计算半线性椭圆问题多解的一类谱 Galerkin 型搜索延拓法的收敛性分析

刘伟, 谢资清, 袁永军*

湖南师范大学数学与统计学院, 计算与随机数学教育部重点实验室, 长沙 410081

E-mail: wliu.hunnu@foxmail.com, ziqingxie@hunnu.edu.cn, yuanyongjun0301@163.com

收稿日期: 2019-06-10; 接受日期: 2020-03-23; 网络出版日期: 2020-05-09; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11771138, 11171104, 11971007 和 11601148) 和湖南省教育厅创新平台开放基金 (项目编号: 18K025) 资助项目

摘要 本文提出计算半线性椭圆边值问题多解的一类高效的谱 Galerkin 型搜索延拓法 (SGSEM). 该方法基于模型方程相应线性特征值问题的若干特征函数的线性组合构造多解初值, 充分利用了传统搜索延拓法构造多解初值方面的优势. 同时, 采用插值系数 Legendre-Galerkin 谱方法离散模型问题, 具有计算成本低、计算精度高的优点. 运用 Schauder 不动点定理和其他技巧, 本文严格证明了对应于每个特定真解的数值解的存在性以及限制在该真解一个充分小的邻域内的数值解的唯一性, 并证明了其谱收敛性. 数值结果验证了算法的可行性与高效性, 并展示了不同类型的多解.

关键词 半线性椭圆问题 多解 搜索延拓法 插值系数谱方法 谱收敛性 Schauder 不动点定理

MSC (2020) 主题分类 35J25, 65N35, 65H10, 47H10

1 引言

考虑求解如下二维半线性椭圆 Dirichlet 边值问题的多解:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u) = -\Delta u - f(u) = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 Δ 是 Laplace 算子, Ω 是 $\mathbb{R}^2$ 中的矩形区域, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是适当光滑的非线性函数. 模型问题 (1.1) 在现代科学的各个领域, 如天体物理学、凝聚态物理学、材料科学和生物数学中都有广泛应用 (参见文献 [1–4]). 当 f 满足某些正则性和增长性的假设时, (1.1) 的解的存在性和多重性已在近几十年中被广泛研究, 详见文献 [5–10] 及其参考文献.

英文引用格式: Liu W, Xie Z Q, Yuan Y J. Convergence analysis of a spectral-Galerkin-type search extension method for finding multiple solutions to semilinear problems (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1407–1431, doi: 10.1360/SCM-2019-0357

近年来, 文献中出现了多种计算半线性椭圆边值问题 (1.1) 多解的有效算法. 这些算法中, 有些是基于极小极大原理和优化算法以求解相应能量泛函的多个临界点, 包括山路算法 (mountain pass algorithm)^[11]、高环绕算法 (high-linking algorithm)^[12] 和局部极小极大方法 (local minimax method)^[3, 13, 14] 等. 还有一些方法直接离散边值问题, 再选择合适的初值来求解所得的非线性代数方程组, 如搜索延拓法 (search extension method, SEM)^[15–18]、特征函数展开法 (eigenfunction expansion method, EEM)^[19]、两水平谱方法 (two-level spectral method)^[20], 以及一些 Newton 型方法^[21, 22] 等. SEM 由陈传森和谢资清^[15–18] 提出, 它首先根据 Laplace 算子的少数几个特征基的线性组合搜索初值, 然后逐渐增加特征基的个数以获得更好的初值, 最后用数值延拓法求解离散问题. 为了提高 SEM 的效率, Xie 等采用了插值系数有限元法^[23] 以克服非线性项的离散导致所得非线性代数方程组过于复杂的困难, 并采用了基于有限元离散的两网格法^[24] 来加速计算. Zhang 等^[19] 提出的 EEM 源于与 SEM 类似的思想, 即通过 Laplace 算子的特征函数的线性组合来逼近真解. 他们证明了当所用的特征函数足够多时, 存在唯一的数值解指数收敛于特定的真解. 最近, Wang 等^[20] 提出了一种基于谱方法和同伦延拓法的两水平方法, 该方法首先采用具有较小自由度的谱 Galerkin 或谱配点法离散模型问题得到初值, 然后使用具有较大自由度的谱 Galerkin 或谱配点法离散 Newton 迭代方向满足的线性化方程组.

传统的 SEM^[16, 18, 23, 24] 基于有限元离散, 通常称为基于有限元的搜索延拓法 (finite element based search extension method, FESEM). 众所周知, 有限元非常便于求解复杂几何区域上的问题, 而谱方法在求解规则区域 (如矩形、圆、圆柱或球) 上的问题时具有优势, 只要真解具有好的正则性, 它就可以达到高精度^[25]. 事实上, 如果

(A₁) 对某个 $k \geq 4$, $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;

(A₂) 存在常数 $C_1, C_2 > 0$ 使得 $|f(\xi)| \leq C_1 + C_2|\xi|^p$, 其中 $1 < p < \infty$,

则 (1.1) 的任何弱解属于 $H^{k+2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ^[26]. 为了提高 SEM 求 (1.1) 的多解时的效率和精度, 一个自然的想法是在 SEM 中采用谱方法离散. 实际上, 由文献 [3, 13, 16, 23] 中的数值观测可知, (1.1) 的解通常为多峰解, 且可能具有边界层和 (或) 内部层, 尤其对于那些具有较高 Morse 指标的解, 情况更是如此. 因此, 采用高精度的离散方法以有效模拟这些解无疑十分重要. Li 和 Wang^[27] 基于分歧算法^[28] 提出了一种有效的伪谱方法用于计算 Lane-Emden 方程的多解, 但其误差估计尚待证明. 另外, Wang 等^[20] 针对一类一维半线性问题, 给出了两水平谱方法的误差估计.

本文旨在设计一类插值系数谱 Galerkin 型 SEM (spectral-Galerkin-type search extension method, SGSEM) 计算 (1.1) 的多解, 并着重于以下两方面的研究:

(1) 利用 SEM^[16, 18, 23, 24] 的搜索与延拓步骤获得合适初值后, 采用 Legendre-Galerkin 谱方法离散 (1.1). 具体做法是: 将基于 Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) 点的 Lagrange 插值基函数作为解空间的基, 然后在数值解满足的弱形式中引入插值系数法, 从而得到形式简单、易于求解的非线性代数方程组. 与 FESEM 相比, 引入插值系数法的 SGSEM 具有谱收敛性, 仅需采用较小的自由度来离散模型问题, 故只需求解较小规模的非线性代数方程组, 极大地降低了计算成本.

(2) 证明采用 SGSEM 计算 (1.1) 的多解时, 对应于每个真解的数值解的存在性、唯一性及谱收敛性, 其困难主要源于模型问题的非线性、解的多重性及双线性型

$$\langle \mathcal{L}'(u)w, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f'(u)wv d\mathbf{x}, \quad w, v \in H_0^1(\Omega)$$

对每个 Morse 指标 $MI \geq 1$ 的解 u 的非强制性. 此外, 与基于经典 Galerkin 谱离散的 SEM 相比, 引入插值系数法的 SGSEM 的收敛性分析面临新的困难, 如真解和数值解分别满足的弱形式作差后所得残

差的分解更为繁琐, 以及对应于特定真解的数值解的唯一性证明需定义包含插值算子在内的双线性型等. 本文将运用 Schauder 不动点定理和其他技巧解决这些困难.

本文剩余部分安排如下. 第 2 节通过引入插值系数 Legendre-Galerkin 谱离散方法, 提出计算 (1.1) 多解的 SGSEM. 第 3 节证明对应于特定真解的 SGSEM 数值解的存在性、唯一性和谱收敛性. 第 4 节给出立方非线性多解问题和一类三角函数非线性多解问题的数值结果, 说明本文算法的高效性并展示一些多解的性质. 第 5 节总结全文.

2 插值系数谱 Galerkin 型搜索延拓法

如上所述, 当 f 满足某些正则性与增长性假设时, 边值问题 (1.1) 具有多解. 为了利用传统 SEM 在构造多解初值方面的优势并提高效率, 本节采用谱 Galerkin 方法离散 (1.1) 以改进 SEM.

不失一般性, 假设 $\Omega = (-1, 1)^2$ 且 $f(0) = 0$. 边值问题 (1.1) 的弱形式为: 求 $u \in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$\mathcal{A}(u, v) - (f(u), v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (2.1)$$

其中, $\mathcal{A}(u, v) = (\nabla u, \nabla v)$, $(\cdot, \cdot)$ 是 $L^2(\Omega)$ 内积. 设 N 是正整数, P_N 表示 $[-1, 1]$ 上所有次数不超过 N 的多项式的集合, 取逼近空间为 $X_N = P_N^0 \otimes P_N^0$, $P_N^0 = \{v \in P_N : v(\pm 1) = 0\}$. 边值问题 (1.1) 的经典 Galerkin 逼近问题为: 求 $u_N \in X_N$ 使得

$$\mathcal{A}(u_N, v_N) - (f(u_N), v_N) = 0, \quad \forall v_N \in X_N. \quad (2.2)$$

这将导出一个非线性代数方程组, 通常用 Newton 法求解.

由于非线性项的存在, Newton 法在迭代过程中必须反复更新 (2.2) 对应的 Jacobi 矩阵. 因此, 采用标准的 Galerkin 方法离散 (2.2) 通常导致 Newton 法的计算非常耗时且效率低. 为克服这个缺点, 受插值系数有限元方法 (参见文献 [23, 29], 该方法最早由 Zlamal^[30] 针对半线性抛物问题提出) 启发, 我们将标准 Galerkin 格式 (2.2) 中的 $f(u_N)$ 替换为其整体插值, 可达到用较小的计算量来更新 Jacobi 矩阵的目的. 由此得到的离散化方法称之为插值系数 Galerkin 谱方法.

2.1 插值系数 Legendre-Galerkin 谱方法

令 $\{h_j\}_{j=0}^N$ 为基于 Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) 点^[31] $\{\xi_j\}_{j=0}^N$ 的 Lagrange 插值基函数 (节点基), 其中 $\xi_0 = -1$, $\xi_N = 1$, $\{\xi_j\}_{j=1}^{N-1}$ 为 N 次 Legendre 多项式的导函数 $L'_N(x)$ 的 $N-1$ 个零点. 显然, 二维张量形式的 LGL 点及相应的节点基分别为

$$\mathbf{x}_{jk} = (\xi_j, \xi_k), \quad h_{jk}(\mathbf{x}) = h_j(x)h_k(y), \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad j, k = 0, 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

针对边值问题 (1.1), 本文提出的插值系数 Legendre-Galerkin 谱方法可表述为: 求 $u_N \in X_N$ 使得

$$\mathcal{A}(u_N, v_N) - (I_N f(u_N), v_N) = 0, \quad \forall v_N \in X_N, \quad (2.4)$$

其中 $I_N : C(\bar{\Omega}) \rightarrow P_N \otimes P_N$ 为 Lagrange 插值算子, 满足: $\forall u \in C(\bar{\Omega})$,

$$(I_N u)(\mathbf{x}_{jk}) = u(\mathbf{x}_{jk}), \quad j, k = 0, 1, \dots, N.$$

记 $U_{jk} = u_N(\mathbf{x}_{jk})$ ($j, k = 0, 1, \dots, N$), 则 $U_{j0} = U_{jN} = U_{0k} = U_{Nk} = 0$, $j, k = 0, 1, \dots, N$. 鉴于 $f(0) = 0$, 有

$$(\mathbf{I}_N f(u_N))(\mathbf{x}) = \sum_{j,k=1}^{N-1} f(U_{jk}) h_{jk}(\mathbf{x}).$$

值得指出的是, 上述插值系数法是对整个非线性项 $f(u_N)$ 进行 Lagrange 插值, 其插值系数即为 $f(U_{jk})$ ($j, k = 0, 1, \dots, N$). 这就导致弱形式 (2.4) 对应的非线性代数方程组易于推导, 且在形式上较由经典谱 Galerkin 离散得到的非线性代数方程组更为简单. 当然, 插值系数法也可基于其他类型插值基函数, 如 Fourier 基函数进行. 此时, 插值系数不再为 $f(U_{jk})$, 但经一系列推导后仍可得一形式简单的非线性代数方程组, 这里不再赘述.

