中国科学: 数学　2023 年　第 53 卷　第 5 期: 697 ∼ 716
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates
论　文

外三角范畴的同调系统

何婧[1], 周潘岳[2*]

1. 湖南工商大学理学院, 长沙 410205;
2. 长沙理工大学数学与统计学院, 长沙 410114
E-mail: jinghe1003@163.com, panyuezhou@163.com

收稿日期: 2022-07-04; 接受日期: 2022-12-19; 网络出版日期: 2023-03-10; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11901190) 资助项目

摘要　在外三角范畴中, 本文引入同调系统 Θ (又称为 Θ- 系统) 的概念, 此概念统一了模范畴的分层系统和三角范畴的同调系统. 本文证明了一个 Θ- 系统能够唯一地确定一个 Θ- 投射系统. 给定一个 Θ- 投射系统 $(\Theta, \boldsymbol{Q}, \leqslant)$, 本文也证明了滤链多样性不依赖于滤链的选择, 建立了所有 Θ- 滤对象构成的子范畴 $\mathfrak{F}(\Theta)$ 和模范畴 $\mathsf{mod}(B)$ 中的所有 Δ- 好模构成的子范畴之间的同构, 其中 B 是标准分层代数.

关键词　外三角范畴　三角范畴　正合范畴　标准分层代数　同调系统

MSC (2020) 主题分类　18G80, 18E10, 18G25

1　引言

标准分层代数是拟遗传代数的推广, 它与倾斜理论和相对同调代数有很紧密的联系. 为了对标准模和标准分层代数的经典倾斜模范畴化, Erdmann 和 Sáenz [3] 引入了 Ext- 内射分层系统的概念. 三角范畴起源于代数几何和代数拓扑, 现如今已经发展成为数学和物理等学科的很多研究中不可缺少的部分, 而且也与许多重要的结果有着密切联系. 由 Grothendieck [4] 和 Verdier [9] 给出的三角范畴的概念和完整理论体系的建立标志着代数学发展到了一个新的阶段, 也构建了代数与几何之间的一座桥梁. 有关三角范畴和导出范畴的书籍可参见文献 [10]. Nakaoka 和 Palu [7] 提取了正合范畴和三角范畴中余挠对的扩张函子的共同性质, 定义了一个新的范畴, 称作外三角范畴. 正合范畴和三角范畴均可以作为外三角范畴的例子, 当然也存在一些既不是正合范畴也不是三角范畴的外三角范畴的例子. 例如, 三角范畴的扩张封闭子范畴就是外三角范畴, 但它既不是三角范畴, 也不是正合范畴. 更多非平凡外三角范畴的例子可参见文献 [5, 7, 8, 12, 13].

Mendoza 和 Santiago [6] 基于模范畴中分层系统的想法, 在三角范畴中引入了同调系统的概念, 将很多模范畴中的重要结论推广到三角范畴中来. 外三角范畴作为正合范畴和三角范畴的推广, 一个很自然的问题是, 是否能够在外三角范畴中引入同调系统的概念? 本文给出了肯定的回答, 即在外三角范畴中引入了同调系统的概念. 本文主要聚焦同调系统, 给出了很多相关的重要结果.

英文引用格式: He J, Zhou P Y. Homological systems in extriangulated categories (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 697–716, doi: 10.1360/SSM-2022-0122

本文余下内容的结构如下. 第 2 节回顾 Artin 外三角 R- 范畴的概念, 并给出一些技术性结果, 这些结果将在证明一个 Θ- 系统能够唯一地确定一个 Θ- 投射系统时使用. 第 3 节引入外三角范畴的 Θ- 投射系统的概念, 并证明一个 Θ- 系统能够唯一地确定一个 Θ- 投射系统. 给定一个 Θ- 投射系统, 本文也证明了滤链多样性 $[M:\Theta(i)]_\xi$ 不依赖于滤链 ξ 的选择. 给定一个 Θ- 投射系统 $(\Theta,\boldsymbol{Q},\leqslant)$, 第 4 节构建所有 Θ- 滤对象构成的子范畴和模范畴 $\mathsf{mod}(B)$ 中的所有 Δ- 好模构成的子范畴之间的同构, 其中 B 是标准分层代数.

2 外三角范畴的定义和相关结论

假设 $(\mathscr{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 是一个外三角范畴, 现在回顾一些专业术语. 更多有关外三角范畴的知识和相关记号可参见文献 [7, 第 2 节].

(1) 如果序列 $A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C$ 实现了某个 $\mathbb{E}$- 扩张 $\delta\in\mathbb{E}(C,A)$, 则称这个序列为容许序列 (conflation). 在这种情形下, 称态射 x 为容许单态射 (inflation), 态射 y 为容许满态射 (deflation).

(2) 如果一个容许序列 $A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C$ 实现 $\delta\in\mathbb{E}(C,A)$, 则称 $(A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C,\delta)$ 为 $\mathbb{E}$- 三角, 可写成如下形式:

$$A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C\overset{\delta}{\dashrightarrow}.$$

(3) 假设 $A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C\overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 和 $A'\xrightarrow{x'}B'\xrightarrow{y'}C'\overset{\delta'}{\dashrightarrow}$ 是两个 $\mathbb{E}$- 三角. 如果一个三元组 (a,b,c) 实现 $(a,c)\colon\delta\to\delta'$, 则可写成如下形式:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "c"] & {} \\ A' \arrow[r, "x'"] & B' \arrow[r, "y'"] & C' \arrow[r, dashed, "\delta'"] & {} \end{tikzcd}$$

且称 (a,b,c) 是 $\mathbb{E}$- 三角之间的态射.

(4) 如果对任意的 $\mathbb{E}$- 三角 $A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C\overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 和态射 $c\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(P,C)$, 均存在 $b\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(P,B)$ 使得 $yb=c$, 则称对象 $P\in\mathscr{C}$ 为投射. 用 $\mathcal{P}$ 表示 $\mathscr{C}$ 中所有投射对象构成的类. 对偶地, 能够定义内射对象, 所有的内射对象构成的类用 $\mathcal{I}$ 表示.

(5) 如果对任意的对象 $C\in\mathscr{C}$, 存在一个 $\mathbb{E}$- 三角

$$A\xrightarrow{f}P\xrightarrow{g}C\overset{\theta}{\dashrightarrow},$$

其中 P 是投射对象, 则称 $\mathscr{C}$ 有足够多的投射. 在这种情形下, A 称为 C 的合冲 (syzygy), 记作 ΩC.

(6) 如果对任意的对象 $C\in\mathscr{C}$, 存在一个 $\mathbb{E}$- 三角

$$C\xrightarrow{u}I\xrightarrow{v}B\overset{\omega}{\dashrightarrow},$$

其中 I 是内射对象, 则称 $\mathscr{C}$ 有足够多的内射. 在这种情形下, B 称为 C 的上合冲 (cosyzygy), 记作 ΣC.

设 $f\colon A\to B$ 和 $g\colon B\to C$ 是 $\mathscr{C}$ 中任意的两个态射. 考虑如下两个条件:

- 如果 gf 是容许单态射, 则 f 也是容许单态射;
- 如果 gf 是容许满态射, 则 g 也是容许满态射.

称以上的两个条件为弱幂等完备化 (weak idempotent completeness, WIC) 条件 (参见文献 [7, 条件 5.8]). 本文均假设 $\mathscr{C}$ 满足 WIC 条件. 我们知道任意三角范畴和 Krull-Schmidt 的正合范畴都满足 WIC 条件.

设 R 是一个交换环. 如果它满足如下条件, 则称一个范畴 $\mathscr{C}$ 为 R- 范畴:

(1) 对任意的对象 X 和 Y, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ 是 R- 模;

(2) $\mathscr{C}$ 中的态射合成是 R- 双线性的.

如果对任意的 $X,Y\in\mathscr{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ 是有限生成的 R- 模, 则一个 R- 范畴称为 Hom- 有限. 如果对任意的 $X,Y\in\mathscr{A}$,

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y)\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(X),F(Y))$$

是 R- 模之间的态射, 则一个 R- 范畴之间的函子 $F\colon\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 称为 R- 函子.

如果对任意的 $X,Y\in\mathscr{C}$, $\mathbb{E}(X,Y)$ 是有限生成的 R- 模, 则外三角 R- 范畴 $\mathscr{C}$ 称为 Ext- 有限. 如果它的每一个对象都能够写出一些不可分解的对象直和且这些对象的自同态环是局部的, 则加法范畴称为 Krull-Schmidt 的.

定义 2.1 一个外三角范畴, 如果它是某个 Artin 环 R 上的 R- 范畴且是 Hom- 有限、Ext- 有限和 Krull-Schmidt 的, 则称它为 Artin 外三角 R- 范畴.

现在给出一些 Artin 外三角 R- 范畴.

例 2.1 设 R 是一个交换 Artin 环.

(1) 如果 Λ 是一个 Artin R- 代数, 则 $\mathsf{mod}(\Lambda)$ 是一个 Artin 正合 R- 范畴. 从而它能够看作是一个 Artin 外三角 R- 范畴.

(2) 如果 Λ 是一个 Artin R- 代数, 则有界导出范畴 $\boldsymbol{D}^b(\Lambda)$ 是一个 Artin 三角 R- 范畴. 故它也能够看作是一个 Artin 外三角 R- 范畴. 而三角范畴的扩张封闭的子范畴是外三角范畴 (参见文献 [7, 注 2.18]), 但它不是正合范畴, 也不是三角范畴. 因此取 $\boldsymbol{D}^b(\Lambda)$ 的一个扩张封闭的子范畴 $\mathscr{B}$, 则 $\mathscr{B}$ 是一个 Artin 外三角 R- 范畴.

引理 2.1 设 $\mathscr{C}$ 是一个 Artin 外三角 R- 范畴且有足够多的投射和足够多的内射, $A\in\mathscr{C}$, $\Gamma:=\mathsf{End}_{\mathscr{C}}(A)^{\mathrm{op}}$, $e_A:=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,-):\mathscr{C}\to\mathsf{Mod}(\Gamma)$. 则下列陈述成立:

(1) Γ 是一个 Artin R- 代数;

(2) 限制函子 $e_A\colon\mathscr{C}\to\mathsf{mod}(\Gamma)$ 是定义良好的且诱导范畴之间的等价 $\mathsf{add}(A)\xrightarrow{\simeq}\mathsf{proj}(\Gamma)$;

(3) 对任意的 $Z\in\mathsf{add}(A)$ 和 $X\in\mathscr{C}$,

$$e_A\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z,X)\to\mathrm{Hom}_{\Gamma}(e_A(Z),e_A(X))$$

是 R- 模之间的同构.

证明 由 Auslander [2] 在模范畴情形所给的证明, 它可以毫无变化地扩展到我们的情形, 故这里省略证明. □

引理 2.2 设 $\mathscr{C}$ 是外三角 R- 范畴且 $A,C\in\mathscr{C}$ 使得 $\mathbb{E}(C,A)\neq 0$, 则有

(1) 在 $\mathscr{C}$ 中存在非可裂的 $\mathbb{E}$- 三角

$$\eta_{C,A}:\ A^n\xrightarrow{\ f\ }B\xrightarrow{\ g\ }C\overset{\delta}{\dashrightarrow}$$

使得 $\delta_A^\sharp\colon\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A^n,A)\to\mathbb{E}(C,A)$ 是满态射, 其中 $n:=\ell_R(\mathbb{E}(C,A))$ 是 $\mathbb{E}(C,A)$ 的有限 R- 长度.

