{s\downarrow 0} \frac{f(\eta \circ \phi_s^{-1}) - f(\eta)}{s} \\ &= \int_M \{D^E f(\eta)\} \dot{\rho}_0 \, d\eta \\ &= \int_E \{D^E f(\eta)\} \cdot \{-\mathrm{div}_\eta(\phi)\} \, d\eta \\ &= \int_M \langle \nabla\{D^E f\}(\eta), \phi \rangle_E d\eta. \end{aligned}$$

由此以及紧支撑光滑向量场在切空间 $L^2(\mathscr{B}(TM);\mu)$ 中的稠密性知, $D^I f(\eta) = \nabla\{D^E f(\eta)\}$.

(3) 最后再验证

$$\lim_{\|\phi\|_{L^2(\eta)}\downarrow 0} \frac{|f(\eta \circ \phi^{-1}) - f(\eta) - D_\phi^I f(\eta)|}{\|\phi\|_{L^2(\eta)}} = 0.$$

下面给出一类函数关于测度导数的具体公式. 考虑柱函数

$$f(\eta) := g(\eta(h_1), \ldots, \eta(h_n)), \quad n \geqslant 1, \quad h_i \in C_b^1(E), \quad f \in C_b^1(\mathbb{R}^n), \quad \eta \in \mathbb{M}_p,$$

则 $f \in C_b^{E,1,1}(\mathbb{M}_p)$, $f|_{\mathscr{P}_p} \in C_b^{E,1,1}(\mathscr{P}_p)$, 而且

$$\begin{aligned} D^E f(\eta) &= \sum_{i=1}^n \partial_i g(\eta(h_1), \ldots, \eta(h_n)) h_i, \quad \eta \in \mathbb{M}_p, \\ \tilde{D}^E f(\mu) &= \sum_{i=1}^n \partial_i g(\mu(h_1), \ldots, \mu(h_n))(h_i - \mu(h_i)), \quad \mu \in \mathscr{P}_p. \end{aligned} \tag{2.1}$$

此外, 当 $p \in [0,2]$ 时, 有 $f \in C_b^{L,1}(\mathbb{M}_p)$, $f|_{\mathscr{P}_p} \in C_b^{L,1}(\mathscr{P}_p)$, 而且

$$\begin{aligned} D^L f(\eta) &= \sum_{i=1}^n \partial_i g(\eta(h_1), \ldots, \eta(h_n)) \nabla h_i, \quad \eta \in \mathbb{M}_p, \\ D^L f|_{\mathscr{P}_p}(\mu) &= \sum_{i=1}^n \partial_i g(\mu(h_1), \ldots, \mu(h_n)) \nabla h_i, \quad \mu \in \mathscr{P}_p. \end{aligned} \tag{2.2}$$

由 (2.1) 和 (2.2) 可见, 定理 2.1(1) 中的公式成立.

问题 2.1 由定理 2.1 知, 对于完备 Riemann 流形 E 和 $p \in [0,2]$, 有 $C_b^{E,1,1}(\mathscr{P}_p) \subset C_b^{L,1}(\mathscr{P}_p)$. 我们希望这里的等号成立. 容易验证, 将 $\mathscr{P}_p$ 换成 $\mathbb{M}_p$ 时, $C_b^{E,1,1}(\mathbb{M}_p) \subset C_b^{L,1}(\mathbb{M}_p)$, 但两者不相等, 例如, $f(\eta) := h(\eta(E))$, 其中 h 为 $[0,\infty)$ 上不可导函数, 则 f 不是外在可导的, 但 $D^L f = 0$.

3 测度空间上的三个概率分布

首先介绍组态 (configuration, 也翻译成构型) 空间上的 Poisson 分布, 然后作为它在不同映射下的像, 引入 Gamma 分布和 Dirichlet 分布.

3.1 Poisson 分布

设 E 为局部紧 Polish 空间, σ 为 E 上的 Radon 测度. 考虑 E 上的组态空间

$$\Gamma(E) := \left\{ \gamma := \sum_{i=1}^N \delta_{x_i} : N \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}, x_i \in E, \text{对于紧集 } K \subset E, \text{有 } \gamma(K) < \infty \right\},$$

并赋予淡拓扑. 每个 $\gamma \in \Gamma(E)$ 表示 E 上粒子系统所处的状态, $\sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$ 是指系统有 N 个粒子, 这些粒子位于 $\{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant N}$. 以 σ 为强度的 Poisson 分布 π_σ 是 $\Gamma(E)$ 上的概率测度, 其 Laplace 变换为

$$\int_{\Gamma(E)} \mathrm{e}^{\gamma(h)} \pi_\sigma(d\gamma) = \exp[\sigma(\mathrm{e}^h - 1)], \quad h \in C_0(E),$$

其中 $C_0(E)$ 是 E 上具有紧支撑的连续函数全体.

命题 3.1 [11] 以 σ 为强度的 Poisson 分布 π_σ 具有如下性质.

(1) π_σ 是具有如下性质的 $\Gamma(E)$ 上的唯一概率测度: 任给有限个互不相交的 E 的紧子集 $A_1, \ldots, A_n$, 在该概率测度下,

$$\gamma \mapsto \gamma(A_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

是分别以 $\{\sigma(A_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant N}$ 为参数的独立 Poisson 随机变量, 即

$$\pi_\sigma(\gamma(A_i) = n_i, 1 \leqslant i \leqslant n) = \prod_{i=1}^n \frac{\sigma(A_i)^{n_i}}{n_i! \mathrm{e}^{\sigma(A_i)}}, \quad n_i \in \mathbb{Z}_+, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

(2) $\sigma(E)=\infty$ 当且仅当 $\pi_\sigma(\gamma(E)=\infty)=1$ (无穷粒子系统); $\sigma(E)<\infty$ 当且仅当 $\pi_\sigma(\gamma(E)<\infty)=1$ (有限粒子系统).

(3) 如果 σ 无原子, 则 $\pi_\sigma(\gamma(\{x\})\in\{0,1\},x\in E)=1$ (每个位置至多有一个粒子).

(4) 令 $\mathscr{B}_+(E)$ 为 E 上非负可测函数全体, 则

$$\int_{\Gamma(E)}\gamma(h)\pi_\sigma(d\gamma)=\sigma(h):=\int_E hd\sigma,\quad h\in\mathscr{B}_+(E).$$

3.2 Gamma 分布

Poisson 分布所刻画的粒子系统中每个粒子都具有单位质量 1. 而在 Gamma 分布下, 一个粒子的质量可以是任何正数. 设 $0\neq\theta\in\mathbb{M}$, 即 θ 是 E 上一个非零的有限测度. 以 θ 为强度的 Gamma 分布 $\mathbb{G}_\theta$ 是 $\mathbb{M}$ 上的概率测度, 其 Laplace 变换为

$$\int_{\mathbb{M}}\mathrm{e}^{-\eta(h)}\mathbb{G}_\theta(d\eta)=\exp[-\theta(\log(1+h))],\quad h\in\mathscr{B}_+(E).$$

为使用 Poisson 分布来刻画 Gamma 分布, 令 $\hat\theta(ds,dx)=s^{-1}\mathrm{e}^{-s}ds\theta(dx)$ 为 $\hat E:=(0,\infty)\times E$ 上 Radon 测度, $\pi_{\hat\theta}$ 为以该测度为强度的 Poisson 分布. 令

$$\mathbf{s}(s,x)=s,\quad (s,x)\in\hat E,$$

则由命题 3.1(2) 和 3.1(4) 知, $\pi_{\hat\theta}$ 支撑在 $\Gamma(\hat E)$ 的如下子空间上:

$$\Gamma_0(\hat E):=\{\gamma\in\Gamma(\hat E):\gamma(\hat E)=\infty,\gamma(\mathbf{s})<\infty\}.$$

命题 3.2 [16,17] (1) $\mathbb{G}_\theta$ 是具有如下性质的 $\mathbb{M}$ 上唯一的概率测度: 任给有限个互不相交的 E 的可测子集 $A_1,\dots,A_n$, 在概率测度 $\mathbb{G}_\theta$ 下,

$$\eta\mapsto\eta(A_i),\quad 1\leqslant i\leqslant n$$

是分别以 $\{\theta(A_i)\}_{1\leqslant i\leqslant N}$ 为参数的独立 Gamma 随机变量, 即

$$\mathbb{G}_\theta(\eta(A_i)\in B_i,1\leqslant i\leqslant n)=\prod_{i=1}^n\int_{B_i}\frac{s^{\theta(A_i)-1}\mathrm{e}^{-s}}{\Gamma(\theta(A_i))}ds,\quad B_i\in\mathscr{B}(\mathbb{R}),\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

这里, 当 $r=0$ 时, $\frac{s^{r-1}\mathrm{e}^{-s}}{\Gamma(r)}ds=:\delta_0(ds)$ 为 0 处的 Dirac 测度.

(2) $\mathbb{G}_\theta(\eta(E)>0)=1$, 且在 $\mathbb{G}_\theta$ 之下 $\eta\mapsto\bar\eta:=\frac{\eta}{\eta(E)}$ 与 $\eta\mapsto\eta(E)$ 相互独立.

(3) 令 $\Phi:\Gamma_0(\hat E)\to\mathbb{M}$, $\Phi(\sum_{i=1}^\infty\delta_{(s_i,x_i)}):=\sum_{i=1}^\infty s_i\delta_{x_i}$, 则 $\mathbb{G}_\theta=\pi_{\hat\theta}\circ\Phi^{-1}$.