考虑到 $u_N \in X_N$, 我们有

$$u_N(\mathbf{x}) = \sum_{j,k=1}^{N-1} U_{jk} h_{jk}(\mathbf{x}) = \sum_{j,k=1}^{N-1} U_{jk} h_j(x) h_k(y). \quad (2.5)$$

将 (2.5) 代入 (2.4) 并取 $v_N = h_{lm}$ ($l, m = 1, 2, \dots, N-1$), 可导出非线性代数方程组

$$\mathbf{AUB} + \mathbf{BUA} - \mathbf{BF(U)B} = \mathbf{0}, \quad (2.6)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (U_{jk})_{j,k=1,2,\dots,N-1}, & \mathbf{F(U)} &= (f(U_{jk}))_{j,k=1,2,\dots,N-1}, \\ \mathbf{A} &= (A_{jk})_{j,k=1,2,\dots,N-1}, & A_{jk} &= \int_{-1}^1 h'_k(x) h'_j(x) dx, \\ \mathbf{B} &= (B_{jk})_{j,k=1,2,\dots,N-1}, & B_{jk} &= \int_{-1}^1 h_k(x) h_j(x) dx. \end{aligned}$$

方程组 (2.6) 也可以写成如下形式

$$\mathbf{Ku} - \mathbf{Mf(u)} = \mathbf{0}, \quad (2.7)$$

这里 $\mathbf{K} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$, $\mathbf{M} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$, $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{f(u)}$ 分别是由 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{F(U)}$ 的列构成的长度为 $(N-1)^2$ 的向量, 即

$$\mathbf{u} = (U_{11}, U_{21}, \dots, U_{q1}, U_{12}, \dots, U_{q2}, \dots, U_{q1}, \dots, U_{qq})^\top, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{f(u)} = (f(U_{11}), f(U_{21}), \dots, f(U_{q1}), f(U_{12}), \dots, f(U_{q2}), \dots, f(U_{q1}), \dots, f(U_{qq}))^\top, \quad (2.9)$$

其中 $q = N-1$, $\otimes$ 表示 Kronecker 乘积算子, 即 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (A_{ij} B)_{i,j=1,2,\dots,N-1}$. 显然, 非线性代数方程组 (2.7) 对应的 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J(u)} = \mathbf{K} - \mathbf{MD_f(u)}, \quad (2.10)$$

其中

$$\mathbf{D_f(u)} = \text{diag}(f'(U_{11}), \dots, f'(U_{q1}), f'(U_{12}), \dots, f'(U_{q2}), \dots, f'(U_{q1}), \dots, f'(U_{qq})). \quad (2.11)$$

得益于插值系数法的运用, Jacobi 矩阵 (2.10) 的表达非常简单. 由于 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{M}$ 是两个常数矩阵, 所以在每次 Newton 迭代中, 只需更新一个对角矩阵 $\mathbf{D_f(u)}$. 事实上, 这正是采用插值系数法离散非线性问题的优势所在.

注 2.1 通过使用张量积, 可将上述插值系数 Legendre-Galerkin 谱方法推广到高维情形.

2.2 SGSEM 的算法步骤

为了确保算法的收敛性, 为 (2.4) 的解构造好的初值至关重要. 受传统 SEM 的启发, 本文提出基于离散化格式 (2.4) 的谱 Galerkin 型 SEM (SGSEM). 该方法采用 (1.1) 对应的线性特征值问题的若干特征函数的线性组合构造初值, 然后, 针对每个初值, 运用数值延拓法求解离散问题 (2.4).

基于 SEM 的原始算法^[16]及其改进算法^[23], 本文给出计算 (1.1) 的多解的插值系数 SGSEM 的算法框架如下:

第 1 步 计算 $-\Delta$ 在 Ω 上带齐次 Dirichlet 边界条件的特征对.

第 2 步 在由某些特征函数张成的较小子空间中对原问题 (1.1) 作 Galerkin 逼近, 并尽可能地搜索所有解, 选择其一作为粗略的初值.

第 3 步 将第 2 步中的较小子空间延拓成相对较大的子空间, 并在其中更新初值.

第 4 步 运用插值系数 Legendre-Galerkin 谱方法离散原问题 (1.1), 得到非线性代数方程组 (2.7).

第 5 步 基于第 2 和 3 步得到的初值, 用 Newton 型数值延拓法求解 (2.7).

以上各步中, 第 2 步是分离出各种解并确定其大致位置的关键步骤. 如果第 2 步中构造的初值已经足够好, 则第 3 步可以省略. 与前面介绍的基于谱离散的两水平方法^[20]相比, SGSEM 在第 2 和 3 步中有选择地挑选特征基函数, 力求按一定规律得到多解的初值. 同时, 插值系数 Legendre-Galerkin 谱方法用于离散模型问题以得到形式简单的非线性代数方程组. 所以, 两者在初值构造方式及谱离散对象上都有所不同.

3 SGSEM 数值解的存在性、唯一性和谱收敛性

本节讨论对应于 (1.1) 的每个特定真解, 插值系数 SGSEM 的数值解的存在性、唯一性和谱收敛性. 除非特别说明, 以下叙述中 C 表示任意正常数.

3.1 预备知识

首先, 我们介绍本文要用到的一些函数空间. 对 $p \in [1, \infty]$, 令

$$L^p(\Omega) = \{v : v \text{ 在 } \Omega \text{ 上可测, 且 } \|v\|_{L^p(\Omega)} < \infty\},$$

其中

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} |v(\mathbf{x})|.$$

当 $p = 2$ 时, 空间 $L^2(\Omega)$ 是一个 Hilbert 空间, 其内积为

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

为简单起见, 用 $(\cdot, \cdot)$ 和 $\|\cdot\|_0$ 分别表示 $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ 和 $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$. 对 $m \in \mathbb{N}_+$, 考虑 Sobolev 空间

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq m\},$$

其内积和范数为

$$(u, v)_m = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u(\mathbf{x}) D^\alpha v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \|v\|_m = \sqrt{(v, v)_m}.$$

空间 $H_0^m(\Omega)$ 定义为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H^m(\Omega)$ 中的闭包, 其对偶空间记为 $H^{-m}(\Omega)$, 相应范数定义为

$$\|L\|_{-m} = \sup_{0 \neq v \in H_0^m(\Omega)} \frac{\langle L, v \rangle}{\|v\|_m}, \quad \forall L \in H^{-m}(\Omega),$$

这里 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $H^{-m}(\Omega)$ 与 $H_0^m(\Omega)$ 之间的对偶积. 对任何非整数的实数 $s > 0$, 定义分数阶 Sobolev 空间 $H^s(\Omega) = \{v \in H^{\lfloor s \rfloor}(\Omega) : \|v\|_s < \infty\}$, 其范数^[32] 为

$$\|v\|_s = \left(\|v\|_{\lfloor s \rfloor}^2 + \sum_{|\alpha|=\lfloor s \rfloor} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha v(\mathbf{x}) - D^\alpha v(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2\beta+2}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right)^{1/2}, \quad \beta = s - \lfloor s \rfloor.$$

此外, 记 $H^r(\Omega)$ 和 $H^s(\Omega)$ ($r \geq s \geq 0$) 的插值空间为 $[H^r(\Omega), H^s(\Omega)]_\tau$ ($0 < \tau < 1$), 赋以所谓的图范数 (graph norm)^[33]. 事实上, 它等价于下面引理中的 Sobolev 空间 (参见文献 [34, 定理 1.5 和 1.6]). 它将在后面主要定理的证明中扮演重要角色.

引理 3.1 对任意满足 $r \geq s$ 的非负实数 r 和 s , 及任意 $\tau \in (0, 1)$, 在等价范数意义下成立

$$[H^r(\Omega), H^s(\Omega)]_\tau = H^{(1-\tau)r+\tau s}(\Omega). \quad (3.1)$$

进一步地, 对任意 $v \in H^r(\Omega)$, 有

$$\|v\|_{[H^r(\Omega), H^s(\Omega)]_\tau} \leq \|v\|_r^{1-\tau} \|v\|_s^\tau. \quad (3.2)$$

为讨论对应于 (1.1) 的特定真解的数值解的存在性、唯一性和谱收敛性, 除基本假设 (A₁) 和 (A₂), 本文还需如下假定:

(A₃) (1.1) 的解 $u \in H_0^1(\Omega)$ 是非奇异的 (或非退化的), 即 $\mathcal{L}'(u) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ 是一个同构. 条件 (A₃) 的目的在于排除极限点和分岔点^[35, 36], 从而保证 u 必是一个孤立解. 在 (A₃) 的基础上应用开映射定理即得

$$\|v\|_1 \leq C \|\mathcal{L}'(u)v\|_{-1}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.3)$$

因进一步讨论需要, 定义投影算子 $\Pi_N^{1,0} : H_0^1(\Omega) \rightarrow X_N$, 满足

$$\mathcal{A}(u - \Pi_N^{1,0}u, v_N) = 0, \quad \forall v_N \in X_N, \quad (3.4)$$

其中 $\mathcal{A}(u, v) = (\nabla u, \nabla v)$ 为 $H_0^1(\Omega)$ - 强制的双线性型, 即存在一个常数 $\gamma^* > 0$ 使得

$$\mathcal{A}(v, v) \geq \gamma^* \|v\|_1^2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.5)$$

该投影算子有如下逼近结果 (参见文献 [31, 定理 3.31]).

引理 3.2 对任意 $u \in H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ($m \geq 1$), 有

$$\|u - \Pi_N^{1,0}u\|_r \leq c_1 N^{r-m} \|u\|_m, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

事实上, 还可以构造更高阶的投影算子, 满足下面的一般性结果 (参见文献 [34, 定理 7.4]).

