第 47 卷 第 3 期 厦门大学学报(自然科学版) Vol.47 No.3
2008 年 5 月 Journal of Xiamen University (Natural Science) May 2008

改进的奇异系统结构分解及其可控性和可观测性

杨剑雄, 李茂青*
(厦门大学系统与控制研究中心, 福建 厦门 361005)

摘要: 结构分解方法通过对线性系统的状态、输入、输出变量进行变换, 将线性定常系统动态方程中的系数矩阵分解为具有不同结构特点的特殊形式, 以便进行控制分析. 本文对 Chen 等提出的奇异系统结构分解过程进行改进, 改进后的方法在不影响已有的性质的情况下更易于系统的可控性和可观测性的分析, 并给出判定可控性和可观测性的充分必要条件及其证明过程.

关键词: 线性奇异系统; 结构分解; 可控性; 可观测性
中图分类号: TP 273 文献标识码: A 文章编号: 0438-0479(2008)03-0337-05

线性系统的 SCB 结构分解方法是 Sannuti 和 Saberi[1] 在 1987 年最早提出的, Chen 等在文献[2-3]中发展了结构分解方法, 提出不同的算法[2], 并对它的一系列性质给出完整的证明[3]. 之后, He、Chen 等[4-5]将这种方法引入线性奇异系统当中, 提出线性奇异系统结构分解的思想. 本文阐述对 He、Chen 等提出的结构分解方法的一点改进, 介绍线性系统的可控性、可观测性, 利用结构分解中或分解后动态方程的系数矩阵的特殊结构, 提出奇异系统可控性和可观测性判别法则和相关证明.

1 改进的线性奇异系统结构分解方法

考虑由以下动态方程描述的线性连续系统

$$\Sigma:\begin{cases} E\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p$ 分别为状态、输入、输出变量, E, A, B, C, D 分别为常值矩阵. 不失一般性, 假设系数矩阵 B 和 C 都满秩. 其中当 E 为非奇异矩阵时, 可将(1) 中第一个方程(状态方程) 两边同时左乘 E^{-1}, 则(1) 即成为经典线性系统的形式; 当 E 为奇异矩阵时, 系统 Σ 被称为奇异系统; 一般情况下, 奇异系统的分析和控制比经典线性系统复杂得多. 而满足正则条件的奇异系统, 即对所有 $s \in C$ 有 $\det(sE - A) \neq 0$, 无论是其动态方程的唯一解的确定还是在时域、频域方面的分析, 都更为简单和明确. 以下本文讨论的奇异系统都是正则系统.

以下定理为改进的奇异系统结构分解.

定理 1 对于动态方程(1) 所描述的正则多变量线性奇异系统, 必存在非奇异状态和输出常值变换矩阵 $\Gamma_s \in R^{n\times n}$, $\Gamma_o \in R^{p\times p}$, 以及 $m\times m$ 非奇异输入变换矩阵 $\Gamma_i(s)$ 和 $n\times n$ 非奇异变换矩阵 $\Gamma_e(s)$(其元素为含 s 的多项式), 将方程(1) 变换为具有特殊结构的形式.

具体地, 状态、输入、输出变量经过如下变换:

$$x = \Gamma_x\tilde{x},\quad y = \Gamma_o\tilde{y},\quad u = \Gamma_i\tilde{u},$$

可转化为以下形式:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_z & x_e & x_a & x_b & x_c & x_d \end{pmatrix}^T,$$
$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} y_0 & y_d & y_b \end{pmatrix}^T,\quad \tilde{u} = \begin{pmatrix} u_0 & u_d & u_c \end{pmatrix}^T,$$

