第41卷 第4期
2020年8月

首都师范大学学报(自然科学版)
Journal of Capital Normal University
(Natural Science Edition)

No.4
Aug.,2020

一条中线长为整数的整边三角形

李 怡 朱一心 李克正

(首都师范大学数学科学学院,北京 100048)

摘要:给出一条中线长为整数的整边三角形的充要条件,利用高斯整环的性质给出不定方程 $b^2+c^2=2k^2+2n^2$ 的解,并由此给出一类中线长为整数的整边三角形.

关键词:整边三角形;中线;整数

中图分类号:O123.1;O156.1 **DOI**:10.19789/j.1004-9398.2020.04.003

0 引 言

三边长都为整数的三角形称为整边三角形.关于整边三角形的研究很多结论集中在满足特殊条件的三角形的存在性以及相应的计数问题上.常见条件是关于边的关系、角的关系、面积的关系,这些关系往往以某种定值问题出现.如:整边三角形的计数[1-2]、面积与周长数值相等的整边三角形计数[3-4]、有一个内角度数为60°或120°的整边三角形[5-6]等.

本文研究一条中线长为整数的整边三角形的存在和性质:整边三角形一条中线长为整数的充要条件;一条中线长为整数的一类特殊的整边三角形.

本文有关的符号说明:

(1)用 a、b 和 c 分别表示 $\triangle ABC$ 3个内角 $\angle A$、$\angle B$ 和 $\angle C$ 的对应边;

(2)用三元无序实数对表示三角形的3条边长,例如(12、5和13)表示边长分别为12、5和13的三角形,称为整边三角形(12、5和13);

(3)$\mathbf{N}^+$,$\mathbf{Z}$ 表示正整数和整数集合.

1 主要结果及证明

定理1 设整边三角形的3条边分别为 a、b 和 c,边 a 上的中线长是整数的充要条件是 $2b^2+2c^2-a^2$ 为偶平方数.

(注:由于整边三角形的3条边满足 $b+c>a$,易知 $2b^2+2c^2-a^2\neq 0$.)

证明 如图1所示,$\triangle ABC$ 是整边三角形,3边分别为 a、b、c,设 D 是 BC 的中点,$BD=CD=t$,点 A 到对边 a 的中线长为 z,需证:z 为整数当且仅当 $2b^2+2c^2-a^2$ 为偶数的平方,且 $2b^2+2c^2-a^2\neq 0$.

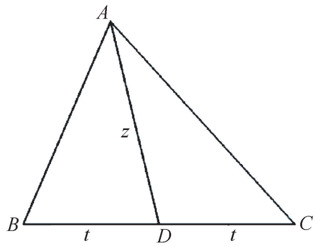

图1 整边三角形

设 $\angle ADB=\alpha$,$\angle ADC=\beta$,则 $\cos\alpha=-\cos\beta$,而

$$\cos\alpha=\frac{t^2+z^2-c^2}{2tz},\cos\beta=\frac{t^2+z^2-b^2}{2tz},$$

所以 $t^2+z^2-c^2=-(t^2+z^2-b^2)$,

即 $2z^2=b^2+c^2-2t^2$,

$$(2z)^2=2b^2+2c^2-a^2. \tag{1}$$

因为 $b+c>a$,所以 $b^2+c^2\geqslant 2bc$(当且仅当 $b=c$ 时,等号成立),则 $2b^2+2c^2-a^2>0$.

由式(1)得 $z=\dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$,所以 z 为整数当且仅当 $2b^2+2c^2-a^2$ 为偶数的平方,$2b^2+2c^2-a^2\neq 0$.

一条中线长为整数的整边三角形是否存在,需要知道中线长为整数的整边三角形的三边性质.

推论 整边三角形1条边中线长为整数的必要条件是该边长必是偶数,另外2条边长同奇偶.

证明 若边 a 上的中线长为整数,由定理1可知,$2b^2+2c^2-a^2$ 是正的偶平方数.设 $2b^2+2c^2-a^2=(2n)^2$,n 是正整数,则 a 必为偶数,设 $a=2k$,$k\in\mathbf{N}^+$,有 $b^2+c^2=2k^2+2n^2$,则 b、c 同奇偶.

从证明可知,求出不定方程 $b^2+c^2=2k^2+2n^2$

收稿日期:2019-04-30

的整数解,便可得到边 a 上的中线长为整数时,整边三角形 3 边的表示.因此要求不定方程

$$b^2+c^2=2k^2+2n^2\ (*)$$

的整数解,其中 $b,c,k,n\in\mathbf{N}^+$;b、c 同奇偶.