(2) 如果 $\mathbb{E}(A,A)=0$, 那么 $\mathbb{E}(B,A)=0$.

证明 (1) 因为 $n := \ell_R(\mathbb{E}(C,A))$, 所以存在 $\mathbb{E}(C,A)$ 的 R- 生成子, 不妨设为 $\{\delta_i\}_{i=1}^n$. 于是对任意的 $i \in [1,n]$, 有如下 $\mathbb{E}$- 三角:

$$\eta_i:\ A \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C \overset{\delta_i}{\dashrightarrow}.$$

取 $\xi := \bigoplus_{i=1}^n \eta_i$, 得到 $\mathbb{E}$- 三角

$$\xi:\ A^n \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n B_i \longrightarrow C^n \dashrightarrow.$$

设 $q_i''\colon C \to C^n$ 是自然嵌入, 则有 $\mathbb{E}$- 三角之间的态射

$$\begin{tikzcd}
\eta_{C,A}:\ A^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "q_i''"] & {} \\
A^n \arrow[r] & \bigoplus_{i=1}^n B_i \arrow[r] & C^n \arrow[r, dashed] & {}.
\end{tikzcd}$$

注意到有如下 $\mathbb{E}$- 三角之间的态射:

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[r] \arrow[d, "p_i"] & \bigoplus_{i=1}^n B_i \arrow[r] \arrow[d, "p_i'"] & C^n \arrow[r, dashed] \arrow[d, "p_i''"] & {} \\
A \arrow[r] & B_i \arrow[r] & C \arrow[r, dashed] & {},
\end{tikzcd}$$

其中 p_i、p_i' 和 p_i'' 是自然满态射. 合成上述两个交换图, 有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
\eta_{C,A}:\ A^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_i"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, equal] & {} \\
A \arrow[r] & B_i \arrow[r] & C \arrow[r, dashed, "\delta_i"] & {},
\end{tikzcd}$$

进而有 $\delta_i = (p_i)_*\delta$. 任取态射 $a \in \mathbb{E}(C,A)$, 则

$$a = \sum_{i=1}^n a_i\delta_i = \sum_{i=1}^n a_i(p_i)_*\delta = \delta_A^\sharp(a_ip_i),$$

其中 $a_ip_i \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A^n,A)$. 这证明了 $\delta_A^\sharp\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A^n,A) \to \mathbb{E}(C,A)$ 是满态射. 因为对于每一个 i, 有 $\delta_i \neq 0$, 所以 $\delta \neq 0$. 因此 $\eta_{C,A}$ 为所需要的非可裂的 $\mathbb{E}$- 三角.

(2) 因为 $\mathbb{E}(A,A)=0$, 用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,A)$ 作用 $\mathbb{E}$- 三角 $\eta_{C,A}$, 有如下正合列:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A^n,A) \xrightarrow{\delta_A^\sharp} \mathbb{E}(C,A) \to \mathbb{E}(B,A) \to \mathbb{E}(A,A) = 0.$$

因为 $\delta_A^\sharp$ 是满态射, 所以有 $\mathbb{E}(B,A)=0$. □

命题 2.1 设 $\mathscr{C}$ 是 Artin 外三角 R- 范畴且有足够多的投射和足够多的内射. 如果

$$\eta:\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$$

是不可裂的 $\mathbb{E}$- 三角并且满足 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,C) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Sigma A,C) = 0$ 和 C 是不可分解对象, 则存在不可裂的 $\mathbb{E}$- 三角 $A' \to B' \to C \dashrightarrow$, 其中, A' 是 A 的直和项, B' 是 B 的不可分解直和项.

证明 记 $\alpha(B)$ 是 B 中不可分解的直和项个数. 对 $\alpha(B)$ 应用数学归纳法来完成该结论的证明.

当 $\alpha(B)=1$ 时, 结论显然成立.

当 $\alpha(B)>1$ 时, 考虑分解 $B=B_1\oplus B_2$, 其中 B_1 是不可分解的, 则 η 能够写成如下形式:

$$\eta:\ A\xrightarrow{\binom{f_1}{f_2}}B_1\oplus B_2\xrightarrow{(g_1,g_2)}C\dashrightarrow.$$

用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,C)$ 作用 η, 有如下正合列:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C,C)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g,C)}\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,C).$$

因为 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,C)=0$, 所以 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g,C)$ 是满射.

现在证明 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g,C)$ 是单射, 从而可得到 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g,C)$ 是同构.

任取 $h\in\mathsf{Ker}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g,C)$, 则有 $hg=0$. 由于 $\mathscr{C}$ 有足够多的内射, 所以存在 $\mathbb{E}$- 三角

$$A\xrightarrow{x}I\xrightarrow{y}\Sigma A\dashrightarrow,$$

其中 $I\in\mathcal{I}$. 于是有如下 $\mathbb{E}$- 三角之间的交换图:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, dashed, "w"] & {} \\
A \arrow[r, "x"] & I \arrow[r, "y"] & \Sigma A \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd}$$

使得

$$B\xrightarrow{\binom{g}{u}}C\oplus I\xrightarrow{(w,-y)}\Sigma A\dashrightarrow$$

是 $\mathbb{E}$- 三角. 因为 $hg=0$, 所以有 $(h,0)\binom{g}{u}=0$. 从而存在态射 $t\colon\Sigma A\to C$ 使得 $t(w,-y)=(h,0)$, 即有 $h=tw$. 而 $t\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Sigma C,A)=0$, 因此有 $h=0$. 这证明了 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g,C)$ 是单射.

考虑态射 $(g_1,0)\colon B\to C$ 和 $(0,g_2)\colon B\to C$, 则存在态射 $s,s'\colon C\to C$ 使得 $s(g_1,g_2)=(g_1,0)$ 和 $s'(g_1,g_2)=(0,g_2)$. 于是得到 $sg_1=g_1$, $sg_2=0$, $s'g_1=0$, $s'g_2=g_2$. 注意到 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g,C)(s+s')=(g_1,g_2)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g,C)(1_C)=(g_1,g_2)$, 则有 $s+s'=1_C$. 我们断言 s 和 s' 是幂等的.

由于 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g,C)(ss')=(0,0)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g,C)$ 同构, 所以 $ss'=0$. 由于 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g,C)(s's)=(0,0)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g,C)$ 同构, 所以 $s's=0$. 由 $s+s'=1_C$, 有 $s^2+ss'=s$, 进而有 $s^2=s$. 由 $s+s'=1_C$, 有 $(s')^2+s's=s'$, 进而有 $(s')^2=s'$.

因为 $\mathscr{C}$ 是 Krull-Schmidt 的且 C 是不可分解的, 所以有 $s=0$ 或者 $s'=0$. 通过上面的等式, 得到 $g_1=0$ 或 $g_2=0$.

假设 $g_1=0$, 则有 $g=(g_1,g_2)=(0,g_2)=g_2(0,1)$. 又因为 g 是容许满态射, 所以由 WIC 条件可知, g_2 是容许满态射. 因此它能够嵌入到一个 $\mathbb{E}$- 三角, 即

$$W'\xrightarrow{h_2}B_2\xrightarrow{g_2}C\overset{\delta'}{\dashrightarrow}.$$

将其与平凡的 $\mathbb{E}$- 三角

$$B_1\xrightarrow{1_{B_1}}B_1\longrightarrow 0\dashrightarrow$$

直和得到 $\mathbb{E}$- 三角

$$B_1\oplus W'\xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&h_2\end{smallmatrix}\right)}B_1\oplus B_2\xrightarrow{(0,g_2)}C\dashrightarrow.$$

通过 (ET3)$^{\rm op}$, 有如下 $\mathbb{E}$- 三角之间的交换图:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & B_1\oplus B_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & C \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & {} \\ B_1\oplus W' \arrow[r] & B_1\oplus B_2 \arrow[r] & C \arrow[r, dashed] & {}. \end{tikzcd}$$

由文献 [7, 推论 3.6] 知, φ 是同构, 即 W' 是 A 的一个直和项.

另一方面, 由 (ET3)$^{\rm op}$, 也可以得到如下 $\mathbb{E}$- 三角之间的交换图:

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, dashed, "\phi"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "\binom{0}{1}"] & C \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & {} \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] & {}. \end{tikzcd}$$

我们断言这个 $\mathbb{E}$- 三角

$$\eta':\ W' \xrightarrow{h_2} B_2 \xrightarrow{g_2} C \overset{\delta'}{\dashrightarrow}$$

是不可裂的. 如果它是可裂的, 则 g_2 是可裂满的, 从而存在态射 $g'\colon C\to B_2$ 使得 $g_2g'=1_C$. 于是 $g\binom{0}{1}g'=g_2g'=1_C$, 即 g 是可裂满的, 这与 η 是不可裂的矛盾. 故 η' 是不可裂的. 因为 W' 是 A 的一个直和项, 所以有 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W',C)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Sigma W',C)=0$. 而 $\alpha(B_2)<\alpha(B)$. 由归纳假设可知, 结论成立.

对于 $g_2=0$ 的情形, 可以类似地证明结论成立. 综上可知结论成立. □

注 2.1 从命题 2.1 的证明来看, 这个条件 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Sigma A,C)=0$ 只用来证明 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g,C)$ 是单射. 而在正合范畴中, 由于 Hom 函子是左正合的, 因此这个态射 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g,C)$ 一定是单射. 换言之, 在正合范畴的框架下, 命题 2.1 成立, 不需要假设条件 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Sigma A,C)=0$.

现在介绍外三角范畴中的滤对象, 将在主要结果中使用. 设 $(\mathscr{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 是外三角范畴且 $\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{C}$ 的一个对象类. 如果存在一族 $\mathbb{E}$- 三角

$$\eta=\{\eta_i\colon M_{i-1}\to M_i\to X_i \dashrightarrow\}_{i=0}^{n}$$

使得 $M_{-1}=0=X_0$、$M_n=M$ 和 $X_i\in\mathscr{X}$ 对于 $i\geqslant 1$ 成立, 则称 $M\in\mathscr{C}$ 有 $\mathscr{X}$- 滤链. 在这种情形下, 定义两个长度

$$\ell_{\mathscr{X},\eta}(M):=n \quad 和 \quad \ell_{\mathscr{X}}(M):=\min\{\ell_{\mathscr{X},\eta}(M)\mid \eta\ 是\ M\ 的一个\ \mathscr{X}\text{- 滤链}\}.$$

用 $\mathfrak{F}(\mathscr{X})$ 表示存在 $\mathscr{X}$- 滤链的对象 $M\in\mathscr{C}$ 构成的类. 关于 $\mathscr{X}$, 我们给出如下 4 个垂直类的记号:

$$\begin{aligned} {}^{\perp}\mathscr{X}&:=\{A\in\mathscr{C}\mid \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,X)=0,\forall X\in\mathscr{X}\},\\ \mathscr{X}^{\perp}&:=\{A\in\mathscr{C}\mid \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,A)=0,\forall X\in\mathscr{X}\},\\ {}^{\mathbb{E}\perp}\mathscr{X}&:=\{A\in\mathscr{C}\mid \mathbb{E}(A,X)=0,\forall X\in\mathscr{X}\},\\ \mathscr{X}^{\mathbb{E}\perp}&:=\{A\in\mathscr{C}\mid \mathbb{E}(X,A)=0,\forall X\in\mathscr{X}\}. \end{aligned}$$

对于 $\mathscr{C}$ 中的两个对象类 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}$, 记 $\mathscr{X}*\mathscr{Y}$ 是这些对象 $A\in\mathscr{C}$ 构成的类, A 是 $\mathbb{E}$- 三角 $X\to A\to Y\dashrightarrow$ 的中间项, 其中 $X\in\mathscr{X}$ 和 $Y\in\mathscr{Y}$. 如果 $\mathscr{X}*\mathscr{X}\subseteq\mathscr{X}$, 则称 $\mathscr{X}$ 在扩张下是封闭的.