根据命题 3.2(3) 可知, $\mathbb{G}_\theta$ 支撑在有限离散测度所组成的空间上:

$$\mathbb{M}_{\mathrm{dis}}:=\left\{\sum_{i=1}^\infty s_i\delta_{x_i}:s_i\geqslant 0,x_i\in E,\sum_{i=1}^\infty s_i\in(0,\infty)\right\}.$$

3.3 Dirichlet 分布

Dirichlet 分布刻画总体质量为 1 的粒子系统的统计性质, 是 Gamma 分布在系统总质量为 1 之下的条件分布, 在生物学中用来刻画物种 (人口) 的概率分布. 于是, 以 θ 为强度的 Dirichlet 分布 $\mathbb{D}_\theta$ 是 $\mathscr{P}$ 上的概率测度, 其 Laplace 变换为

$$\int_{\mathscr{P}}\mathrm{e}^{-\mu(h)}\mathbb{D}_\theta(d\mu)=\frac{1}{\Gamma(\theta(E))}\int_0^\infty s^{\theta(E)-1}\mathrm{e}^{-s-\theta(\log(1+s^{-1}h))}ds,\quad h\in\mathscr{B}_+(E).$$

命题 3.3 [18]　(1) $\mathbb{D}_\theta$ 是具有如下性质的 $\mathscr{P}$ 上唯一的概率测度: 任给 E 的可测划分 $\{A_1,\dots,A_n\}$, 在概率测度 $\mathbb{D}_\theta$ 下, $\mu\mapsto(\mu(A_1),\dots,\mu(A_n))$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 是以 $(\theta(A_1),\dots,\theta(A_n))$ 为参数的 Dirichlet 随机变量, 即 $(\mu(A_1),\dots,\mu(A_{n-1}))$ 是

$$\Delta^{(n-1)}:=\left\{s\in[0,1]^{n-1}:s_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{n-1}s_i\leqslant 1\right\}$$

上的随机变量, 具有分布密度函数

$$\Delta^{(n-1)}\ni(s_1,\dots,s_{n-1})\mapsto\Gamma(\theta(E))\prod_{i=1}^n\frac{s_i^{\theta(A_i)-1}}{\Gamma(\theta(A_i))},\quad s_n:=1-\sum_{i=1}^{n-1}s_i.$$

(2) 令 $\Psi:\mathbb{M}_{\mathrm{dis}}\to\mathscr{P}$, $\Psi(\eta)=\bar{\eta}:=\frac{\eta}{\eta(E)}$, $0\neq\eta\in\mathbb{M}$, 则 $\mathbb{D}_\theta=\mathbb{G}_\theta\circ\Psi^{-1}$.

4　测度值过程的谱空隙

首先考虑 Fleming-Viot 过程的泛函不等式, 该过程由外在导数和 Dirichlet 分布确定, 然后考虑由外在导数和内蕴导数共同产生的扩散过程. 由于 Dirichlet 分布是 Poisson 分布和 Gamma 分布的像, 我们也讨论由后两个测度为参考测度所确定的 Poisson 空间 $\Gamma(\hat{E})$ 和有限测度空间 $\mathbb{M}$ 上的扩散过程.

4.1　Fleming-Viot 过程

设 E 为 Polish 空间, $\mathscr{F}C_b^\infty(\mathscr{P})$ 为 $\mathscr{P}$ 上有界光滑柱函数全体, 即 $F\in\mathscr{F}C_b^\infty(\mathscr{P})$ 具有如下表示:

$$F(\mu)=f(\mu(h_1),\dots,\mu(h_n)),\quad n\geqslant 1,\quad f\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n),\quad h_i\in C_b(E),\quad \mu\in\mathscr{P}.\tag{4.1}$$

当 E 具有微分结构时 (如 Riemann 流形), 我们还要求 $h_i\in C_b^\infty(E)$. 同样地, 定义 $\mathscr{F}C_b^\infty(\mathbb{M})$.

考虑对称二次型

$$\mathscr{E}_{\mathbb{D}_\theta}(F,G):=\int_{\mathscr{P}}\langle\tilde{D}^EF(\mu),\tilde{D}^EG(\mu)\rangle_{L^2(\mu)}\mathbb{D}_\theta(d\mu),\quad F,G\in\mathscr{F}C_b^\infty(\mathscr{P}).$$

由 (2.1) 知, 对于柱函数 $F(\mu)=f(\mu(h_1),\dots,\mu(h_n))$ 和 $G(\mu)=g(\mu(h_1),\dots,\mu(h_n))$, $f,g\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, $h_i\in C_b(E)$, 有

$$\langle\tilde{D}^EF(\mu),\tilde{D}^EG(\mu)\rangle_{L^2(\mu)}=\sum_{i,j=1}^n\{(\partial_if)\partial_jg\}(\mu(h_1),\dots,\mu(h_n))\mathrm{Cov}_\mu(h_i,h_j),$$

其中 $\mathrm{Cov}_\mu(h_i,h_j):=\mu(h_ih_j)-\mu(h_i)\mu(h_j)$ 是 h_i 和 h_j 在概率 μ 下的协方差.

命题 4.1 [12]　二次型 $(\mathscr{E}_{\mathbb{D}_\theta},\mathscr{F}C_b^\infty(\mathscr{P}))$ 在 $L^2(\mathbb{D}_\theta)$ 中可闭, 其闭包为对称的拟正则 Dirichlet 型, 生成元 $(L_{\mathbb{D}_\theta},\mathscr{D}(L_{\mathbb{D}_\theta}))$ 满足 $\mathscr{F}C_b^\infty(\mathscr{P})\subset\mathscr{D}(L_{\mathbb{D}_\theta})$, 且对于柱函数 $F(\mu)=f(\mu(h_1),\dots,\mu(h_n))$, 有

$$\begin{aligned}L_{\mathbb{D}_\theta}F(\mu)=&\sum_{i,j=1}^n(\partial_i\partial_jf)(\mu(h_1),\dots,\mu(h_n))\mathrm{Cov}_\mu(h_i,h_j)\\&+\sum_{i=1}^n(\partial_if)(\mu(h_1),\dots,\mu(h_n))(\theta(h_i)-\mu(h_i)\theta(E)).\end{aligned}$$

下面考虑该 Dirichlet 型的泛函不等式. 对于概率空间 $(E,\mathscr{B},\mu)$ 和 $L^2(\mu)$ 上对称 Dirichlet 型 $(\mathscr{E},\mathscr{D}(\mathscr{E}))$ 使得 $1\in\mathscr{D}(\mathscr{E})$, 如果存在 (速率) 函数 $\beta:(0,\infty)\to(0,\infty)$, 使得

$$\mu(f^2)\leqslant r\mathscr{E}(f,f)+\beta(r)\mu(|f|)^2,\quad f\in\mathscr{D}(\mathscr{E}),\quad r>0,\tag{4.2}$$

则称该 Dirichlet 型满足超 Poincaré 不等式, 超 Poincaré 不等式成立当且仅当相应的 Markov 半群 P_t 在 $L^2(\mu)$ 上具有一致可积性:

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{\mu(f^2)\leqslant 1}\mu((P_tf)^2 1_{\{|P_tf|\geqslant R\}})=0,\quad t>0.$$

如果相应的 Markov 半群 P_t 关于 μ 具有 (渐近) 密度, 则还等价于 $(P_t)_{t>0}$ 为 $L^2(\mu)$ 上紧算子, 生成元的谱是纯离散的 (本征谱集为空集). 还可以使用 $\beta(r)$ (当 $r\to 0$ 时) 的渐近行为来估计生成元谱的离散程度和半群的一致可积程度. 特别地, 当 $(\mathscr{E},\mathscr{D}(\mathscr{E}))$ 不可约 (即 $\mathscr{E}(f,f)=0$ 当且仅当 f 为常数) 且 $\log\beta(r)=\mathrm{O}(r^{-1})$ 时, (4.2) 等价于对数 Sobolev 不等式

$$\mu(f^2\log f^2)\leqslant C\mathscr{E}(f,f),\quad f\in\mathscr{D}(\mathscr{E}),\quad \mu(f^2)=1\tag{4.3}$$

对于某个常数 C 成立. 根据 Gross 定理 [19], 后者等价于 P_t 的超压缩性: 存在 $t>0$ 使得 $\|P_t\|_{2\to4}:=\sup_{\mu(f^2)\leqslant1}\|P_tf\|_{L^4(\mu)}=1$. 如果 $\lim_{r\to0}r\log\beta(r)=0$, 则 (4.2) 强于 (4.3). 例如, 对于 $\beta(r):=cr^{-p}$, 其中 $c,p>0$ 为常数, (4.2) 等价于维数为 p 的 Nash 不等式, 此时半群具有有界的密度: 存在常数 $c>0$, 使得

$$\|P_t\|_{1\to\infty}:=\sup_{\mu(|f|)\leqslant1}\|P_tf\|_\infty\leqslant 1+ct^{-p/2},\quad t>0.$$

关于这些结果的证明和关于泛函不等式的更多结果, 可以参见文献 [6,20],

在下面的定理中, 考虑 $\mathscr{E}_{\mathbb{D}_\theta}$ 的谱空隙、对数 Sobolev 不等式和 Nash 不等式. 其中第一个结果属于文献 [21], 第二个属于文献 [22], 最后一个来自文献 [18].

定理 4.1 [18,21,22] 令 $(\mathscr{E},\mathscr{D}(\mathscr{E}),\mu)=(\mathscr{E}_{\mathbb{D}_\theta},\mathscr{D}(\mathscr{E}_{\mathbb{D}_\theta}),\mathbb{D}_\theta)$, 则以下命题成立:

(1) $\mathrm{gap}(\mathscr{E})=\theta(E)$.

(2) 对数 Sobolev 不等式 (4.3) 成立当且仅当 θ 的支撑 $\mathrm{supp}\theta$ 是有限集, 此时在 (4.3) 中可取

$$C:=\frac{320}{\min\{\theta(\{x\}):x\in\mathrm{supp}\theta\}}.$$

(3) 存在 $\beta:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 使得 (4.2) 成立当且仅当 $\mathrm{supp}\theta$ 有限. 此时, 令 $p:=\sum_{x\in\mathrm{supp}\theta}1\vee\{2\theta(\{x\})\}$, 则存在常数 $c>0$ 使得 (4.2) 对于 $\beta(r):=cr^{-p}$ 成立.

对于谱空隙的下界估计, 只需要对于柱函数 $F(\mu):=f(\mu(A_1),\dots,\mu(A_n))$, 其中 $n\geqslant1$, $\{A_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 为 E 的可测划分, $f\in C_b^2(\mathbb{R}^n)$, 证明 Poincaré 不等式

$$\mathrm{Var}_{\mathbb{D}_\theta}(F)\leqslant\frac{1}{\theta(E)}\mathscr{E}_{\mathbb{D}_\theta}(F,F).$$

这样的柱函数所组成的集合在 Dirichlet 型定义域 $\mathscr{D}(\mathscr{E}_{\mathbb{D}_\theta})$ 中是稠密的, 由此知 $\mathrm{gap}(\mathscr{E}_{\mathbb{D}_\theta})\geqslant\theta(E)$. 由于限制到这样的划分上, Fleming-Viot 过程转化为简单的有限维扩散过程, 该 Poincaré 不等式易于验证.

