中国科学: 数学　2025 年　第 55 卷　第 7 期: 1261～1266
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

Borel-Cantelli 第一、第二引理的一个注记

献给钱敏平教授 86 寿辰

谢践生*, 王起航

复旦大学数学科学学院, 上海 200433
E-mail: jsxie@fudan.edu.cn, 21307130289@m.fudan.edu.cn

收稿日期: 2024-08-26; 接受日期: 2025-01-16; 网络出版日期: 2025-01-24; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11790273) 资助项目

摘要　设 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 为一列事件, 记 $S := \sum_{n=1}^\infty 1_{A_n}$. 本文分别讨论 $\mathbb{P}(S < \infty) = 1$ 与 $\mathbb{P}(S = \infty) = 1$ 的等价刻画, 这些等价刻画分别是 Borel-Cantelli 引理形态和 Kochen-Stone 引理形态, 它们可视作最一般版本的 Borel-Cantelli 第一、第二引理.

关键词　Borel-Cantelli 第一引理　Borel-Cantelli 第二引理　Kochen-Stone 引理

MSC (2020) 主题分类　60A05, 60A10, 60F15

1　引言

Borel-Cantelli 第一、第二引理是概率论中用于探讨几乎处处收敛性质的基本工具, 具有重要理论意义与应用价值. 本文给出它们的最一般形式, 即定理 1.1 和 1.3.

如下命题是经典的 Borel-Cantelli 引理 (也称为 Borel-Cantelli 第一引理).

引理 1.1　设概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中的事件列 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 满足

$$\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n) < \infty, \tag{1.1}$$

则

$$\sum_{n=1}^\infty 1_{A_n} < \infty \text{ 几乎处处成立.} \tag{1.2}$$

本文给出 (1.2) 的如下等价刻画:

英文引用格式: Xie J S, Wang Q H. A note on the first and the second Borel-Cantelli lemmas (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 1261–1266, doi: 10.1360/SSM-2024-0256

　

定理 1.1 对任意给定的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中的事件列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} < \infty$ 几乎处处成立的充分必要条件是, 存在自然数的单调上升子列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, 对如下定义的事件列 (约定 $n_0 := 0$):

$$B_k := \bigcup_{j \in (n_{k-1}, n_k]} A_j,$$

有

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_k) < \infty. \tag{1.3}$$

在文献中, Borel-Cantelli 第二引理有多个版本, 我们提供如下一个综合性的版本:

引理 1.2 (Borel-Cantelli 第二引理) 给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 中满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \tag{1.4}$$

的事件列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, 如果它们还额外满足以下条件(1)–(4)之一:

(1) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 相互独立;

(2) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ (两两) 成对独立;

(3) 存在 ℓ^1- 序列 $\{\rho_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) \leqslant \rho_{|i-j|} \cdot [\mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(A_j)], \quad \forall\, i \neq j;$$

(4) 存在无穷矩阵 $M = (M_{i,j})_{1 \leqslant i,j < \infty}$ 诱导的有界连续线性变换

$$\ell^2 \to \ell^2, \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \mapsto xM$$

使得

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) \leqslant M_{i,j} \cdot \sqrt{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)}, \quad \forall\, i \neq j,$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} = \infty \text{ 几乎处处成立.} \tag{1.5}$$

上述引理中, 条件 (1) 下的结论是大多数概率论教科书中经典的 Borel-Cantelli 第二引理, 其他条件下的结论则散布于诸多文献中. 例如, 文献 [8, 定理 2.3.9] 对应于条件 (2), 文献 [22, 定理 3.2] 对应于条件 (4) (可追溯至 Erdös 和 Rennyi [10] 的工作), 条件 (3) (视作一致混合条件, uniform mixing condition) 对应的结论记录于文献 [6].

最近从 Dvoretzky 和 Erdös [9] 的工作中发掘整理出如下结果:

定理 1.2 [23] 设 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是单调递增的正随机变量列. 假设 $\mathbb{E}S_n \to \infty$, 且存在正常数 $C, \delta > 0$ 使得

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) \leqslant C(\mathbb{E}S_n)^{2-\delta}, \quad \forall\, n \geqslant 1 \tag{1.6}$$

成立, 或更弱的

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) \leqslant \frac{C(\mathbb{E}S_n)^2}{(\ln \mathbb{E}S_n)^{1+\delta}}, \quad \forall\, n \geqslant 1 \tag{1.7}$$

成立, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\mathbb{E}S_n}=1 \text{ 几乎处处成立.} \tag{1.8}$$

上述定理可用于系统地论证前述 Borel-Cantelli 第二引理. 但实际上, 现存文献中更一般的 Borel-Cantelli 第二引理是 Kochen 和 Stone [17] 的结果 (也可参见文献 [8, 习题 2.3.10]).