注 2.2 设 $(\mathscr{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 是一个外三角范畴且 $\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{C}$ 的一个对象类, 则下列陈述成立:

(1) 对任意的 $n\geqslant 1$, 有 $\mathfrak{F}(\mathscr{X})=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathfrak{F}_n(\mathscr{X})$, 其中 $\mathfrak{F}_0(\mathscr{X}):=\{0\}$ 和 $\mathfrak{F}_n(\mathscr{X}):=\mathfrak{F}_{n-1}(\mathscr{X})*\mathscr{X}$;

(2) 对任意的 $M\in\mathfrak{F}(\mathscr{X})$, 有 $\ell_{\mathscr{X}}(M)=\min\{n\in\mathbb{N}\mid M\in\mathfrak{F}_n(\mathscr{X})\}$.

我们从文献 [11] 中的第 3 节收集了如下 4 个引理, 该文献给出了详细的证明.

引理 2.3 设 $\mathscr{C}$ 是外三角范畴, $\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{C}$ 的一个对象类, 则有

$$^{\perp}\mathscr{X}={}^{\perp}\mathfrak{F}(\mathscr{X})\quad 和 \quad {}^{\mathbb{E}\perp}\mathscr{X}={}^{\mathbb{E}\perp}\mathfrak{F}(\mathscr{X}).$$

引理 2.4 设 $\mathscr{C}$ 是外三角范畴, $\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{C}$ 的一个对象类, 则 $\mathfrak{F}(\mathscr{X})$ 在扩张下是封闭的. 特别地, 它对有限直和是封闭的.

引理 2.5 设 $\mathscr{C}$ 是外三角范畴, $\mathscr{Y}$ 和 $\mathscr{Z}$ 是 $\mathscr{C}$ 的两个对象类.

(1) 如果 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathscr{Y},\mathscr{Z})=0$, 那么 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathfrak{F}(\mathscr{Y}),\mathfrak{F}(\mathscr{Z}))=0$;

(2) 如果 $\mathbb{E}(\mathscr{Y},\mathscr{Z})=0$, 那么 $\mathbb{E}(\mathfrak{F}(\mathscr{Y}),\mathfrak{F}(\mathscr{Z}))=0$.

设 $\Theta=\{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ 是外三角范畴 $(\mathscr{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 的一族对象. 给定 $M\in\mathfrak{F}(\Theta)$ 的 Θ- 滤链

$$\eta=\{\eta_k\colon M_{k-1}\to M_k\to X_k \dashrightarrow\}_{k=0}^n,$$

其中 $M_{-1}=0, M_n=M$. 记 $[M:\Theta(i)]_\xi$ 是 $\Theta(i)$ 在 M 中的 ξ- 滤链多样性 (ξ-filtration multiplicity), 即 $[M:\Theta(i)]_\xi$ 是集合 $\{k\in\{1,2,\dots,n\}\mid X_k\simeq\Theta(i)\}$ 的基数 (cardinality).

引理 2.6 设 $\Theta=\{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ 是外三角范畴 $(\mathscr{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 的一族对象, 且有 $\mathbb{E}(\Theta(j),\Theta(i))=0, \forall j\geqslant i$. 若 ξ 是关于 $M\in\mathfrak{F}(\Theta)$ 的 Θ- 滤链, 则存在 M 的一个 Θ- 滤链 η 和一族 $\mathbb{E}$- 三角 Ξ, 满足如下条件:

(1) 对任意的 $i\in[1,t]$, 有 $m(i):=[M:\Theta(i)]_\xi=[M:\Theta(i)]_\eta$;

(2) 一族 η 是有序的, 即

$$\eta=\{\eta_i\colon M_{i-1}\to M_i\to\Theta(k_i)\dashrightarrow\}_{i=0}^n,$$

其中, $\Theta(k_0):=0$, $M_{-1}:=0$, $k_n\leqslant k_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant k_1$;

(3) $\Xi=\{\Xi_i\colon M'_{i-1}\to M'_i\to\Theta(\lambda_i)^{m(\lambda_i)}\dashrightarrow\}_{i=0}^d$, $\{\Theta(\lambda_i)\}_{i=1}^d$ 是出现在 M 的 Θ- 滤链中不同的 $\Theta(j)$ 构成的集合, 而且 $\Theta(\lambda_0):=0$, $M'_{-1}:=0$, $M'_d=M$, $\lambda_d<\lambda_{d-1}<\cdots<\lambda_1$.

3 外三角范畴的同调系统

本节在外三角范畴中引进同调系统的概念, 它可以看作模范畴中分层系统的概念和三角范畴同调系统概念的统一. 对任意的 $n\in\mathbb{Z}^+$, 记 $[1,n]:=\{1,2,\dots,n\}$. 从现在开始, 如果没有特殊的说明, 均假设 $\mathscr{C}$ 是外三角范畴且有足够多的投射和足够多的内射.

定义 3.1 如果一个二元组 $(\Theta,\leqslant)$ 满足如下条件:

(S1) $\leqslant$ 关于 $[1,t]$ 是一个全序集;

(S2) $\Theta=\{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ 是 $\mathscr{C}$ 中一族不可分解对象;

(S3) 对于 $j>i$, 有 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta(j),\Theta(i))=0$;

(S4) 对于 $j\geqslant i$, 有 $\mathbb{E}(\Theta(j),\Theta(i))=0$;

(S5) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta,\Omega\Theta)=0$,

则这个二元组 $(\Theta,\leqslant)$ 称为 $\mathscr{C}$ 中的一个尺码为 t 的 Θ- 系统.

定义 3.2 如果一个三元组 $(\Theta, \boldsymbol{Q}, \leqslant)$ 满足如下条件:

(PS1) $\leqslant$ 关于 $[1,t]$ 是一个全序集;

(PS2) $\Theta=\{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ 是 $\mathscr{C}$ 中一族非零的对象;

(PS3) 对于 $j>i$, 有 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta(j),\Theta(i))=0$;

(PS4) $\boldsymbol{Q}=\{Q(i)\}_{i=1}^{t}$ 是 $\mathscr{C}$ 中一族不可分解的对象且满足

$$\boldsymbol{Q}:=\bigoplus_{i=1}^{t} Q(i)\in {}^{\perp}(\Omega\Theta)\cap {}^{\perp_{\mathbb{E}}}\Theta;$$

(PS5) 对每一个 $i\in[1,t]$, 存在 $\mathscr{C}$ 中的 $\mathbb{E}$- 三角

$$\eta_i:\ K(i)\longrightarrow Q(i)\xrightarrow{\beta_i}\Theta(i)\dashrightarrow$$

使得 $K(i)\in\mathfrak{F}(\{\Theta(j)\mid j>i\})$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Sigma K(i),\Theta(i))=0$,
则这个三元组 $(\Theta,\boldsymbol{Q},\leqslant)$ 称为 $\mathscr{C}$ 中的一个尺码为 t 的 Θ- 投射系统.

定义 3.3 如果一个三元组 $(\Theta,\boldsymbol{Y},\leqslant)$ 满足如下条件:

(IS1) $\leqslant$ 关于 $[1,t]$ 是一个全序集;

(IS2) $\Theta=\{\Theta(i)\}_{i=1}^{t}$ 是 $\mathscr{C}$ 中一族非零的对象;

(IS3) 对于 $j>i$, 有 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta(j),\Theta(i))=0$;

(IS4) $\boldsymbol{Y}=\{Y(i)\}_{i=1}^{t}$ 是 $\mathscr{C}$ 中一族不可分解的对象且满足

$$\boldsymbol{Y}:=\bigoplus_{i=1}^{t} Y(i)\in(\Omega\Theta)^{\perp}\cap\Theta^{\perp_{\mathbb{E}}};$$

(IS5) 对每一个 $i\in[1,t]$, 存在 $\mathscr{C}$ 中的 $\mathbb{E}$- 三角

$$\xi_i:\ \Theta(i)\xrightarrow{\alpha_i}Y(i)\longrightarrow Z(i)\dashrightarrow$$

使得 $Z(i)\in\mathfrak{F}(\{\Theta(j)\mid j<i\})$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta(i),\Omega Z(i))=0$,
则这个三元组 $(\Theta,\boldsymbol{Y},\leqslant)$ 称为 $\mathscr{C}$ 中的一个尺码为 t 的 Θ- 内射系统,

注 3.1 三元组 $(\Theta,\boldsymbol{Y},\leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个尺码为 t 的 Θ- 内射系统当且仅当 $(\Theta^{\mathrm{op}},\boldsymbol{Y}^{\mathrm{op}},\leqslant^{\mathrm{op}})$ 是 $\mathscr{C}$ 的反范畴 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ 中的一个尺码为 t 的 Θ- 投射系统, 其中 $\leqslant^{\mathrm{op}}$ 与 $\leqslant$ 的顺序相反. 所以任意与 Θ- 内射系统有关的结果, 都能够转化到 Θ- 投射系统, 故仅需处理 Θ- 投射系统有关的问题.

引理 3.1 设 $(\Theta,\boldsymbol{Q},\leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个尺码为 t 的 Θ- 投射系统, 下列陈述成立:

(1) 对于 $j\geqslant i$, 有 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(K(j),\Theta(i))=0=\mathbb{E}(\Theta(j),\Theta(i))$;

(2) 对所有 $j\geqslant i$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\beta_j,\Theta(i)):\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta(j),\Theta(i))\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q(j),\Theta(i))$ 是一个 Abel 群同构;

(3) 如果 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Sigma K(j),\Omega\Theta(i))=0$, $\forall\, i,j\in[1,t]$, 则 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta,\Omega\Theta)=0$.