引理 3.3 设 $s \geq 0$, 且 $s - 1/2$ 不是整数. 则存在一个从 $H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 映到 X_N 的算子 $\Pi_N^{s,0}$, 使得对任意 $u \in H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ($m \geq s$), 有

$$\|u - \Pi_N^{s,0}u\|_r \leq C N^{r-m} \|u\|_m, \quad 0 \leq r \leq s.$$

接下来, 对任何 $u, v \in C(\bar{\Omega})$, 定义离散内积和范数

$$\langle u, v \rangle_N = \sum_{j,k=0}^N u(\mathbf{x}_{jk})v(\mathbf{x}_{jk})\omega_{jk}, \quad \|v\|_N = \langle v, v \rangle_N^{1/2},$$

其中 $\mathbf{x}_{jk}$ 和 ω_{jk} ($j, k = 0, 1, \dots, N$) 分别表示二维张量形式的 LGL 求积节点和相应权值. 众所周知,

$$\langle u, v \rangle_N = (u, v), \quad \forall uv \in X_{2N-1},$$

且

$$\|v\|_0 \leq \|v\|_N \leq c_L \|v\|_0, \quad \forall v \in X_N, \quad (3.6)$$

这里 c_L 是一个与 N 无关的常数^[37,38]. 由文献 [34, 定理 14.2], 可得如下引理.

引理 3.4 对任意 $u \in H^m(\Omega)$, 其中 $m > 1 + r/2$, 成立

$$\|u - \mathbf{I}_N u\|_r \leq c_2 N^{r-m} \|u\|_m, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

此外, 对 X_N 中的多项式, 有如下逆估计^[39].

引理 3.5 对任意实数 μ 和整数 r , 若 $0 \leq r \leq \mu$, 则对任意 $\varphi \in X_N$, 成立

$$\|\varphi\|_\mu \leq C N^{2(\mu-r)} \|\varphi\|_r. \quad (3.7)$$

为后面证明需要, 还需引入以下线性辅助问题: 求 $w \in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$\mathcal{B}(u; w, v) := \mathcal{A}(w, v) - (f'(u)w, v) = (g, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (3.8)$$

其中 $g \in L^2(\Omega)$. 应用 Sobolev 嵌入定理, 可以验证: 若 $u \in H^m(\Omega)$ ($m > 1$) 且条件 (A_1) 成立, 则双线性型 $\mathcal{B}(u; \cdot, \cdot)$ 有界, 即

$$\mathcal{B}(u; w, v) \leq (1 + \|f'(u)\|_{L^\infty(\Omega)}) \|w\|_1 \|v\|_1, \quad \forall w, v \in H^1(\Omega). \quad (3.9)$$

根据文献 [18] 中的结果, 有如下结论.

引理 3.6 设 $(A_1)-(A_3)$ 成立, 且 $u \in H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ($m > 1$) 是 (1.1) 的解. 那么, 对 $H_0^1(\Omega)$ 的任何子空间 S , 齐次线性问题

$$\mathcal{B}(u; w, v) = 0, \quad \forall v \in S \quad (3.10)$$

只有零解 $w = 0$. 进一步, 线性问题 (3.8) 存在唯一解 $w \in H_0^1(\Omega)$, 满足

$$\|w\|_2 \leq C \|g\|_0, \quad (3.11)$$

其中 C 是只依赖于 u 的常数.

证明 由条件 (A_3) 易知 (3.10) 只有零解. 进而, 类似于文献 [18] 中定理 1 和 2 的证明, 可用紧性加反证技巧证明最优正则性估计 (3.11). $\square$

3.2 数值解的存在性和谱收敛性

定义对应于 $\mathcal{B}(u; \cdot, \cdot)$ 的椭圆投影算子 $R_N : H_0^1(\Omega) \rightarrow X_N$, 使得对任意 $w \in H_0^1(\Omega)$ 都成立

$$\mathcal{B}(u; w - R_N w, v_N) = 0, \quad \forall v_N \in X_N. \quad (3.12)$$

下面引理给出了椭圆投影算子 R_N 的存在性和唯一性.

定理 3.1 设 $(A_1)-(A_3)$ 成立, 且 $u \in H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ($m > 1$) 是 (1.1) 的解. 那么, 对任意 $w \in H_0^1(\Omega)$, 存在唯一的 $R_N w \in X_N$ 满足 (3.12).

证明 对于有限维线性问题, 解的存在性与唯一性等价, 故只需证唯一性. 对任意 $w \in H_0^1(\Omega)$, 假设存在 $R_N^1 w, R_N^2 w \in X_N$ 满足 (3.12), 则

$$\mathcal{B}(u; R_N^1 w - R_N^2 w, v_N) = 0, \quad \forall v_N \in X_N. \quad (3.13)$$

因为 X_N 是 $H_0^1(\Omega)$ 的子空间, 由引理 3.6, (3.13) 蕴含 $R_N^1 w = R_N^2 w$. 定理 3.1 得证. $\square$

定理 3.2 设 $(A_1)-(A_3)$ 成立, 且 $u \in H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ($m > 1$) 是 (1.1) 的解. 则对任意 $w \in H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, 当 N 充分大时, 有如下估计式:

$$\|w - R_N w\|_1 \leq CN^{1-m} \|w\|_m, \quad \|w - R_N w\|_0 \leq CN^{-m} \|w\|_m.$$

因此, 存在两个仅依赖于 u 的常数 c_3 和 c_4 使得: 对充分大的 N ,

$$\|u - R_N u\|_1 \leq c_3 N^{1-m}, \quad \|u - R_N u\|_0 \leq c_4 N^{-m}. \quad (3.14)$$

证明 记 $\tilde{e} = w - R_N w$. 令 $\tilde{w} \in H_0^1(\Omega)$ 是线性辅助问题 (3.8) 在 $g = \tilde{e}$ 时的解. 由 (3.12)、(3.9)、引理 3.2 和 3.6, 有

$$\begin{aligned} (\tilde{e}, \tilde{e}) &= \mathcal{B}(u; \tilde{e}, \tilde{w}) = \mathcal{B}(u; \tilde{e}, \tilde{w} - \Pi_N^{1,0} \tilde{w}) \\ &\leq C \|\tilde{e}\|_1 \|\tilde{w} - \Pi_N^{1,0} \tilde{w}\|_1 \leq CN^{-1} \|\tilde{e}\|_1 \|\tilde{w}\|_2 \leq CN^{-1} \|\tilde{e}\|_1 \|\tilde{e}\|_0. \end{aligned}$$

因此,

$$\|\tilde{e}\|_0 \leq CN^{-1} \|\tilde{e}\|_1. \quad (3.15)$$

另一方面, 注意到 $u \in H^m(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$, 利用 (A_1) 、(3.5)、(3.9) 及 (3.15), 对充分大的 N , 可得

$$\begin{aligned} \gamma^* \|\tilde{e}\|_1^2 &\leq \mathcal{A}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \mathcal{B}(u; \tilde{e}, \tilde{e}) + (f'(u)\tilde{e}, \tilde{e}) \\ &= \mathcal{B}(u; \tilde{e}, w - \Pi_N^{1,0} w) + (f'(u)\tilde{e}, \tilde{e}) \\ &\leq C \|\tilde{e}\|_1 \|w - \Pi_N^{1,0} w\|_1 + \|f'(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\tilde{e}\|_0^2 \\ &\leq CN^{1-m} \|\tilde{e}\|_1 \|w\|_m + CN^{-2} \|\tilde{e}\|_1^2. \end{aligned}$$

从而得到 $\|\tilde{e}\|_1$ 的估计. 进而, 利用 (3.15) 即可得 $\|\tilde{e}\|_0$ 的估计. $\square$

回顾 (1.1) 的弱解 $u \in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$\mathcal{A}(u, v) - (f(u), v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.16)$$

另一方面, 问题 (1.1) 的插值系数 Legendre-Galerkin 谱方法的数值解 $u_N \in X_N$ 满足

$$\mathcal{A}(u_N, v_N) - (\mathbf{I}_N f(u_N), v_N) = 0, \quad \forall v_N \in X_N. \quad (3.17)$$

记 $e = u - u_N$. 根据 (3.16) 和 (3.17), 有

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u; e, v_N) &= \mathcal{A}(u, v_N) - \mathcal{A}(u_N, v_N) - (f'(u)(u - u_N), v_N) \\ &= (f(u) - \mathbf{I}_N f(u_N) - f'(u)(u - u_N), v_N), \quad \forall v_N \in X_N. \end{aligned} \quad (3.18)$$

为证明本文的主要定理, 需要下面的技术性结果.

引理 3.7 设 $(A_1)-(A_3)$ 成立, 且 $u \in H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ($k \geq m > 3$) 是 (1.1) 的解. 记

$$\mathcal{R}(u, \chi, v_N) = (f(u) - \mathbf{I}_N f(\chi) - f'(u)(u - \chi), v_N), \quad \forall \chi, v_N \in X_N. \quad (3.19)$$

若对某个常数 $\delta > 0$, $\chi \in X_N$ 满足 $\max\{\|\chi\|_{L^\infty(\Omega)}, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\} \leq \delta$, 则有

$$|\mathcal{R}(u, \chi, v_N)| \leq (c_5 N^{-m} + C N^{2\tau} \|\mathbf{I}_N u - \chi\|_1 \|\mathbf{I}_N u - \chi\|_0 + C N^{\tau-1} \|\mathbf{R}_N u - \chi\|_1) \|v_N\|_0, \quad (3.20)$$

这里, $\tau \in (0, 1)$ 是任意参数,

$$c_5 = c_2 \|f(u)\|_m + c_\delta (c_L (c_2 \|u\|_m + c_4) + c_4),$$

其中, c_L 、 c_2 及 c_4 分别是 (3.6)、引理 3.4 及定理 3.2 中的常数, c_δ 是 $|f'|$ 、 $|f''|$ 及 $|f'''|$ 在 $[-\delta, \delta]$ 上的最大值.

证明 显然,

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}(u, \chi, v_N)| &\leq \|f(u) - \mathbf{I}_N f(\chi) - f'(u)(u - \chi)\|_0 \|v_N\|_0 \\ &\leq (\gamma_1(u, \chi) + \gamma_2(u, \chi) + \gamma_3(u, \chi)) \|v_N\|_0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

其中

$$\begin{aligned} \gamma_1(u, \chi) &= \|f(u) - \mathbf{I}_N f(u)\|_0, \\ \gamma_2(u, \chi) &= \|\mathbf{I}_N (f(u) - f(\chi) - f'(u)(u - \chi))\|_0, \\ \gamma_3(u, \chi) &= \|\mathbf{I}_N (f'(u)(u - \chi)) - f'(u)(u - \chi)\|_0. \end{aligned}$$

由 $u \in H^m(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ 、条件 (A_1) 以及引理 3.4, 可得

$$\gamma_1(u, \chi) \leq c_2 \|f(u)\|_m N^{-m}. \quad (3.22)$$

记 $\phi(t) = f(\chi + t(u - \chi))$. 分部积分可得

$$\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t) dt = \phi'(1) - \int_0^1 \phi''(t) t dt.$$

将 $\phi(t)$ 的表达式代入上式有

$$f(u) - f(\chi) - f'(u)(u - \chi) = - \left(\int_0^1 f''(\chi + t(u - \chi)) t dt \right) (u - \chi)^2.$$

所以, 利用 (A₁) 和 $\|\chi + t(u - \chi)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta$ ($\forall t \in [0, 1]$), 可得

$$\begin{aligned}
 \gamma_2(u, \chi) &\leq \|f(u) - f(\chi) - f'(u)(u - \chi)\|_N \\
 &\leq \left\| \int_0^1 f''(\chi + t(u - \chi))t dt \right\|_{L^\infty(\Omega)} \| (u - \chi)^2 \|_N \\
 &\leq c_\delta \| (u - \chi)^2 \|_N \\
 &= c_\delta \| (I_N u - \chi)^2 \|_N \\
 &\leq c_\delta \| I_N u - \chi \|_{L^\infty(\Omega)} \| I_N u - \chi \|_N \\
 &\leq C \| I_N u - \chi \|_{1+\tau} \| I_N u - \chi \|_0 \\
 &\leq C N^{2\tau} \| I_N u - \chi \|_1 \| I_N u - \chi \|_0,
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