引理 1.3 (Kochen-Stone 引理)　给定满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)=\infty \tag{1.9}$$

的事件列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. 记 $S_n:=1_{A_1}+\cdots+1_{A_n}$, 如果它们满足

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)}{(\mathbb{E}S_n)^2}=0, \tag{1.10}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}1_{A_n}=\infty$ 几乎处处成立.

下面给出 (1.5) 的等价刻画:

定理 1.3　$\sum_{n=1}^{\infty}1_{A_n}=\infty$ 几乎处处成立的充分必要条件是, 存在自然数的单调上升子列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, 对如下定义的事件列和随机变量列 (约定 $n_0:=0$):

$$B_k:=\bigcup_{j\in(n_{k-1},n_k]}A_j,\quad S_m:=1_{B_1}+\cdots+1_{B_m},$$

极限方程 (1.10) 和无穷级数方程

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(B_k)=\infty \tag{1.11}$$

成立.

最初版本的 Borel-Cantelli 第一、第二引理的建立 (Borel, 1909; Cantelli, 1917; 参见文献 [11]) 已是一个多世纪前. 历史上关于这两个结果的推广工作自 Borel 的工作之后持续进行着, 参见专著 [1,6] 和文献 [4,5,7,11–14,18–20] 等. 而基于前人的工作, 定理 1.1 和 1.3 的陈述与证明其实并不太难; 但让人吃惊的是, 在这些现存文献中并没有我们这两个定理的论述. 尽管目前暂未找到这两个定理的非平凡应用, 但它们仍应被认为具有重要的理论价值. 最近一些年, 一些学者在动力系统 (及数论) 中发展并应用了动力系统版本的 Borel-Cantelli 引理 [3,6,15,16,21], 或许在这些研究方向中我们的结果能找到某些恰当的应用.

一言以蔽之, 定理 1.1 和 1.3 可视作最一般版本的 Borel-Cantelli 第一、第二引理. 下一节将给出其证明.

2　定理 1.1 和 1.3 的证明

为了证明定理 1.1 与 1.3, 我们先证明下面的结果.

引理 2.1　给定自然数的单调递增子列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 及概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 中的一列事件 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, 记 $B_k:=\bigcup_{j\in(n_{k-1},n_k]}A_j$ (约定 $n_0:=0$), 则总有

$$\sum_{n=1}^{\infty}1_{A_n}<\infty\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}1_{B_k}<\infty, \tag{2.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} = \infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 1_{B_k} = \infty. \tag{2.2}$$

证明 此处引理中的观察, 其种子实际播种于 1998 年程士宏教授的《高等概率论》课程 (其教材参见文献 [2]), 而萌芽、成熟于 15 年后第一作者的相关概率课程的授课期间.

显然, (2.1) 与 (2.2) 等价, 因此此处只证明前者.

由于 $1_{B_k} \leqslant \sum_{j\in(n_{k-1},n_k]} 1_{A_j}$, 所以 (2.1) 的 "⇒" 部分是显然成立的.

假定 $\sum_{k=1}^{\infty} 1_{B_k} < \infty$, 则存在 $N < \infty$ 使得

$$1_{A_j} \leqslant 1_{B_k} = 0, \quad \forall\, k \geqslant N, \quad j \in (n_{k-1}, n_k].$$

于是 $1_{A_j} = 0, \forall\, j > n_{N-1}$. 进而 (2.1) 的 "⇐" 部分也成立. □

定理 1.1 的证明 假定 (1.3) 对某子列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 成立. 由 Borel-Cantelli 引理知 $\sum_{k=1}^{\infty} 1_{B_k} < \infty$ 几乎处处成立. 而 (2.1) 推导出了 (1.2).