证明 (1) 设 $j\geqslant i$. 注意到 $K(j)\in\mathfrak{F}(\{\Theta(\lambda)\mid\lambda>j\})$, 对于 $\lambda>j\geqslant i$, 有

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta(\lambda),\Theta(i))=0.$$

由引理 2.5 知, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(K(j),\Theta(i))=0$. 考虑定义 3.2(PS5) 中的 $\mathbb{E}$- 三角

$$\eta_j:\ K(j)\longrightarrow Q(j)\xrightarrow{\beta_j}\Theta(j)\dashrightarrow.$$

用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,\Theta(i))$ 作用到 η_j, 有如下正合列:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(K(j),\Theta(i)) \longrightarrow \mathbb{E}(\Theta(j),\Theta(i)) \longrightarrow \mathbb{E}(Q(j),\Theta(i)).$$

因为 $\boldsymbol{Q} \subseteq {}^{\perp_{\mathbb{E}}}\Theta$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(K(j),\Theta(i))=0$, 所以从上面的正合列可得到

$$\mathbb{E}(\Theta(j),\Theta(i))=0, \quad \text{对于 } j \geqslant i \text{ 成立}.$$

(2) 假设 $j \geqslant i$. 用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,\Theta(i))$ 作用上面的 $\mathbb{E}$- 三角 η_j, 有如下正合列:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta(j),\Theta(i)) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\beta_j,\Theta(i))} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q(j),\Theta(i)) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(K(j),\Theta(i)).$$

由 (1) 知, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(K(j),\Theta(i))=0$, 于是对于 $j \geqslant i$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\beta_j,\Theta(i))$ 是满射.

下面证明 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\beta_j,\Theta(i))$ 是单射, 从而它是同构.

任取 $h \in \mathsf{Ker}\,\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\beta_j,\Theta(i))$, 则有 $h\beta_j=0$. 由于 $\mathscr{C}$ 有足够多的内射, 所以存在 $\mathbb{E}$- 三角

$$K(j) \xrightarrow{x} I \xrightarrow{y} \Sigma K(j) \dashrightarrow,$$

其中 $I \in \mathcal{I}$. 于是有如下 $\mathbb{E}$- 三角之间的交换图:

$$\begin{tikzcd}
K(j) \arrow[r] \arrow[d, equal] & Q(j) \arrow[r, "\beta_j"] \arrow[d, "u"] & \Theta(j) \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, dashed, "w"] & {} \\
K(j) \arrow[r, "x"] & I \arrow[r, "y"] & \Sigma K(j) \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd}$$

使得

$$Q(j) \xrightarrow{\binom{\beta_j}{u}} \Theta(j) \oplus I \xrightarrow{(w,-y)} \Sigma K(j) \dashrightarrow$$

是 $\mathbb{E}$- 三角. 因为 $h\beta_j=0$, 所以有 $(h,0)\binom{\beta_j}{u}=0$. 则存在态射 $t\colon \Sigma K(j) \to \Theta(i)$ 使得 $t(w,-y)=(h,0)$, 即有 $h=tw$. 而 $t \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Sigma K(i)[1],\Theta(i))=0$ (参见定义 3.2(PS5)), 因此有 $h=0$. 这证明了 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(g,C)$ 是单射.

假设 $j>i$, 则 $\mathsf{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\beta_j,\Theta(i))) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta(j),\Theta(i))=0$. 同样可以得到 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\beta_j,\Theta(i))$ 也是同构.

(3) 假设 $i,j \in [1,t]$. 用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,\Omega\Theta(i))$ 作用 $\mathbb{E}$- 三角

$$Q(j) \xrightarrow{\binom{\beta_j}{u}} \Theta(j) \oplus I \xrightarrow{(w,-y)} \Sigma K(j) \dashrightarrow,$$

有如下正合列:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Sigma K(j),\Omega\Theta(i)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta(j)\oplus I,\Omega\Theta(i)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q(j),\Omega\Theta(i)).$$

因为

$$\boldsymbol{Q} \subseteq {}^{\perp}(\Omega\Theta), \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Sigma K(j),\Omega\Theta(i))=0,$$

所以有 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta(j),\Omega\Theta(i))=0$, 进而 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta,\Omega\Theta)=0$. □

设 $\Theta=\{\Theta(i)\}_{i=1}^t$ 是外三角范畴 $(\mathscr{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ 的一族对象. 如果 $\mathbb{E}(M,\mathfrak{F}(\Theta))=0$, 则对象 $M \in \mathscr{C}$ 称为 Θ- 投射. 将 $\mathscr{C}$ 中所有 Θ- 投射对象构成的类记作 $\mathcal{P}(\Theta)$.

引理 3.2 假设 $\mathscr{C}$ 是 Artin 外三角 R- 范畴且有足够多的投射和足够多的内射, $(\Theta,\boldsymbol{Q},\leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个尺码为 t 的 Θ- 投射系统, 下列陈述成立:

(1) 对任意的 $i\in[1,t]$, 定义 3.2(PS5) 中的态射 $\beta_i\colon Q(i)\to\Theta(i)$ 均是 $\Theta(i)$ 的一个 $\mathcal{P}(\Theta)$- 盖;

(2) 设 $(\Theta,\mathbf{Q}',\leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 中尺码为 t 的另外一个 Θ- 投射系统, 则 $\mathbf{Q}'\simeq\boldsymbol{Q}$, 即对每一个 $i\in[1,t]$, 存在一个同构 $\rho_i\colon Q(i)\to Q'(i)$ 使得下图可交换:

$$\begin{tikzcd} Q(i) \arrow[rr, "\rho_i"] \arrow[dr, "\beta_i"'] & & Q'(i) \arrow[dl, "\beta_i'"] \\ & \Theta(i). & \end{tikzcd}$$

证明 (1) 假设 $i\in[1,t]$. 首先证明 $\beta_i\colon Q(i)\to\Theta(i)$ 是右极小的.

我们断言 $\beta_i\neq 0$. 事实上, 由引理 3.1(2) 知,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\beta_i,\Theta(i))\colon \mathsf{End}_{\mathcal{T}}(\Theta(i))\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Q(i),\Theta(i))$$

是同构. 因为 $1_{\Theta(i)}\neq 0$, 所以 $\beta_i=\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\beta_i,\Theta(i))(1_{\Theta(i)})\neq 0$. 令 $f:Q(i)\to Q(i)$ 使得 $\beta_i f=\beta_i$. 假设对任意的 $n\in\mathbb{Z}^+$, 有 $\beta_i=\beta_i f^n$. 因为 $\beta_i\neq 0$, 所以对任意的 $n\in\mathbb{Z}^+$ 有 $f^n\neq 0$. 注意到 $Q(i)$ 是不可分解的, 由引理 2.1(1) 知, $\mathsf{End}_{\mathscr{C}}(Q(i))$ 是局部的 Artin R- 代数. 那么 $\mathsf{rad}(\mathsf{End}_{\mathscr{C}}(Q(i)))$ 是幂零的, 且与 $\mathsf{End}_{\mathscr{C}}(Q(i))$ 中的非可逆元构成的集合是一致的. 因为 $f^n\neq 0$, 所以对任意的 $n\in\mathbb{Z}^+$, 有 $f\notin\mathsf{rad}(\mathsf{End}_{\mathscr{C}}(Q(i)))$. 故 f 是可逆的. 这证明了 $\beta_i:Q(i)\to\Theta(i)$ 是右极小的.

现在证明 $\beta_i\colon Q(i)\to\Theta(i)$ 是 $\Theta(i)$ 的一个 $\mathcal{P}(\Theta)$- 预覆盖. 设 $g\colon X\to\Theta(i)$, 则有 $X\in\mathcal{P}(\Theta)$. 用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-)$ 作用到 $\mathbb{E}$- 三角 η_i (参见定义 3.2(PS5)), 有如下正合列:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Q(i))\xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\beta_i)}\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\Theta(i))\to\mathbb{E}(X,K(i)).$$

因为 $X\in\mathcal{P}(\Theta)$ 和 $K(i)\in\mathfrak{F}(\Theta)$, 所以有 $\mathbb{E}(X,K(i))=0$. 这证明了 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\beta_i)$ 是满射. 因此 β_i 是 $\Theta(i)$ 的一个 $\mathcal{P}(\Theta)$- 预覆盖.

(2) 可以直接由 (1) 得到. □

设 $(\Theta,\leqslant)$ 是外三角范畴 $\mathscr{C}$ 中的一个 Θ- 系统. 一个很自然的问题是, 是否存在 $\mathscr{C}$ 中的一族对象 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $(\Theta,\boldsymbol{Q},\leqslant)$ 成为 Θ- 投射系统. 为了解决这个问题, 需要如下一些准备. 对任意的 $a,b\in\mathbb{Z}$ $(a\leqslant b)$, 记 $[a,b]:=\{x\in\mathbb{Z}\mid a\leqslant x\leqslant b\}$.

引理 3.3 设 $(\Theta,\leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个尺码为 t 的 Θ- 系统, 其中 $\leqslant$ 是关于 $[1,t]$ 的自然顺序, 则下列陈述成立:

(1) 如果 $M\in\mathfrak{F}(\{\Theta(j)\mid j\in[i,i+k]\})$, $N\in\mathfrak{F}(\{\Theta(r)\mid r>i+k\})$, $L\in\mathfrak{F}(\{\Theta(s)\mid s<i\})$, 那么 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(N,M)=0$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,L)=0$;

(2) 如果 $M\in\mathfrak{F}(\{\Theta(j)\mid j\in[i,i+k]\})$, $N\in\mathfrak{F}(\{\Theta(r)\mid r\geqslant i+k\})$, $L\in\mathfrak{F}(\{\Theta(s)\mid s\leqslant i\})$, 那么 $\mathbb{E}(N,M)=0$ 和 $\mathbb{E}(M,L)=0$;

(3) 如果 $M,N\in\mathfrak{F}(\Theta)$, 那么 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,\Omega N)=0$.

证明 结论可以由引理 2.5 和 Θ- 系统的定义直接得到. □

引理 3.4 设 $\mathscr{C}$ 是一个 Artin 外三角 R- 范畴且有足够多的投射和足够多的内射, $(\Theta,\leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个尺码为 t 的 Θ- 系统, $\leqslant$ 是关于 $[1,t]$ 的自然顺序, 其中 $t>1$ 和 $i\in[1,t]$. 则对每一个 $k\in[1,t-i]$, 存在 $\mathscr{C}$ 中的 $\mathbb{E}$- 三角 $\xi_k: V_k\rightarrowtail U_k\twoheadrightarrow\Theta(i)\dashrightarrow$ 满足如下条件:

(1) U_k 是不可分解的;

(2) $V_k \in \mathfrak{F}(\{\Theta(j) \mid i < j \leqslant i+k\})$;

(3) 对于 $j \in [i, i+k]$, 有 $\mathbb{E}(U_k, \Theta(j)) = 0$.

证明　对 k 应用数学归纳法.