其中

$$\begin{cases} x_z \in R^{n_z}, x_e \in R^{n_e}, x_a \in R^{n_a} \\ x_b \in R^{n_b}, x_c \in R^{n_c}, x_d \in R^{n_d} \\ y_0 \in R^{m_0}, y_d \in R^{m_d}, y_b \in R^{p_b} \\ u_0 \in R^{m_0}, u_d \in R^{m_d}, u_c \in R^{m_c} \end{cases}$$

$$x_d = \begin{pmatrix} x_{d1} & x_{d2} & \cdots & x_{dm_d} \end{pmatrix}^T, \text{其中 } x_{di} \in R^{q_i},$$
$$u_d = \begin{pmatrix} u_{d1} & u_{d2} & \cdots & u_{dm_d} \end{pmatrix}^T,$$
$$y_d = \begin{pmatrix} y_{d1} & y_{d2} & \cdots & y_{dm_d} \end{pmatrix}^T,$$

则分解后动态方程变为

$$J_{n_z}\dot{x}_z = x_z \tag{2}$$

$$x_e = B_{e0}u_0 + B_{ec}u_c + B_{ed}u_d + sN_{ez}(s)x_z \tag{3}$$

$$\dot{x}_a = A_{aa}x_a + B_{0a}y_0 + L_{ad}y_d + L_{ab}y_b + sN_{az}(s)x_z \tag{4}$$

$$\dot{x}_b = A_{bb}x_b + B_{0b}y_0 + L_{bd}y_d + sN_{bz}(s)x_z \tag{5}$$

$$y_b = C_bx_b + C_{bz}x_z + sC_{bzs}(s)x_z + C_{be}x_e \tag{6}$$

$$\dot{x}_c = A_{cc}x_c + B_{0c}y_0 + L_{cd}y_d + L_{cb}y_b + B_cM_{ca}x_a + B_cu_c + sN_{cz}(s)x_z \tag{7}$$

$$y_0 = C_{0a}x_a + C_{0b}x_b + C_{0c}x_c + C_{0d}x_d + u_0 + C_{0z}x_z + sC_{0zs}(s)x_z + C_{0e}x_e \tag{8}$$

收稿日期: 2007-09-26
基金项目: 985"智能化国防安全信息技术"科技创新平台 II 资助
* 通讯作者: mqli@xmu.edu.cn

并且对每个 $i=1,2,\cdots,m_d$，有

$$\dot{x}_{di}=A_{qi}x_{di}+L_{id}y_0+L_{id}y_d+sN_{az}(s)x_z+B_{qi}(u_{di}+M_{ia}x_a+M_{ib}x_b+M_{ic}x_c+\sum_{j=1}^{m_d}M_{ij}x_{dj}) \quad (9)$$

$$y_{di}=C_{qi}x_i+C_{q_iz}x_z+sC_{q_izs}(s)x_z+C_{q_ie}x_e \quad (10)$$

$$y_d=C_dx_d+C_{dz}x_z+sC_{dzs}(s)x_z+C_{de}x_e \quad (11)$$

其中，(A_{bb},C_b) 是可观测的，(A_{cc},B_c) 是可控的，(A_{qi},B_{qi},C_{qi}) 具有以下特殊形式：

$$A_{qi}=\begin{bmatrix}0 & I_{qi-1}\\0 & 0\end{bmatrix},B_{qi}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},C_{qi}=[1\ 0\ \cdots\ 0].$$

$N(s)$，$L(s)$ 和 $C(s)$ 是包含 s 的多项式矩阵，这里 s 可以视为微分算子或 Laplace 变换.

以上定理同 Chen 等的结构分解(参见文献[2] 的定理 6.3.1) 相比，其差别主要在于式(6)，(8)，(10) 和 (11)，分别比原来的式子增加了一项：$C_{be}x$，$C_{0e}x_e$，$C_{qie}x_e$ 和 $C_{de}x_e$. 为了证明这一定理，我们同样使用与文献[2] 相同的方法——通过介绍算法过程来说明. 下面首先对文献[2] 的定理 6.3.1 的证明，即获得定理的算法过程进行简要的介绍；然后阐述我们的改进之处；最后用一个例子来说明我们的定理.

