

http://bhxb.buaa.edu.cn jbuaa@buaa.edu.cn
DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2020.0536

基于 Bootstrap 理论的小子样寿命评估模型

赵远^{1,*}, 杨琳²

(1. 西安导航技术研究所, 西安 710068; 2. 兰州理工大学 理学院, 兰州 730050)

摘 要: 针对航天产品小子样、长寿命的特点, 提出了基于 Bootstrap 理论的小子样寿命评估模型。采用 B-样条函数构造 Bootstrap 样本经验分布函数, 进行放回抽样。在此基础上, 分别采用非参数 Bootstrap 方法和参数 Bootstrap 方法建立了寿命评估模型。采用提出的模型对空心阴极循环点火寿命试验数据进行评估, 得到多个寿命特征结果, 与传统的参数极大似然估计方法的计算结果进行了对比分析, 其评估精度满足工程的应用需求, 验证了该模型的工程实用性和有效性。

关 键 词: 小子样; 寿命评估; Bootstrap; B-样条函数; 经验分布函数
中图分类号: TB114.3
文献标志码: A **文章编号:** 1001-5965(2022)01-0106-07

中国长寿命静止轨道卫星平台、深空探测平台以及空间站等都对电推进系统和推力器提出了长寿命工作要求。推力器在轨飞行前, 需要进行地面寿命试验验证, 来评估其寿命是否满足要求。以 LIPS-200 离子推力器为例, 兰州空间技术物理研究所用 2 年的时间验证了 12 000 h 的寿命。由于推力器长寿命、高可靠以及制造成本和试验费用昂贵, 其试验样本只有 1 个, 这就为寿命评估带来了巨大的挑战。

空心阴极作为电子源和中和器, 是离子和霍尔推力器及其电推进系统中的核心部件, 阴极电子发射能力的衰减或失效也就意味着整个推力器的失效。从而, 空心阴极的寿命与可靠性评估对整个推力器寿命评估有重要的意义, 不但能够支持整个推力器的寿命与可靠性评估, 而且还能够为推力器后续设计过程中的可靠性预计和分配提供输入。空心阴极的寿命与可靠性试验, 相对于推力器的可靠性试验成本低, 而且能够进行多台试验, 置信度相对较高。

近年来, 在统计学领域应用较多的 Bootstrap

方法, 为小样本条件下统计量分布的直接模拟提供了一种新的工具。Bootstrap 方法最早由 Efron^[1] 提出, 以用于处理样本数据量少的统计学数据处理方法, 其基本思想是: 通过对原始观测样本数据进行有放回地随机抽样, 来构造自助样本, 利用这些自助样本对总体分布进行统计推断^[2]。该方法只依赖于给定的原始观测样本数据, 且能够充分挖掘原始观测样本数据所携带的总体信息, 不需要对产品参数的实际分布作任何假设以及增加新的数据观测。Bootstrap 方法^[1] 是一种将小样本问题转化为大样本问题的分析方法, 摆脱了传统统计方法对分布假定的依赖, 适合于多种分布和参数的估计。

Bootstrap 方法已经广泛地应用于多个领域, 如医学、生物统计、金融、通信、岩土工程等领域^[3-5]。文献[6]将 Bootstrap 估计方法引入到可靠性统计分析, 提出了可靠性参数和特征量的 Bootstrap 区间估计方法。文献[7]建立了寿命分布的参数 Bootstrap 拟合优度检验方法, 数值仿真结果表明, 相对于传统的经验分布函数检验, 特别

收稿日期: 2020-09-21; 录用日期: 2021-01-03; 网络出版时间: 2021-02-03 17:09
网络出版地址: kns.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20210203.1610.004.html
* 通信作者: E-mail: happy_life03@163.com

引用格式: 赵远, 杨琳. 基于 Bootstrap 理论的小子样寿命评估模型[J]. 北京航空航天大学学报, 2022, 48(1): 106-112.
ZHAO Y, YANG L. Lifetime evaluation model of small sample based on Bootstrap theory[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2022, 48(1): 106-112 (in Chinese).