当 $k=1$ 时, 通过定义有 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta(i+1), \Theta(i)) = 0$. 当 $\mathbb{E}(\Theta(i), \Theta(i+1)) = 0$ 时, 我们所期望的 $\mathbb{E}$-三角如下:

$$0 \longrightarrow \Theta(i) \xrightarrow{1} \Theta(i) \dashrightarrow 0.$$

假设 $\mathbb{E}(\Theta(i), \Theta(i+1)) \neq 0$. 由引理 2.2 知, 存在如下非可裂的 $\mathbb{E}$- 三角:

$$\xi: \ \Theta(i+1)^n \longrightarrow B \longrightarrow \Theta(i) \dashrightarrow$$

且 $\mathbb{E}(B, \Theta(i+1)) = 0$. 用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, \Theta(i))$ 作用于 ξ, 有如下正合列:

$$\mathbb{E}(\Theta(i), \Theta(i)) \longrightarrow \mathbb{E}(B, \Theta(i)) \longrightarrow \mathbb{E}(\Theta(i+1)^n, \Theta(i)).$$

因为 $\mathbb{E}(\Theta(i), \Theta(i)) = 0 = \mathbb{E}(\Theta(i+1)^n, \Theta(i)) = 0$, 所以有 $\mathbb{E}(B, \Theta(i)) = 0$. 因为

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta(i+1)^n, \Theta(i)) = 0 = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta(i+1)^n, \Omega\Theta(i)) = 0,$$

由命题 2.1 知, 存在 $\mathbb{E}$- 三角 $\xi': \ \Theta(i+1)^m \rightarrow U_1 \rightarrow \Theta(i) \dashrightarrow$, 其中, $m \leqslant n$, U_1 是 B 的一个不可分解的直和项. 取 $\xi_1 := \xi'$ 满足题设的条件. 假设存在 $\mathbb{E}$- 三角

$$\xi_k: V_k \longrightarrow U_k \longrightarrow \Theta(i) \dashrightarrow$$

满足题设的要求. 我们能够从 ξ_k 出发, 通过如下方式构造 ξ_{k+1}.

如果 $\mathbb{E}(U_k, \Theta(i+k+1)) = 0$, 则 $\xi_{k+1} := \xi_k$ 为所求的 $\mathbb{E}$- 三角. 如果 $\mathbb{E}(U_k, \Theta(i+k+1)) \neq 0$, 则由引理 2.2 知, 存在非可裂的 $\mathbb{E}$- 三角

$$\eta: \ \Theta(i+k+1)^a \longrightarrow U \longrightarrow U_k \dashrightarrow$$

且 $\mathbb{E}(U, \Theta(i+k+1)) = 0$. 用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, \Theta(i+k+s))$ 作用 η, 其中 $s \in [-k, 0]$, 有如下正合列:

$$\mathbb{E}(U_k, \Theta(i+k+s)) \rightarrow \mathbb{E}(U, \Theta(i+k+s)) \rightarrow \mathbb{E}(\Theta(i+k+1)^a, \Theta(i+k+s)).$$

因为 $\mathbb{E}(\Theta(i+k+1)^a, \Theta(i+k+s)) = 0$, $\mathbb{E}(U_k, \Theta(i+k+s)) = 0$, 则对于 $s \in [-k, 0]$, 有

$$\mathbb{E}(U, \Theta(i+k+s)) = 0,$$

进而对于 $j \in [i, i+k+1]$, 有 $\mathbb{E}(U, \Theta(j)) = 0$.

因为 $U_k \in \mathfrak{F}(\{\Theta(j) \mid j \in [i, i+k]\})$, 由引理 3.3(1), 有 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta(i+k+1)^a, U_k) = 0$. 由引理 3.3(3), 得到

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta(i+k+1)^a, \Omega U_k) = 0.$$

由命题 2.1 知, 存在 $\mathbb{E}$- 三角 η' : $\Theta(i+k+1)^d \longrightarrow U_{k+1} \longrightarrow U_k \dashrightarrow$, 其中, $d \leqslant a$, U_{k+1} 是 U 的一个不可分解的直和项. 通过 $(\mathrm{ET4})^{\mathrm{op}}$, 有如下 $\mathbb{E}$- 三角之间的交换图:

$$\begin{tikzcd}
\Theta(i+k+1)^d \arrow[r] \arrow[d, equal] & V_{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "\mu_{k+1}"] & V_k \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\mu_k"] & {} \\
\Theta(i+k+1)^d \arrow[r] & U_{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & U_k \arrow[r, dashed] \arrow[d] & {} \\
& \Theta(i) \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & \Theta(i) \arrow[d, dashed] & \\
& {} & {} &
\end{tikzcd}.$$

注意到 $V_k \in \mathfrak{F}(\{\Theta(j) \mid i < j \leqslant i+k\})$, 由引理 2.4 知,

$$V_{k+1} \in \mathfrak{F}(\{\Theta(j) \mid i < j \leqslant i+k+1\}).$$

因为 U_{k+1} 是 U 的一个不可分解的直和项, 所以对于 $j \in [i, i+k+1]$, 有 $\mathbb{E}(U_{k+1}, \Theta(j)) = 0$. 因此所期望的 $\mathbb{E}$- 三角就是上述交换图中的第二列, 即 ξ_{k+1} 取 $\mathbb{E}$- 三角

$$V_{k+1} \xrightarrow{\mu_{k+1}} U_{k+1} \longrightarrow \Theta(i) \dashrightarrow .$$

至此完成全部结论的证明. □

定理 3.1 设 $\mathscr{C}$ 是一个 Artin 外三角 R- 范畴且有足够多的投射和足够多的内射, $(\Theta, \leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 的一个尺码为 t 的 Θ- 系统. 则在 $\mathscr{C}$ 中存在唯一的 (在同构的意义下) 一族对象 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $(\Theta, \boldsymbol{Q}, \leqslant)$ 是尺码为 t 的 Θ- 投射系统.

证明 不失一般性, 可以假设 $\leqslant$ 是关于 $[1, t]$ 的自然顺序. 对于每一个 $i < t$, 记 $\eta_i := \xi_{t-i}$, 其中 ξ_{t-i} 是引理 3.4 中的 $\mathbb{E}$- 三角

$$\xi_{t-i}: \ V_{t-i} \longrightarrow U_{t-i} \longrightarrow \Theta(i) \dashrightarrow .$$

设 $K(i) := V_{t-i}$ 和 $Q(i) := U_{t-i}$, 则有 $K(i) \in \mathfrak{F}(\{\Theta(j) \mid j > i\})$ 和

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q(i), \Theta(j)[1]) = 0, \quad 对于\ j \geqslant i.$$

由 $\mathbb{E}$- 三角 ξ_{t-i} 知, $Q(i) \in \mathfrak{F}(\{\Theta(j) \mid j \geqslant i\})$. 由引理 3.3(2) 和 3.3(3), 得到 $\mathbb{E}(Q(i), \Theta(r)[1]) = 0$ (对于 $r \leqslant i$) 和 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q(i), \Omega\Theta(r)) = 0$ (对任意的 r). 所以对任意的 i, 有 $Q(i) \in {}^{\perp}(\Omega\Theta) \cap {}^{\perp_{\mathbb{E}}}\Theta$. 对于 $i = t$, 取如下 $\mathbb{E}$- 三角:

$$\eta_t: \ 0 \longrightarrow \Theta(t) \xrightarrow{1} \Theta(t) \dashrightarrow$$

且记 $Q(t) := \Theta(t)$ 和 $K(t) := 0$, 则此 $\mathbb{E}$- 三角是我们所期望的. 如果还存在另外一族对象 $\mathbf{Q}'$ 使得 $(\Theta, \leqslant)$ 是一个尺码为 t 的 Θ- 投射系统, 则由引理 3.2 可得 $\boldsymbol{Q} \simeq \mathbf{Q}'$. □

将定理 3.1 应用到三角范畴, 有如下结论.

推论 3.1 (参见文献 [6, 定理 5.9]) 设 $\mathscr{C}$ 是一个 Artin 三角 R- 范畴, $(\Theta, \leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 的一个尺码为 t 的 Θ- 系统. 则在 $\mathscr{C}$ 中存在唯一的 (在同构的意义下) 一族对象 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $(\Theta, \boldsymbol{Q}, \leqslant)$ 是尺码为 t 的 Θ- 投射系统.

引理 3.5 设 $\mathscr{C}$ 是一个外三角 R- 范畴且有足够多的投射和足够多的内射, $(\Theta, \boldsymbol{Q}, \leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 的尺码为 t 的 Θ- 投射系统. 则对于 $Q' \in \mathsf{add}(Q)$, R- 函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q', -)\colon \mathfrak{F}(\Theta) \to \mathsf{Mod}(R)$ 是正合的.

证明 设 $\eta\colon A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \dashrightarrow$ 是 $\mathfrak{F}(\Theta)$ 中的 $\mathbb{E}$- 三角且 $Q' \in \mathsf{add}(Q)$. 用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q', -)$ 作用于 η, 则有正合列

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q', A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q', f)} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q', B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q', C) \to \mathbb{E}(Q', A).$$

因为 $\boldsymbol{Q} \subseteq {}^{\perp}(\Omega\Theta) \cap {}^{\perp_{\mathbb{E}}}\Theta$, 所以由引理 2.2 知, $\mathbb{E}(Q', A) = 0$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q', \Omega C) = 0$.

现在证明 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q', f)$ 是单射.

任取 $h \in \mathsf{Ker}\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q', f)$, 则有 $fh = 0$. 由于 $\mathscr{C}$ 有足够多的投射, 所以存在 $\mathbb{E}$- 三角

$$\Omega C \xrightarrow{x} P \xrightarrow{y} C \dashrightarrow,$$

其中 $P \in \mathcal{P}$. 于是有如下 $\mathbb{E}$- 三角之间的交换图:

$$\begin{tikzcd}
\Omega C \arrow[r, "x"] \arrow[d, dashed, "w"] & P \arrow[r, "y"] \arrow[d, "u"] & C \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & {} \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd}$$

使得

$$\Omega C \xrightarrow{\binom{x}{w}} P \oplus A \xrightarrow{(u, -f)} B \dashrightarrow$$

是 $\mathbb{E}$- 三角. 因为 $fh = 0$, 所以有 $(u, -f)\binom{0}{h} = 0$. 从而存在态射 $t\colon Q' \to \Omega C$ 使得 $\binom{x}{w}t = \binom{0}{h}$, 即有 $h = wt$. 而 $t \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q', \Omega C) = 0$, 因此有 $h = 0$. 这证明了 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q', f)$ 是单射. 因此

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q', A) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q', B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q', C) \to 0$$

是正合列, 故结论成立. □

引理 3.6 设 $\mathscr{C}$ 是一个外三角 R- 范畴且有足够多的投射和足够多的内射, $(\Theta, \boldsymbol{Q}, \leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 的尺码为 t 的 Θ- 投射系统. 则下列陈述成立:

(1) 对任意的 $M \in \mathfrak{F}(\Theta)$, M 和 $\Theta(i)$ 的滤链多样性 $[M : \Theta(i)]_{\xi}$ 不依赖于 M 的 Θ- 滤链 ξ, 因此将它记为 $[M : \Theta(i)]$. 特别地, $\ell_{\Theta}(M) = \sum_{i=1}^{t}[M : \Theta(i)]$.

(2) 对于 $i \neq j$, 有 $Q(i) \ncong Q(j)$.

证明 (1) 考虑 $M \in \mathfrak{F}(\Theta)$ 的 Θ- 滤链

$$\xi = \{\xi_l:\ M_{l-1} \longrightarrow M_l \longrightarrow \Theta(j_l) \dashrightarrow\}_{l=0}^{n},$$

其中, $M_{-1} = 0 = \Theta(j_0)$, $j_l \in [1, t]$ $(l \geqslant 1)$, $M_n = M$.