另一方面, 对于 E 上非平凡的有界可测函数 h, 令 $F(\mu)=\mu(h)-\frac{\theta(h)}{\theta(E)}$, $\mu\in\mathscr{P}$, 则由命题 4.1 中 $L_{\mathbb{D}_\theta}$ 的表达式知,

$$L_{\mathbb{D}_\theta}F(\mu)=-\theta F(\mu),\quad \mu\in\mathscr{P}.$$

因而 $\mathrm{gap}(\mathscr{E}_{\mathbb{D}_\theta}) \leqslant \theta(E)$. 故定理 4.1(1) 得证.

然而, 定理 4.1 中另外两个结论的证明比较复杂, 有兴趣的读者可参见文献 [18,22].

问题 4.1 一般地, 定理 4.1(2) 和 4.1(3) 中的最优常数 C 和 p 都是未知的. 如果不能给出精确值, 是否可以刻画当 θ 的支撑趋于无穷时, 它们收敛到无穷的速度?

4.2 Poisson 空间上的扩散过程

设 $(M,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为完备 Riemann 流形, $\sigma(dx)=\mathrm{e}^{V(x)}dx$, dx 为 M 上体积测度, $V\in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(M)$, 则

$$\mathscr{E}_\sigma(f,g):=\sigma(\langle\nabla f,\nabla g\rangle_M),\quad f,g\in C_0^\infty(M)$$

在 $L^2(\sigma)$ 中可闭, 其闭包 $(\mathscr{E}_\sigma,\mathscr{D}(\mathscr{E}_\sigma))$ 是对称的正则 Dirichlet 型. 在组态空间 $\Gamma(M)$ 的柱函数类

$$\mathscr{F}C_b^\infty(\Gamma(M)):=\{F(\gamma)=f(\gamma(h_1),\ldots,\gamma(h_n)):n\geqslant 1,f\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n),h_i\in C_0^\infty(M)\}$$

上, 定义二次型

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{\pi_\sigma}(F,G)&:=\int_{\Gamma(M)}\langle D^I f(\gamma),D^I g(\gamma)\rangle_{L^2(\gamma)}\pi_\sigma(d\gamma)\\&=\int_{\Gamma(M)}\sum_{i=1}^n\{(\partial_i f)(\partial_j g)\}(\gamma(h_1),\ldots,\gamma(h_n))\gamma(\langle\nabla h_i,\nabla h_j\rangle_M)\pi_\sigma(d\gamma),\end{aligned}$$

其中 $F(\gamma):=f(\gamma(h_1),\ldots,\gamma(h_n)),G(\gamma):=g(\gamma(h_1),\ldots,\gamma(h_n))$, 则 $(\mathscr{E}_{\pi_\sigma},\mathscr{F}C_b^\infty(\Gamma(M)))$ 在 $L^2(\pi_\sigma)$ 中可闭, 其闭包 $(\mathscr{E}_{\pi_\sigma},\mathscr{D}(\mathscr{E}_{\pi_\sigma}))$ 是 $L^2(\pi_\sigma)$ 上的对称 Dirichlet 型.

定理 4.2 [23] 如下公式成立: $\mathrm{gap}(\mathscr{E}_{\pi_\sigma})=\lambda(\sigma):=\inf\{\sigma(|\nabla h|^2):h\in C_0^\infty(M),\sigma(h^2)=1\}$.

该结果在文献 [24] 中被推广到弱 Poincaré 不等式情形.

为研究 Gamma 分布和 Dirichlet 分布所对应的 Dirichlet 型的谱空隙, 考虑流形

$$M:=\hat{E}=(0,\infty)\times E,$$

其中 E 为完备 Riemann 流形, 对于常数 $\lambda>0$, 考虑 $\hat{E}$ 上的 Riemann 度量

$$\langle a_1\partial_s+v_1,a_2\partial_s+v_2\rangle_{\hat{E}}:=(\lambda s)^{-1}a_1a_2+s\langle v_1,v_2\rangle_E,\quad a_1,a_2\in\mathbb{R},\quad v_1,v_2\in TE. \tag{4.4}$$

令 $\hat{\theta}(ds,dx)=s^{-1}\mathrm{e}^{-s}ds\theta(dx)$, 其中 $\theta(dx)=\mathrm{e}^{V(x)}\mathrm{vol}_E(dx)$ 为 E 上有限测度, $V\in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(E)$, vol_E 为 E 上的体积测度. 由定理 4.2, 文献 [16] 证明了如下结果.

定理 4.3 [16] 设 E 为完备 Riemann 流形, $\theta(dx)=\mathrm{e}^{V(x)}\mathrm{vol}_E(dx)$ 为有限测度, $V\in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(E)$. 对于完备 Riemann 流形 $(\hat{E},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\hat{E}})$ 和强度 $\hat{\theta}(ds,dx):=s^{-1}\mathrm{e}^{-s}ds\theta(dx)$, 有 $\mathrm{gap}(\mathscr{E}_{\pi_{\hat{\theta}}})=\lambda\theta(E)$.

4.3 $\mathbb{M}$ 上的扩散过程

假设 E 为完备 Riemann 流形, 令 $\mathscr{F}C_b^\infty(\mathbb{M})$ 为 $\mathbb{M}$ 上光滑柱函数全体. 对于 $\lambda>0$, 考虑二次型

$$\mathscr{E}^\lambda_{\mathbb{G}_\theta}(F,G)=\int_{\mathbb{M}}\{\langle D^LF(\eta),D^LG(\eta)\rangle_{L^2(\eta)}+\lambda\langle D^EF(\eta),D^EG(\eta)\rangle_{L^2(\eta)}\}\mathbb{G}_\theta(d\eta),\quad F,G\in\mathscr{F}C_b^\infty(\mathbb{M}).$$

我们计算相应 Dirichlet 型的谱空隙. 一般地, 可以对该 Dirichlet 型乘以常数使之成为双参数模型

$$\mathscr{E}^{\lambda_1,\lambda_2}_{\mathbb{G}_\theta}(F,G)=\int_{\mathscr{P}}\{\lambda_1\langle D^LF(\eta),D^LG(\eta)\rangle_{L^2(\eta)}+\lambda_2\langle D^EF(\eta),D^EG(\eta)\rangle_{L^2(\eta)}\}\mathbb{G}_\theta(d\eta).$$

为简单记, 我们仅考虑 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = \lambda$ 情形. 可以证明

$$\mathscr{E}^{\lambda}_{\mathbb{G}_\theta}(F,G) = \mathscr{E}_{\pi_{\hat\theta}}(F\circ\Phi, G\circ\Phi), \quad F,G \in \mathscr{D}(\mathscr{E}_{\mathbb{G}_\theta}).$$

由此结合定理 4.3, 可证明如下结果.

定理 4.4 [16] 设 E 为完备 Riemann 流形, $V \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(E)$ 使得 $\theta(dx) = \mathrm{e}^{V(x)}\mathrm{vol}_E(dx)$ 为有限测度, 则二次型 $(\mathscr{E}_{\mathbb{G}_\theta}, \mathscr{F}C_b^\infty(\mathbb{M}))$ 在 $L^2(\mathbb{G}_\theta)$ 中可闭, 其闭包 $(\mathscr{E}_{\mathbb{G}_\theta}, \mathscr{D}(\mathscr{E}_{\mathbb{G}_\theta}))$ 为拟正则的对称 Dirichlet 型, 且 $\mathrm{gap}(\mathscr{E}_{\mathbb{G}_\theta}) = \lambda\theta(E)$.

文献 [17] 还研究了加权 Gamma 分布和外在导数所确定的 Dirichlet 型的 Poincaré 不等式和弱 Poincaré 不等式.

4.4 $\mathscr{P}$ 上的扩散过程

设 E 为完备 Riemann 流形, $\theta(dx) = \mathrm{e}^{V(x)}\mathrm{vol}_E(dx)$ 为有限测度, $V \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(E)$. 考虑二次型

$$\mathscr{E}^{\lambda}_{\mathbb{D}_\theta}(F,G) := \int_{\mathscr{P}} \{\langle D^L F(\mu), D^L G(\mu)\rangle_{L^2(\mu)} + \lambda\langle \tilde{D}^E F(\mu), \tilde{D}^E G(\mu)\rangle_{L^2(\mu)}\}\mathbb{G}_\theta(d\mu), \quad F,G \in \mathscr{F}C_b^\infty(\mathscr{P}).$$

由于 $\mathscr{E}^{\lambda}_{\mathbb{D}_\theta}$ 不能表示成 $\mathscr{E}_{\mathbb{G}_\theta}$ 在映射 $\Psi(\eta) = \bar\eta := \frac{\eta}{\eta(E)}$ 下的像, 因此其谱空隙的计算是非平凡的. 文献 [16] 证明了如下结果, 其中下界估计由定理 4.1(1) 和 $\mathscr{E}^{\lambda}_{\mathbb{D}_\theta}(F,F) \geqslant \lambda\mathscr{E}_{\mathbb{D}_\theta}(F,F)$ 得到, 而上界估计可以通过取试验函数 $f(\mu) := \mu(h), h \in C_0^\infty(E)$ 获得.

定理 4.5 [16] 设 E 为完备 Riemann 流形, $V \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(E)$ 使得 $\theta(dx) = \mathrm{e}^{V(x)}\mathrm{vol}_E(dx)$ 为有限测度, 则二次型 $(\mathscr{E}^{\lambda}_{\mathbb{D}_\theta}, \mathscr{F}C_b^\infty(\mathscr{P}))$ 在 $L^2(\mathbb{D}_\theta)$ 上可闭, 闭包为拟正则 Dirichlet 型, 且谱空隙满足如下的双边估计:

$$\lambda\theta(E) \leqslant \mathrm{gap}(\mathscr{E}^{\lambda}_{\mathbb{D}_\theta}) \leqslant \lambda\theta(E) + \lambda_\theta(\theta(E)+1),$$

其中 $\lambda_\theta := \inf\{\theta(|\nabla h|^2) : h \in C_b^1(E), \theta(h) = 0, \theta(h^2) = 1\}$. 特别地, 当 $\lambda_\theta = 0$ 时, $\mathrm{gap}(\mathscr{E}^{\lambda}_{\mathbb{D}_\theta}) = \lambda\theta(M)$.

问题 4.2 一般地, $\mathrm{gap}(\mathscr{E}^{\lambda}_{\mathbb{D}_\theta})$ 的精确值尚待求证, 我们猜测它就是上界估计 $\lambda\theta(E) + \lambda_\theta(\theta(E)+1)$.