是在小样本的情况下,该方法优势明显。文献[8-9]将 Bootstrap 方法应于岩土工程的可靠度分析与风险控制中,为小样本容量岩土体参数最优边缘分布函数和最优 Copula 函数的识别提供了一种有效途径。文献[10]采用 Bootstrap 理论建立了可修系统贮存可用度近似置信下限评估方法,其评估精度满足工程应用要求。文献[11]提出了特小子样试验下导弹精度评定的 Bootstrap 方法,为相关武器系统的精度评定提供了一条新思路。

鉴于 Bootstrap 方法的上述优势,本文将 Bootstrap 理论应用于小子样的可靠性评估中,提出了基于 Bootstrap 理论的小子样寿命评估模型。以航天器空心阴极循环点火寿命试验数据为例,进行寿命评估,证明了本文模型的工程实用性和有效性。

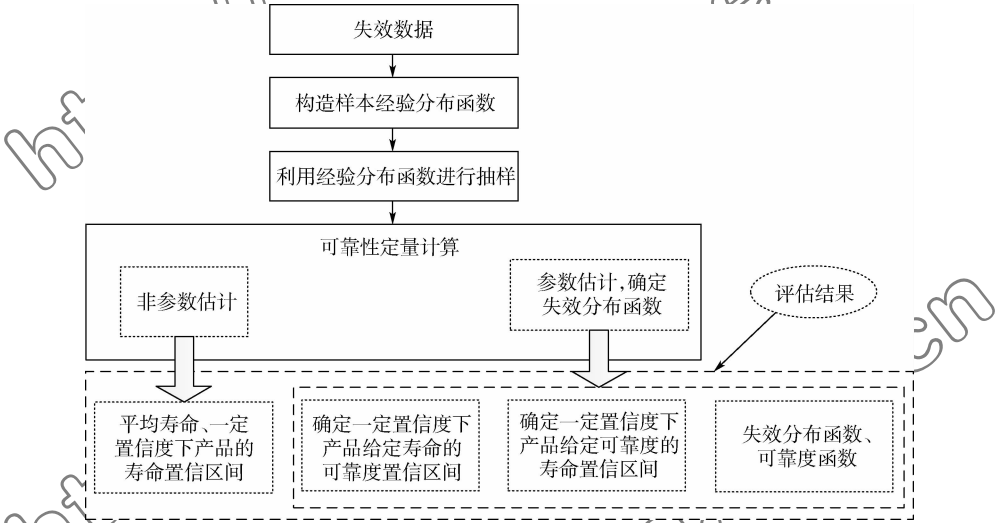


图 1 基于 Bootstrap 理论的小子样寿命评估原理

Fig.1 Lifetime evaluation principle of small sample based on Bootstrap theory

2 基于 Bootstrap 理论的小子样寿命评估方法

1) 根据产品小子样试验的失效数据(n 个样本量),建立样本经验分布函数。
文献[12-13]中已经证明了 1 次 B-样条函数和

1 基于 Bootstrap 理论的小子样寿命评估原理

基于 Bootstrap 理论的小子样寿命评估原理如图 1 所示。根据产品的小子样试验的失效数据(n 个样本量),建立样本经验分布函数。根据样本经验分布函数,相继地、独立地从样本失效数据中抽出 M 个容量为 n 的 Bootstrap 样本。

在产品寿命计算过程中,可以采用 2 种计算方式:选用非参数 Bootstrap 方法,能够确定产品的平均寿命和一定置信度下产品的寿命置信区间;选用参数 Bootstrap 方法,能够确定产品的失效分布函数以及寿命分布函数、一定置信度下产品给定寿命的可靠度置信区间和一定置信度下产品给定可靠度的寿命置信区间。

3 次 B-样条函数可以很好地逼近母体的真实分布函数,本文在此基础上采用上述 B-样条函数来构造样本经验分布函数。具体实现过程如下:

① $t_1, t_2, \dots, t_n$ 是 n 个失效数据,将 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 按从小到大的次序排列,并重新编号,记为 $t'_1 \leq t'_2 \leq \dots \leq t'_n$ 。构造实数 $\mathbf{R}$ 上的折线函数 $F_n(t)$:

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & t < t'_1 \\ \frac{2}{n(t'_{k+2} - t'_k)}t + \frac{kt'_{k+2} - t'_{k+1} - (k+1)t'_k}{n(t'_{k+2} - t'_k)} & t \in \left[\frac{t'_k + t'_{k+1}}{2}, \frac{t'_{k+1} + t'_{k+2}}{2} \right] \\ 1 & t > t'_n \end{cases}$$

$$t'_1 = a_0 < a_1 < \dots < a_m = t'_n$$

式中: $k=0,1,2,\dots,n-1$,令 $t'_0=t'_1, t'_{n+1}=t'_n$ 。
② 对区间 $[t'_1, t'_n]$ 上作一个步长为 h 的均匀划分 Δ :