用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q(i), -)$ 作用到每一个 $\mathbb{E}$- 三角 ξ_j, 记 $\langle X, Y\rangle := \ell_R(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y))$, 有如下等式:

$$\begin{aligned}
\langle Q(i), M_1\rangle &= \langle Q(i), 0\rangle + \langle Q(i), \Theta(j_1)\rangle,\\
\langle Q(i), M_2\rangle &= \langle Q(i), \Theta(j_1)\rangle + \langle Q(i), \Theta(j_2)\rangle,\\
\langle Q(i), M_3\rangle &= \langle Q(i), M_2\rangle + \langle Q(i), \Theta(j_3)\rangle,
\end{aligned}$$

$$\vdots$$
$$\langle Q(i), M\rangle = \langle Q(i), M_{n-1}\rangle + \langle Q(i), \Theta(j_n)\rangle.$$

设 $c_i := \langle Q(i), M\rangle = \sum_{j=1}^{t}[M:\Theta(j)]_\xi\langle Q(i), \Theta(j)\rangle$. 考虑矩阵 $D := (d_{ij})$, 其中 $d_{ij} := \langle Q(i), \Theta(j)\rangle$. 由引理 3.1(2) 可知, D 是一个上三角矩阵且主对角线的每一个元素 $d_{ii} \neq 0$. 故 $\det(D) \neq 0$. 通过使用列向量

$$X := ([M:\Theta(1)]_\xi, [M:\Theta(2)]_\xi, \dots, [M:\Theta(t)]_\xi)^{\mathrm{T}}$$

和 $C := (c_1, c_2, \dots, c_t)^{\mathrm{T}}$, 上面的那些等式能够写成矩阵方程 $DX = C$. 因为 $\det(D) \neq 0$, 所以有 $X = D^{-1}C$. 因此 $[M:\Theta(j)]_\xi$ 仅仅依赖于数 $c_i = \langle Q(i), M\rangle$ 和 $d_{ij} = \langle Q(i), \Theta(j)\rangle$.

(2) 设 $i \neq j$. 假设 $j > i$. 由 (1) 和定义 3.2(PS5), 有 $[Q(i):\Theta(i)] = 1$ 和 $[Q(j):\Theta(i)] = 0$. 故 $Q(i) \not\simeq Q(j)$. □

定义 3.4 设 $\mathscr{C}$ 是一个外三角 R- 范畴且有足够多的投射和足够多的内射, $(\Theta, \boldsymbol{Q}, \leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 的尺码为 t 的 Θ- 投射系统. $M \in \mathfrak{F}(\Theta)$ 的 Θ- 支撑被定义成如下集合:

$$\mathsf{Supp}_\Theta(M) := \{i \in [1,t] \mid [M:\Theta(i)] \neq 0\}.$$

对于 $0 \neq M \in \mathfrak{F}(\Theta)$, 记 $\max(M)$ 是关于全序集 $\leqslant$ 的 $\mathsf{Supp}_\Theta(M)$ 的最大值, $\min(M)$ 是关于全序集 $\leqslant$ 的 $\mathsf{Supp}_\Theta(M)$ 的最小值. 记 $\max(0) := -\infty$ 和 $\min(0) := +\infty$.

定理 3.2 设 $\mathscr{C}$ 是一个外三角 R- 范畴且有足够多的投射和足够多的内射, $(\Theta, \boldsymbol{Q}, \leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 的尺码为 t 的 Θ- 投射系统, $M \in \mathfrak{F}(\Theta)$ 和 $i := \min(M)$. 则存在 $\mathscr{C}$ 中的 $\mathbb{E}$- 三角

$$N \longrightarrow Q_0(M) \xrightarrow{\varepsilon_M} M \dashrightarrow$$

满足如下条件:

(1) $N \in \mathfrak{F}(\Theta)$ 和 $Q_0(M) \in \mathsf{add}(\bigoplus_{j \geqslant i} Q(j))$;

(2) $\min(M) < \min(N)$ $(M \neq 0)$;

(3) $\varepsilon_M : Q_0(M) \to M$ 是 M 的一个 $\mathcal{P}(\Theta)$- 预覆盖.

证明 如果 $M = 0$, 则平凡的 $\mathbb{E}$- 三角 $0 \to 0 \to 0 \dashrightarrow$ 满足题设条件. 不失一般性, 可以假设 $\leqslant$ 是关于 $[1,t]$ 的自然顺序.

如果 $M \neq 0$, 则由引理 3.1(1) 和 2.6(3) 知, 存在 $\mathbb{E}$- 三角

$$N \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} \Theta(i)^{m_i} \dashrightarrow,$$

其中 $N \in \mathfrak{F}(\Theta)$ 和 $\min(M) < \min(N)$. 通过对 $i = \min(M)$ 进行反向归纳. 如果 $i = \min(M) = t$, 则有 $N = 0$. 因为 $Q(t) \simeq \Theta(t)$, 所以 $0 \to \Theta(t)^{m_i} \to \Theta(t)^{m_i} \dashrightarrow$ 是我们所期望的 $\mathbb{E}$- 三角.

设 $i = \min(M) < t$. 如果 $N = 0$, 则有 $M = \Theta(i)^{m_i}$. 那么如下 $\mathbb{E}$- 三角 (见定义 3.2(PS5)):

$$K(i)^{m_i} \longrightarrow Q(i)^{m_i} \xrightarrow{\beta_i^{m_i}} \Theta(i)^{m_i} \dashrightarrow$$

是我们所期望的. 假设 $N \neq 0$. 因为 $i = \min(M) < \min(N)$, 通过归纳, 可知存在 $\mathbb{E}$- 三角

$$N' \longrightarrow Q_0(N) \xrightarrow{\varepsilon_N} N \dashrightarrow$$

使得 $i < \min(N) < \min(N') =: i'$, $Q_0(N) \in \mathsf{add}(\bigoplus_{j \geqslant i'} Q(j))$, $\varepsilon_N : Q_0(N) \to N$ 是 N 的一个 $\mathcal{P}(\Theta)$- 预覆盖. 由引理 3.3 知, 存在如下 $\mathbb{E}$- 三角之间的交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & K(i)^{m_i} \arrow[r, equal] \arrow[d] & K(i)^{m_i} \arrow[d] & \\
N \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\theta"] & Q(i)^{m_i} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\beta_i^{m_i}"] & {} \\
N \arrow[r, "\varphi"] & M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, dashed] & \Theta(i)^{m_i} \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & {} \\
 & {} & {}. &
\end{tikzcd}$$

因为 $N \in \mathfrak{F}(\Theta)$, 所以有 $\mathbb{E}(Q(i), N) = 0$. 则上述交换图的第二行的 $\mathbb{E}$- 三角是可裂的. 因此存在态射 $i_2 \colon Q(i)^{m_i} \to E$ 使得 $\beta_i^{m_i} = \psi\theta i_2$. 定义 $\alpha := \theta i_2$ 和

$$\varepsilon := (\varphi\varepsilon_N, \alpha) : Q_0(N) \oplus Q(i)^{m_i} \to M.$$

因此有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
Q_0(N) \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\varepsilon_N"] & Q_0(M) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\varepsilon"] & Q(i)^{m_i} \arrow[r, dashed, "0"] \arrow[d, "\beta_i^{m_i}"] & {} \\
N \arrow[r, "\varphi"] & M \arrow[r, "\psi"] & \Theta(i)^{m_i} \arrow[r, dashed] & {},
\end{tikzcd}$$

其中, $Q_0(M) := Q_0(N) \oplus Q(i)^{m_i}$, $j_1 := \binom{1}{0}$, $\pi_2 := (0, 1)$. 因为 ε_N 和 $\beta_i^{m_i}$ 均是容许满态射, 所以一定存在一个容许满态射 $\varepsilon' \colon Q_0(M) \to M$ 使得下图是 $\mathbb{E}$- 三角之间的态射:

$$\begin{tikzcd}
Q_0(N) \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\varepsilon_N"] & Q_0(M) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon'"] & Q(i)^{m_i} \arrow[r, dashed, "0"] \arrow[d, "\beta_i^{m_i}"] & {} \\
N \arrow[r, "\varphi"] & M \arrow[r, "\psi"] & \Theta(i)^{m_i} \arrow[r, dashed] & {}.
\end{tikzcd}$$

因为 $\varepsilon' \colon Q_0(M) \to M$ 是容许满态射, 则它能够嵌入到一个 $\mathbb{E}$- 三角

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] & Q_0(M) \arrow[r, "\varepsilon'"] & M \arrow[r, dashed] & {}.
\end{tikzcd}$$

由文献 [5, 引理 4.14] 知, 存在如下 $\mathbb{E}$- 三角之间的交换图:

$$\begin{tikzcd}
N' \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & K(i)^{m_i} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & {} \\
Q_0(N) \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\varepsilon_N"] & Q_0(M) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\varepsilon"] & Q(i)^{m_i} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\beta_i^{m_i}"] & {} \\
N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dashed] & M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, dashed] & \Theta(i)^{m_i} \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & {} \\
{} & {} & {}. &
\end{tikzcd}$$

我们断言

$$P \longrightarrow Q_0(M) \xrightarrow{\varepsilon'} M \dashrightarrow$$

即为所求的 $\mathbb{E}$- 三角. 事实上, 因为

$$Q_0(N) \in \mathsf{add}\left(\bigoplus_{j \geqslant i'} Q(j)\right),$$

其中, $i < \min(N) < \min(N') = i'$, $Q(i)^{m_i} \in \mathfrak{F}(\{\Theta(j) \mid j \geqslant i\})$, 所以有

$$Q_0(M) \in \mathsf{add}\left(\bigoplus_{j \geqslant i} Q(j)\right).$$

因为

$$K(i)^{m_i} \in \mathfrak{F}(\{\Theta(j) \mid j > i\}), \quad N' \in \mathfrak{F}(\{\Theta(j) \mid j > i'\}),$$

其中 $i < i'$, 从上面图表的第一行可知 $P \in \mathfrak{F}(\{\Theta(j) \mid j > i\})$, 所以 $i = \min(M) < \min(P[-1])$.

最后证明 ε 是 M 的一个 $\mathcal{P}(\Theta)$- 预覆盖. 假设 $h\colon X \to M$ 是 $\mathscr{C}$ 中的态射且 $X \in \mathcal{P}(\Theta)$. 用函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, -)$ 作用到 $\mathbb{E}$- 三角 $P \longrightarrow Q_0(M) \xrightarrow{\varepsilon'} M \dashrightarrow$, 则有如下正合列:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Q_0(M)) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\varepsilon')} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, M) \to \mathbb{E}(X, P).$$

由引理 2.3 知, ${}^{\mathbb{E}\perp}\Theta = {}^{\mathbb{E}\perp}\mathfrak{F}(\Theta)$. 因为 $P \in \mathfrak{F}(\Theta)$, 所以有 $\mathbb{E}(X, P) = 0$. 这证明了 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \varepsilon')$ 是满射. 故态射 ε' 是 M 的一个 $\mathcal{P}(\Theta)$- 预覆盖. □

将定理 3.2 应用到三角范畴, 有如下结论:

推论 3.2 (参见文献 [6, 定理 5.13]) 设 $\mathscr{C}$ 是三角 R- 范畴, $(\Theta, \boldsymbol{Q}, \leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 的尺码为 t 的 Θ- 投射系统, $M \in \mathfrak{F}(\Theta)$, $i := \min(M)$, 则存在 $\mathscr{C}$ 中的 $\mathbb{E}$- 三角 $N \longrightarrow Q_0(M) \xrightarrow{\varepsilon_M} M \dashrightarrow$ 满足如下条件:

(1) $N \in \mathfrak{F}(\Theta)$ 和 $Q_0(M) \in \mathsf{add}(\bigoplus_{j \geqslant i} Q(j))$;

(2) 如果 $M \neq 0$, 则 $\min(M) < \min(N)$;

(3) $\varepsilon_M : Q_0(M) \to M$ 是 M 的一个 $\mathcal{P}(\Theta)$- 预覆盖.