算法第 1 步是把奇异系统分解为 Dai[6] 定义的第一种等价形式，即将动态方程分解为以下两个子系统：

$$\Sigma_1:\begin{cases}\dot{x}_1=A_1x_1+B_1u\\y_1=C_1x_1+Du\end{cases} \quad (12)$$

$$\Sigma_2:\begin{cases}N\dot{x}_2=x_2+B_2u\\y_2=C_2x_2\end{cases} \quad (13)$$

算法的第 2 步是分解出 x_z 和 x_e. 首先通过 CSD 分解和 BDCSD 分解(参见文献[2]，定理 4.4.1 和 4.4.2) 将快子系统(13) 的系数矩阵分解为如下结构：

$$\hat{N}=\begin{bmatrix}J_v & N_{zv}\\0 & J_{nz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{v1} & \cdots & 0 & N_{1z}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & J_{vn_e} & N_{n_ez}\\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_z}\end{bmatrix},$$

$$\hat{B}_2=\begin{bmatrix}B_v\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1n_e} & B_{1z}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & B_{n_en_e} & B_{n_ez}\\ 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix} \quad (14)$$

这里，$\hat{N}$ 的每个子块 J_* 为 Jordan 块形式，而 $\hat{B}_2$ 的每个对角块为 $B_{ii}=[0\ \cdots\ 0\ 1]^T$，并且 $\hat{B}_2$ 中其他块的最后一个分量都为 0. 这样，分解后 (J_v,B_v) 为可控的，并且马上可以得到式(2).

对于子系统(13) 的可控部分，由于 J_v 和 B_v 的特殊形式，可对状态变量和输入变量求导，将每一个 Jordan 块对应的状态变量中的第一个分量 $x_{vi,1}$ 表示为 x_z 及其导数、输入变量及其导数的线性组合，则可以重新构造这一 Jordan 块对应的输入变量 u_i 为仅与本块的 $x_{vi,1}$ 相关的新形式，即

$$\bar{u}_i=-x_{vi,1}+\sum_{k=1}^{pi}\eta_{iz,k}x_z^{(k)}.$$

这样就将子系统(13) 转变为式(15) 的形式，式(15) 也是文献[2] 的式(6.4.19).

$$\begin{cases}J_{n_z}\dot{x}_z=x_z\\x_e=-\breve{u}_e+sN_{ez}(s)x_z\\\dot{\breve{x}}_2=\breve{A}_2\breve{x}_2+\breve{B}_{2e}\breve{u}_e+\breve{B}_{2*}\breve{u}_*+s\breve{B}_{2z}(s)x_z\\y_2=\breve{C}_2\breve{x}_2+\breve{D}_{2e}\breve{u}_e+[s\breve{D}_{2z}(s)+\breve{C}_z]x_z\end{cases} \quad (15)$$

这里 x_e 是由所有 J_{vi} 对应的第一个状态分量组成的；$\breve{x}_2$ 为所有 J_{vi} 块对应的其他分量；而 $\breve{u}_e$，$\breve{u}_*$ 分别为对应 J_v 和 J_z 的输入变量；$\breve{D}_{2e}$ 为变换后系数矩阵 $\breve{C}$ 对应 x_e 的子矩阵.

此外还要对慢子系统(12) 进行相应的变换，变换后得到的动态方程，再加上式(15) 的后两个方程可以形成一个状态变量和输入变量分别为

$$\bar{x}=(x_1\quad \breve{x}_2)^T,\bar{u}=(\breve{u}_e\quad \hat{u}_*)^T$$

的经典线性系统

$$\bar{\Sigma}:\begin{cases}\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}\bar{u}+\bar{B}_z(s)x_z\\y=\bar{C}\bar{x}+\bar{D}\bar{u}+\bar{D}_z(s)x_z\end{cases} \quad (16)$$

算法第 3 步对系统(16) 进行 SCB 分解(参见文献[3] 的定理 1)，最终就可得到 Chen[2] 定理 6.3.1 所述的分解结果.