要求在均匀划分 Δ 中,区间的最大样本点数小于 $nD_{n,\theta} - 1, D_{n,\theta}$ 为给定水平 θ 下的统计量

D_n 的临界值(柯尔莫哥洛夫检验)。

③ 对 Δ 进行延拓。

$\Delta_1: a_0 < a_1 < \dots < a_m < a_m + h = a_{m+1}$

在实数域上定义函数 $S_1(t)$:

$$S_1(t) = \begin{cases} 0 & t < a_0 \\ \sum_{i=0}^{m+1} F_n(a_i) M_2\left(\frac{t-a_0}{h} - i\right) & a_0 \leq t \leq a_{m+1} \\ 1 & t > a_{m+1} \end{cases} \quad (2)$$

式中:

$$M_2(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \leq x < 1 \\ 1+x & -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$S_1(t)$ 为由 1 次 B-样条函数构造的样本经验分布函数。

④ 对 Δ 进行延拓。

$\Delta_2: a_{-2}(a_0 - 2h) < a_{-1}(a_0 - h) < a_0 < a_1 < \dots < a_m < a_{m+1}(a_m + h) < a_{m+2}(a_m + 2h)$

在实数域上定义函数 $S_3(t)$:

$$S_3(t) = \begin{cases} 0 & t < a_{-1} \\ \sum_{i=-2}^{m+3} F_n(a_i) M_4\left(\frac{t-a_0}{h} - i\right) & a_{-1} \leq t \leq a_{m+2} \\ 1 & t > a_{m+2} \end{cases} \quad (3)$$

式中:

$$M_4(x) = \begin{cases} 1-x & |x| \leq 1 \\ 1+x & 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases}$$

$S_3(t)$ 为由 3 次 B-样条函数构造的样本经验分布函数。

使用 1 次 $S_1(t)$ 函数作为抽样的样本经验分布函数,具有公式简单、收敛、稳定性好特点;使用 3 次 $S_3(t)$ 函数作为样本经验分布函数,其代数精度高,并且能够得到密度函数。

2) 根据样本经验分布函数,相继地、独立地从样本失效数据中抽出 M 个容量为 n 的 Bootstrap 样本。

选取样本经验分布函数 $S_1(t)$ 或 $S_3(t)$ 进行抽样,抽出 M 个容量为 n 的 Bootstrap 样本。样本 1: $S^{*1} = \{t_1^{*1}, \dots, t_n^{*1}\}$; 样本 2: $S^{*2} = \{t_1^{*2}, \dots, t_n^{*2}\}$; 样本 i : $S^{*i} = \{t_1^{*i}, \dots, t_n^{*i}\}, i = 1, 2, \dots, M$ 。

3) 可靠性定量计算。

① 非参数的可靠性评估。

非参数 Bootstrap 方法计算过程如下:

a) 对于每个样本 S^{*i} 求出数学期望,即平均

寿命:

$$E(S^{*i}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n t_j^{*i} = \bar{t}^{*i} \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (4)$$

则平均寿命的均值为

$$\bar{t} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \bar{t}^{*i} \quad (5)$$

b) 将 $\bar{t}^{*1}, \bar{t}^{*2}, \dots, \bar{t}^{*M}$ 从小到大排序,得 $\bar{t}^{*(1)} \leq \bar{t}^{*(2)} \leq \dots \leq \bar{t}^{*(M)}$ 。

记 $k_1 = M \times (\gamma/2), k_2 = M \times (1 - (\gamma/2))$, 以 $\bar{t}^{*(k_1)}$ 和 $\bar{t}^{*(k_2)}$ 分别表示在 $1 - \gamma$ 置信水平下寿命 t 的置信区间,即 $(\bar{t}^{*(k_1)}, \bar{t}^{*(k_2)})$ 。