4 标准分层代数与 Θ- 投射系统的联系

设 R 是一个交换环. A 是一个 Artin R- 代数. 记 $\mathsf{mod}(A)$ 是所有有限生成的左 A- 模构成的模范畴. 对任意的 $M, N \in \mathsf{mod}(A)$, 将所有 M 到 N 的态射像的和称为 M 在 N 中的迹 (trace), 记作 $\mathsf{Tr}_M(N)$. 设 t 是 Grothendieck 群 $K_0(A)$ 的秩, 记作 $\mathsf{rank}K_0(A) = t$. 将 $\mathsf{mod}(A)$ 中所有互不同构且不可分解的投射模 ${}_AP(i)$ 构成的集合记作 ${}_AP = \{{}_AP(i) \mid i \in [1, t]\}$. 所有标准 A- 模构成的集合记作 ${}_A\Delta = \{{}_A\Delta(i) \mid i \in [1, t]\}$, 其中 ${}_A\Delta(i) = {}_AP(i)/\mathsf{Tr}_{\bigoplus_{j>i} {}_AP(j)}({}_AP(i))$.

本节假设外三角范畴 $(\mathscr{C}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ 满足 WIC 条件.

定理 4.1 设 $\mathscr{C}$ 是一个 Artin 外三角 R- 范畴且有足够多的投射和足够多的内射, $(\Theta, \boldsymbol{Q}, \leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 的尺码为 t 的 Θ- 投射系统, $A := \mathsf{End}_{\mathscr{C}}(Q)^{\mathrm{op}}$,

$$e_Q := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q, -)\colon \mathscr{C} \to \mathsf{mod}(A)$$

和 ${}_AP(i) := e_Q(Q(i))$. 对于 $i \in [1, t]$, 下列陈述成立:

(1) ${}_AP := \{{}_AP(i) \mid i \in [1,t]\}$ 是不可分解投射 A- 模的一个代表集. 特别地, A 是基本的且 $\mathsf{rank}K_0(A) = t$.

(2) $e_Q(\Theta(i)) \simeq {}_A\Delta(i), \forall i \in [1,t]$, 其中 ${}_A\Delta$ 能够使用 ${}_AP$ 和给定的关于 $[1,t]$ 的顺序 $\leqslant$ 计算.

(3) $(A,\leqslant)$ 是一个标准分层代数, 换言之, $\mathsf{proj}(A) \subseteq \mathfrak{F}({}_A\Delta)$.

(4) 限制函子 $e_Q : \mathfrak{F}(\Theta) \to \mathfrak{F}({}_A\Delta)$ 是 R- 范畴之间的正合等价.

证明　通过引理 3.5 可知 $e_Q = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q,-)\,|_{\mathfrak{F}(\Theta)} : \mathfrak{F}(\Theta) \to \mathsf{mod}(A)$ 是正合函子.

(1) 可以由引理 2.1 和 3.6(2) 直接得到.

(2) 和 (3) 假设 $i \in [1,t]$. 由定义 3.2(PS5) 和定理 3.2, 有如下两个 $\mathbb{E}$- 三角:

$$\eta_i : K(i) \xrightarrow{\alpha_i} Q(i) \longrightarrow \Theta(i) \dashrightarrow \quad \text{和} \quad \eta_i' :\ K' \longrightarrow Q' \xrightarrow{\lambda_i} K(i) \dashrightarrow,$$

其中, $K(i), K' \in \mathfrak{F}(\{\Theta(j) \mid j > i\})$, $Q' \in \mathsf{add}(\bigoplus_{j>i} Q(j))$.

用函子 $e_Q = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q,-)$ 作用到 $\mathbb{E}$- 三角 η_i 和 η_i', 则有 $\mathsf{mod}(A)$ 中的正合列

$$\varepsilon_i :\ e_Q(Q') \xrightarrow{e_Q(\gamma_i)} {}_AP(i) \to e_Q(\Theta(i)) \to 0,$$

其中 $\gamma_i := \alpha_i\lambda_i$. 我们断言 $\mathsf{Im}\,(e_Q(\gamma_i)) = \mathsf{Tr}_{\bigoplus_{j>i} {}_AP(j)}\,({}_AP(i))$.

注意到

$$e_Q(Q') \in \mathsf{add}\left(\bigoplus_{j>i} {}_AP(j)\right),$$

于是有 $\mathsf{Im}\,(e_Q(\gamma_i)) \subseteq \mathsf{Tr}_{\bigoplus_{j>i} {}_AP(j)}\,({}_AP(i))$. 为了证明反包含, 假设 $j > i$, 考虑 $f\colon {}_AP(j) \to {}_AP(i)$. 通过定义 3.2(PS3) 和引理 2.1(3) 有 $\mathrm{Hom}_A({}_AP(j), e_Q(\Theta(i))) = 0$. 因此 f 能够进行 $e_Q(\gamma_i)$ 分解. 这证明了我们的断言成立. 最后由该断言和正合列 ε_i 能够得到 (2) 和 (3) 成立.

(4) 因为 $e_Q\colon \mathfrak{F}(\Theta) \to \mathsf{mod}(A)$ 是正合函子, 剩下的只需要证明函子 $e_Q\colon \mathfrak{F}(\Theta) \to \mathfrak{F}({}_A\Delta)$ 是满的、忠实的和稠密的.

假设 $M \in \mathfrak{F}(\Theta)$. 通过对 $\ell_\Theta(M)$ 进行归纳, 得到 $e_Q(M) \in \mathfrak{F}({}_A\Delta)$. 如果 $\ell_\Theta(M) \leqslant 1$, 那么对某个 i, 有 $M = \Theta(i)^{m_i}$. 因此通过 (1) 有 $e_Q(M) \in \mathfrak{F}({}_A\Delta)$.

假设 $\ell_\Theta(M) > 1$. 由引理 3.1(1) 和 2.5(3) 知, 存在 $\mathfrak{F}(\Theta)$ 中的 $\mathbb{E}$- 三角 $N \to M \to \Theta(i)^m \dashrightarrow$ 使得 $\ell_\Theta(N) < \ell_\Theta(M)$. 因为 $\mathfrak{F}({}_A\Delta)$ 在扩张下是封闭的, 所以通过归纳可以得到 $e_Q(M) \in \mathfrak{F}({}_A\Delta)$. 这证明了 $\mathsf{Im}\,(e_Q\,|_{\mathfrak{F}(\Theta)}) \subseteq \mathfrak{F}({}_A\Delta)$.

现在证明 $e_Q : \mathfrak{F}(\Theta) \to \mathfrak{F}({}_A\Delta)$ 是满的且是忠实的. 假设 $M, N \in \mathfrak{F}(\Theta)$. 由定理 3.2 和 e_Q 的正合性, 得到 $\mathsf{mod}(A)$ 中的正合列

$$\varepsilon : e_Q(Q_1) \to e_Q(Q_0) \to M \to 0$$

使得 $Q_0, Q_1 \in \mathsf{add}\,Q$. 从 ε 出发, 可以得到如下正合列之间的交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{C}(M,N) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & \mathscr{C}(Q_0,N) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & \mathscr{C}(Q_1,N) \arrow[d, "\alpha_3"] \\
0 \arrow[r] & {}_A(e_Q(M), e_Q(N)) \arrow[r] & {}_A(e_Q(Q_0), e_Q(N)) \arrow[r] & {}_A(e_Q(Q_1), e_Q(N)),
\end{tikzcd}$$

其中 α_2 和 α_3 均是同构 (参见引理 2.1(3)). 那么由五引理知, α_1 也是同构, 这证明了 e_Q 是满的且是忠实的.

最后证明 $e_Q: \mathfrak{F}(\Theta) \to \mathfrak{F}({}_A\Delta)$ 是稠密的.

假设 $M \in \mathfrak{F}({}_A\Delta)$. 通过对 $\ell_{{}_A\Delta}(M)$ 的 ${}_A\Delta$- 长度来证明该结论. 如果 $\ell_{{}_A\Delta}(M) = 1$, 则对于某个 i, 有 $M \simeq {}_A\Delta(i) \simeq e_Q(\Theta(i))$.

假设 $\ell_{{}_A\Delta}(M) > 1$, 则存在 $\mathsf{mod}(A)$ 中的正合列

$$0 \longrightarrow {}_A\Delta(i) \longrightarrow M \longrightarrow M/{}_A\Delta(i) \longrightarrow 0,$$

其中, 对于某个 i, 有 $\ell_{{}_A\Delta}(M/{}_A\Delta(i)) = \ell_{{}_A\Delta}(M) - 1$. 所以通过归纳假设可知存在 $Z \in \mathfrak{F}(\Theta)$ 使得 $e_Q(Z) \simeq M/{}_A\Delta(i)$. 而且由定理 3.2 知, 存在 $\mathfrak{F}(\Theta)$ 的 $\mathbb{E}$- 三角

$$\eta_Z: Z' \xrightarrow{u} Q_0(Z) \xrightarrow{\varepsilon_Z} Z \dashrightarrow,$$

其中 $Q_0(Z) \in \mathsf{add}(Q)$. 则得到 $\mathsf{mod}(A)$ 中正合列交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & e_Q(Z') \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mu"] & e_Q(Z') \arrow[d, "e_Q(u)"] & \\
\eta\ :\ 0 \arrow[r] & {}_A\Delta(i) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, equal] & C \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\lambda"] & e_Q(Q_0(Z)) \arrow[r] \arrow[d, "e_Q(\varepsilon_Z)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & {}_A\Delta(i) \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & e_Q(Z) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

因为 $e_Q(Q_0(Z)) \in \mathsf{proj}(A)$, 所以 η 是可裂的. 因此

$$C = {}_A\Delta(i) \oplus e_Q(Q_0(Z)) \simeq e_Q(\Theta(i) \oplus Q_0(Z)), \quad i_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad p_2 = (0, 1),$$

即 $\mu = \binom{\varphi}{e_Q(u)}$, 其中 $\varphi: e_Q(Z') \to e_Q(\Theta(i))$. 因为限制函子 $e_Q\,|_{\mathfrak{F}(\Theta)}$ 是满的, 所以存在态射 $h\colon Z' \to \Theta(i)$ 使得 $e_Q(h) = \varphi$. 因此 $\mu = e_Q(\psi)$, 其中 $\psi := \binom{h}{u}$. 因为 $(0,1)\binom{h}{u} = u$, u 是容许单态射, 所以 $\binom{h}{u}$ 也是容许单态射. 因此它能够嵌入到一个 $\mathbb{E}$- 三角

$$Z' \xrightarrow{\binom{h}{u}} \Theta(i) \oplus Q_0(Z) \to X \dashrightarrow.$$

由引理 3.4 可知, 存在如下 $\mathbb{E}$- 三角之间的交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & \Theta(i) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Theta(i) \arrow[d] & \\
Z' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, equal] & \Theta(i) \bigoplus Q_0(Z) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_2"] & X \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\alpha"] & {} \\
Z' \arrow[r, "u"] & Q_0(Z) \arrow[r, "\varepsilon_Z"] \arrow[d, dashed] & Z \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & {} \\
 & {} & {}, &
\end{tikzcd}$$

其中 $\pi_2 := (0, 1)$. 因为 $\mathfrak{F}(\Theta)$ 在扩张下是封闭的, 所以有 $X \in \mathfrak{F}(\Theta)$. 用函子 e_Q 作用到上图的第二行, 则有正合列

$$0 \longrightarrow e_Q(Z') \xrightarrow{e_Q(\psi)} e_Q(\Theta(i) \bigoplus Q_0(Z)) \longrightarrow e_Q(X) \longrightarrow 0.$$

而 $e_Q(\psi) = \mu$, 因此有 $e_Q(X) \simeq \mathsf{Coker}\,(\mu) = M$. 这证明了 $e_Q\colon \mathfrak{F}(\Theta) \to \mathfrak{F}({}_A\Delta)$ 是稠密的. □

将定理 4.1 应用到三角范畴, 有如下结论.