假定 (1.2) 成立, 即 $\mathbb{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = 0$, 其中 $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$. 于是

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\bigg(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\bigg) = 0.$$

递归地定义 n_k 如下: 定义 $n_0 := 0$ 及

$$n_k := \inf\bigg\{N > n_{k-1} : \mathbb{P}\bigg(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\bigg) \leqslant \frac{1}{2^k}\bigg\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

记 $B_k := \bigcup_{j\in(n_{k-1},n_k]} A_j$. 显然

$$\mathbb{P}(B_k) \leqslant \mathbb{P}\bigg(\bigcup_{j=n_{k-1}+1}^{\infty} A_j\bigg) \leqslant \frac{1}{2^{k-1}},$$

这推导出 (1.3). □

定理 1.3 的证明 假设存在子列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 (1.10) 及 (1.11) 成立, 其中 $B_k := \bigcup_{j\in(n_{k-1},n_k]} A_j$, $S_m := 1_{B_1} + \cdots + 1_{B_m}$. 由 Kochen-Stone 引理可知 $\sum_{k=1}^{\infty} 1_{B_k} = \infty$ 几乎处处成立. 而 (2.2) 推导出了 (1.5).

现在承认 (1.5) 成立, 即 $\mathbb{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = 1$, 亦即

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\bigg(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\bigg) = \lim_{N\to\infty} \lim_{M\to\infty} \mathbb{P}\bigg(\bigcup_{n=N}^{M} A_n\bigg) = 1.$$

递归定义 n_k 如下: 定义 $n_0 := 0$ 及

$$n_k := \inf\bigg\{M > n_{k-1} : \mathbb{P}\bigg(\bigcup_{n=n_{k-1}+1}^{M} A_n\bigg) > 1 - \frac{1}{2^k}\bigg\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

记 $B_k := \bigcup_{j\in(n_{k-1},n_k]} A_j$ 及 $S_m := 1_{B_1} + \cdots + 1_{B_m}, \forall\, m \geqslant 1$. 显然 $\mathbb{P}(B_k) > 1 - \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$ 因此 $\mathbb{E}S_m > m - 1$.

另外,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_m) &= \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant m} \mathbb{C}\mathrm{ov}(1_{B_k}, 1_{B_\ell}) \leqslant \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant m} \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(1_{B_k})\mathbb{V}\mathrm{ar}(1_{B_\ell})} \\
&\leqslant \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant m} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k+\ell}{2}} \leqslant \left[\frac{\sqrt{1/2}}{1-\sqrt{1/2}}\right]^2 \\
&= 3+2\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

至此, (1.10) 和 (1.11) 已成为显然的事实. □

3 讨论

在本文的早期英文版本中, 第一作者曾猜测: (1.5) 成立的充分必要条件是存在自然数的单调递增子列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 (1.10) 和 (1.11) 成立, 其中 $B_k := A_{n_k}$ 及 $S_m := 1_{B_1} + \cdots + 1_{B_m}$. 第二作者随即提供了如下反例.

取 $X \sim U(\{1,2,3\})$, 即 X 是数集 $\{1,2,3\}$ 上的等概率分布的随机变量. 对任意正整数 n, 记

$$A_{2n-1} := \{X \neq 1\}, \quad A_{2n} := \{X \neq 2\}.$$

显然事件列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 (1.5). 而对自然数的任意单调递增子列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, 定义 $B_k := A_{n_k}$ 及 $S_m := 1_{B_1} + \cdots + 1_{B_m}$, 不难看到 $\mathbb{E}S_m = \frac{2m}{3}$. 我们断言:

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)}{(\mathbb{E}S_n)^2} \geqslant \frac{1}{8} > 0. \tag{3.1}$$

事实上, 记

$$t_m := \sum_{k=1}^{m} 1_{\{n_k\,是奇数\}},$$

则 t_m 是 (确定性的) 非负整数, 并且

$$S_m = t_m \cdot 1_{\{X\neq 1\}} + (m-t_m)\cdot 1_{\{X\neq 2\}} = m - t_m \cdot 1_{\{X=1\}} - (m-t_m)\cdot 1_{\{X=2\}}.$$

因此,

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_m) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(t_m \cdot 1_{\{X=1\}} + (m-t_m)\cdot 1_{\{X=2\}}) = \frac{2}{9}\cdot [t_m^2 + (m-t_m)^2 - t_m(m-t_m)] \geqslant \frac{m^2}{18}.$$

于是 (3.1) 成立.

致谢 本文讨论的问题来源于第一作者 2023 年秋季学期《概率论 H》及《现代概率论基础 I》两门课程的授课过程中的“灵机一动” (或者说追求充要条件刻画的“强迫症”), 因此向参加课程的全体同学致以诚挚的感谢, 感谢他们在课程中对相关主题内容讲授的忍耐. 感谢审稿人细致的审阅意见, 最终提升了本文的表述质量. 第一作者的研究兴趣与品味也深受钱敏平教授的影响, 值此寿辰专辑出版, 恭祝钱老师身体健康, 万事如意, 福如东海, 寿比南山.