② 参数估计。

以 Weibull 分布为例,参数 Bootstrap 方法计算过程如下:

a) 产品寿命和可靠性分布模型采用 Weibull 分布,某个时刻 T 的可靠度 $R(T)$ 为

$$R(T) = \exp\left[-\left(\frac{T}{\beta}\right)^\alpha\right] \quad (6)$$

式中: $\alpha > 0; \beta > 0$ 。

可靠度为 R 时的可靠寿命 $T(R)$:

$$T(R) = \beta \left[\ln\left(\frac{1}{R}\right) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (7)$$

b) 对第 i 个样本,得到其对数似然方程组^[14]:

$$\begin{cases} \frac{\sum_{j=1}^n (t_j^{*i})^\alpha \ln t_j^{*i}}{\sum_{j=1}^n (t_j^{*i})^\alpha} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln t_j^{*i} = 0 \\ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (t_j^{*i})^\alpha = \beta^\alpha \end{cases} \quad (8)$$

解方程组(8)得到

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_i^*(t_1^{*i}, \dots, t_n^{*i}) \\ \beta = \beta_i^*(t_1^{*i}, \dots, t_n^{*i}) \end{cases}$$

式中: $i = 1, 2, \dots, M$ 。

c) 通过 M 个样本分别得到 $(\alpha_1^*, \beta_1^*), (\alpha_2^*, \beta_2^*), \dots, (\alpha_M^*, \beta_M^*)$, 这些样本均值为

$$\begin{cases} \bar{\alpha}^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \alpha_i^* \\ \bar{\beta}^* = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \beta_i^* \end{cases} \quad (9)$$

进而得出产品的可靠度函数的平均估计:

$$R^*(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\bar{\beta}^*}\right)^{\bar{\alpha}^*}\right]$$

d) 在给定寿命 T 下,通过式(6)得到

$$R_i^*(T) = \exp\left[-\left(\frac{T}{\beta_i^*}\right)^{\alpha_i^*}\right] \quad i = 1, 2, \dots, M$$

将 $R_i^*(T)$ 从小到大排序,得 $R_{(1)}^*(T) \leq$

$R_{(2)}^*(T) \leq \cdots \leq R_{(M)}^*(T)$ 。

记 $k_1 = M \times (\gamma/2), k_2 = M \times (1 - (\gamma/2))$, 以 $R_{k_1}^*(T)$ 和 $R_{k_2}^*(T)$ 分别表示在 $1 - \gamma$ 置信水平下工作时间 T 的可靠度置信区间, 即 $(R_{k_1}^*(T), R_{k_2}^*(T))$ 。

e) 在给定的可靠度 R 下, 通过式(7)得到

$$t_i^*(R) = \beta_i^* \left[\ln \left(\frac{1}{R} \right) \right]^{\frac{1}{\alpha_i^*}} \quad i = 1, 2, \cdots, M$$

将 $t_i^*(R)$ 从小到大排序, 得 $t_{(1)}^*(R) \leq t_{(2)}^*(R) \leq \cdots \leq t_{(M)}^*(R)$ 。

记 $k_1 = M \times (\gamma/2), k_1 = M \times (1 - (\gamma/2))$, 以 $t_{k_1}^*(R)$ 和 $t_{k_2}^*(R)$ 分别表示在 $1 - \gamma$ 置信水平下可靠度为 R 的寿命置信区间, 即 $(t_{k_1}^*(R), t_{k_2}^*(R))$ 。

3 应用实例

本节对国产某型推力器空心阴极的点火寿命

试验数据进行寿命评估, 空心阴极点火寿命数据如表 1 所示。影响空心阴极点火寿命的主要因素是其内部加热丝材料的高温蒸发和冷热交变引起的热丝微观组织改变, 通常采用二参数的 Weibull 分布, 进行寿命评估^[15-16]。本文采用二参数 Weibull 分布进行评估实例验证。

表 1 空心阴极点火寿命试验数据

点火循环模式	点火失效次数
点火成功后工作 1 min, 关闭冷却 20 min	13 957
点火成功后工作 1 min, 关闭冷却 20 min	14 255
点火成功后工作 2 h, 关闭冷却 30 min	13 780
点火成功后工作 2 h, 关闭冷却 30 min	14 576
点火成功后工作 2 h, 关闭冷却 30 min	14 632