5 Wasserstein 空间上的扩散过程与偏微分方程

令 $E = \mathbb{R}^d$, 考虑 Wasserstein 空间

$$\mathscr{P}_2 := \{\mu \in \mathscr{P} : \|\mu\|_2 := \mu(|\cdot|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty\},$$

这个空间在 Wasserstein 距离 $\mathbb{W}_2$ 之下是 Polish 空间, 其中

$$\mathbb{W}_2(\mu_1,\mu_2) := \inf_{\pi\in\mathscr{C}(\mu_1,\mu_2)} \left(\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |x-y|^2\pi(dx,dy)\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mu_1,\mu_2 \in \mathscr{P}_2.$$

我们将引入新型随机微分方程, 通过解该方程来构造 Wasserstein 空间上由二阶内蕴或 L 导数的椭圆微分算子所生成的扩散过程. 因为不涉及外在导数, 我们在本节和下一节简记 $D^L = D$. 定义 2.4 已经给出了函数类 $C_b^1(\mathscr{P}_2) := C_b^{L,1}(\mathscr{P}_2)$, 下面定义二阶可导的函数类 $C_b^2(\mathscr{P}_2)$ 和 $C_b^{2,2}(\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2)$.

定义 5.1 (1) 如果 $f \in C_b^1(\mathscr{P}_2)$ 使得 $Df(\mu)(x)$ 关于 x 可导, 关于 $\mu\mathscr{L}$ 可导, 且导函数

$$D^2 f(\mu)(x,y) := D\{Df(\cdot)(x)\}(\mu)(y), \quad \nabla\{Df(\mu)\}(x)$$

具有关于变量 $(x,y,\mu)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2$ 连续有界的版本, 则记 $f\in C_b^2(\mathscr{P}_2)$.

(2) 如果 $\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2$ 上的实函数 f 使得

$$\nabla f(\cdot,\mu)(x),\quad \nabla^2 f(\cdot,\mu)(x),\quad (D\nabla f)(x,\mu)(y),\quad D^2f(\mu)(x,y),\quad Df(\mu)(x),\quad \nabla\{Df(\mu)\}(x)$$

存在且具有关于变量 $(x,y,\mu)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2$ 有界连续的版本, 则记 $f\in C_b^{2,2}(\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2)$.

令 $m\in\mathbb{N}$, 假设可测映射

$$b:[0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2\to\mathbb{R}^d,\quad \sigma:[0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2\to\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^m$$

满足条件

$$\int_{\mathbb{R}^d}\{|b(t,\cdot,\mu)|+\|\sigma(t,\cdot,\mu)\|_{HS}^2\}d\mu<\infty,\quad (t,\mu)\in[0,\infty)\times\mathscr{P}_2,$$

其中 $\|\cdot\|_{HS}$ 为矩阵的 Hilbert-Schmidt 范数. 对于 $t\geqslant 0$, 考虑微分算子

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_tf(\mu):=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\langle\sigma(t,y,\mu)\sigma(t,z,\mu)^*,D^2f(\mu)(y,z)\rangle\mu(dy)\mu(dz)\\&+\int_{\mathbb{R}^d}\bigg(\frac{1}{2}\langle(\sigma\sigma^*)(t,y,\mu),\nabla\{Df(\mu)\}(y)\rangle+\langle b(t,y,\mu),Df(\mu)(y)\rangle\bigg)\mu(dy),\quad f\in C_b^2(\mathscr{P}_2),\end{aligned}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $\mathbb{R}^d$ 或 $\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d$ 上的 (Hilbert-Schmidt) 内积. 我们也考虑该算子在乘积空间 $\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2$ 上的延拓

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{L}}_tf(x,\mu):=&\mathbf{L}_tf(x,\cdot)(\mu)+\frac{1}{2}\langle\sigma(t,x,\mu)\sigma(t,x,\mu)^*,\nabla^2f(x,\mu)\rangle+\langle b(t,x,\mu),\nabla f(x,\mu)\rangle\\&+\int_{\mathbb{R}^d}\langle(D\nabla f)(x,\mu)(y),\sigma(t,y,\mu)\sigma(t,x,\mu)^*\rangle\mu(dy),\quad f\in C_b^{2,2}(\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2).\end{aligned}$$

我们拟研究由这两个算子生成的扩散过程, 并用来解 $\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2$ 上的 Schrödinger 型偏微分方程. 为此, 我们先使用像依赖的随机微分方程来构造扩散过程, 建立 Feynman-Kac 公式, 并研究过程的遍历性.

5.1 像依赖的随机微分方程与测度值扩散过程

假设映射

$$b:\Omega\times[0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2\to\mathbb{R}^d,\quad \sigma:\Omega\times[0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2\to\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^m$$

关于 σ 代数流 $\mathscr{F}_t$ 循序可测, 即任给 $t\geqslant 0$, 限于时刻 t 之前它们关于 $\mathscr{F}_t\times\mathscr{B}([0,t])\times\mathscr{B}(\mathscr{P}_2)\times\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ 可测, 其中 $\mathscr{B}(\cdot)$ 为相应拓扑空间上的 Borel σ 代数. 考虑像依赖的随机微分方程

$$dX_{s,t}^{x,\mu}=b(t,X_{s,t}^{x,\mu},\Lambda_{s,t}^\mu)dt+\sigma(t,X_{s,t}^{x,\mu},\Lambda_{s,t}^\mu)dW_t,\quad \Lambda_{s,t}^\mu:=\mu\circ(X_{s,t}^{\cdot,\mu})^{-1},\quad t\geqslant s,\quad X_{s,s}^{x,\mu}=x,\tag{5.1}$$

其中 W_t 为完备滤波概率空间 $(\Omega,\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0},\mathrm{P})$ 上的 m 维 Brown 运动, $(s,x,\mu)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2$. 先给出该方程解的定义.

定义 5.2 设 $(s,\mu)\in[0,\infty)\times\mathscr{P}_2$. 如果一族适应过程 $\{(X_{s,t}^{x,\mu})_{t\geqslant s}:x\in\mathbb{R}^d\}$ P-a.s. 满足如下条件, 我们就称其为方程 (5.1) 的一个解:

(1) $X_{s,t}^{x,\mu}$ 关于 $t\in[s,\infty)$ 连续, 关于 $x\in\mathbb{R}^d$ 可测;

(2) $\Lambda_{s,t}^\mu:=\mu\circ(X_{s,t}^{\cdot,\mu})^{-1}\in\mathscr{P}_2$ 关于 $t\geqslant s$ 连续;

(3) $\mathrm{E}\int_s^t(|b(r,X_{s,r}^{x,\mu},\Lambda_{s,r}^\mu)|+\|\sigma(r,X_{s,r}^{x,\mu},\Lambda_{s,r}^\mu)\|_{HS}^2)dr<\infty$ 且

$$X_{s,t}^{x,\mu}=x+\int_s^t b(r,X_{s,r}^{x,\mu},\Lambda_{s,r}^\mu)dr+\int_s^t\sigma(r,X_{s,r}^{x,\mu},\Lambda_{s,r}^\mu)dW_r,\quad t\geqslant s,\quad x\in\mathbb{R}^d.$$

如果对于任意的 $(s,\mu)\in[0,\infty)\times\mathscr{P}_2$, 方程 (5.1) 具有唯一的解, 则称该方程是适定的.

为保证 (5.1) 的适定性, 我们对系数 b 和 σ 作如下假设.

(A) $b(t,x,\mu)$ 和 $\sigma(t,x,\mu)$ 关于 $(x,\mu)\in\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2$ 连续, 存在 $q>1$ 和 $K\in L_{\mathrm{loc}}^q([0,\infty)\to[0,\infty))$ 使得 P-a.s. 对于所有的 $t\geqslant0$, 有

$$|b(t,x,\mu)|^2+\|\sigma(t,x,\mu)\|_{HS}^2\leqslant K(t)(1+|x|^2+\|\mu\|_2^2),\quad(x,\mu)\in\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2,\tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}&2\langle b(t,x,\mu)-b(t,y,\nu),x-y\rangle^++\|\sigma(t,x,\mu)-\sigma(t,y,\nu)\|_{HS}^2\\&\quad\leqslant K(t)(|x-y|^2+\mathbb{W}_2(\mu,\nu)^2),\quad(x,\mu),(y,\nu)\in\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2.\end{aligned}\tag{5.3}$$

定理 5.1 [25] 在假设 (A) 之下, (5.1) 是适定的, 且 $X_{s,t}^{x,\mu}$ 关于 $(t,x)\in[s,\infty)\times\mathbb{R}^d$ 连续. 此外,

(1) 任给 $p\geqslant1$, 存在增函数 $C_p:[0,\infty)\to[0,\infty)$, 使得对所有的 $0\leqslant s\leqslant t$, $x,y\in\mathbb{R}^d$ 和 $\mu,\nu\in\mathscr{P}_2$, 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\sup_{r\in[s,t]}\{|X_{s,r}^{x,\mu}|^{2p}+\mu(|X_{s,r}^{\cdot,\mu}|^2)^p\}\leqslant C_p(t)(1+|x|^{2p}+\|\mu\|_2^{2p}),\\&\sup_{r\in[s,t]}\mathrm{E}\{|X_{s,r}^{x,\mu}-X_{s,r}^{y,\nu}|^{2p}+\mathbb{W}_2(\Lambda_{s,r}^\mu,\Lambda_{s,r}^\nu)^{2p}\}\leqslant C_p(t)(|x-y|^{2p}+\mathbb{W}_2(\mu,\nu)^{2p}).\end{aligned}$$

(2) 当系数 (b,σ) 非随机时, $\{(\Lambda_{s,t}^\mu)_{t\geqslant s}:\mu\in\mathscr{P}_2\}$ 为算子 $\mathbf{L}_t$ 生成的 $\mathscr{P}_2$ 上的扩散过程, 即它是 $\mathscr{P}_2$ 上轨道连续的强 Markov 过程, 使得对于所有的 $\mu\in\mathscr{P}_2$ 和 $f\in C_b^2(\mathscr{P}_2)$,

$$f(\Lambda_{s,t}^\mu)-f(\mu)-\int_s^t\mathbf{L}_rf(\Lambda_{s,r}^\mu)dr,\quad t\geqslant s$$

是一个鞅.

(3) 当系数 (b,σ) 非随机时, $\{(X_{s,t}^{x,\mu},\Lambda_{s,t}^\mu)_{t\geqslant s}:\mu\in\mathscr{P}_2\}$ 为算子 $\tilde{\mathbf{L}}_t$ 生成的 $\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2$ 上的扩散过程, 即它是 $\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2$ 上轨道连续的强 Markov 过程, 使得对于所有的 $(x,\mu)\in\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2$ 和 $f\in C_b^{2,2}(\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2)$, 有

$$f(X_{s,t}^{x,\mu},\Lambda_{s,t}^\mu)-f(x,\mu)-\int_s^t\tilde{\mathbf{L}}_rf(X_{s,t}^{x,\mu},\Lambda_{s,r})dr,\quad t\geqslant s$$

是一个鞅.