对这一结构分解方法的改进主要体现在第 2 步中式(15) 中第 4 个方程上. 原算法中把输出矩阵 $\breve{C}$ 对应 x_e 的子矩阵变为 $\breve{D}_{2e}$ 作为输出方程的前馈矩阵，而变换后 x_e 的子矩阵为 0. 我们的想法是保留这个子矩阵，即将式(15) 中第 4 个方程改变为

$$y_2=\breve{C}_2\breve{x}_2+\breve{C}_ex_e+[s\breve{D}_{2z}(s)+\breve{C}_z]x_z. \quad (17)$$

经过这样的变化后，式(16) 变化为

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}+\bar{B}\bar{u}+\bar{B}_z(s)x_z,\\y=\bar{C}\bar{x}+\bar{D}'\bar{u}+\breve{C}_ex_e+\bar{D}_z(s)x_z.\end{cases} \quad (18)$$

但它并不影响算法后面的步骤. 这是因为系统(18) 的状态变量中不包含 x_e，x_z，并且状态 x_e，x_z 均为静态的部分，这样就可得到定理 1 所述的分解结果. 我们注意到，这样的改进并不影响原有的性质[2,5](镇定性、可测性、不变零点、Normal 秩、无穷零点结构、可逆性结构)，因为从后文引理 1，可以很容易看出改变的只是输出矩阵，而这样进行改进的好处是，可以通过分析分解结果(定理 1) 中(8)，(10) 和(11) 的$[C_{0e}/C_{de}/C_{be}]$来

分析系统的可观测性等动态属性, 有关内容将在下一节进行具体阐述. 下面用一个例子来说明定理 1.

例 1　考虑以下奇异系统 Σ: (E, A, B, C, D):

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A = I_7, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

根据以上分解方法, 使用文献[7] 的工具包, 得:

$$\boldsymbol{E}_s = \left[\begin{array}{c:cc:cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] -$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^2+s+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^2+s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s+3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s+3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_s = \left[\begin{array}{c:cc:c:c:c:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2.7 & 0 & -0.4 & 2.5 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1.7 & -1 & 0.4 & 0.3 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -2.1 & 0 & 0.3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2.4 & 1 & -0.3 & -1 \end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{B}_s = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 \\ -0.67 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{C} = \left[\begin{array}{c:cc:c:c:cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中, $n_z = 1, n_e = 2, n_a = 1, n_b = 0, n_c = 1, n_d = 2$.

2　奇异系统的可控性与可观测性

可控性和可观测性是线性系统中极为重要的概念, 经典线性系统中可控性和可观测性的理论已经很成熟了, 对于奇异系统的可控性和可观测性许多学者等都进行过研究[6, 8-13], 他们或是从不同的角度提出了若干概念、定义和定理, 如可控性、C- 可控性、R- 可控性、无穷处可控性、可观测性、R- 可观测性、脉冲可观测性等, 或是对这些概念进行分析和讨论.

在本节中, 我们主要讨论奇异系统结构分解下的可观测性、R- 可观测性和可控性、R- 可控性, 并应用了 Dai 在文献[6] 中给出的定义和一些相关定理.

定义 1(可观测性、R- 可观测性)

若由 $u(t)$ 和 $y(t)(0 \leqslant t < \infty)$ 可唯一地确定初始状态 $x(0)$, 则系统称为可观测的; 若由 $u(\tau)$ 和 $y(t)(0 \leqslant \tau \leqslant t)$ 可唯一地确定出可达集的任意状态, 则系统称为 R- 可观测的.

在叙述奇异线性系统可控性和可观测性的判别定理之前, 我们首先在以下引理中将定理 1 的结构分解以另一种形式进行描述, 后文的讨论和定理的证明中我们需要用到它.