推论 4.1 (参见文献 [6, 定理 6.1]) 设 $\mathscr{C}$ 是一个 Artin 三角 R- 范畴, $(\Theta, \boldsymbol{Q}, \leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 的尺码为 t 的 Θ- 投射系统, $A := \mathsf{End}_{\mathscr{C}}(Q)^{\mathrm{op}}$, $e_Q := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q, -)\colon \mathscr{C} \to \mathsf{mod}(A)$ 和 ${}_AP(i) := e_Q(Q(i))$. 对于 $i \in [1, t]$, 下列陈述成立:

(1) ${}_AP := \{{}_AP(i) \mid i \in [1, t]\}$ 是不可分解投射 A- 模的一个代表集, 特别地, A 是基本的且

$$\mathsf{rank} K_0(A) = t;$$

(2) $e_Q(\Theta(i)) \simeq {}_A\Delta(i), \forall\, i \in [1, t]$, 其中 ${}_A\Delta$ 能够使用 ${}_AP$ 和给定的关于 $[1, t]$ 的顺序 $\leqslant$ 计算;

(3) $(A, \leqslant)$ 是一个标准分层代数, 换言之, $\mathsf{proj}(A) \subseteq \mathfrak{F}({}_A\Delta)$;

(4) 限制函子 $e_Q : \mathfrak{F}(\Theta) \to \mathfrak{F}({}_A\Delta)$ 是 R- 范畴之间的正合等价.

命题 4.1 设 $\mathscr{C}$ 是一个 Artin 外三角 R- 范畴且有足够多的投射和足够多的内射, $(\Theta, \boldsymbol{Q}, \leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 的尺码为 t 的 Θ- 投射系统, 则下列陈述成立:

(1) $\mathfrak{F}(\Theta)$ 在扩张和直和项下均是封闭的;

(2) 对每一个 $i \in [1, t]$, $\Theta(i)$ 是不可分解的;

(3) 对任意的对象 $0 \neq M \in \mathfrak{F}(\Theta)$, 存在 $\mathfrak{F}(\Theta)$ 的 $\mathbb{E}$- 三角 $Z \to Q_M \to M \dashrightarrow$ 使得 $Q_M \to M$ 是 M 的一个 $\mathsf{add}(Q)$- 覆盖且 $\min(M) < \min(Z)$.

证明 设 $A := \mathsf{End}_{\mathcal{T}}(Q)^{\mathrm{op}}$. 通过定理 4.1, 可知 $e_Q\colon \mathfrak{F}(\Theta) \to \mathfrak{F}({}_A\Delta)$ 是正合范畴的等价, $(A, \leqslant)$ 是标准分层代数, $e_Q(\Theta(i)) \simeq {}_A\Delta(i)$. 因为 ${}_A\Delta(i)$ 是不可分解的, $\mathsf{End}_{\mathcal{T}}(\Theta(i)) \simeq \mathsf{End}_A({}_A\Delta(i))$, 所以 (2) 成立.

现在证明 (1). 众所周知, $\mathfrak{F}({}_A\Delta)$ 在直和项下是封闭的 (参见文献 [1]). 又因为 e_Q 是等价的且 $\mathscr{C}$ 和 $\mathsf{mod}(A)$ 是 Krull-Schmidt 的, 所以 (1) 成立.

因为 $\mathfrak{F}({}_A\Delta)$ 是 $\mathsf{mod}(A)$ 的一个余可解 (resolving) 子范畴 (参见文献 [1]), 通过定理 3.2 和正合等价 $e_Q : \mathfrak{F}(\Theta) \to \mathfrak{F}({}_A\Delta)$ 得到 (3) 成立. □

推论 4.2 设 $\mathscr{C}$ 是一个 Artin 外三角 R- 范畴且有足够多的投射和足够多的内射, $(\Theta, \boldsymbol{Q}, \leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 的尺码为 t 的 Θ- 投射系统, $\boldsymbol{K} := \{K(i)\}_{i=1}^t$, 其中对每一个 i, $K(i)$ 是出现在定义 3.2(PS5) 中的对象. 如果 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\Sigma\boldsymbol{K}, \Omega\Theta) = 0$, 那么 $(\Theta, \leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 的尺码为 t 的 Θ- 系统.

证明 结论可以由命题 4.1(2)、引理 3.1(1) 和 3.1(3) 直接得到. □

推论 4.3 设 $\mathscr{C}$ 是一个 Artin 外三角 R- 范畴且有足够多的投射和足够多的内射, $(\Theta, \boldsymbol{Q}, \leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 的尺码为 t 的 Θ- 投射系统, 则下列陈述成立:

(1) $\mathfrak{F}(\Theta)$ 在扩张和直和项下均是封闭的;

(2) 从 Θ- 系统 $(\Theta, \leqslant)$ 出发, 能够找到唯一的 (在同构的意义下) 尺码为 t 的 Θ- 投射系统;

(3) 对任意的对象 $0 \neq M \in \mathfrak{F}(\Theta)$, 存在 $\mathfrak{F}(\Theta)$ 的 $\mathbb{E}$- 三角 $Z \to Q_M \to M \dashrightarrow$ 使得 $Q_M \to M$ 是 M 的一个 $\mathsf{add}(Q)$- 覆盖且 $\min(M) < \min(Z)$;

(4) $\mathfrak{F}(\Theta) \cap \mathcal{P}(\Theta) = \mathsf{add}(Q)$.

证明 结论可由定理 3.1、命题 4.1 和推论 3.2 得到. □

推论 4.4 设 $\mathscr{C}$ 是一个 Artin 外三角 R- 范畴且有足够多的投射和足够多的内射, $(\Theta,\leqslant)$ 是 $\mathscr{C}$ 的尺码为 t 的 Θ- 系统, 则存在一个标准分层代数 A 使得 $\boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q,-)\colon \boldsymbol{D}^b(\mathfrak{F}(\Theta))\rightarrow \boldsymbol{D}^b(\mathsf{mod}(A))$ 是三角范畴之间的等价.

证明 由定理 3.1 知, 存在尺码为 t 的 Θ- 投射系统 $(\Theta,\boldsymbol{Q},\leqslant)$. 由定理 4.1(4) 中的等价能够诱导有界导出范畴 $\boldsymbol{R}\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Q,-)\colon \boldsymbol{D}^b(\mathfrak{F}(\Theta))\xrightarrow{\simeq}\boldsymbol{D}^b(\mathfrak{F}({}_A\Delta))$. 因为 A 是标准分层代数, 所以由文献 [6, 引理 7.1] 知, $\boldsymbol{D}^b(\mathfrak{F}({}_A\Delta))\simeq \boldsymbol{D}^b(\mathsf{mod}(A))$, 从而结论成立. □

致谢 感谢审稿人仔细审理本文并提出宝贵的建议.

参考文献

1 Ágoston I, Happel D, Lukács E, et al. Standardly stratified algebras and tilting. J Algebra, 2000, 226: 144–160
2 Auslander M. Representation Dimension of Artin Algebras. Queen Mary College Mathematical Notes. London: Queen Mary College, 1971
3 Erdmann K, Sáenz C. On standardly stratified algebras. Comm Algebra, 2003, 31: 3429–3446
4 Grothendieck A. The cohomology theory of abstract algebraic varieties. In: Proceedings of the International Congress of Mathematics (Edinburgh 1958). New York: Cambridge University Press, 1960, 103–118
5 Hu J, Zhang D, Zhou P. Proper classes and Gorensteinness in extriangulated categories. J Algebra, 2020, 551: 23–60
6 Mendoza O, Santiago V. Homological systems in triangulated categories. Appl Categor Struct, 2016, 24: 1–35
7 Nakaoka H, Palu Y. Extriangulated categories, Hovey twin cotorsion pairs and model structures. Cah Topol Géom Différ Catég, 2019, 60: 117–193
8 Nakaoka H, Palu Y. External triangulation of the homotopy category of exact quasi-category. arXiv:2004.02479, 2020
9 Verdier J. Des catégories dérivées des catégories abéliennes (in French). With a preface by Luc Illusie. Edited and with a note by Georges Maltsiniotis. Astérisque No. 239, 1996
10 Zhang P. Triangulated Categories and Derived Categories (in Chinese). Beijing: Science Press, 2015 [章璞. 三角范畴与导出范畴. 北京: 科学出版社, 2015]
11 Zhou P. Filtered objects in extriangulated categories. Comm Algebra, 2020, 48: 4580–4595
12 Zhou P, Zhu B. Triangulated quotient categories revisited. J Algebra, 2018, 502: 196–232
13 Zhu B, Zhuang X. Tilting subcategories in extriangulated categories. Front Math China, 2020, 15: 225–253

Homological systems in extriangulated categories

Jing He & Panyue Zhou

Abstract We introduce the notion of a homological system (which is also called the Θ-system) in extriangulated categories. Homological systems generalize, on one hand, the notion of stratifying systems in module categories, and on the other hand, the notion of homological systems in triangulated categories. We show that a Θ-system determines a unique Θ-projective system. We also prove that, for a given Θ-projective system, the filtration multiplicity does not depend on the given filtration. We show that, for a given Θ-projective system $(\Theta,\boldsymbol{Q},\leqslant)$, there exists an equivalence between the category $\mathfrak{F}(\Theta)$ of the Θ-filtered objects and the subcategory of the Δ-good modules in $\mathsf{mod}(B)$, for some standardly stratified algebra B.

Keywords **extriangulated category, triangulated category, exact category, standardly stratified algebras, homological system**

MSC(2020) **18G80, 18E10, 18G25**

doi: 10.1360/SSM-2022-0122