解的存在性证明基于标准的迭代逼近方法. 只需要对于一个不依赖于初值 (s,x,μ) 的时间 $T>0$, 证明方程在时间段 $[s,s+T]$ 有解. 可以分以下 4 步完成.

(1) 对于给定的 $(s,\mu)\in[0,T]\times\mathscr{P}_2$, 令

$$\Lambda_{s,t}^{0,\mu}=\mu,\quad X_{s,t}^{0,x,\mu}=x,\quad x\in\mathbb{R}^d,\quad t\geqslant s.$$

(2) 假设对于 $n\in\mathbb{Z}_+$ 构造连续适应过程 $(X_{s,t}^{n,x,\mu})_{t\geqslant s,x\in\mathbb{R}^d}$, 关于 $(t,x)\in[s,\infty)\times\mathscr{P}_2$ 连续且对于某个增函数 $c:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 满足

$$\mathrm{E}\Big[\sup_{r\in[s,t]}|X_{s,r}^{n,x,\mu}|^2\Big]\leqslant c(t)(1+|x|^2+\|\mu\|_2^2),\quad t\geqslant s,\quad x\in\mathbb{R}^d,\tag{5.4}$$

则 $\Lambda^{n,\mu}_{s,t} := \mu\circ(X^{n,\cdot,\mu}_{s,t})^{-1}\in\mathscr{P}_2$ 关于 $t\geqslant s$ 连续.

(3) 令 $(X^{n+1,x,\mu}_{s,t})_{t\geqslant s}$ 为如下经典随机微分方程的解:

$$dX^{n+1,x,\mu}_{s,t} = b(t, X^{n+1,x,\mu}_{s,t}, \Lambda^{n,\mu}_{s,t})dt + \sigma(t, X^{n+1,x,\mu}_{s,t}, \Lambda^{n,\mu}_{s,t})dW_t, \quad t\geqslant s, \quad X^{n+1,x,\mu}_{s,s} = x.$$

由 (A) 和 (5.4) 知该方程是适定的, 且将 $X^{n,x,\mu}_{s,t}$ 替换为 $X^{n+1,x,\mu}_{s,t}$ 时, 不等式 (5.4) 对于某增函数 $c:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 成立. 此外, $X^{n+1,x,\mu}_{s,t}$ 关于 $(t,x)\in[s,\infty)\times\mathbb{R}^d$ 连续, $\Lambda^{n+1,\mu}_{s,t} := \mu\circ(X^{n+1,\cdot,\mu}_{s,t})^{-1}\in\mathscr{P}_2$ 关于 $t\geqslant s$ 连续.

(4) 最后证明存在与初值无关的 $T>0$, 使得连续适应过程序列 $\{(X^{n,x,\mu}_{s,t}, \Lambda^{n,\mu}_{s,t})_{t\in[s,s+T],x\in\mathbb{R}^d}\}_{n\geqslant 0}$ 在完备度量空间 $L^2(\Omega\to C([s,s+T]\to\mathbb{R}^d);\mathrm{P})$ 上为 Cauchy 列, 从而当 $n\to\infty$ 时有极限. 容易验证该极限就是方程 (5.1) 在时间段 $[s,s+T]$ 上的一个解.

而唯一性可以直接对 $X^{x,\mu}_{s,t}$ 使用 Itô 公式得到. 关于扩散过程生成算子的计算, 则基于下面的关于测度值过程 $\Lambda^{\mu}_{s,t}$ 的 Itô 公式.

引理 5.1 [25]　假设 (A) 成立, 令 $\Lambda^{\mu}_{s,t} := \mu\circ(X^{\cdot,\mu}_{s,t})^{-1}$, $t\geqslant s$, 其中 $(X^{x,\mu}_{s,t}: x\in\mathbb{R}^d)_{t\geqslant s}$ 为 (5.1) 的解, 则对于任意的 $f\in C^2_b(\mathscr{P}_2)$, 有

$$df(\Lambda^{\mu}_{s,t}) = (\mathbf{L}_t f)(\Lambda^{\mu}_{s,t})dt + \left\langle \int_{\mathbb{R}^d} \{\sigma(t,x,\Lambda^{\mu}_{s,t})^*(Df)(\Lambda^{\mu}_{s,t})(x)\}\mu(dx), dW_t\right\rangle, \quad t\geqslant s.$$

该公式的证明基于标准的 Taylor 展开. 对于 $t\geqslant s$ 和小常数 $\varepsilon>0$, 考虑

$$\xi_r = (1-r)X^{\cdot,\mu}_{s,t} + rX^{\cdot,\mu}_{s,t+\varepsilon}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d, \quad r\in[0,1],$$

则在概率空间 $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$ 上, $\mu\circ\xi_r^{-1}$ 为随机变量 ξ_r 的分布, 且 $\xi'_r := \frac{d}{dr}\xi_r = X^{\cdot,\mu}_{s,t+\varepsilon} - X^{\cdot,\mu}_{s,t}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d;\mu)$ 中存在. 由 L 导数的链式法则 [15], 有

$$\frac{d}{dr}f(\mu\circ\xi_r^{-1}) = \int_{\mathbb{R}^d}\langle Df(\mu\circ\xi_r^{-1}), \xi'_r\rangle d\mu = \int_{\mathbb{R}^d}\langle Df(\mu\circ\xi_r^{-1}), X^{\cdot,\mu}_{s,t+\varepsilon} - X^{\cdot,\mu}_{s,t}\rangle d\mu,$$

从而,

$$\begin{aligned} f(\Lambda^{\mu}_{s,t+\varepsilon}) - f(\Lambda^{\mu}_{s,t}) &= f(\mu\circ\xi_1^{-1}) - f(\mu\circ\xi_0^{-1}) \\ &= \int_0^1\left(\frac{d}{dr}f(\mu\circ\xi_r^{-1})\right)dr \\ &= \int_{\mathbb{R}^d\times[0,1]}\langle Df(\mu\circ\xi_r^{-1})(\xi_r^x), X^{x,\mu}_{s,t+\varepsilon} - X^{x,\mu}_{s,t}\rangle\mu(dx)dr \\ &= \int_t^{t+\varepsilon}(\mathbf{L}_u f)(\Lambda^{\mu}_{s,u})du + \int_t^{t+\varepsilon}\left\langle\int_{\mathbb{R}^d}\{\sigma(u,x,\Lambda^{\mu}_{s,u})^*(Df)(\Lambda^{\mu}_{s,u})(x)\}\mu(dx), dW_u\right\rangle + \mathrm{o}(\varepsilon), \end{aligned}$$

其中 $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\mathrm{o}(\varepsilon) = 0$. 详细的论证参见文献 [25].

5.2　Feynman-Kac 公式

考虑 $[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2$ 上的如下偏微分方程:

$$\begin{aligned} &\partial_t U(t,x,\mu) + \tilde{\mathbf{L}}_t U(t,x,\cdot)(\mu) + (VU)(t,x,\mu) + F(t,x,\mu) = 0, \\ &U(T,x,\mu) = \Phi(x,\mu), \quad (t,x,\mu)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2, \end{aligned} \tag{5.5}$$

其中 $T>0$ 为常数, Φ 为 $\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2$ 上函数, 而 V 和 F 为 $[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2$ 上函数. 当 Φ、F 和 V 不依赖于变量 $x\in\mathbb{R}^d$ 时, 该方程简化为

$$\begin{aligned}&\partial_t U(t,\mu)+\mathbf{L}_t U(t,\cdot)(\mu)+(VU)(t,\mu)+F(t,\mu)=0,\\ &U(T,\mu)=\Phi(\mu),\quad (t,\mu)\in[0,T]\times\mathscr{P}_2.\end{aligned}\tag{5.6}$$

为建立 Feynman-Kac 公式来表示上述偏微分方程的解, 先引入函数类 $C_b^{0,2,2}([0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathscr{P}_2)$.

定义 5.3 令 $k\geqslant 1$, f 为空间 $[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathscr{P}_2$ 上的实值, 或向量值, 或矩阵值连续函数. 如果任给 $t\in[0,T]$, $f(t,\cdot,\cdot)\in C_b^{2,2}(\mathbb{R}^k\times\mathscr{P}_2)$ 且导函数 $\nabla f(t,x,\mu)$、$\nabla^2 f(t,x,\mu)$、$Df(t,x,\mu)(y)$、$D\{\nabla f(t,x,\mu)\}(y)$、$\nabla\{Df(t,x,\mu)(\cdot)\}(y)$ 和 $D^2 f(t,x,\mu)(y,z)$ 有界连续, 则记 $f\in C_b^{0,2,2}([0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathscr{P}_2)$. 如果这样的 $f(t,x,\mu)$ 不依赖于变量 x, 则记 $f\in C_b^{0,2}([0,T]\times\mathscr{P}_2)$.

定理 5.2 [25] 设 $b,\sigma\in C_b^{0,2,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2)$ 非随机.

(1) 任给 $\Phi\in C_b^{2,2}(\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2)$, $F\in C_b^{0,2,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2)$, 以及有界的 $V\in C_b^{0,2,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2)$,

$$U(t,x,\mu):=\mathrm{E}\bigg[\Phi(X_{t,T}^{x,\mu},\Lambda_{t,T}^{\mu})\mathrm{e}^{\int_t^T V(r,X_{t,r}^{x,\mu},\Lambda_{t,r}^{\mu})dr}+\int_t^T F(r,X_{t,r}^{x,\mu},\Lambda_{t,r}^{\mu})\mathrm{e}^{\int_t^r V(\theta,X_{t,\theta}^{x,\mu},\Lambda_{t,\theta}^{\mu})d\theta}dr\bigg]$$

是 (5.5) 的属于 $C_b^{0,2,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2)$ 的唯一解.

(2) 任给 $\Phi\in C_b^2(\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2)$, $F\in C_b^{0,2}([0,T]\times\mathscr{P}_2)$, 以及有界的 $V\in C_b^{0,2}([0,T]\times\mathscr{P}_2)$,

$$U(t,\mu):=\mathrm{E}\bigg[\Phi(\Lambda_{t,T}^{\mu})\mathrm{e}^{\int_t^T V(r,\Lambda_{t,r}^{\mu})dr}+\int_t^T F(r,\Lambda_{t,r}^{\mu})\mathrm{e}^{\int_t^r V(\theta,\Lambda_{t,\theta}^{\mu})d\theta}dr\bigg]$$

是方程 (5.6) 属于 $C_b^{0,2}([0,T]\times\mathscr{P}_2)$ 的唯一解.