引理 1　根据定理 1 的分解结果, 动态方程的系数矩阵具有特殊的结构, 因而我们可用以下系数矩阵来表示定理 1 的分解结果.

$$\widetilde{E} = [E_{nz}\ E_e\ E_a\ E_b\ E_c\ E_d] =$$

$$\begin{bmatrix} J_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 00 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{ez}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{az}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{bz}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{cz}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{dz}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\widetilde{A} = (B_0C_0 + \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{aa} & L_{ab}C_b & 0 & L_{ad}C_d \\ 0 & 0 & 0 & A_{bb} & 0 & L_{bd}C_d \\ 0 & 0 & B_cE_{ca} & L_{cb}C_b & A_{cc} & L_{cd}C_d \\ 0 & 0 & B_dE_{da} & B_dE_{db} & B_dE_{dc} & A_{dd} \end{bmatrix}) \tag{20}$$

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B_{0e} & B_{de} & B_{ce} \\ B_{0a} & 0 & 0 \\ B_{0b} & 0 & 0 \\ B_{0c} & 0 & B_c \\ B_{0d} & B_d & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{D} = \begin{bmatrix} I_{m0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\widetilde{C} = [C_{nz}\ C_e\ C_a\ C_b\ C_c\ C_d] = \begin{bmatrix} C_{0z} + sC_{0zs}(s) & C_{0e} & C_{0a} & C_{0b} & C_{0c} & C_{0d} \\ C_{dz} + sC_{dzs}(s) & C_{de} & 0 & 0 & 0 & C_d \\ C_{bz} + sC_{bzs}(s) & C_{be} & 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

首先讨论奇异系统的可观测性和 R- 可观测性.

定理 2(R- 可观测性)

给定的奇异系统是 R- 可观测的,当且仅当按定理 1 的方法进行结构分解后,(A_{obs}, C_{obs}) 是可观测的,其中,

$$A_{obs} := \begin{bmatrix} A_{aa} & 0 \\ B_cE_{ca} & A_{cc} \end{bmatrix}, C_{obs} := \begin{bmatrix} B_dE_{da} & B_dE_{dc} \\ C_{ca} & C_{cc} \end{bmatrix},$$

以上矩阵子块参见式(20) 和(22).

为了证明以上定理,我们必须引入以下几个引理.

引理 2(Dai[6] 定理 2-3.2)

奇异系统(1) 是 R- 可观测的当且仅当对所有有限 $s \in C$ 有 $\mathrm{rank}[sE - A/C] = n$ 成立.

定理 2 的证明:

考虑奇异系统(1) 和输出注入闭环系统$(E, A + FC, B + FD, C)$,因为

$$\begin{bmatrix} sE - A - F \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -F \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix}$$

则对任意的 $s \in C$,有

$$\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} sE - A - F \\ C \end{bmatrix}\right) = \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} sE - A \\ C \end{bmatrix}\right),$$

根据引理 2 可知任意输出注入都不会影响奇异系统的 R- 可观测性.

因而我们选择以下输出注入增益 F:

$$F = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{0a} & L_{ad} & L_{ab} \\ B_{0b} & L_{bd} & 0 \\ B_{0c} & L_{cd} & L_{cb} \\ B_{0d} & L_{dd} & 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

则有:

$$\widetilde{A} + K\widetilde{C} = \begin{bmatrix} I_{nz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{ne} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{aa} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{bb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_cE_{ca} & 0 & A_{cc} & 0 \\ 0 & 0 & B_dE_{da} & B_dE_{db} & B_dE_{dc} & A_{dd}^* + B_dE_{dd} \end{bmatrix}.$$

考虑系统矩阵:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{A} + K\widetilde{C} - s\widetilde{E} \\ \widetilde{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{nz} - sJ_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sN_{ez}(s) & I_{ne} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sN_{az}(s) & 0 & A_{aa} - sI_{n_a} & 0 & 0 & 0 \\ -sN_{bz}(s) & 0 & 0 & A_{bb} - sI_{n_b} & 0 & 0 \\ -sN_{cz}(s) & 0 & B_cE_{ca} & 0 & A_{cc} - sI_{n_c} & 0 \\ -sN_{dz}(s) & 0 & B_dE_{da} & B_dE_{db} & B_dE_{dc} & A_{dd}^* + B_dE_{dd} - sI_{n_d} \\ C_{0z} + sC_{0zs}(s) & C_{0e} & C_{0a} & C_{0b} & C_{0c} & C_{0d} \\ C_{dz} + sC_{dzs}(s) & C_{de} & 0 & 0 & 0 & C_d \\ C_{bz} + sC_{bzs}(s) & C_{be} & 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