为此,先回顾一些抽象代数知识[7]:

(1)形如 $Z[i]=\{a+bi\mid a,b\in\mathbf{Z}\}$ 的复数关于数的加法和乘法构成一个整环,称为高斯整数环. $Z[i]$ 是唯一分解整环. $Z[i]$ 中的单位:$-1,1,-i,i$. 设 p 是整环 D 的 1 个非零非单位的元素,如果对任意的 $a,b\in D$, 由 p 整除 ab, 可推出 p 整除 a 或 p 整除 b, 则称 p 为 D 的 1 个素元.

(2)设 $\alpha=a+bi\in Z[i]$, 定义 $\phi(\alpha)=a^2+b^2$ 为 $Z[i]$ 中元素 α 的范数.

(3)对于 $Z[i]$ 中的整数元素 p, 若方程 $x^2+y^2=p$ 没有整数解,则 p 是素元;对于 $Z[i]$ 中的非整数元素 $\alpha=a+bi$, 若 $\phi(\alpha)$ 为素数,则 α 为素元.

下面解不定方程($*$):

解　利用高斯整环 $Z[i]$ 是唯一分解整环这一事实,将方程($*$)在 $Z[i]$ 中分解,得:

$$(b+ci)(b-ci)=(1+i)(1-i)(k+ni)(k-ni).\tag{2}$$

因为 $\phi(1+i)=\phi(1-i)=2$, 所以 $1+i,1-i$ 都是 $Z[i]$ 中的素元.不妨设 $(1+i)$ 整除 $(b+ci)$, 取共轭可知 $(1-i)$ 整除 $(b-ci)$.

令 $\gcd(b+ci,k+ni)=p+qi\in Z[i],p,q\in\mathbf{N}^+$, 则存在 $u+vi\in Z[i],u,v\in N^+$, 使得

$$k+ni=(p+qi)(u+vi),\tag{3}$$

从而

$$k-ni=(p-qi)(u-vi).\tag{4}$$

注意到 $\gcd(b+ci,u+vi)=1$(否则与 $\gcd(b+ci,k+ni)=p+qi$ 矛盾),结合式(4)可知, $(u+vi)$ 整除 $(b-ci)$, 从而 $(u-vi)$ 整除 $(b+ci)$.

由上所述有

$$(1+i)(p+qi)(u-vi)\text{ 整除 }(b+ci),\tag{5}$$

取共轭可知

$$(1-i)(p-qi)(u+vi)\text{ 整除 }(b-ci),\tag{6}$$

将式(3)、式(4)代入式(2),得:

$$(b+ci)(b-ci)=(1+i)(1-i)(p+qi)(p-qi)(u+vi)(u-vi).\tag{7}$$

考虑到 $Z[i]$ 中的单位有 $\pm1,\pm i$, 结合式(5)、式(6)、式(7)可得:

$$b+ci=\pm(1+i)(p+qi)(u-vi)\tag{8}$$

或

$$b+ci=\pm i(1+i)(p+qi)(u-vi).\tag{9}$$

由式(3)、式(8)、式(9)可得:

$$\begin{cases}b+ci=\pm(1+i)(p+qi)(u-vi)\\k+ni=(p+qi)(u+vi)\end{cases}\tag{10}$$

和

$$\begin{cases}b+ci=\pm i(1+i)(p+qi)(u-vi)\\k+ni=(p+qi)(u+vi)\end{cases}.\tag{11}$$

展开式(10)、式(11),并使等号两边虚、实部分别相等,得到不定方程($*$)的 4 组解:

$$\begin{cases}b=pu-qu+pv+qv\\c=pu+qu-pv+qv\\k=pu-qv\\n=pv+qu\end{cases},\qquad ①$$

$$\begin{cases}b=-pu+qu-pv-qv\\c=-pu-qu+pv-qv\\k=pu-qv\\n=pv+qu\end{cases},\qquad ②$$

$$\begin{cases}b=-pu-qu+pv-qv\\c=pu-qu+pv+qv\\k=pu-qv\\n=pv+qu\end{cases},\qquad ③$$

$$\begin{cases}b=pu+qu-pv+qv\\c=-pu+qu-pv-qv\\k=pu-qv\\n=pv+qu\end{cases},\qquad ④$$

式中 $p,q,u,v\in Z$.

由不定方程($*$)的解可得如下定理:

定理 2　不定方程 $b^2+c^2=2k^2+2n^2$ 的解为①~④.

由此可以讨论边 a 上的中线长为整数的整边三角形 3 条边的表示.