这里, 还用到了 (3.6)、Sobolev 嵌入 $H^{1+\tau}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$ ($\tau > 0$) 及引理 3.5 中的逆估计. 注意到

$$\begin{aligned}
 \gamma_3(u, \chi) &= \|I_N(f'(u)(u - \chi)) - f'(u)(u - \chi)\|_0 \\
 &\leq \|I_N(f'(u)(u - R_N u))\|_0 + \|f'(u)(u - R_N u)\|_0 \\
 &\quad + \|I_N(f'(u)(R_N u - \chi)) - f'(u)(R_N u - \chi)\|_0.
 \end{aligned}$$

由 (3.6) 和定理 3.2, 我们有

$$\begin{aligned}
 \|I_N(f'(u)(u - R_N u))\|_0 &\leq \|I_N(f'(u)(u - R_N u))\|_N \\
 &= \|f'(u)(u - R_N u)\|_N \\
 &\leq c_\delta \|u - R_N u\|_N \\
 &= c_\delta \|I_N u - R_N u\|_N \\
 &\leq c_\delta c_L \|I_N u - R_N u\|_0 \\
 &\leq c_\delta c_L (\|I_N u - u\|_0 + \|u - R_N u\|_0) \\
 &\leq c_\delta c_L (c_2 \|u\|_m + c_4) N^{-m}.
 \end{aligned}$$

此外,

$$\|f'(u)(u - R_N u)\|_0 \leq c_\delta \|u - R_N u\|_0 \leq c_\delta c_4 N^{-m}.$$

另一方面, 由引理 3.1、3.4、3.5 及条件 (A₁), 可得

$$\begin{aligned}
 &\|I_N(f'(u)(R_N u - \chi)) - f'(u)(R_N u - \chi)\|_0 \\
 &\leq c_2 N^{-(1+\tau)} \|f'(u)(R_N u - \chi)\|_{1+\tau} \\
 &\leq C N^{-(1+\tau)} \|f'(u)(R_N u - \chi)\|_{[H^2(\Omega), H^1(\Omega)]_{1-\tau}} \\
 &\leq C N^{-(1+\tau)} \|f'(u)(R_N u - \chi)\|_2^{\tau} \|f'(u)(R_N u - \chi)\|_1^{1-\tau} \\
 &\leq C N^{-(1+\tau)} \|R_N u - \chi\|_2^{\tau} \|R_N u - \chi\|_1^{1-\tau} \\
 &\leq C N^{\tau-1} \|R_N u - \chi\|_1,
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

这里, 用到了 $H^{1+\tau}(\Omega) = [H^2(\Omega), H^1(\Omega)]_{1-\tau}$ ($0 < \tau < 1$) 和 $u \in H^m(\Omega) \hookrightarrow C^2(\bar{\Omega})$ ($m > 3$). 因此,

$$\gamma_3(u, \chi) \leq c_\delta(c_L(c_2\|u\|_m + c_4) + c_4)N^{-m} + CN^{\tau-1}\|R_N u - \chi\|_1. \quad (3.25)$$

结合 (3.21)–(3.23) 和 (3.25) 即得 (3.20). $\square$

下面给出本文的第一个主要结果.

定理 3.3 设 (A_1) – (A_3) 成立, 且 $u \in H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ($k \geq m > 3$) 是 (1.1) 的解. 那么, 对充分大的 N , 存在一个 $u_N \in X_N$ 满足 (3.17) 及

$$\|u - u_N\|_1 \leq CN^{1-m}, \quad \|u - u_N\|_0 \leq CN^{-m}. \quad (3.26)$$

证明 记 $e = u - u_N$, 它可分解为 $e = e^* + \theta$, 其中 $e^* = u - R_N u$, $\theta = R_N u - u_N$. 根据 (3.18) 和 (3.19) 可知, $u_N \in X_N$ 满足 (3.17) 的充要条件为 u_N 满足

$$\mathcal{B}(u; u_N, v_N) = \mathcal{B}(u; u, v_N) - \mathcal{R}(u, u_N, v_N), \quad \forall v_N \in X_N. \quad (3.27)$$

下面证明由 (3.17) 确定的数值解 u_N 的存在性, 同时得到 u_N 对应的 $\|\theta\|_1$ 和 $\|\theta\|_0$ 的估计.

受文献 [36] 中证明思路的启发, 本文引入一个映射 $\Phi: X_N \rightarrow X_N$, 定义为

$$\mathcal{B}(u; \Phi(\chi), v_N) = \mathcal{B}(u; u, v_N) - \mathcal{R}(u, \chi, v_N), \quad \forall v_N \in X_N. \quad (3.28)$$

根据引理 3.6 及有限维线性问题的解的存在性与唯一性等价知, 对任意 $\chi \in X_N$, 存在唯一的 $\Phi(\chi) \in X_N$ 满足上述定义. 而由 (3.27) 和 (3.28) 可得, Φ 在 X_N 中的任意不动点都是 (3.17) 的一个解. 对适当大且固定的 N , 定义 X_N 的子集

$$Q = \{\chi \in X_N \mid \|\chi - R_N u\|_1 \leq c_6 N^{1/2-m} \text{ 且 } \|\chi - R_N u\|_0 \leq c_7 N^{-m}\}.$$

这里, $c_6 > 0$ 是一个固定的常数且 $c_7 = 2c_0 c_5$, 其中, c_5 是引理 3.7 中的常数, c_0 是如下关于线性辅助问题 (3.8) 的解 w 的估计中的常数:

$$\|\Pi_N^{1,0} w\|_0 = \|\Pi_N^{1,0} w - w + w\|_0 \leq CN^{-1}\|w\|_1 + \|w\|_0 \leq c_0 \|g\|_0. \quad (3.29)$$

显然 Q 是 X_N 的紧凸子集. 接下来, 我们用 Schauder 不动点定理证明 Φ 在 Q 上的不动点的存在性. 为此需要验证, 对充分大的 N , $\Phi(Q) \subset Q$, 且 Φ 是 Q 上的连续映射.

令 $w \in H_0^1(\Omega)$ 是线性辅助问题 (3.8) 的解. 那么, 由 Φ 的定义和 (3.12) 可知, 对任意 $\chi \in Q$ 和 $v_N \in X_N$, 有

$$\begin{aligned} (g, \Phi(\chi) - R_N u) &= \mathcal{B}(u; \Phi(\chi) - R_N u, w) \\ &= \mathcal{B}(u; \Phi(\chi) - R_N u, w - v_N) + \mathcal{B}(u; \Phi(\chi) - R_N u, v_N) \\ &= \mathcal{B}(u; \Phi(\chi) - R_N u, w - v_N) - \mathcal{R}(u, \chi, v_N) \\ &\leq C\|\Phi(\chi) - R_N u\|_1\|w - v_N\|_1 + |\mathcal{R}(u, \chi, v_N)|. \end{aligned} \quad (3.30)$$

注意到, 根据引理 3.3、3.5 及定理 3.2, 对任意 $\chi \in Q$, $1 < s < 3/2$ 及充分大的 N , 有

$$\|\chi - u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|\chi - u\|_s \leq C\|\chi - \Pi_N^{s,0} u\|_s + C\|\Pi_N^{s,0} u - u\|_s$$

$$\begin{aligned}
 &\leq CN^{2s-2}(\|\chi - R_N u\|_1 + \|R_N u - u\|_1 + \|u - \Pi_N^{s,0} u\|_1) + CN^{s-m}\|u\|_m \\
 &\leq CN^{2s-2}N^{s-m} + CN^{s-m}\|u\|_m = o(1).
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

于是, 对充分大的 N , $\|\chi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$. 又由引理 3.4 和定理 3.2 可得

$$\|I_N u - \chi\|_r \leq \|I_N u - u\|_r + \|u - R_N u\|_r + \|R_N u - \chi\|_r \leq CN^{r-m}, \quad r = 0, 1.$$

因此, 根据引理 3.7, 对 $0 < \tau < 1/2$, 有

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{R}(u, \chi, v_N)| &\leq (c_5 N^{-m} + CN^{2\tau} N^{1-m} N^{-m} + CN^{\tau-1} N^{1/2-m})\|v_N\|_0 \\
 &\leq (c_5 N^{-m} + o(N^{-m}))\|v_N\|_0, \quad \forall v_N \in X_N.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

结合 (3.30) 和 (3.32), 并取 $v_N = \Pi_N^{1,0} w$, 可得

$$\begin{aligned}
 (g, \Phi(\chi) - R_N u) &\leq C\|\Phi(\chi) - R_N u\|_1\|w - \Pi_N^{1,0} w\|_1 + (c_5 N^{-m} + o(N^{-m}))\|\Pi_N^{1,0} w\|_0 \\
 &\leq CN^{-1}\|\Phi(\chi) - R_N u\|_1\|w\|_2 + (c_0 c_5 N^{-m} + o(N^{-m}))\|g\|_0 \\
 &\leq CN^{-1}\|\Phi(\chi) - R_N u\|_1\|g\|_0 + \left(\frac{c_7}{2} N^{-m} + o(N^{-m})\right)\|g\|_0,
 \end{aligned}$$

这里, 用到了引理 3.2、(3.29) 及 (3.11). 取 $g = \Phi(\chi) - R_N u$ 可得, 对充分大的 N ,

$$\|\Phi(\chi) - R_N u\|_0 \leq \frac{2}{3} c_7 N^{-m} + CN^{-1}\|\Phi(\chi) - R_N u\|_1. \tag{3.33}$$

另一方面, 利用 (3.5)、(3.12)、(3.28) 及 (3.32), 有

$$\begin{aligned}
 \gamma^* \|\Phi(\chi) - R_N u\|_1^2 &\leq \mathcal{A}(\Phi(\chi) - R_N u, \Phi(\chi) - R_N u) \\
 &= \mathcal{B}(u; \Phi(\chi) - R_N u, \Phi(\chi) - R_N u) \\
 &\quad + (f'(u)(\Phi(\chi) - R_N u), \Phi(\chi) - R_N u) \\
 &\leq |\mathcal{R}(u, \chi, \Phi(\chi) - R_N u)| + C\|\Phi(\chi) - R_N u\|_0^2 \\
 &\leq CN^{-m}\|\Phi(\chi) - R_N u\|_0 + C\|\Phi(\chi) - R_N u\|_0^2,
 \end{aligned}$$

这表明

$$\|\Phi(\chi) - R_N u\|_1 \leq CN^{-m} + C\|\Phi(\chi) - R_N u\|_0. \tag{3.34}$$

结合 (3.33) 与 (3.34) 可得, 对充分大的 N ,

$$\|\Phi(\chi) - R_N u\|_1 \leq CN^{-m} \leq c_6 N^{1/2-m}, \quad \|\Phi(\chi) - R_N u\|_0 \leq c_7 N^{-m}.$$

因此, $\Phi(Q) \subset Q$.