容易看出以上多项式矩阵的前两个列块是列满秩的,因而以上矩阵是否列满秩,即系统是否可观测就取决于后面 4 个列块. 我们在定理 1 中已经说过,(A_{bb}, C_b) 是可观测的,又根据(A_{qi}, B_{qi}, C_{qi}) 的特殊结构,(A_{qi}, B_{qi}, C_{qi}) 也是可观测的,因而我们说,对所有 $s \in C$ 都有 $\mathrm{rank}[A_{bb} - sI/C_b] = n_b$ 和 $\mathrm{rank}[A_{dd}^* - sI/C_d] = n_d$,即$[A_{bb} - sI/C_b]$ 和$[A_{dd}^* - sI/C_d]$ 皆满秩,因而我们说系统 $\widetilde{\Sigma}$ 及 Σ 的可观测性及可推测性决定于

$$\left(\begin{bmatrix} A_{aa} & 0 \\ B_cE_{ca} & A_{cc} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_dE_{da} & B_dE_{dc} \\ C_{ca} & C_{cc} \end{bmatrix}\right),$$

即取决于(A_{obs}, B_{obs}). 证明完成.

定理 3(可观测性) 给定的奇异系统是可观测的,当且仅当按定理 1 的方法进行结构分解后,系统同

时满足以下条件:

(i) 系统是 R- 可观测的, 即 (A_{obs}, B_{obs}) 是可观测的.

(ii) 矩阵 EZ 为列满秩, 其中 EZ 由下式定义:

$EZ:=$

$$\begin{bmatrix} J_{n_z} & 0 \\ -sN_{ez}(s) & 0 \\ C_{0z}+sC_{0zs}(s)+sN_{az}(s)C_{0a}+sN_{bz}(s)C_{0b} & C_{0e} \\ +sN_{cz}(s)C_{0c}+sN_{dz}(s)C_{0d} & \\ C_{dz}+sC_{dzs}(s)+sN_{dz}(s)C_d & C_{de} \\ C_{bz}+sC_{bzs}(s)+sN_{bz}(s)C_b & C_{be} \end{bmatrix} \tag{24}$$

以上矩阵子块参见式(20) 和(22).

证明以上定理之前, 同样必须先介绍以下引理.

引理 3(Dai[6] 定理 2- 3. 1(4))

奇异系统(1) 是可观测的当且仅当对所有有限 $s \in C$ 有 $\mathrm{rank}[sE-A/C]=n$ 成立, 并且 $\mathrm{rank}[E/C]=n$.

定理 3 的证明:

由前面的结论可知引理 3 的第一个条件即为 R- 可观测性的条件, 它与定理 3 的条件(1) 等价, 因此我们只需证明定理 3 的条件(2) 与引理 3 的第二个条件: $\mathrm{rank}[E/C]=n$ 等价. 根据引理 1, 有

$$\begin{bmatrix} \tilde{E} \\ \tilde{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sN_{ez}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sN_{az}(s) & 0 & I_{n_a} & 0 & 0 & 0 \\ -sN_{bz}(s) & 0 & 0 & I_{n_b} & 0 & 0 \\ -sN_{cz}(s) & 0 & 0 & 0 & I_{n_c} & 0 \\ -sN_{dz}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{nd} \\ C_{0z}+sC_{0zs}(s) & C_{0e} & C_{0a} & C_{0b} & C_{0c} & C_{0d} \\ C_{dz}+sC_{dzs}(s) & C_{de} & 0 & 0 & 0 & C_d \\ C_{bz}+sC_{bzs}(s) & C_{be} & 0 & C_b & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix} J_{nz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sN_{ez}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{0z}+sC_{0zs}(s)+sN_{az}(s)C_{0a}+ & C_{0e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sN_{bz}(s)C_{0b}+sN_{cz}(s)C_{0c}+ & & & & & \\ sN_{dz}(s)C_{0d} & & & & & \\ C_{dz}+sC_{dzs}(s)+sN_{dz}(s)C_d & C_{de} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{bz}+sC_{bzs}(s)+sN_{bz}(s)C_b & C_{be} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sN_{az}(s) & 0 & I_{n_a} & 0 & 0 & 0 \\ -sN_{bz}(s) & 0 & 0 & I_{n_b} & 0 & 0 \\ -sN_{cz}(s) & 0 & 0 & 0 & I_{n_c} & 0 \\ -sN_{dz}(s) & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{nd} \end{bmatrix} \tag{26}$$