下面简要介绍证明思路, 详细的证明参见文献 [25]. 仅考虑第一种情形. 首先, 如果 $U\in C_b^{0,2,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2)$ 是方程 (5.5) 的解, 由引理 5.1 中的 Itô 公式, 存在鞅 $(M_t)_{t\in[s,T]}$, 使得

$$\begin{aligned}dU(t,X_{s,t}^{x,\mu},\Lambda_{s,t}^{\mu})&=(\partial_t+\tilde{\mathbf{L}}_t)U(t,X_{s,t}^{x,\mu},\Lambda_{s,t}^{\mu})dt+dM_t\\&=dM_t-(VU+F)(t,X_{s,t}^{x,\mu},\Lambda_{s,t}^{\mu})dt,\quad t\in[s,T].\end{aligned}$$

从而过程

$$\eta_t:=U(t,X_{s,t}^{x,\mu},\Lambda_{s,t}^{\mu})\mathrm{e}^{\int_s^t V(r,X_{s,r}^{x,\mu},\Lambda_{s,r}^{\mu})dr}+\int_s^t F(r,X_{s,r}^{x,\mu},\Lambda_{s,r}^{\mu})\mathrm{e}^{\int_s^r V(\theta,X_{s,\theta}^{x,\mu},\Lambda_{s,\theta}^{\mu})d\theta}dr,\quad t\in[s,T]$$

满足

$$d\eta_t=\mathrm{e}^{\int_s^t V(r,X_{s,r}^{x,\mu},\Lambda_{s,r}^{\mu})dr}dM_t,\quad t\in[s,T].$$

由此得到 $U(s,x,\mu)=\mathrm{E}\eta_s=\mathrm{E}\eta_T$, 这就是 (1) 中所给出的 U 的概率表示.

反过来, 在假设条件下可以证明由 (1) 中的概率表示所确定的函数 U 属于 $C_b^{0,2,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2)$. 从而, 由 Itô 公式, 有

$$\mathrm{E}[U(t+\varepsilon,X_{t,t+\varepsilon}^{x,\mu},\Lambda_{t,t+\varepsilon}^{\mu})]=U(t+\varepsilon,x,\mu)+\mathrm{E}\int_t^{t+\varepsilon}\tilde{\mathbf{L}}_r U(r,X_{t,r}^{x,\mu},\Lambda_{t,r}^{\mu})dr,\quad t<T,\quad \varepsilon\in[0,T-t].$$

而由解的轨道唯一性知,

$$(X_{t+\varepsilon,T}^{X_{t,t+\varepsilon}^{x,\mu},\Lambda_{t,t+\varepsilon}^{\mu}},\Lambda_{t+\varepsilon,T}^{\Lambda_{t,t+\varepsilon}^{\mu}})=(X_{t,T}^{x,\mu},\Lambda_{t,T}^{\mu}),\quad t<T,\quad \varepsilon\in[0,T-t].$$

将这两个式子与 U 的概率表示相结合, 得

$$
\begin{aligned}
&U(t,x,\mu)-U(t+\varepsilon,x,\mu)-\mathrm{E}\int_t^{t+\varepsilon}\tilde{\mathbf{L}}_rU(r,X_{t,r}^{x,\mu},\Lambda_{t,r}^{\mu})dr\\
&=U(t,x,\mu)-\mathrm{E}[U(t+\varepsilon,X_{t,t+\varepsilon}^{x,\mu},\Lambda_{t,t+\varepsilon}^{\mu})]\\
&=\mathrm{E}[\Phi(X_{t,T}^{x,\mu},\Lambda_{t,T}^{\mu})(\mathrm{e}^{\int_t^T V(r,X_{t,r}^{x,\mu},\Lambda_{t,r}^{\mu})dr}-\mathrm{e}^{\int_{t+\varepsilon}^T V(r,X_{t,r}^{x,\mu},\Lambda_{t,r}^{\mu})dr})]\\
&\quad+\mathrm{E}\int_t^{t+\varepsilon}F(r,X_{t,r}^{x,\mu},\Lambda_{t,r}^{\mu})\mathrm{e}^{\int_t^r V(\theta,X_{t,\theta}^{x,\mu},\Lambda_{t,\theta}^{\mu})d\theta}dr\\
&\quad+\mathrm{E}\int_{t+\varepsilon}^{T}F(r,X_{t,r}^{x,\mu},\Lambda_{t,r}^{\mu})(\mathrm{e}^{\int_t^r V(\theta,X_{t,\theta}^{x,\mu},\Lambda_{t,\theta}^{\mu})d\theta}-\mathrm{e}^{\int_{t+\varepsilon}^r V(\theta,X_{t,\theta}^{x,\mu},\Lambda_{t,\theta}^{\mu})d\theta})dr.
\end{aligned}
$$

两边除以 ε 并令 $\varepsilon\to 0$, 可证 U 满足方程 (5.5).

5.3 测度值扩散过程的遍历性

本小节考虑时齐情形, 即系数不依赖于时间. 我们作如下假设.

(B) (σ,b) 不依赖于时间, 存在常数 $\lambda\in\mathbb{R}$ 和 $\kappa,\delta\geqslant 0$, 使得对所有的 $x,y\in\mathbb{R}^d$, $\mu,\nu\in\mathscr{P}_2$, 有

$$
\begin{aligned}
&2\langle b(x,\mu)-b(y,\nu),x-y\rangle+\|\sigma(x,\mu)-\sigma(y,\nu)\|_{HS}^2\leqslant\kappa\mathbb{W}_2(\mu,\nu)^2-\lambda|x-y|^2,\\
&|b(x,\mu)|^2+\|\sigma(x,\mu)\|_{HS}^2\leqslant\delta(1+|x|^2+\|\mu\|_2^2),\quad \|\sigma(x,\mu)-\sigma(y,\nu)\|_{HS}^2\leqslant\delta(|x-y|^2+\mathbb{W}_2(\mu,\nu)^2).
\end{aligned}
$$

令 $\mathbb{W}_2^{\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2}$ 为 $\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2$ 上的距离

$$
\tilde{\rho}((x,\mu),(y,\nu)):=\sqrt{|x-y|^2+\mathbb{W}_2(\mu,\nu)^2}
$$

所诱导的 L^2 Wasserstein 距离, 而 $\mathbb{W}_2^{\mathscr{P}_2}$ 则是 Polish 空间 $(\mathscr{P}_2,\mathbb{W}_2)$ 上的 L^2 Wasserstein 距离. 以 P_t 记 $\mathbf{L}$ 扩散过程的半群, $\tilde{P}_t$ 为 $\tilde{\mathbf{L}}$ 扩散过程的半群. 在该假设下, 使用 Itô 公式和 Wasserstein 距离的定义容易证明如下结果.

定理 5.3 [25] 在假设 (B) 之下, 任给 $(x,\mu)\in\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2$, 有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\mathbb{W}_2(\Lambda_t^{\mu},\Lambda_t^{\nu})^2\leqslant\mathbb{W}_2(\mu,\nu)^2\mathrm{e}^{-(\lambda-\kappa)t},\\
&\mathrm{E}|X_t^{x,\mu}-X_t^{y,\nu}|^2\leqslant|x-y|^2\mathrm{e}^{-\lambda t}+\mathbb{W}_2(\mu,\nu)^2\mathrm{e}^{-(\lambda-\kappa)t},\quad t\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

特别地, 当 $\lambda>\kappa$ 时, 如下命题成立:

(1) $\tilde{P}_t$ 具有唯一的不变概率测度 $\tilde{\Pi}$, 且任给初分布 $\tilde{Q}\in\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2)$, 有

$$
\mathbb{W}_2^{\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2}(\tilde{Q}\tilde{P}_t,\tilde{\Pi})^2\leqslant 2\mathrm{e}^{-(\lambda-\kappa)t}\mathbb{W}_2^{\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2}(\tilde{Q},\tilde{\Pi})^2,\quad t\geqslant 0;
$$

(2) $\Pi:=\tilde{\Pi}(\mathbb{R}^d\times\cdot)$ 是 P_t 的唯一不变概率测度, 且任给初分布 $Q\in\mathscr{P}_2(\mathscr{P}_2)$, 有

$$
\mathbb{W}_2^{\mathscr{P}_2}(QP_t,\Pi)^2\leqslant\mathrm{e}^{-(\lambda-\kappa)t}\mathbb{W}_2^{\mathscr{P}_2}(Q,\Pi)^2,\quad t\geqslant 0.
$$

5.4 Wasserstein 空间上的 Brown 运动

Wasserstein 空间 $\mathscr{P}_2$ 具有很好的 Riemann 结构. 在 $\mu\in\mathscr{P}_2$ 处的切空间为 $T_\mu\mathscr{P}_2:=L^2(\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d,\mu)$, 梯度为内蕴 (L) 导数, Riemann 度量为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\mu)}$. 因此, 相应的平方场算子 (square field) 为

$$
\Gamma(f,g)(\mu):=\int_{\mathbb{R}^d}\langle Df(\mu)(x),Dg(\mu)(x)\rangle\mu(dx),\quad f,g\in C_b^2(\mathscr{P}_2).
$$

考虑二阶微分算子

$$\Delta f(\mu) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{tr}\{D^2 f(\mu)(x,x)\}\mu(dx), \quad f \in C_b^2(\mathscr{P}_2).$$

容易验证

$$\Gamma(f,g)(\mu) := \frac{1}{2}\{\Delta(fg) - f\Delta g - g\Delta f\}(\mu), \quad f,g \in C_b^2(\mathscr{P}_2).$$

因而, Δ 是无穷维 Riemann 流形 $\mathscr{P}_2$ 上的 Laplace 算子.

问题 5.1 如何使用 Dirichlet 理论或随机微分方程构造 $\mathscr{P}_2$ 上的 Brown 运动 (由 $\frac{1}{2}\Delta$ 生成的扩散过程)? 文献 [26] 讨论了一维单位圆上概率测度组成空间上的 Brown 运动, 通过选取支撑在奇异分布空间上的参考概率测度, 建立内蕴导数关于该测度积分的分部积分公式, 从而构造了 Dirichlet 型. 然而, 该方法对于空间以及参考测度的限制非常强, 很难进行推广. 主要的困难是选取合理的参考测度建立分部积分公式. 不同于有限维情形, 此时不存在经典意义下的 "体积测度". 而本节所介绍的像随机微分方程也不适用于这个模型. 该问题具有很强的挑战性.