为证 Φ 在 Q 上连续, 注意到对 $\chi_1, \chi_2 \in Q$ 和任意 $v_N \in X_N$, 有

$$\begin{aligned}
 (g, \Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2)) &= \mathcal{B}(u; \Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2), w) \\
 &= \mathcal{B}(u; \Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2), w - v_N) + \mathcal{B}(u; \Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2), v_N) \\
 &\leq C\|\Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2)\|_1\|w - v_N\|_1 + |\mathcal{B}(u; \Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2), v_N)|.
 \end{aligned}$$

由于 $u \in H^m(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$, 且根据 (3.31) 得 $\|\chi_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ ($i = 1, 2$) 对充分大的 N 成立, 结合 (3.28)、(3.6) 及条件 (A₁), 进一步有

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{B}(u; \Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2), v_N)| &= |\mathcal{R}(u, \chi_2, v_N) - \mathcal{R}(u, \chi_1, v_N)| \\
 &= |(\mathbf{I}_N f(\chi_1) - \mathbf{I}_N f(\chi_2) - f'(u)(\chi_1 - \chi_2), v_N)| \\
 &\leq \|\mathbf{I}_N(f(\chi_1) - f(\chi_2))\|_0 \|v_N\|_0 + \|f'(u)(\chi_1 - \chi_2)\|_0 \|v_N\|_0 \\
 &\leq \|f(\chi_1) - f(\chi_2)\|_N \|v_N\|_0 + \|f'(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\chi_1 - \chi_2\|_0 \|v_N\|_0 \\
 &\leq \left\| \int_0^1 f'(\chi_2 + t(\chi_1 - \chi_2)) dt \right\|_{L^\infty(\Omega)} \|\chi_1 - \chi_2\|_N \|v_N\|_0 \\
 &\quad + \|f'(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\chi_1 - \chi_2\|_0 \|v_N\|_0 \\
 &\leq C \|\chi_1 - \chi_2\|_0 \|v_N\|_0.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

故

$$(g, \Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2)) \leq C \|\Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2)\|_1 \|w - v_N\|_1 + C \|\chi_1 - \chi_2\|_0 \|v_N\|_0.$$

取 $v_N = \Pi_N^{1,0} w$ 和 $g = \Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2)$, 通过类似于 (3.33) 的推导过程, 可得

$$\|\Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2)\|_0 \leq CN^{-1} \|\Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2)\|_1 + C \|\chi_1 - \chi_2\|_0. \tag{3.36}$$

另一方面, 利用 (3.5)、(3.35)、(A₁) 及 $u \in H^m(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$, 有

$$\begin{aligned}
 \gamma^* \|\Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2)\|_1^2 &\leq \mathcal{A}(\Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2), \Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2)) \\
 &= \mathcal{B}(u; \Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2), \Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2)) \\
 &\quad + (f'(u)(\Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2)), \Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2)) \\
 &\leq C \|\chi_1 - \chi_2\|_0 \|\Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2)\|_0 + C \|\Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2)\|_0^2,
 \end{aligned}$$

从而

$$\|\Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2)\|_1 \leq C \|\chi_1 - \chi_2\|_0 + C \|\Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2)\|_0. \tag{3.37}$$

结合 (3.36) 与 (3.37), 可知, 对充分大的 N ,

$$\|\Phi(\chi_1) - \Phi(\chi_2)\|_1 \leq C \|\chi_1 - \chi_2\|_0 \leq C \|\chi_1 - \chi_2\|_1.$$

所以, Φ 在 Q 上连续.

至此, 运用 Schauder 不动点定理即知, 存在一个 $u_N \in Q \subset X_N$ 使得 $\Phi(u_N) = u_N$. 这样的 u_N 是 (3.17) 的一个解, 且根据 Q 的定义, 易得

$$\|\theta\|_1 \leq c_6 N^{1-m}, \quad \|\theta\|_0 \leq c_7 N^{-m},$$

其中 $\theta = \mathbf{R}_N u - u_N$. 进而,

$$\|e\|_1 \leq \|e^*\|_1 + \|\theta\|_1 \leq CN^{1-m}, \quad \|e\|_0 \leq \|e^*\|_0 + \|\theta\|_0 \leq CN^{-m}.$$

定理 3.3 得证. $\square$

注 3.1 定理 3.3 中条件 $k \geq m > 3$ 源于 (3.22) 和 (3.24) 的推导. 当 f 的光滑性及解的正则性减弱时, 误差估计式 (3.26) 是否成立尚待进一步证明. 但对基于经典谱 Galerkin 离散的 SGSEM, 由于引理 3.7 中 $\mathcal{R}(u, \chi, v_N)$ 的分解式更简单, 此时定理 3.3 中条件 $k \geq m > 3$ 可放松至 $k \geq 2$ 且 $m > 1$.

3.3 真解附近数值解的唯一性

对 (1.1) 的特定真解, 为证明相应插值系数 SGSEM 的数值解的唯一性, 首先给出以下引理.

引理 3.8 设 $(A_1)-(A_3)$ 成立, 且 $u \in H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ($m > 1$) 是 (1.1) 的解. 那么, 存在常数 $c_8 > 0$ 和 $M > 0$ 使得, 当 $N > M$ 时,

$$\|v_N\|_1 \leq c_8 \sup_{0 \neq \varphi \in X_N} \frac{\mathcal{B}(u; v_N, \varphi)}{\|\varphi\|_1}, \quad \forall v_N \in X_N. \quad (3.38)$$

证明 首先, 由 (3.3), 有

$$\|v_N\|_1 \leq C \|\mathcal{L}'(u)v_N\|_{-1} = C \sup_{0 \neq \varphi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\mathcal{B}(u; v_N, \varphi)}{\|\varphi\|_1}, \quad \forall v_N \in X_N. \quad (3.39)$$

注意到 $u \in H^m(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$, 由条件 (A_1) 、正交性 (3.4) 及引理 3.2 可知, 对任意 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u; v_N, \Pi_N^{1,0} \varphi) &= \mathcal{B}(u; v_N, \varphi) - \mathcal{B}(u; v_N, \varphi - \Pi_N^{1,0} \varphi) \\ &= \mathcal{B}(u; v_N, \varphi) + (f'(u)v_N, \varphi - \Pi_N^{1,0} \varphi) \\ &\geq \mathcal{B}(u; v_N, \varphi) - CN^{-1} \|v_N\|_1 \|\varphi\|_1. \end{aligned}$$

因此, 由 (3.39), 当 N 充分大时,

$$\sup_{0 \neq \varphi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\mathcal{B}(u; v_N, \Pi_N^{1,0} \varphi)}{\|\varphi\|_1} \geq C \|v_N\|_1. \quad (3.40)$$

鉴于 $\|\Pi_N^{1,0} \varphi\|_1 \leq C \|\varphi\|_1$ 且 $\Pi_N^{1,0}$ 是一个满射, 所以

$$\sup_{0 \neq \varphi \in X_N} \frac{\mathcal{B}(u; v_N, \varphi)}{\|\varphi\|_1} = \sup_{0 \neq \varphi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\mathcal{B}(u; v_N, \Pi_N^{1,0} \varphi)}{\|\Pi_N^{1,0} \varphi\|_1} \geq C \sup_{0 \neq \varphi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\mathcal{B}(u; v_N, \Pi_N^{1,0} \varphi)}{\|\varphi\|_1}. \quad (3.41)$$

结合 (3.40) 与 (3.41), 引理得证. $\square$

引理 3.9 设 $(A_1)-(A_3)$ 成立, 且 $u \in H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ($m > 1$) 是 (1.1) 的解. 那么, 存在常数 $\delta, M, c_9 > 0$ 使得, 对任意满足 $\|u - w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta$ 的 $w \in C(\bar{\Omega})$, 当 $N > M$ 时,

$$\|v_N\|_1 \leq c_9 \sup_{0 \neq \varphi \in X_N} \frac{\mathcal{B}(w; v_N, \varphi)}{\|\varphi\|_1}, \quad \forall v_N \in X_N. \quad (3.42)$$

证明 取 $\varphi \in X_N$, 则有

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(w; v_N, \varphi) &= \mathcal{B}(u; v_N, \varphi) + ((f'(u) - f'(w))v_N, \varphi) \\ &\geq \mathcal{B}(u; v_N, \varphi) - \|f'(u) - f'(w)\|_{L^\infty(\Omega)} \|v_N\|_1 \|\varphi\|_1, \quad \forall v_N \in X_N. \end{aligned}$$

根据 (A_1) 及 f' 连续可知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得: 当 $w \in C(\bar{\Omega})$ 满足 $\|u - w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta$ 时, 有 $\|f'(u) - f'(w)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon$. 故

$$\mathcal{B}(w; v_N, \varphi) \geq \mathcal{B}(u; v_N, \varphi) - \varepsilon \|v_N\|_1 \|\varphi\|_1, \quad \forall v_N, \varphi \in X_N.$$

由引理 3.8, 取 $\varepsilon = \frac{1}{2c_8}$ 和 $c_9 = 2c_8$, 引理得证. $\square$

对任意 $w \in C(\bar{\Omega})$, 定义

$$\mathcal{B}_N(w; v, \varphi) = \mathcal{A}(v, \varphi) - (\mathbf{I}_N(f'(w)v), \varphi), \quad \forall v \in X_N, \quad \varphi \in C(\bar{\Omega}). \quad (3.43)$$

引理 3.10 设 $(A_1)-(A_3)$ 成立, 且 $u \in H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ($m > 3$) 是 (1.1) 的解. 那么, 存在常数 δ_1 与 $M > 0$ 使得, 若 $w \in C(\bar{\Omega})$ 满足 $\|u - w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta_1$ 且 $N > M$, 则有

$$\|v_N\|_1 \leq C \sup_{0 \neq \varphi \in X_N} \frac{\mathcal{B}_N(w; v_N, \varphi)}{\|\varphi\|_1}, \quad \forall v_N \in X_N. \quad (3.44)$$

证明 取 $\varphi \in X_N$, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_N(w; v_N, \varphi) &= \mathcal{B}(w; v_N, \varphi) + (f'(w)v_N - \mathbf{I}_N(f'(w)v_N), \varphi) \\ &\geq \mathcal{B}(w; v_N, \varphi) - \|f'(w)v_N - f'(u)v_N\|_0 \|\varphi\|_1 \\ &\quad - \|f'(u)v_N - \mathbf{I}_N(f'(u)v_N)\|_0 \|\varphi\|_1 \\ &\quad - \|\mathbf{I}_N(f'(u)v_N) - \mathbf{I}_N(f'(w)v_N)\|_0 \|\varphi\|_1. \end{aligned} \quad (3.45)$$

根据 (A_1) 及 f' 连续可得, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 当 $w \in C(\bar{\Omega})$ 满足 $\|u - w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta_0$ 时, 有

$$\|f'(w)v_N - f'(u)v_N\|_0 \leq \|f'(w) - f'(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \|v_N\|_1 \leq \varepsilon \|v_N\|_1. \quad (3.46)$$

此外,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{I}_N(f'(u)v_N) - \mathbf{I}_N(f'(w)v_N)\|_0 &\leq \|\mathbf{I}_N(f'(u)v_N) - \mathbf{I}_N(f'(w)v_N)\|_N \\ &= \|f'(u)v_N - f'(w)v_N\|_N \\ &\leq \|f'(w) - f'(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \|v_N\|_N \\ &\leq c_L \varepsilon \|v_N\|_1. \end{aligned} \quad (3.47)$$