参考文献

1 Chandra T K. The Borel-Cantelli Lemmas. Springer Briefs in Statistics. Heidelberg: Springer, 2012

2 Cheng S H. Advanced Probability Theory (in Chinese). Beijing: Peking Uinv Press, 1996 [程士宏. 高等概率论. 北京: 北京大学出版社, 1996]

3 Chernov N, Kleinbock D. Dynamical Borel-Cantelli lemmas for Gibbs measures. Israel J Math, 2001, 122: 1–27

4 Chung K L, Erdös P. On the application of the Borel-Cantelli lemma. Trans Amer Math Soc, 1952, 72: 179–186

5 Davie G. The Borel-Cantelli lemmas, probability laws and Kolmogorov complexity. Ann Probab, 2001, 29: 1426–1434

6 Dedecker J, Merlevède F, Rio E. Criteria for Borel-Cantelli lemmas with applications to Markov chains and dynamical systems. In: Séminaire de Probabilités LI. Lecture Notes in Mathematics, vol. 2301. Cham: Springer, 2022, 189–238

7 Dubins L E, Freedman D A. A sharper form of the Borel-Cantelli lemma and the strong law. Ann of Math Stud, 1965, 36: 800–807

8 Durrett R. Probability: Theory and Examples, 5th ed. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2019

9 Dvoretzky A, Erdös P. Some problems on random walk in space. In: Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley-Los Angeles: Univ California Press, 1951, 353–367

10 Erdös P, Rennyi A. On Cantor's series with convergent $1/q_n$. Ann Univ Sci Budapest Eötvös Sect Math, 1959, 2: 93–109

11 Estrada L F, Högele M A. Moment estimates in the first Borel-Cantelli lemma with applications to mean deviation frequencies. Stat Probab Lett, 2022, 190: 109636

12 Freedman D. Another note on the Borel-Cantelli lemma and the strong law, with the Poisson approximation as a by-product. Ann Probab, 1973, 1: 910–925

13 Frolov A N. On strong forms of the Borel-Cantelli lemma and intermittent interval maps. J Math Anal Appl, 2021, 504: 125425

14 Hoover D R. First Borel-Cantelli equalities incorporating known dependency structure (English, Italian summary). Metron, 2002, 60: 21–30

15 Hussain M, Li B, Simmons D, et al. Dynamical Borel-Cantelli lemma for recurrence theory. Ergodic Theory Dynam Systems, 2022, 42: 1994–2008

16 Kifer Y. The Strong Borel-Cantelli Property in Conventional and Nonconventional Setups. Lecture Notes in Mathematics, vol. 2290. CIRM Jean-Morlet Series. Cham: Springer, 2021, 235–261

17 Kochen S B, Stone C J. A note on the Borel-Cantelli lemma. Illinois J Math, 1964, 8: 248–251

18 Lamperti J. Wiener's test and Markov chains. J Math Anal Appl, 1963, 6: 58–66

19 Luzia N. A Borel-Cantelli lemma and its applications. Trans Amer Math Soc, 2014, 366: 547–560

20 Petrov V V. A note on the Borel-Cantelli lemma. Statist Probab Lett, 2002, 58: 283–286

21 Philipp W. Some metrical theorems in number theory. Pacific J Math, 1967, 20: 109–127

22 Simon B. Functional Integration and Quantum Physics, 2nd ed. Providence: Amer Math Soc, 2005

23 Xie J, Zhou R. A note on an SLLN of Dvoretzky-Erdös type. Statist Probab Lett, 2023, 195: 109769

A note on the first and the second Borel-Cantelli lemmas

Jiansheng Xie & Qihang Wang

Abstract Let $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of events and let $S := \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n}$. We present in this note equivalent characterizations for the statements $\mathbb{P}(S < \infty) = 1$ and $\mathbb{P}(S = \infty) = 1$, respectively. These characterizations are of Borel-Cantelli lemma type and of Kochen-Stone lemma type respectively, which could be regarded as the most general version of the first and the second Borel-Cantelli lemmas.

Keywords **the first Borel-Cantelli lemma, the second Borel-Cantelli lemma, Kochen-Stone lemma**

MSC(2020) **60A05, 60A10, 60F15**

doi: 10.1360/SSM-2024-0256