通过表 1 的数据, 得出样本数据: $t_1 = 13\ 780, t_2 = 13\ 957, t_3 = 14\ 255, t_4 = 14\ 576, t_5 = 14\ 632$, 通过式(1), 得到 $F_5(t)$:

$$F_5(t) = \begin{cases} 0 & t < 13\ 780 \\ \frac{2}{885}t - \frac{5\ 512}{177} & t \in \left[13\ 780, \frac{13\ 780 + 13\ 957}{2} \right] \\ \frac{2}{2\ 375}t - \frac{27\ 262}{2\ 375} & t \in \left[\frac{13\ 780 + 13\ 957}{2}, \frac{13\ 957 + 14\ 255}{2} \right] \\ \frac{2}{3\ 095}t - \frac{26\ 974}{3\ 095} & t \in \left[\frac{13\ 957 + 14\ 255}{2}, \frac{14\ 255 + 14\ 576}{2} \right] \\ \frac{2}{1\ 885}t - \frac{5\ 540}{377} & t \in \left[\frac{14\ 255 + 14\ 576}{2}, \frac{14\ 576 + 14\ 632}{2} \right] \\ \frac{t}{140} - \frac{3\ 623}{35} & t \in \left[\frac{14\ 576 + 14\ 632}{2}, 14\ 632 \right] \\ 1 & t > 14\ 632 \end{cases}$$

对给定的水平 $\theta = 0.05$, 查柯尔莫哥洛夫检验临界值表得 $D_{5,\theta} = 0.563\ 28, 5D_{5,\theta} - 1 = 1.816\ 4$ 。要求在均匀划分 Δ 中, 区间的最大样本点个数小于 $1.816\ 4$, 从而取最大样本点个数为 1。

按上述要求, 在 $[13\ 780, 14\ 632]$ 区间上作步长 $h = 42.6$ 的均匀划分 $\Delta; a_0 = 13\ 780 < 13\ 822.6 < \cdots <$

$14\ 589.4 < 14\ 632 = a_{20}$, 补充定义 $a_{21} = 14\ 674.6$, 相应的划分点数值与函数值如表 2 所示。

3.1 评估模型计算

为了说明本文方法的可行性, 通过 1 次 B-样条函数构造样本经验分布函数来进行抽样, 见式(2)。
在实数域上定义函数 $S_1(t)$:

$$S_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 13\ 780 \\ \sum_{i=0}^{21} F_i(a_i, M_2) \left(\frac{t - 13\ 780}{42.6} - i \right) & 13\ 780 \leq t \leq 14\ 674.6 \\ 1 & t > 14\ 674.6 \end{cases}$$

依据分布函数 $S_1(t)$ 进行抽样, 抽出 1 000 组容量为 5 的样本。

1) 采用非参数 Bootstrap 方法计算空心阴极的平均点火寿命和一定置信度下的点火寿命置信

区间, 其计算结果如下:

① 通过式(4), 得到每个样本的平均寿命; 进一步, 通过式(5), 得到平均寿命为 14 245。

② 将样本的平均寿命 $\bar{t}^{*1}, \bar{t}^{*2}, \cdots, \bar{t}^{*1\ 000}$ 自小

表 2 划分点数值和函数值

Table 2 Divide point value and function value		
编号	数值	函数 F_5 值
a_0	13 780	0
a_1	13 822.6	0.096 3
a_2	13 865.2	0.192 5
a_3	13 907.8	0.233 1
a_4	13 950.4	0.269
a_5	13 993	0.304 8
a_6	14 035.6	0.340 7
a_7	14 078.2	0.376 6
a_8	14 120.8	0.409 6
a_9	14 163.4	0.437 1
a_{10}	14 206	0.464 6
a_{11}	14 248.6	0.492 1
a_{12}	14 291.2	0.519 7
a_{13}	14 333.8	0.547 2
a_{14}	14 376.4	0.574 7
a_{15}	14 419	0.603 7
a_{16}	14 461.6	0.648 9
a_{17}	14 504.2	0.694 1
a_{18}	14 546.8	0.739 3
a_{19}	14 589.4	0.784 5
a_{20}	14 632	1
a_{21}	14 674.6	1

到大排序,即

$\bar{t}^{*(1)} \leq \bar{t}^{*(2)} \leq \dots \leq \bar{t}^{*(M)}$

进一步得到在 90% 置信水平下空心阴极点火平均寿命的置信区间为 (14 006,14 459)。

2) 参数 Bootstrap 方法,其计算结果如下:

通过求解式 (8),能够解得 $(\alpha_1^*,\beta_1^*),(\alpha_2^*,\beta_2^*),\cdots,(\alpha_{1\,000}^*,\beta_{1\,000}^*)$;通过式 (9),得到平均的估计结果:

$$\begin{cases} \bar{\alpha}^* = \frac{1}{1\,000} \sum_{i=1}^{1\,000} \alpha_i^* = 73.366\,8 \\ \bar{\beta}^* = \frac{1}{1\,000} \sum_{i=1}^{1\,000} \beta_i^* = 14\,371 \end{cases}$$

从而空心阴极点火的平均寿命分布函数为

$$R^*(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{14\,371}\right)^{73.366\,8}\right]$$

与 NEXT 推力器空心阴极点火寿命分布函数 $(\alpha=51.19,\beta=14\,105)$ [15] 相比,两者的特征寿命参数 β 相近,而国产空心阴极寿命函数的形状参数 α 较大。这也表明了由于阴极材料以及工艺差异,国产空心阴极与 NEXT 推力器空心阴极相比,在特征寿命附近失效率变化更显著。

① 通过式 (6) 得到

$$R_i^*(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\beta_i^*}\right)^{\alpha_i^*}\right]$$

式中: $i=1,2,\cdots,1\,000$ 。

在空心阴极使用任务要求中,空心阴极点火

次数上限要求为 13 800 次,通过模型得到在 90% 置信水平下空心阴极点火 13 800 次的可靠度置信区间为 (0.770 9,0.998 8)。

图 2 为 90% 置信水平下空心阴极点火寿命可靠度置信区域,其中灰色区域为 1 000 组样本得到的寿命分布曲线,虚线为 90% 置信水平下的寿命为 13 800 的下限曲线,实线为上限曲线。寿命为 13 800 的直线与上、下限曲线的交点分别表示其在 90% 置信水平下的可靠度置信上、下限。

② 通过式 (7),得到

$$\nu_i^*(R) = \beta_i^* \left[\ln\left(\frac{1}{R}\right) \right]^{\frac{1}{\alpha_i^*}}$$

式中: $i=1,2,\cdots,1\,000$ 。在 90% 置信水平下可靠度为 0.9 的点火花寿命置信区间为 (13 543,14 271)。

图 3 为 90% 置信水平下可靠度的寿命置信区域,其中虚线为 90% 置信水平下的可靠度为 0.9 的下限曲线,实线为上限曲线。可靠度为 0.9 的直线与上、下限曲线的交点分别表示其在 90% 置信水平下的寿命置信上、下限。

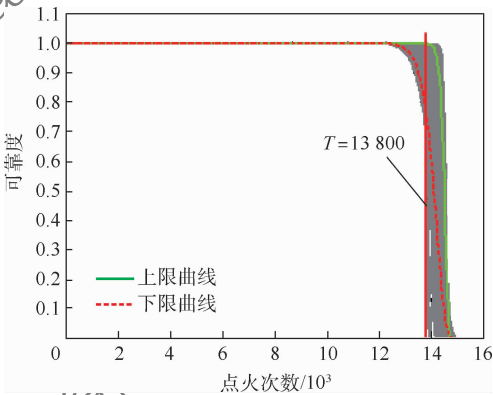


图 2 给定寿命的可靠度置信区域

Fig. 2 Confidence region of reliability for a given lifetime

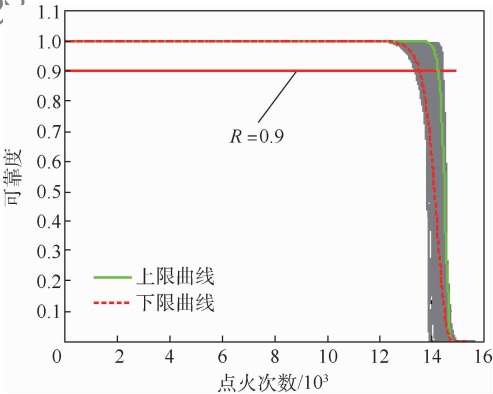


图 3 给定可靠度的寿命置信区域

Fig. 3 Confidence region of lifetime for a given reliability

3.2 结果对比

对试验数据进行传统的 Weibull 分布参数估计,得到 $\alpha=50.778,\beta=14\,400.8$ 。

从而,其寿命分布函数为

$$R(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{14\,400.8}\right)^{50.778}\right]$$