另一方面, 利用 (A_1) 、引理 3.1 及 3.5 可知, 对任意固定的 $\tau \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} \|f'(u)v_N - \mathbf{I}_N(f'(u)v_N)\|_0 &\leq c_2 N^{-(1+\tau)} \|f'(u)v_N\|_{1+\tau} \\ &= c_2 N^{-(1+\tau)} \|f'(u)v_N\|_{[H^2(\Omega), H^1(\Omega)]_{1-\tau}} \\ &\leq C N^{-(1+\tau)} \|f'(u)v_N\|_2^\tau \|f'(u)v_N\|_1^{1-\tau} \\ &\leq C N^{-(1+\tau)} \|v_N\|_2^\tau \|v_N\|_1^{1-\tau} \\ &\leq C N^{\tau-1} \|v_N\|_1, \end{aligned}$$

这里, 用到了 $[H^2(\Omega), H^1(\Omega)]_{1-\tau} = H^{1+\tau}(\Omega)$ 和 $u \in H^m(\Omega) \hookrightarrow C^2(\bar{\Omega})$ ($m > 3$). 因此, 对充分大的 N ,

$$\|f'(u)v_N - \mathbf{I}_N(f'(u)v_N)\|_0 \leq \varepsilon \|v_N\|_1. \quad (3.48)$$

结合 (3.45)–(3.48), 可得

$$\mathcal{B}_N(w; v_N, \varphi) \geq \mathcal{B}(w; v_N, \varphi) - (2 + c_L) \varepsilon \|v_N\|_1 \|\varphi\|_1.$$

取 $\varepsilon = \frac{1}{2(2+c_L)c_9}$ 与 $\delta_1 = \min\{\delta_0, \delta\}$, 其中 c_9 和 δ 是引理 3.9 中的常数, 引理得证. $\square$

定理 3.4 设 $(A_1)-(A_3)$ 成立, 且 $u \in H^m(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ($k \geq m > 3$) 是 (1.1) 的解. 那么, 对充分大的 N , 问题 (3.17) 在邻域

$$\mathcal{N}_{\delta_1}(u) \cap X_N = \{v \in X_N : \|v - u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta_1\}$$

中存在唯一解 u_N 满足误差估计 (3.26), 其中 $\delta_1 > 0$ 是引理 3.10 中的常数.

证明 由引理 3.3、3.5 及定理 3.3 知, 对充分大的 N , 存在 $u_N \in X_N$ 使得: 当 $1 < s < 3/2$ 时,

$$\begin{aligned} \|u - u_N\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C\|u - u_N\|_s \\ &\leq C\|u - \Pi_N^{s,0}u\|_s + \|\Pi_N^{s,0}u - u_N\|_s \\ &\leq CN^{s-m} + CN^{2(s-1)}\|\Pi_N^{s,0}u - u_N\|_1 \\ &\leq CN^{s-m} + CN^{2(s-1)}(\|u - \Pi_N^{s,0}u\|_1 + \|u - u_N\|_1) \\ &\leq CN^{s-m} + CN^{2(s-1)}N^{1-m} \\ &= o(1). \end{aligned}$$

所以, 当 N 充分大时, 必有 $u_N \in \mathcal{N}_{\delta_1}(u) \cap X_N$.

现只需证明 (3.17) 在邻域 $\mathcal{N}_{\delta_1}(u) \cap X_N$ 中的解唯一. 假设 $u_N, \tilde{u}_N \in \mathcal{N}_{\delta_1}(u) \cap X_N$ 是 (3.17) 的两个解, 则有

$$u_N + t(\tilde{u}_N - u_N) \in \mathcal{N}_{\delta_1}(u) \cap X_N, \quad \forall t \in [0, 1].$$

注意到对任意 $w, \bar{w} \in \mathcal{N}_{\delta_1}(u) \cap X_N$, 有

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_N(w; v_N, \varphi) - \mathcal{B}_N(\bar{w}; v_N, \varphi)| &= |(\mathbf{I}_N(f'(w)v_N) - \mathbf{I}_N(f'(\bar{w})v_N), \varphi)| \\ &\leq \|f'(w)v_N - f'(\bar{w})v_N\|_N \|\varphi\|_0 \\ &\leq c_L \|f'(w) - f'(\bar{w})\|_{L^\infty(\Omega)} \|v_N\|_0 \|\varphi\|_0, \quad \forall v_N, \varphi \in X_N. \end{aligned}$$

由 f 的正则性知 $\mathcal{B}_N(w; v_N, \varphi)$ 关于 w 在 $\mathcal{N}_{\delta_1}(u) \cap X_N$ 中连续. 进而, $\mathcal{B}_N(u_N + t(\tilde{u}_N - u_N); \tilde{u}_N - u_N, \varphi)$ 关于 $t \in [0, 1]$ 连续. 于是, 对任意 $\varphi \in X_N$, 存在 $\bar{t} \in [0, 1]$ 使得

$$\int_0^1 \mathcal{B}_N(u_N + t(\tilde{u}_N - u_N); \tilde{u}_N - u_N, \varphi) dt = \mathcal{B}_N(u_N + \bar{t}(\tilde{u}_N - u_N); \tilde{u}_N - u_N, \varphi).$$

另一方面, 直接计算可得

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \mathcal{B}_N(u_N + t(\tilde{u}_N - u_N); \tilde{u}_N - u_N, \varphi) dt \\ &= \mathcal{A}(\tilde{u}_N - u_N, \varphi) - \left(\mathbf{I}_N \int_0^1 f'(u_N + t(\tilde{u}_N - u_N))(\tilde{u}_N - u_N) dt, \varphi \right) \\ &= \mathcal{A}(\tilde{u}_N - u_N, \varphi) - (\mathbf{I}_N f(\tilde{u}_N) - \mathbf{I}_N f(u_N), \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in X_N. \end{aligned}$$

故对任意 $\varphi \in X_N$, 存在 $\bar{t} \in [0, 1]$ 使得 $\mathcal{B}_N(u_N + \bar{t}(\tilde{u}_N - u_N); \tilde{u}_N - u_N, \varphi) = 0$. 进一步, 由引理 3.10 得

$$\|u_N - \tilde{u}_N\|_1 \leq C \sup_{0 \neq \varphi \in X_N} \frac{\mathcal{B}_N(u_N + \bar{t}(\tilde{u}_N - u_N); \tilde{u}_N - u_N, \varphi)}{\|\varphi\|_1} = 0. \quad (3.49)$$

因此, $u_N = \tilde{u}_N$. 定理 3.4 得证. $\square$

4 数值实验

本节运用 SGSEM 计算模型问题 (1.1) 的多解. 计算区域取为 $\Omega = (0, \pi)^2$, 则齐次 Dirichlet 边界条件下 $-\Delta$ 的全部特征值和相应的规范正交特征函数分别是

$$\lambda_{mn} = m^2 + n^2, \quad \phi_{mn}(\mathbf{x}) = (2/\pi) \sin(mx) \sin(ny), \quad m, n = 1, 2, \dots$$

本节数值计算中, 除非特别说明, 总取 $N = 32$.

4.1 立方非线性情形

首先, 为便于与已有理论^[40]及数值结果^[16, 23, 40]作比较, 我们考虑立方非线性情形. 取 $f(u) = u^3$, 对应的模型问题 (1.1) 为

$$\begin{cases} \Delta u + u^3 = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (4.1)$$

方程 (4.1) 通常称为 Lane-Emden 方程. 文献中已知 (4.1) 的多解结构和分布非常复杂, 事实上, (4.1) 有无穷多解^[11]. 为计算 (4.1) 的多解, 我们根据 $-\Delta$ 的特征值的重数构造初值. 具体来说, 在 SGSEM 算法的第 2 步, 我们计算如下子问题的所有解: 求 $u^0 \in S_\lambda$ 使得

$$(\nabla u^0, \nabla v) = ((u^0)^3, v), \quad \forall v \in S_\lambda, \quad (4.2)$$

这里的 S_λ 是由对应于特征值 λ 的所有特征函数张成的 $H_0^1(\Omega)$ 的子空间. 根据文献 [16, 23, 40], 当 λ 是一个 q 重特征值时, 其对应的特征函数记为 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_q$, 非线性问题 (4.2) 恰有 $3^q - 1$ 个非平凡解. 这些解可以写成 $u^0 = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + \dots + a_q\phi_q$, 其中系数

$$a_i = \pm 4\sqrt{\lambda/(3(4r-1))}, \quad \forall i \in \mathcal{I}; \quad a_i = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, q\} \setminus \mathcal{I}, \quad (4.3)$$

这里 $\mathcal{I}$ 表示 $\{1, 2, \dots, q\}$ 的任何非空子集, $r = |\mathcal{I}|$ 是 $\mathcal{I}$ 的基数. 数值结果表明: 按上述方法搜索初值, 可按特定规律 (如特征值由小到大、特征值的重数由低到高的顺序) 来有效计算出模型问题 (4.1) 的多解. 同时, 搜索初值时只需求解一个小型非线性代数方程组. 实际上, 它们是搜索延拓法 (SEM) 计算多解的两个优点. 不过, 若 (1.1) 中 $f(u)$ 更复杂时, 一般需通过 SGSEM 的第 3 步得到更好的初值.

(i) **单特征值情形.** 在 (4.2) 中取 $\lambda = \lambda_{mm} = 2m^2$ 和 $u^0 = a\phi_{mm}$, 得到两个非平凡解 $a = \pm 4\sqrt{2}m/3$. 现以 $u_{mm}^0 = (4\sqrt{2}m/3)\phi_{mm}$ 为初值, 应用 SGSEM 求解边值问题 (4.1), 相应的数值解记为 u_{mm} . 图 1 给出了解 u_{11} 、 u_{22} 、 u_{44} 及其初值的伪彩 (pcolor) 图形. 可以看到, 每个解的形状和相应的初值非常像, 解的图形具有“峰更高”、“腰更细”的特点.

(ii) **2 重特征值情形.** 考虑 2 重特征值 $\lambda_{mn} = \lambda_{nm} = m^2 + n^2$, 这里 m 和 n 是两个不同的正整数. 在 (4.2) 中取 $u^0 = a\phi_{mn} + b\phi_{nm}$, 可得到 8 个非平凡解: $a = \pm\alpha, b = 0; a = 0, b = \pm\alpha; a = b = \pm\beta; a = -b = \pm\beta$, 其中 $\alpha = 4\sqrt{\lambda_{mn}/3}, \beta = 4\sqrt{\lambda_{mn}/21}$. 进而得到 8 个初值: $\pm\alpha\phi_{mn}, \pm\alpha\phi_{nm}, \pm\beta(\phi_{mn} + \phi_{nm})$ 及 $\pm\beta(\phi_{mn} - \phi_{nm})$. 根据这些初值, 可计算出 (4.1) 相应的 8 个解. 由于问题的对称性, 本文只给出对应于初值 $\alpha\phi_{mn}$ 、 $\beta(\phi_{mn} + \phi_{nm})$ 和 $\beta(\phi_{mn} - \phi_{nm})$ 的解 u_{mn} 、 u_{mn+nm} 和 u_{mn-nm} . 图 2 给出了 $(m, n) = (1, 2)$ 、 $(m, n) = (1, 3)$ 及 $(m, n) = (1, 5)$ 时的解.