6 分布依赖随机微分方程 L 导数的 Bismut 公式

在现实世界中, 随机系统的演化不仅依赖于微观状态 (粒子所处位置), 也依赖于宏观环境 (系统的分布). 分布依赖 (也叫作 McKean-Vlasov 或平均场) 随机微分方程就是描述这样随机系统的数学模型, 它的分布满足非线性的偏微分方程, 因此具有重要的应用背景和很高的学术价值, 是目前随机分析领域的一个研究热点.

随机分析对于偏微分方程的一个重要应用是建立热半群的导数公式, 以便对热核的导数进行定量刻画, 研究工具包括 Malliavin 分析和变测度耦合方法 [5]. 文献 [27] 使用变测度耦合方法对于分布依赖随机微分方程的分布建立了 Harnack 型不等式和梯度估计, 文献 [28] 使用 Malliavin 分析研究了带跳情形的梯度估计. 本节研究分布依赖随机微分方程的正则性, 建立其解的分布的 L 导数公式, 主要内容取材于文献 [29]. 下面分别就非退化噪声和退化噪声情形介绍有关成果. 我们仅考虑噪声不依赖于分布的情形, 对于噪声依赖于分布的模型关于 Harnack 型不等式、梯度估计和 L 导数公式的研究还没有任何结果. 由于不涉及外在导数, 因此简记 $D = D^L$.

6.1 非退化的分布依赖随机微分方程

考虑 $\mathbb{R}^d$ 上的如下随机微分方程:

$$dX_t = b_t(X_t, \mathscr{L}_{X_t})dt + \sigma_t(X_t)dW_t, \quad X_0 \in L^2(\Omega \to \mathbb{R}^d, \mathscr{F}_0, \mathrm{P}), \tag{6.1}$$

其中 W_t 为完备滤波概率空间 $(\Omega, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathrm{P})$ 上的 d 维 Brown 运动, $\mathscr{L}_{X_t}$ 为 X_t 的分布,

$$\sigma : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathscr{P}_2 \to \mathbb{R}^{d\otimes d}, \quad b : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathscr{P}_2 \to \mathbb{R}^d$$

是满足下面条件的可测映射.

(H) 任给 $t \geqslant 0$, 有 $b_t, \sigma_t \in C^{1,(1,0)}(\mathbb{R}^d \times \mathscr{P}_2)$. 此外, 存在连续函数 $K : [0,\infty) \to [0,\infty)$ 使得

$$\|\sigma_t(0,\delta_0)\| + |b_t(\mathbf{0},\delta_0)| \leqslant K(t), \quad t \geqslant 0,$$
$$\max\left\{\|\nabla b_t(\cdot,\mu)(x)\|, \|D^L b_t(x,\cdot)(\mu)\|, \ \frac{1}{2}\|\nabla \sigma_t(\cdot,\mu)(x)\|^2, \frac{1}{2}\|D^L \sigma_t(x,\cdot)(\mu)\|^2\right\} \leqslant K_t,$$

$$t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \mu \in \mathscr{P}_2,$$

其中对于 L 可导函数 f, 有 $\|D^L f(\mu)\| := \|D^L f(\mu)(\cdot)\|_{L^2(\mu)}$.

对于 $\mu \in \mathscr{P}_2$, 令 $X_0^\mu \in L^2(\Omega \to \mathbb{R}^d, \mathscr{F}_0, \mathrm{P})$ 使得 $\mathscr{L}_{X_0^\mu} = \mu$, $(X_t^\mu)_{t\geqslant 0}$ 为 (6.1) 的初值为 X_0^μ 的解. 对于 $T > 0$ 和 $f \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$, 我们研究

$$P_T f(\mu) := \mathrm{E}[f(X_T^\mu)]$$

关于 μ 的 L 导数. 为此, 先考虑沿着 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \mu)$ 的方向导数. 令 $v_t^\phi \in \mathbb{R}^d$ 是如下线性随机微分方程的解:

$$\begin{aligned} dv_t^\phi = &\{\nabla_{v_t^\phi} b_t(\cdot, \mathscr{L}_{X_t^\mu})(X_t) + (\mathrm{E}\langle D^L b_t(y,\cdot)(\mathscr{L}_{X_t^\mu})(X_t^\mu), v_t^\phi\rangle)|_{y=X_t^\mu} g\} dt \\ &+ \{\nabla_{v_t^\phi} \sigma_t(X_t^\mu)\} dW_t, \quad v_0^\phi = \phi(X_0^\mu). \end{aligned} \tag{6.2}$$

由假设 (H) 可证存在常数 $C = C(T) > 0$ 使得

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathrm{E}|v_t^\phi|^2 \leqslant C\mu(|\phi|^2).$$

定理 6.1 [29] 在假设 (H) 之下, 对于任意的 $f \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$, $\mu \in \mathscr{P}_2$, $T > 0$, $P_T f(\mu)$ 关于 μ 是 L 可导的, 且任给 $g \in C^1([0,T])$ 满足 $g_0 = 0$, $g_T = 1$, 有

$$D_\phi^L (P_T f)(\mu) = \mathrm{E}\bigg[f(X_T^\mu)\int_0^T \langle \zeta_t^\phi,\ dW_t\rangle\bigg], \quad \phi \in L^2(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \mu), \tag{6.3}$$

其中

$$\zeta_t^\phi := \sigma_t(X_t^\mu)^{-1}\{g_t' v_t^\phi + (\mathrm{E}\langle D^L b_t(y,\cdot)(\mathscr{L}_{X_t^\mu})(X_t^\mu), g_t v_t^\phi\rangle)|_{y=X_t^\mu}\}, \quad t \in [0,T].$$

下面介绍证明公式 (6.3) 的主要步骤, 而由此验证 $P_T f$ 的 L 可导性还需要额外的论证, 详细证明参见文献 [29].

(1) 对于 $\varepsilon > 0$, 考虑初值为 $X_0^{\mu,\varepsilon} := X_0^\mu + \varepsilon\phi(X_0^\mu)$ 的随机微分方程

$$dX_t^{\mu,\varepsilon} = b_t(X_t^{\mu,\varepsilon}, \mathscr{L}_{X_t^{\mu,\varepsilon}})dt + \sigma_t(X_t^{\mu,\varepsilon})dW_t,$$

则 $P_T f(\mu \circ (\mathrm{Id} + \varepsilon\phi)^{-1}) = \mathrm{E} f(X_T^{\mu,\varepsilon})$. 由方向导数 D_ϕ 的定义知,

$$D_\phi P_T f(\mu) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{E}[f(X_T^{\mu,\varepsilon}) - f(X_T^\mu)].$$

(2) 证明 $\nabla_\phi X_T^\mu := \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\{X_t^{\mu,\varepsilon} - X_t^\mu\}$ 在 $L^2(\mathrm{P})$ 中存在, 且 $\nabla_\phi X_t^\mu = v_t^\phi$.

(3) 令 $h_t = \int_0^t \zeta_s^\phi ds$, $t \in [0,T]$, 则 $D_h X_T^\mu = v_T^\phi$, 其中 D_h 为沿着 h 的 Malliavin 方向导数. 由 Malliavin 导数的分部积分公式并结合 (1) 和 (2), 对于 $f \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$, 有

$$D(P_T f)(\mu) = \mathrm{E}[\langle \nabla f(X_T^\mu), v_T^\phi\rangle] = \mathrm{E}[D_h f(X_T^\mu)] = \mathrm{E}\bigg[f(X_T^\mu)\int_0^T \langle \zeta_t^\phi, dW_t\rangle\bigg].$$

最后通过逼近手段, 将条件 $f \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$ 放宽为 $f \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^d)$.

6.2 退化的分布依赖随机微分方程

考虑如下的分布依赖随机 Hamilton 系统 $X_t=(X_t^{(1)},X_t^{(2)})\in\mathbb{R}^{m+d}=\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases}dX_t^{(1)}=b_t^{(1)}(X_t)dt,\\ dX_t^{(2)}=b_t^{(2)}(X_t,\mathscr{L}_{X_t})dt+\sigma_t dW_t,\end{cases}\tag{6.4}$$

其中 $(W_t)_{t\geqslant 0}$ 是 d 维 Brown 运动, σ_t 为可逆 $d\times d$ 矩阵, $b_t=(b_t^{(1)},b_t^{(2)}):\mathbb{R}^{m+d}\times\mathscr{P}_2\to\mathbb{R}^{m+d}$ 可测使得 $b_t^{(1)}(x,\mu)=b_t^{(1)}(x)$ 不依赖于分布 μ, $\mathscr{P}_2$ 为 E^{d+m} 上 L^2 Wasserstein 距离. 记 $\nabla=(\nabla^{(1)},\nabla^{(2)})$ 为

$$\mathbb{R}^{m+d}:=\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^d$$

上的梯度算子, 其中 $\nabla^{(i)}$ 是关于第 i 个分量的梯度, $i=1,2$, 则 $\nabla^2:=\nabla\nabla$ 为 $\mathbb{R}^{m+d}$ 上的 Hess 矩阵. 此外, 为了保证亚椭圆性, 对于 $s\geqslant 0$, 令 $\{K_{t,s}\}_{t\geqslant s}$ 为 $\mathbb{R}^{m\otimes m}$ 上如下常微分方程的解:

$$\frac{d}{dt}K_{t,s}=(\nabla^{(1)}b^{(1)})(X_t)K_{t,s},\quad t\geqslant s,\quad K_{s,s}=I_{m\times m},\tag{6.5}$$

其中 $I_{m\times m}$ 为 $m\times m$ 单位矩阵. 我们需要以下假设.