通过空心阴极的试验数据,得到其近似的平均寿命 T :

$$T = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 t_i = 14\,240$$

通过本文中非参数寿命评估模型得到的平均寿命为 14 245。在 90% 置信水平下空心阴极点火平均寿命的置信区间为(14 006,14 459)。

采用传统参数估计得到的平均点火寿命为

$$T_{TF} = \int_1^{\infty} R(t)dt = \int_1^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{t}{14\,400.8}\right)^{50.778}\right]dt = 14\,242$$

采用本文中的模型得到的平均点火寿命为

$$T_{TF}^* = \int_1^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{t}{14\,371}\right)^{73.366\,8}\right]dt = 14\,260$$

以近似的平均寿命为参考,得到不同的寿命计算方法的相对误差,如表 3 所示。可以看出,采用本文中提出的评估模型(见表 3 中方法 3、方法 4)以及传统的参数估计(见表 3 中方法 2)得到的平均寿命与近似的平均寿命非常接近,点火次数相差值在 20 次以内,相对误差都小于 0.002。采用本文中的非参数评估模型(见表 3 中方法 5)得到了 90% 置信度下的平均寿命置信区间,从表 3 中可以看出,方法 1、方法 2、方法 3 和方法 4 中寿命结果都在该平均寿命置信区间中;其中平均寿命置信区间的上下限与近似平均寿命的相对误差小于或等于 0.016。通过上述相对误差结果可以看出,通过本文中的评估模型得到的寿命评估结果与近似的平均寿命非常接近,评估精度能够满足工程需求。

表 3 寿命结果的相对误差

Table 3 Relative error of lifetime results

序号	计算方法	寿命结果	与 T 相对误差
1	近似的平均寿命	14 240	0
2	传统参数估计	14 242	0.000 14
3	非参数评估模型	14 245	0.000 35
4	参数寿命评估模型	14 260	0.001 3
5	非参数评估模型	(14 006,14 459)	(-0.016,0.015)

4 结 论

航天产品高可靠、长寿命以及试验成本高的特点,使得其试验代价非常高,试验数据宝贵,为了充分地挖掘试验数据信息并满足工程应用中对多类型可靠性特征信息的需求,本文提出了一种基于 Bootstrap 理论的小子样寿命评估模型。该模型具有以下优点:

- 1) 在构造样本经验分布函数基础上,将 Bootstrap 方法应用于寿命与可靠性评估中,通过多次抽样,扩大了信息量,充分挖掘试验数据中所携带的寿命与可靠性总体信息,提高了小子样数据评估的准确性。
- 2) 将构造的 1 次 B-样条函数和 3 次 B-样条函数作为本文模型的样本经验分布函数应用到可靠性评估中。与现有的 Bootstrap 理论的经验分布函数相比,构造的经验分布函数逼近的母体真实分布函数更加精确,提高了可靠性评估的精确度。
- 3) 通过该评估模型能够给出多种寿命与可靠性评价结果:产品的平均寿命;一定置信度下寿命的置信度区间;失效分布函数的参数估计;一定置信水平下给定寿命的可靠度置信度区间;一定置信水平下给定可靠度的寿命置信度区间。

参考文献 (References)

[1] EFRON B. Bootstrap methods: Another look at the jackknife [M] // KOTZ S, JOHNSON N L. Breakthroughs in statistics. Berlin: Springer, 1992: 569-593.

[2] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计 [M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

SHENG Z, XIE S Q, PAN C Y. Probability and mathematical statistics [M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2010 (in Chinese).

[3] FONG W M. Time diversification under loss aversion: A Bootstrap analysis [J]. Applied Economics, 2013, 45 (5) : 605-610.

[4] NOGUCHI K, GED Y R, DUGUAY C R. Bootstrap-based tests for trends in hydrological time series, with application to ice phenology data [J]. Journal of Hydrology, 2011, 410 (3-4) : 150-161.

[5] ÖNÖZ B, BAYAZIT M. Block Bootstrap for Mann-Kendall trend test of serially dependent data [J]. Hydrological Processes, 2012, 26 (23) : 3552-3560.