图 1 (网络版彩图) $m = 1$ (左列)、 $m = 2$ (中间列) 和 $m = 4$ (右列) 对应的初值 u^0_{mm} (第一行) 和解 u_{mm} (第二行)

图 2 (网络版彩图) 对应于 $(m, n) = (1, 2)$ (第一行)、 $(m, n) = (1, 3)$ (第二行) 和 $(m, n) = (1, 5)$ (第三行) 的解 u_{mn} (左列)、 u_{mn+nm} (中间列) 和 u_{mn-nm} (右列)

(iii) **3 重特征值情形.** 考虑最小的 3 重特征值 $\lambda_{17} = \lambda_{71} = \lambda_{55} = 50 = \lambda$. 在 (4.2) 中取 $u^0 = a\phi_{17} + b\phi_{71} + c\phi_{55}$, 可得到 $3^3 - 1 = 26$ 个不同的初值. 图 3 给出了 (4.1) 的对应此特征值的 6 个解.

(iv) **4 重特征值情形.** 考虑最小的 4 重特征值 $\lambda_{18} = \lambda_{81} = \lambda_{47} = \lambda_{74} = 65 = \lambda$. 在 (4.2) 中取 $u^0 = a\phi_{18} + b\phi_{81} + c\phi_{47} + d\phi_{74}$, 可得到 $3^4 - 1 = 80$ 个不同的初值. 取 $N = 42$, 计算出对应于此 4 重特征值的 3 个解, 绘于图 4.

图 3 (网络版彩图) 对应于最小的 3 重特征值 $\lambda = 50$ 的 6 个解: (a) u_{17} , (b) u_{55} , (c) u_{17-71} , (d) $u_{17+55+71}$, (e) $u_{17-55+71}$, (f) $u_{17+55-71}$

图 4 (网络版彩图) 对应于最小的 4 重特征值 $\lambda = 65$ 的 3 个解: u_{18} (左), u_{47} (中), u_{47+74} (右)

接下来, 从数值上验证 SGSEM 的谱收敛速度. 不失一般性, 考虑数值解 u_{11} 和 u_{12+21} 的误差. 以 $N = 100$ 时计算出的解 u_{11} 和 u_{12+21} 作为“精确解”. 图 5 给出了 u_{11} 和 u_{12+21} 的 L^2 与 H^1 误差随 N 的变化图, 其中纵坐标使用了对数尺度. 由图可观测到指数收敛速度. 这说明, 本文计算多解的方法是高效且指数收敛的.

进一步, 我们比较在 SEM 中分别采用插值系数 Legendre-Galerkin 谱方法 (ICLG) 和插值系数双线性有限元方法 (ICFEM) 的效率. 这两种方法在计算同一解时采用了相同的初值、Newton 型数值延拓法及残量终止指标, 即残量的离散 l^2 误差小于 10^{-10} 时终止 Newton 迭代. 表 1 和 2 分别给出了它

图 5 (网络版彩图) SGSEM 对解 u_{11} (左) 和 u_{12+21} (右) 在 $L^2(\Omega)$ 和 $H^1(\Omega)$ 中的指数收敛速度

表 1 两种算法在不同网格下计算 $u = u_{11}$ 的误差

算法	N	8	16	24	32	40	48
ICFEM	$\ u - u_N\ _{L^2}$	5.7343E-02	1.6048E-02	7.2947E-03	4.1363E-03	2.6566E-03	1.8488E-03
	$\ u - u_N\ _{H^1}$	3.9433E-01	1.9156E-01	1.2663E-01	9.4204E-02	7.5320E-02	6.2776E-02
ICLG	$\ u - u_N\ _{L^2}$	4.2857E-02	7.8021E-05	3.6199E-07	1.9073E-09	1.0339E-11	1.2248E-13
	$\ u - u_N\ _{H^1}$	2.8632E-01	2.8138E-03	2.8109E-05	2.4095E-07	2.0338E-09	1.5095E-11

 表 2 两种算法在不同网格下计算 $u = u_{12+21}$ 的误差

算法	N	20	30	40	50	60	70
ICFEM	$\ u - u_N\ _{L^2}$	3.6358E-02	1.6732E-02	9.5300E-03	6.1350E-03	4.2741E-03	3.1449E-03
	$\ u - u_N\ _{H^1}$	6.0492E-01	3.9613E-01	2.9930E-01	2.3636E-01	1.9769E-01	1.6906E-01
ICLG	$\ u - u_N\ _{L^2}$	9.2365E-04	8.1137E-06	6.9518E-08	7.1984E-10	9.9249E-12	4.9298E-13
	$\ u - u_N\ _{H^1}$	4.2015E-02	8.9500E-04	1.6794E-05	2.4773E-07	3.2591E-09	4.4562E-11

们不同网格下计算 u_{11} 和 u_{12+21} 的 L^2 与 H^1 误差. 数值结果表明, ICFEM 的 L^2 及 H^1 误差分别具有 2 阶和 1 阶精度, 而 ICLG 具有谱收敛精度. 此外, 计算 u_{11} 时, 基于 ICFEM 离散的 SEM 采用 48×48 个自由度, 总耗时 4.36 秒, 使 L^2 及 H^1 误差分别达到 1.85×10^{-3} 和 6.28×10^{-2} , 而基于 ICLG 的 SEM 仅采用 16×16 个自由度, 总耗时 0.08 秒, 就使 L^2 及 H^1 误差分别达到了 7.8×10^{-5} 和 2.81×10^{-3} . 计算 u_{12+21} 的情形类似. 这表明, 从数值解达到相同数量级精度所用的自由度和 CPU 考虑, 基于 ICLG 离散的 SEM 的效率明显高于基于 ICFEM 离散的 SEM.

4.2 三角非线性情形

本文的 SGSEM 还可以应用到带其他非线性项的半线性椭圆问题的多解计算. 现考虑一类非多项式半线性情形. 取 $f(u) = \kappa \sin u$ ($\kappa > 0$), 对应的半线性问题 (1.1) 为

$$\begin{cases} \Delta u + \kappa \sin u = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上.} \end{cases} \quad (4.4)$$

方程 (4.4) 通常称为椭圆 sine-Gordon 方程^[41], 也可视为一维压杆弯曲的 Euler 问题^[17] 的推广. 注意, 这里 $\kappa > 0$ 为常数, 非线性函数 $f(u) = \kappa \sin u$ 是有界奇函数.

值得指出的是, 边值问题 (4.4) 的多解的存在性和分布情况与参数 κ 有关. 将 $-\Delta$ 的特征值从小到大排列:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \leq \lambda_j \leq \cdots,$$

前 10 个特征值列于表 3. 根据文献 [41], 当 $0 < \kappa < \lambda_1$ 时, 边值问题 (4.4) 只有零解 $u \equiv 0$; 当 $\kappa > \lambda_1$ 时, (4.4) 至少有两个非平凡解, 包括一个正解 u 和与它对应的负解 $-u$; 当 $\kappa > \lambda_2 = \lambda_3$ 时, (4.4) 至少有 6 个非平凡解, 此时出现变号解; 一般地, 当 $\kappa > \lambda_k$ ($k \geq 1$) 时, (4.4) 至少有 k 对 (即 $2k$ 个) 非平凡解.

下面用 SGSEM 计算问题 (4.4) 在不同参数 κ 下的多解. 考虑 5 种 κ 的值:

- (i) $\kappa = 1$ ($0 < \kappa < \lambda_1$);
- (ii) $\kappa = 4$ ($\lambda_1 < \kappa < \lambda_2 = \lambda_3$);

表 3 $-\Delta$ 的前 10 个特征值 $\lambda_j = m_j^2 + n_j^2$ ($j = 1, 2, \dots, 10$) 及其对应的 (m_j, n_j)

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_j	1	2	1	2	3	1	3	2	4	1
n_j	1	1	2	2	1	3	2	3	1	4
$\lambda_j = m_j^2 + n_j^2$	2	5	5	8	10	10	13	13	17	17

(iii) $\kappa = 6$ ($\lambda_3 < \kappa < \lambda_4$);(iv) $\kappa = 9$ ($\lambda_4 < \kappa < \lambda_5 = \lambda_6$);(v) $\kappa = 11$ ($\lambda_6 < \kappa < \lambda_7$).

在 SGSEM 算法的第 2 和 3 步, 我们直接用 $-\Delta$ 的前 10 个特征值对应的特征函数的线性组合来搜索多解的初值. 令

$$u^0 = \sum_{j=1}^{10} a_j \phi_j,$$

这里

$$\phi_j = \left(\frac{2}{\pi}\right) \sin(m_j x) \sin(n_j y),$$

(m_j, n_j) 的信息列于表 3. 求系数 $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$ 使得

$$(\nabla u^0, \nabla v) - \kappa(\sin u^0, v) = 0, \quad \forall v \in \text{span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{10}\},$$

即

$$\lambda_i a_i - \kappa \left(\sin \left(\sum_{j=1}^{10} a_j \phi_j \right), \phi_i \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 10. \quad (4.5)$$

对不同的参数 κ , 在 $|a_j| \leq 10$ 的范围内, 利用随机 Newton 法 (即随机取初值的 Newton 迭代法) 搜索非线性方程组 (4.5) 的非零解, 结果列于表 4, 其中每组系数全取相反符号时也是 (4.5) 的解. 计算表明, 每组系数对应的初值, 都可经过 SGSEM 算法的第 4 和 5 步有效得到相应的 (4.4) 的数值解. 对应于参数 $\kappa = 6$ 和 $\kappa = 11$ 的数值解分别绘于图 6 和 7.

由表 4 和图 6-7, 可得如下结论:

(1) 当 $0 < \kappa < \lambda_1$ 时, 不存在非零解.

(2) 随着参数 κ 增大, 解的个数越来越多 (见表 4). 鉴于此, 本文作如下猜想:

猜想 1 当 $\kappa > \lambda_k$ ($k \geq 1$) 时, 若 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ 中 q ($q = 1, 2, \dots$) 重特征值的个数为 $n_q^{(k)} \geq 0$, 则问题 (4.4) 的非平凡解的个数至少是 $\sum_{q=1}^{\infty} n_q^{(k)} (3^q - 1)$.

显然, 当 $\kappa > \lambda_k$ ($k \geq 1$) 且 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ 中存在至少一个 q^* ($q^* \geq 2$) 重特征值时, 由于 $\sum_{q=1}^{\infty} n_q^{(k)} = k$ 和 $3^{q^*} - 1 > 2$, 此时非平凡解的个数应大于 $2k$.

(3) 与初值对应的主项相比, 数值解具有“峰更低”、“腰更粗”的特点. 这与立方非线性问题的解的特点正好相反.

(4) 当 $\kappa > \lambda_1$ 时, 模型问题只有唯一正解 (见图 6(a) 和 7(a)), 相应地, 模型问题只有唯一负解, 其他非平凡解均为的变号解. 由图 6(a) 和 7(a) 可见, 当参数 κ 增大时, 正解在区域内部越来越趋于一个常数 (边界层出现), 且该常数的值不超过 π .