由于以上矩阵的结构, 则 $\mathrm{rank}[E/C]=n$ 当且仅当矩阵 EZ(阴影部份) 是列满秩的. 证明完成.

注 1　根据以上结论, $C_E=[C_{0e}/C_{de}/C_{be}]$ 列满秩是定理 3 条件(2) 成立, 即快子系统可观测性的必要条件;

注 2 由于 Jordan 块的特殊形式, 将式(26) 的阴影部份写为:

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c} 0 & 1 & \cdots & 0 & & & & & & \\ & 0 & \ddots & \vdots & & & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & & 0 & \ddots & \vdots & \\ & & & & & & & \ddots & 1 & \\ & & & & & & & & 0 & \\ \hline \eta_{ez11} & \eta_{ez12} & \cdots & \eta_{ez1nz_1} & \cdots & \eta_{ezk1} & \eta_{ezk2} & \cdots & \eta_{ezknz_k} & 0 \\ c_{011} & c_{012} & \cdots & c_{01nz_1} & \cdots & c_{0k1} & c_{0k2} & \cdots & c_{0knz_k} & C_{0e} \\ c_{d11} & c_{d12} & \cdots & c_{d1nz_1} & \cdots & c_{dk1} & c_{dk2} & \cdots & c_{dknz_k} & C_{de} \\ c_{b11} & c_{b12} & \cdots & c_{b1nz_1} & \cdots & c_{bk1} & c_{bk2} & \cdots & c_{bknz_k} & C_{be} \end{array}\right] \tag{27}$$

那么容易看出, 在考虑列满秩条件时, 对于左下角部分, 我们只需考虑其中对应于各个 Jordan 块第一列的列向量(阴影部分). 并且有 N_{ez} 和 C_E 都满足列满秩是快子系统可观测性的一个充分条件, 其中,

$$N_{ez}=[\eta_{ez11}\ \eta_{ez21}\ \cdots\ \eta_{ezk1}] \tag{28}$$

$$C_E=[C_{0e}/C_{de}/C_{be}] \tag{29}$$

接下来考虑可观性和 R- 可观性的对偶概念: 可控性和 R- 可控性.

定义 2(可控性、R- 可控性)

若对任意 $t_1>0$, $x(0)\in R^n$ 和 $w\in R^n$, 存在控制输入 $u(t)\in C_p^{h-1}$ 能使 $x(t_1)=w$, 则奇异线性系统(1) 称为可控的; 若对任何给定的 $t_1>0$, $x_1(0)\in R^n$ 和 $w\in R^n$, 总存在输入 $u(t)\in C_p^{h-1}$ 能使 $x(t_1)=w$, 则系统称为 R- 可控的.

定理 4(R- 可控性)

给定的奇异系统是 R- 可控的, 当且仅当按定理 1 的方法进行结构分解后, (A_{con}, B_{con}) 是可控的, 其中

$$A_{con}:=\begin{bmatrix} A_{aa} & L_{ab}C_b \\ 0 & A_{bb} \end{bmatrix},\ B_{con}:=\begin{bmatrix} B_{0a} & L_{ad} \\ B_{0b} & L_{bd} \end{bmatrix},$$

以上矩阵子块参见式(20) 和(21).

定理 5(可控性):

给定的奇异系统是可控的, 当且仅当按定理 1 的方法进行结构分解后, (A_{con}, B_{con}) 是可控的, 并且 J_{nz} 不存在.