[6] 陈文华, 李奇志, 张为鄂, 等. 产品可靠性的 Bootstrap 区间估计方法 [J]. 机械工程学报, 2003, 39 (6) : 106-109.

CHEN W H, LI Q Z, ZHANG W E, et al. Method of Bootstrap interval estimation for product reliability [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2003, 39 (6) : 106-109 (in Chinese).

[7] 孙权, 周星, 冯静, 等. 寿命分布的参数 Bootstrap 拟合优度检验方法 [J]. 国防科技大学学报, 2014, 36 (6) : 112-116.

SUN Q, ZHOU X, FENG J, et al. Goodness-of-fit test for life distributions based on parametric Bootstrap [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2014, 36 (6) : 112-116 (in Chinese).

[8] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 基于 Bootstrap 方法的岩土体参数联合分布模型识别 [J]. 岩土力学, 2015, 36 (4) : 913-922.

TANG X S, LI D Q, ZHOU C B, et al. Bootstrap method for joint probability distribution identification of correlated geotechnical parameters [J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, 36 (4) :

913-922(in Chinese).

[9] LI D Q,TANG X S,PHOON K K. Bootstrap method for characterizing the effect of uncertainty in shear strength parameters on slope reliability[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2015,140:99-106.

[10] 罗巍,张春华,谭源源,等. 基于 Bootstrap 的可修系统贮存可用度近似置信下限评估方法[J]. 兵工学报,2010,31(3):391-395.

LUO W,ZHANG C H,TAN Y Y,et al. Estimating method of approximate confidence lower limits of repairable system storage availability based on Bootstrap[J]. Acta Armamentarii,2010,31(3):391-395(in Chinese).

[11] 胡正东,曹渊,张士峰,等. 特小子样试验下导弹精度评定的 Bootstrap 方法[J]. 系统工程与电子技术,2008,30(8):1493-1497.

HU Z D,CAO Y,ZHANG S F,et al. Bootstrap method for missile precision evaluation under extreme small sample test[J]. Systems Engineering and Electronics,2008,30(8):1493-1497(in Chinese).

[12] 陈亚婷. 构造分布函数的样条函数方法及其应用[D]. 合肥:合肥工业大学,2006.

CHEN Y T. The method of construct distribution function by spline function and its application[D]. Hefei:Hefei University of Technology,2006(in Chinese).

[13] 陈亚婷,朱功勤. 由样条函数构造的一类分布函数[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版),2006,29(6):790-793.

CHEN Y T,ZHU G Q. A kind of distribution function made by the spline function[J]. Journal of Hefei University of Technology (Natural Science),2006,29(6):790-793(in Chinese).

[14] 赵宇. 可靠性数据分析[M]. 北京:国防工业出版社,2011:141-146.

ZHAO Y. Data analysis of reliability[M]. Beijing:National Defense Industry Press,2011:141-146(in Chinese).

[15] HERMAN D A,PINERO L R,SOVEY J S. NASA's evolutionary xenon thruster (NEXT) component verification testing[C] // 44th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit. Reston:AIAA,2008:1-11.

[16] 杨威,陈继巍,贾艳辉,等. 离子推力器空心阴极点火可靠性评价研究[J]. 真空与低温,2015,21(2):96-98.

YANG W,CHEN J W,JA Y H,et al. Study on the evaluation of the ignition reliability for ion thruster's hollow cathode[J]. Vacuum and Cryogenics,2015,21(2):96-98(in Chinese).

Lifetime evaluation model of small sample based on Bootstrap theory

ZHAO Yuan^{1,*}, YANG Lin²

(1. Xi'an Research Institute of Navigation Technology, Xi'an 710068, China;
2. School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: This paper proposes a small sample lifetime evaluation model based on Bootstrap method for aerospace products which have the characteristics of small sample and long service life. Using B-spline function as the Bootstrap sample empirical distribution function, a random case sample with replacement is obtained. And on this basis, the lifetime evaluation model is established by using non-parametric Bootstrap method and parametric Bootstrap method respectively. Hollow cathode ignition test data are evaluated based on the proposed method, and multiple lifetime characteristic results are acquired. The results are contrastively analyzed with those concluded by conventional maximum likelihood estimation method of parameters, and it meets the need of the engineering precision, which demonstrates the engineering practicability and effectiveness of the method.

Keywords: small sample; lifetime evaluation; Bootstrap; B-spline function; empirical distribution function