由于①~④中 k 的表示相同,所以 $a=2k=2pu-2qv$. 为了讨论方便,假设 p、q、u、v 都是非负整数.在分析时要注意三角形 3 条边长需要满足 $a+b>c,b+c>a,c+a>b$.

i) 对于解①:

因为 $a+b=(2pu-2qv)+(pu-qu+pv+qv)=3pu-qu+pv-qv$, 所以 $a+b-c=(3pu-qu+pv-qv)-(pu+qu-pv+qv)=2pu-2qu+2pv-2qv=2(p-q)(u+v)>0$, 则需要 $p-q>0$, 即 $p>q$;

因为 $b+c=(pu-qu+pv+qv)+(pu+qu-pv+qv)=2(pu+qv)$, 所以 $b+c-a=2(pu+qv)-(2pu-2qv)=4qv>0$, 满足 $b+c>a$;

因为 $c + a = (pu + qu - pv + qv) + (2pu - 2qv) = 3pu + qu - pv - qv$，所以 $c + a - b = (3pu + qu - pv - qv) - (pu - qu + pv + qv) = 2pu + 2qu - 2pv - 2qv = 2(p + q)(u - v) > 0$，则需要 $u - v > 0$，即 $u > v$.

所以，若 $p > q, u > v$，且 p、q、u、v 都是非负整数，那么得到的 a、b 和 c 能构成三角形. 再来看在这样的条件下，是否能使 a、b 和 c 都是正数：

因为 $pu > qv$，所以 $a = 2pu - 2qv > 0$；

因为 $p > q$，则 $b = pu - qu + pv + qv > pu - pu + pv + qv = pv + qv > 0$；

因为 $u > v$，则 $c = pu + qu - pv + qv > pu + qu - pu + qv = qu + qv > 0$.

综上所述：在 $p > q, u > v$，且 p、q、u、v 都是非负整数的条件下，由解①得到的 a、b 和 c 可以构成三角形.

那么此时是否满足 b、c 同奇偶的要求. 将解①中 b、c 的表示写为：$b = (pu + qv) + (pv - qu)$，$c = (pu + qv) - (pv - qu)$. 根据一般性的结论：对于 2 个整数 x、y、$x + y$ 和 $x - y$ 同奇偶. 所以可知解①中的 b，c 同奇偶.

ii）对于解②：

注意到 p、q、u、v 都是非负整数，则 $b + c = (-pu + qu - pv - qv) + (-pu - qu + pv - qv) = -2(pu + qv) < 0$，与 $b + c > 0$ 矛盾，所以无解.

iii）对于解③：

$a + b = (2pu - 2qv) + (-pu - qu + pv - qv) = pu - qu + pv - 3qv$，注意到 p、q、u、v 都是非负整数，所以 $a + b - c = (pu - qu + pv - 3qv) - (pu - qu + pv + qv) = -4qv < 0$，与 $a + b > c$ 矛盾，所以无解.

iv）对于解④：

$a + c = (2pu - 2qv) + (-pu + qu - pv - qv) = pu + qu - pv - 3qv$，注意到 p、q、u、v 都是非负整数，$a + c - b = (pu + qu - pv - 3qv) - (pu + qu - pv + qv) = -4qv < 0$，与 $a + c > b$ 矛盾，所以无解.

因此得到：

定理 3　任取 $p, q, u, v \in \mathbf{N}^+$；$p > q, u > v$，当 $a = 2pu - 2qv, b = pu - qu + pv + qv, c = pu + qu - pv + qv$ 时，三角形 $(a$、b、$c)$ 是 1 条中线长为整数的整边三角形.

2　例　子

以下例子说明如何利用定理 3 求得 1 个 1 条中线长为整数的整边三角形：

例　根据定理 3，取 $p = 3, q = 2, u = 2, v = 1$，计算得到 $a = 8, b = 7, c = 9$，可以验证 a 上的中线长为 7.

由于在定理 3 中假设了 p、q、u、v 都是非负整数，因此并不是将不定方程的所有解都对应到得到的中线长为整数的整边三角形，只是得到其中一部分.

参 考 文 献

[1]　潘洪亮. 周长为定值的整边三角形[J]. 中学数学月刊，1997(3)：26 – 27.
[2]　刘锦云. 整边三角形的个数[J]. 中学生数学，1994(3)：18 – 19.
[3]　刘毅. 周长与面积相等的海伦三角形[J]. 数学通讯，1950(40)：15 – 16.
[4]　张琼. 周长与面积的值相等的整边三角形问题[J]. 福建中学数学，2009(5)：19 – 20.
[5]　余应龙. 有一个 60°角的整边三角形[J]. 中等数学，2009(2)：18 – 20.
[6]　岳昌庆. 三边长为自然数且一个内角为 60°或 120°的三角形初探[J]. 数学通报，2012，51(11)：55 – 57.
[7]　韩士安，林磊. 近世代数[M]. 北京：科学出版社，2004：171 – 179.

Triangles with Integer Sides with an Integer Midline

LI Yi　ZHU Yixin　LI Kezheng

(School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing　100048)

Abstract: Give the necessary and sufficient conditions for a triangle with integer sides whose one of the midlines is an integer. The solution of the indefinite equation is given by using the property of the ring of Gauss integers, from this, a class of integer triangles with an integer midline is given.

Keywords: integer triangle; midline; integer