表 4 不同参数 κ 对应的多解初值的系数及相应的数值解在图 6 和 7 中的编号

κ (解数)	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	图编号
1 (0)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
4 (2)	4.2725	0	0	0	0.2644	0.2644	0	0	0	0	
6 (10)	5.2981	0	0	0	0.5264	0.5264	0	0	0	0	图 6(a)
	0	2.2010	0	0	0	0	0	0.0812	0	0	图 6(b)
	0	0	2.2010	0	0	0	0.0812	0	0	0	图 6(c)
	0	1.4358	1.4358	0	0	0	-0.0249	-0.0249	0.0330	0.0330	图 6(d)
	0	-1.4358	1.4358	0	0	0	-0.0249	0.0249	-0.0330	0.0330	图 6(e)
9 (12)	6.0381	0	0	0	0.8190	0.8190	0	0	0	0	
	0	3.9257	0	0	0	0	0	0.4159	0	0	
	0	0	3.9257	0	0	0	0.4159	0	0	0	
	0	0	0	1.7472	0	0	0	0	0	0	
	0	2.5740	2.5740	0	0	0	-0.1543	-0.1543	0.2076	0.2076	
	0	-2.5740	2.5740	0	0	0	-0.1543	0.1543	-0.2076	0.2076	
11 (20)	6.3239	0	0	0	0.9659	0.9659	0	0	0	0	图 7(a)
	0	4.5006	0	0	0	0	0	0.5985	0	0	图 7(b)
	0	0	4.5006	0	0	0	0.5985	0	0	0	图 7(c)
	0	0	0	2.8345	0	0	0	0	0	0	图 7(d)
	0	0	0	0	1.5740	0	0	0	0	0	图 7(e)
	0	0	0	0	0	1.5740	0	0	0	0	图 7(f)
	0	2.9655	2.9655	0	0	0	-0.2369	-0.2369	0.3262	0.3262	图 7(g)
	0	-2.9655	2.9655	0	0	0	-0.2369	0.2369	-0.3262	0.3262	图 7(h)
	0	0	0	0	1.0306	-1.0306	0	0	0	0	图 7(i)
	-0.0739	0	0	0	1.0039	1.0039	0	0	0	0	图 7(j)

图 6 (网络版彩图) $\kappa = 6$ 对应的问题 (4.4) 的 5 个解

图 7 (网络版彩图) $\kappa = 11$ 对应的问题 (4.4) 的 10 个解

5 结论

受传统 SEM 启发, 本文提出了一种具有谱收敛精度的 SGSEM 以计算一类半线性椭圆 Dirichlet 边值问题的多解. SGSEM 与插值系数法相结合, 可降低计算自由度, 使导出的非线性代数方程组形式简单、易于求解, 因此, 比传统的基于有限元法的 SEM 效率更高. 更为重要的是, 本文运用 Schauder 不动点定理和其他技巧, 严格证明了对应于特定真解的 SGSEM 的数值解的存在性、唯一性和谱收敛性. 这表明, 对于特定的真解, 采用 SGSEM 计算, 在其充分小邻域内都可得到唯一的具有谱收敛精度的数值解. 上述分析方法可以推广到证明文献 [23] 中数值解的存在性与唯一性. 此外, 本文给出了立方非线性和一类三角非线性模型的大量数值结果, 验证了算法的可行性, 测试了 SGSEM 的效率和谱收敛速度, 比较了分别基于 ICLG 和 ICFEM 的 SEM 的效率, 并展示了多解的图像与相关性质.

致谢 感谢审稿人的仔细评阅和具有建设性的宝贵意见.

参考文献

- 1 Bao W, Cai Y. Mathematical theory and numerical methods for Bose-Einstein condensation. *Kinet Relat Models*, 2013, 6: 1–135
- 2 Nicolis G. *Introduction to Nonlinear Science*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- 3 Xie Z, Yuan Y, Zhou J. On finding multiple solutions to a singularly perturbed Neumann problem. *SIAM J Sci Comput*, 2012, 34: A395–A420
- 4 Zhang L, Ren W, Samanta A, et al. Recent developments in computational modelling of nucleation in phase transformations. *NPJ Comput Mater*, 2016, 2: 16003
- 5 Ambrosetti A, Rabinowitz P H. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J Funct Anal*, 1973, 14: 349–381
- 6 Brezis H, Nirenberg L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical sobolev exponents. *Comm Pure Appl Math*, 1983, 36: 437–477
- 7 Chang K C. *Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems*. Boston: Birkhäuser, 1993
- 8 Ni W M. Some minimax principles and their applications in nonlinear elliptic equations. *J Anal Math*, 1980, 37: 248–275
- 9 Rabinowitz P H. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 65. Providence: Amer Math Soc, 1986
- 10 Struwe M. *Variational Methods*, 4th ed. New York: Springer, 2008
- 11 Choi Y S, McKenna P J. A mountain pass method for the numerical solution of semilinear elliptic problems. *Nonlinear Anal*, 1993, 20: 417–437
- 12 Ding Z, Costa D, Chen G. A high-linking algorithm for sign-changing solutions of semilinear elliptic equations. *Nonlinear Anal*, 1999, 38: 151–172

- 13 Li Y, Zhou J. A minimax method for finding multiple critical points and its applications to semilinear PDEs. *SIAM J Sci Comput*, 2001, 23: 840–865
- 14 Li Y, Zhou J. Convergence results of local minimax method for finding multiple critical points. *SIAM J Sci Comput*, 2002, 24: 865–885
- 15 Chen C M, Xie Z Q, Lei D. Search-extension algorithm for approximating multiple solutions in nonlinear problem. *J Nat Sci Hunan Norm Univ*, 2000, 23: 95–96
- 16 Chen C M, Xie Z Q. Search extension method for multiple solutions of a nonlinear problem. *Comput Math Appl*, 2004, 47: 327–343
- 17 Chen C M, Xie Z Q. Search Extension Method for Finding Multiple Solutions to Nonlinear Differential Equations (in Chinese). Beijing: Science Press, 2005 [陈传淼, 谢资清. 非线性微分方程多解计算的搜索延拓法. 北京: 科学出版社, 2005]
- 18 Chen C M, Xie Z Q. Analysis of search-extension method for finding multiple solutions of nonlinear problem. *Sci China Ser A*, 2008, 51: 42–54
- 19 Zhang X, Zhang J, Yu B. Eigenfunction expansion method for multiple solutions of semilinear elliptic equations with polynomial nonlinearity. *SIAM J Numer Anal*, 2013, 51: 2680–2699
- 20 Wang Y, Hao W, Lin G. Two-level spectral methods for nonlinear elliptic equations with multiple solutions. *SIAM J Sci Comput*, 2018, 40: B1180–B1205
- 21 Farrell P E, Birkišon Á, Funke S W. Deflation techniques for finding distinct solutions of nonlinear partial differential equations. *SIAM J Sci Comput*, 2015, 37: A2026–A2045
- 22 Xie Z Q, Yi W F, Zhou J. An augmented singular transform and its partial Newton method for finding new solutions. *J Comput Appl Math*, 2015, 286: 145–157
- 23 Xie Z Q, Chen C M, Xu Y. An improved search-extension method for computing multiple solutions of semilinear PDEs. *IMA J Numer Anal*, 2005, 25: 549–576
- 24 Liu Y W, Xie Z Q, Chen C M. The accelerated search-extension method for computing multiple solutions of semilinear PDEs. *Acta Math Sci*, 2009, 29: 803–816
- 25 Shen J, Tang T, Wang L L. Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications. Heidelberg: Springer, 2011
- 26 Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin-Heidelberg: Springer, 2003
- 27 Li Z X, Wang Z Q. Pseudospectral methods for computing the multiple solutions of the Lane-Emden equation. *J Comput Phys*, 2013, 255: 407–421
- 28 Yang Z H, Li Z X, Zhu H L. Bifurcation method for solving multiple positive solutions to Henon equation. *Sci China Ser A*, 2008, 51: 2330–2342
- 29 Chen C M, Larsson S, Zhang N Y. Error estimates of optimal order for finite element methods with interpolated coefficients for the nonlinear heat equation. *IMA J Numer Anal*, 1989, 9: 507–524
- 30 Zlamal M. A finite element solution of the nonlinear heat equation. *RAIRO Anal Numér*, 1980, 14: 203–216
- 31 Xiang X M. Numerical Analysis of Spectral Method (in Chinese). Beijing: Science Press, 2000 [向新民. 谱方法的数值分析. 北京: 科学出版社, 2000]
- 32 Adams R A. Sobolev Spaces. New York: Academic Press, 1975
- 33 Lions J, Magenes E. Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications I. Paris: Dunod, 1968
- 34 Bernardi C, Maday Y. Spectral methods. In: Ciarlet P G, Lions J L, eds. Handbook of Numerical Analysis, vol. 5. Amsterdam: North-Holland, 1997, 209–485
- 35 Brezzi F, Rappaz J, Raviart A. Finite dimensional approximation of non-linear problems, Part I: Branches of nonsingular solutions. *Numer Math*, 1980, 36: 1–25
- 36 Xu J, Zhou A. Local and parallel finite element algorithms based on two-grid discretizations for nonlinear problems. *Adv Comput Math*, 2001, 14: 293–327
- 37 Canuto C, Quarteroni A. Approximation results for orthogonal polynomials in Sobolev spaces. *Math Comp*, 1982, 38: 67–67
- 38 Shan Y, Liu W, Wu B. Space-time Legendre-Gauss-Lobatto collocation method for two-dimensional generalized sine-Gordon equation. *Appl Numer Math*, 2017, 122: 92–107
- 39 Bernardi C, Maday Y. Properties of some weighted Sobolev spaces and application to spectral approximations. *SIAM J Numer Anal*, 1989, 26: 769–829
- 40 Zhang X P, Yu B, Zhang J T. Proof of a conjecture on a discretized elliptic equation with cubic nonlinearity. *Sci China Math*, 2013, 56: 1279–1286
- 41 Chen G, Ding Z, Hu C R, et al. A note on the elliptic sine-Gordon equation. *Contemp Math*, 2004, 357: 49–68

Convergence analysis of a spectral-Galerkin-type search extension method for finding multiple solutions to semilinear problems

Wei Liu, Ziqing Xie & Yongjun Yuan

Abstract In this paper, we develop an efficient spectral-Galerkin-type search extension method (SGSEM) for finding multiple solutions to semilinear elliptic boundary value problems. This method constructs effective initial data for multiple solutions based on the linear combinations of some eigenfunctions of the corresponding linear eigenvalue problem, and thus takes full advantage of the traditional search extension method in constructing initials for multiple solutions. Meanwhile, it possesses a low computational cost and high accuracy due to the employment of an interpolated coefficient Legendre-Galerkin spectral discretization. By applying the Schauder's fixed point theorem and other technical strategies, the existence and spectral convergence of the numerical solution corresponding to a specified true solution are rigorously proved. In addition, the uniqueness of the numerical solution in a sufficiently small neighborhood of each specified true solution is strictly verified. Numerical results demonstrate the feasibility and efficiency of our algorithm and present different types of multiple solutions.

Keywords semilinear elliptic problems, multiple solutions, search extension method, interpolated coefficient spectral method, spectral convergence, Schauder's fixed point theorem

MSC(2020) 35J25, 65N35, 65H10, 47H10

doi: 10.1360/SCM-2019-0357