(H1) $b_t^{(1)}\in C_b^2(\mathbb{R}^{m+d}\to\mathbb{R}^m)$, $b_t^{(2)}\in C^{1,(1,0)}(\mathbb{R}^{m+d}\times\mathscr{P}_2\to\mathbb{R}^d)$, 并且存在增函数 $K:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 使得对于所有的 $t\geqslant 0$, $(x,\mu)\in\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2$, 有

$$\|\sigma_t(0,\delta_0)\|+|b_t(0,\delta_0)|+\|\nabla b_t(\cdot,\mu)(x)\|+\|D^Lb_t^{(2)}(x,\cdot)(\mu)\|+\|\nabla^2b_t^{(1)}(\cdot,\mu)(x)\|\leqslant K(t).$$

(H2) 存在 $B\in\mathscr{B}_b([0,T]\to\mathbb{R}^{m\otimes d})$ 和 $\varepsilon\in[0,1)$, 使得

$$\langle(\nabla^{(2)}b_t^{(1)}-B_t)B_t^*a,a\rangle\geqslant-\varepsilon|B_t^*a|^2,\quad\forall\,a\in\mathbb{R}^m.$$

此外, 存在增函数 $\theta\in C((0,T];(0,\infty))$, 使得

$$\int_0^t s(T-s)K_{T,s}B_sB_s^*K_{T,s}^*ds\geqslant\theta_tI_{m\times m},\quad t\in(0,T].$$

根据文献 [30, 定理 1.1], (H2) 蕴含矩阵

$$Q_t:=\int_0^t s(T-s)K_{T,s}\nabla^{(2)}b_s^{(1)}(X_s)B_s^*K_{T,s}^*ds,\quad t\in(0,T]$$

是可逆的, 而且

$$\|Q_t^{-1}\|\leqslant\frac{1}{(1-\varepsilon)\theta_t},\quad t\in(0,T].$$

设 $(X_t^\mu)_{t\in[0,T]}$ 是以 μ 为初始分布的方程 (6.4) 的解. 我们计算

$$P_Tf(\mu):=\mathrm{E}[f(X_T^\mu)],\quad f\in B_b(\mathbb{R}^{d+m}),\quad T>0$$

关于 μ 的 L 导数. 为此, 对于 $\phi=(\phi^{(1)},\phi^{(2)})\in L^2(\mathbb{R}^{m+d}\to\mathbb{R}^{m+d},\mu)$, 令

$$\alpha_t^{(2)}=\frac{T-t}{T}\phi^{(2)}(X_0^\mu)-\frac{t(T-t)B_t^*K_{T,t}^*}{\int_0^T\theta_s^2ds}\int_t^T\theta_s^2Q_s^{-1}K_{T,0}\phi^{(1)}(X_0^\mu)ds$$

$$
\begin{aligned}
&- t(T-t)B_t^* K_{T,t}^* Q_T^{-1} \int_0^T \frac{T-s}{T} K_{T,s} \nabla^{(2)}_{\phi^{(2)}(X_0^\mu)} b_s^{(1)}(X_s^\mu) ds, \\
\alpha_t^{(1)} &= K_{t,0}\phi^{(1)}(X_0^\mu) + \int_0^t K_{t,s} \nabla^{(2)}_{\alpha_s^{(2)}} b_s^{(1)}(X_s^\mu)\, ds, \quad t \in [0,T].
\end{aligned}
$$

最后, 解常微分方程

$$
\begin{aligned}
\frac{dh_t^\alpha}{dt} &= \sigma_t^{-1}\{\nabla_{\alpha_t} b_t^{(2)}(X_t^\mu, \mathscr{L}_{X_t^\mu}) - (\alpha_t^{(2)})' + (\mathrm{E}\langle D^L b_t^{(2)}(y,\cdot)(\mathscr{L}_{X_t^\mu})(X_t^\mu), \alpha_t + w_t^\alpha\rangle)\,|_{y=X_t^\mu}\}, \\
\frac{dw_t^\alpha}{dt} &= \nabla_{w_t^\alpha} b_t(\cdot, \mathscr{L}_{X_t^\mu})(X_t^\mu) + (0, \sigma_t(h_t^\alpha)'), \quad h_0^\alpha = w_0^\alpha = 0.
\end{aligned} \tag{6.6}
$$

我们有如下的导数公式.

定理 6.2 [29] 在假设 (H1) 和 (H2) 之下, 有 $h^\alpha \in \mathscr{D}(D^*)$ 且 $|D^*(h^\alpha)| \in \bigcap_{p\geqslant 1} L^p(\mathrm{P})$. 此外, 任给 $f \in \mathscr{B}_b(\mathbb{R}^{m+d})$ 和 $T>0$, $P_T f$ 是 L 可导的, 方向导数满足

$$
D_\phi^L(P_T f)(\mu) = \mathrm{E}[f(X_T)\, D^*(h^\alpha)].
$$

该定理的证明步骤与前面非退化情形类似, 只是此时所构造的 Malliavin 切空间上的向量 h 是非适应的, 因此其散度的计算比较复杂, 详细证明与应用参见文献 [29]. 下面举一个满足该定理条件的例子. 由于 (H1) 比较易于验证, 我们仅考虑条件 (H2).

例 6.1 对于 $m\times m$ 矩阵 A 和 $m\times d$ 矩阵 B, 令 $b_t^{(1)}(x) = Ax^{(1)} + Bx^{(2)}$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathbb{R}^{m+d}$. 如果存在 $k \geqslant 1$ 使得下面的 Kalman 秩条件成立:

$$
\mathrm{Rank}[B, AB, \ldots, A^k B] = m,
$$

则存在常数 $c = c(T) > 0$ 使得假设 (H2) 对于 $\theta_t = c_T t$ 成立, 参见文献 [30, 定理 4.2] 的证明. 一般地, 对于这个 $b_t^{(1)}$ 作小的扰动, 仍然可以保持假设 (H2) 成立.

问题 6.1 本节所介绍的 Malliavin 分析方法, 以及文献 [27] 中所使用的变测度耦合方法, 都不适用于噪声项依赖于分布的情形. 在该情形对于分布依赖随机微分方程正则性估计的研究, 如梯度估计、Harnack 不等式和导数公式等, 还处于空白状态.

致谢 在 2019 年 9 月 18 日至 20 日期间, 作者之一王凤雨在中国科学院应用数学研究所的一个研讨班上演讲了本文的主要内容. 感谢活动组织者的邀请, 感谢研讨班的服务人员和听众们的帮助, 感谢审稿人的修改建议.

参考文献

1 Fukushima M, Oshima Y, Takeda M. Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes. Berlin: Walter de Gruyter, 1994
2 Ma Z, Röckner M. Introduction to the Theory of (Non-Symmetric) Dirichlet Forms. New York: Springer, 1992
3 Ikeda N, Watanabe S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, 2nd ed. Amsterdam: North-Holland, 1989
4 Stroock D W, Varadhan S R S. Multidimensional Diffusion Processes. New York: Springer, 1979
5 Wang F Y. Harnack Inequalities and Applications for Stochastic Partial Differential Equations. New York: Springer, 2013
6 Wang F Y. Functional Inequalities, Markov Semigroups and Spectral Theory. Beijing: Science Press, 2005
7 Li Z. Measure-Valued Branching Markov Processes. Probability and Its Applications. Heidelberg-New York: Springer, 2011
8 Ma Z, Röckner M. Construction of diffusion on configuration spaces. Osaka J Math, 2000, 37: 273–314
9 Wang F Y. Coupling and applications. In: Stochastic Analysis and Applications to Finance. Interdisciplinary Mathematical Sciences, vol. 13. Hackensack: World Scientific, 2012, 411–424

10 Chen M F. From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems. Singapore: World Scientific, 1992
11 Ren P P, Wang F Y. Derivative formulas in measure on Riemannian manifolds. ArXiv:1908.03711, 2019
12 Overbeck L, Röckner M, Schmuland B. An analytic approach to Fleming-Viot processes with interactive selection. Ann Probab, 1995, 23: 1–36
13 Albeverio S, Kondratiev Y G, Röckner M. Differential geometry of Poisson spaces. C R Math Acad Sci Paris, 1996, 323: 1129–1134
14 Albeverio S, Kondratiev Y G, Röckner M. Analysis and geometry on configuration spaces. J Funct Anal, 1998, 154: 444–500
15 Cardaliaguet P. Notes on mean field games. Https://www.researchgate.net/publication/228702832, 2012
16 Ren P P, Wang F Y. Spectral gap for measure-valued diffusion processes. J Math Anal Appl, 2020, 483: 123624
17 Wang F Y. Functional inequalities for weighted Gamma distribution on the space of finite measures. Electron J Probab, 2020, in press
18 Wang F Y, Zhang W. Nash inequality for diffusion processes associated with Dirichlet distributions. Front Math China, 2019, 14: 1317–1338
19 Gross L. Logarithmic Sobolev inequalities and contractivity properties of semigroups. In: Dirichlet Forms. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1563. Berlin: Springer, 1993, 54–88
20 Wang F Y. Functional inequalities for empty essential spectrum. J Funct Anal, 2000, 170: 219–245
21 Shimakura N. Équations différentielles provenant de la génétique des populations. Tohoku Math J (2), 1977, 29: 287–318
22 Stannat W. On the validity of the log-Sobolev inequality for symmetric Fleming-Viot operators. Ann Probab, 2000, 28: 667–684
23 Simon B. The $P(\Phi)_2$-Euclidean (Quantum) Field Theory. Princeton: Princeton University Press, 1974
24 Röckner M, Wang F Y. Weak Poincaré inequalities and L^2-convergence rates of Markov semigroups. J Funct Anal, 2001, 185: 564–603
25 Wang F Y. Diffusions and PDEs on Wasserstein space. ArXiv:1903.02148, 2019
26 von Renesse M K, Sturm K T. Entropic measure and Wasserstein diffusion. Ann Probab, 2009, 37: 1114–1191
27 Wang F Y. Distribution dependent SDEs for Landau type equations. Stochastic Process Appl, 2018, 128: 595–621
28 Song Y. Gradient estimates and exponential ergodicity for mean-field SDEs with jumps. J Theoret Probab, 2018, 75: 1–38
29 Ren P P, Wang F Y. Bismut formula for Lions derivative of distribution dependent SDEs and applications. J Differential Equations, 2019, 267: 4745–4777
30 Wang F Y, Zhang X C. Derivative formula and applications for degenerate diffusion semigroups. J Math Pures Appl (9), 2013, 99: 726–740

Stochastic analysis for measure-valued processes

Fengyu Wang & Panpan Ren

Abstract In this paper, we introduce some recent progress on stochastic analysis for measure-valued processes, and propose some problems for further study in this direction. We first recall the notions of derivatives in measures, clarify their relations, and investigate functional inequalities of Dirichlet forms induced by these derivatives and reference probability measures. Then we construct diffusion processes on the Wasserstein space by using image dependent SDEs (stochastic differential equations), investigate the exponential ergodicity of the processes, and establish the Feynman-Kac formula for solutions of PDEs (partial differential equations) on the Wasserstein space. We also introduce Bismut formulas for the L derivative of distribution dependent SDEs.

Keywords **measure-valued process, Dirichlet form, Wasserstein space, stochastic differential equation, spectral gap**

MSC(2010) **60J68, 60H03**

doi: 10.1360/SSM-2019-0225