由于改进后的分解方法并没有改变系数矩阵 $\tilde{E}$, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ 的结构, 只是输出矩阵 $\tilde{C}$ 的结构作了一点调整, 因而以上定理的证明过程与文献[13] 中的证明一致, 这

里就不再具体叙述了.

以下用一个例子来说明第 2 节的结论.

例2 讨论例 1 的系统 $\Sigma:(E, A, B, C, D)$ 的可控性与可观测性.

由例 1 的分解结果,

$$(A_{obs}, B_{obs}) = \left(\begin{bmatrix} 2.7 & 0 \\ 1.7 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2.1 & 0 \\ -2.4 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

是可观测的, 根据定理 2, 系统 Σ 是 R- 可观测的.

分解后式(28) 和(29) 的

$$N_e = \begin{bmatrix} s^2 + s + 1 \\ s + 1 \end{bmatrix} \text{和 } C_e = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

同为列满秩的, 由注 2, 快子系统是可观测的, 又 Σ 是 R- 可观测的, 根据定理 3, 系统是可观测的.

分解后 $(A_{con}, B_{con}) = ([2.7], [2.5])$ 是可控的, 根据定理 4, 系统 Σ 是 R- 可控的;

根据定理5, 虽然系统是 R- 可控的, 但 J_{nc} 存在, 因而系统 Σ 是不可控的.

参考文献:

[1] Sannuti P, Saberi A. A special coordinate basis of multivariable linear systems-finite and infinite zero structure, squaring down and decoupling[J]. International Journal of Control, 1987, 45: 1655- 1704.

[2] Chen B M, Lin Z, Shamash Y. Linear systerms theory: a structural decomposition approach[M]. Boston: Birkhauser, 2004.

[3] Chen B M. On properties of the special coordinate basis of linear systems[J]. International Journal of Control, 1998, 71(6): 981- 1003.

[4] He M, Chen B M. Structural decomposition of linear singular systems: the single input and single output case[J]. Systems & Control Letters, 2002, 47(4): 325- 332.

[5] He M, Chen B M, Lin Z. Structural decomposition and its properties of general multivariable linear singular systems [C]// Proceedings of the 2003 American Control Conference. Denver, Colorado, 2003: 4494- 4499.

[6] Dai L. Singular control systems[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[7] Lin Z, Chen B M, Liu X. Linear systems toolkit, software package[EB/OL]. http://linearsystemskit.net, 2004.

[8] Lewis F L. A survey of linear singular systems[J]. Circuits, Syst Signal Processing, 1986, 5(1): 3- 36.

[9] Yip E L, Sincovec R F. Solvability, controllability, and observability of continuous descriptor systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1981, 26(3): 702-706.

[10] Cobb D. Controllability, observability, and duality in singular systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1984, 29(12): 1076- 1082.

[11] Verghese G C, Levy R C, Kailath T. A generalized state-space for singular systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1981, 26(4): 811- 831.

[12] Rosenbrock H H. Structural properties of linear dynamical systems[J]. Int J Control, 1974, 20(2): 191- 202.

[13] Yang Jianxiong, Lin Dongyun, Li Maoqing. Analysis on controllability of descriptor systems under structural decomposition[C]// Proceedings of 2007 IEEE International Conference on Control and Automation. Guangzhou, 2007: 3169- 3172.

Modified Structural Decomposition for Linear Singular Systems and Its Properties of Controllability and Observability

YANG Jian-xiong, LI Mao-qing*

(Research Center for Systems and Control, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: The structural decomposition technique proposed by Chen et al. for linear descriptor systems is a technique that decomposes the dynamical equations into several parts, which reveal the structural properties, through transformations of the state, input and output variables. In this paper, the process of structural decomposition is improved. The new solution is easy to analyse the controllability and the observability of the systems when the character is not influenced. Lastly, some theorems and proofs for the properties of the controllability and the observability of the descriptor systems is given.

Key words: linear singular systems; structural decomposition; controllability; observability