基于分组一致性的刚体集群姿态协同控制

周绍磊, 王帅磊*, 刘伟, 赵学远, 祁亚辉, 闫实

海军航空大学, 烟台 264001

* E-mail: 201011231807@mail.bnu.edu.cn

收稿日期: 2019-08-20; 接受日期: 2019-09-18; 网络版发表日期: 2020-01-15

山东省自然科学基金面上项目(编号: ZR2017MF036)和国防科技项目基金(编号: F062102009)资助

摘要 姿态协同控制是刚体集群相关应用的重要问题, 而控制集群内刚体保持不同姿态的研究仍然较少. 针对这一问题, 引入了分组一致性理论, 提出了基于分组一致性的刚体集群姿态协同控制. 采用修正型罗德里格斯参数(modified Rodrigues parameters)描述刚体集群的姿态, 并将集群中的刚体分为两个分组. 对于刚体集群的无向通信拓扑结构, 在入度平衡假设的基础上, 运用Ostrowski圆盘定理, 给出了集群包含两个分组的情况下Laplacian矩阵特征值的分布, 为稳定性分析提供了确切的依据. 设计了分布式的控制器, 采用Lyapunov稳定性理论, 理论上证明了该控制器的有效性, 并通过计算机仿真对本文所提控制方法进行了验证.

关键词 刚体, 集群, 分组一致性, 姿态, 角速度, 特征值

1 引言

以无人机(unmanned aerial vehicle, UAV)、卫星、航天器等为代表的无人设备能够执行枯燥、恶劣和危险的任务, 在侦查、监控、防火等方面应用广泛^[1]. 而单体无人设备执行任务的能力有限, 因此, 在面对较为复杂的任务时, 需要多个个体进行协作, 于是产生了集群问题. 例如, UAV集群由多架具有一定自主能力的UAV组成, 在多个领域尤其是作战方面^[2]具有重要意义; 卫星编队通过遥感技术能够执行复杂的观测任务^[3]. 在执行任务的过程中, UAV集群、卫星编队通常需要保持编队飞行, 或者根据需要进行编队的切换, 或者跟踪指定的目标以进行实时监控等. 在运动过程中, 一个关键技术是姿态协同控制. UAV和卫星等都可以

视为刚体来研究, 因此UAV集群和卫星编队的姿态协同控制也就是针对刚体集群的姿态协同控制.

目前, 关于刚体集群及相关多飞行器、多航天器等姿态协同问题的研究中, Ren^[4]采用修正型罗德里格斯参数(modified Rodrigues parameters, MRP)描述; 文献[5]采用四元数描述, 在缺少角速度测量的条件下, 设计了估计器和控制器; 文献[6,7]研究了带不确定性及扰动的多刚体系统和航天器系统, 其中文献[6]设计了一种连续的鲁棒自适应控制器; 文献[8]对存在时变和时不变时延的情况进行了研究; 文献[9]基于小型飞行器的绝对姿态信息, 设计了能够应对有界干扰力矩的控制器; 文献[10]采用非线性流形SO(3)对无人机建模, 并通过期望姿态构造姿态和角速度的误差向量; 文献[11]针对具有角速度和输入约束的情况, 提出了自

引用格式: 周绍磊, 王帅磊, 刘伟, 等. 基于分组一致性的刚体集群姿态协同控制. 中国科学: 技术科学, 2020, 50: 493–505

Zhou S L, Wang S L, Liu W, et al. Cooperative attitude control in rigid body swarms based on group consensus (in Chinese). Sci Sin Tech, 2020, 50: 493–505, doi: 10.1360/SST-2019-0295

适应算法, 既能够对抗动的大小进行估计, 还能够处理控制输入饱和问题; 文献[12]基于事件触发机制, 设计了分布式的自适应控制算法, 其触发函数包含星间状态偏差; 文献[13~15]都研究了有限时间内的姿态一致问题; 文献[16,17]设计了扩张状态观测器, 在有限时间内实现观测误差的收敛. 以上研究中, 编队和集群最终都能稳定在同一姿态. 现有研究中, 姿态描述可采用四元数、方向余弦阵、MRP等, 本文将采用MRP描述法进行研究.

一些特殊任务的执行过程中, 在不对集群进行拆分、保持通信拓扑结构完整的前提下, 需要控制集群内的部分刚体保持某一姿态, 其余刚体保持另一姿态, 这就使刚体集群的姿态协同控制问题更加复杂. 例如, 使用UAV集群对移动目标进行监控时, 需要尽可能拍摄到多个角度以提供较为完整的视角, 这就意味着每架UAV需要调整到不同的姿态以使视觉设备朝向目标, 同时, 由于目标的移动, UAV还需要实时对姿态进行调整. 又例如, 合成孔径雷达(synthetic aperture radar, SAR)卫星在空间中的位置各不相同, 但都需要指向同一个地面目标, 因此每颗卫星的期望姿态都是不同的^[18]. 这些实际工程背景及应用需求表明, 在集群和编队中控制实现不同姿态是有必要的, 而目前相关研究仍然较少. 文献[19]将刚体系统划分为多个群组, 每个群组中各自带有一个领导者, 通过组间和组内姿态协同控制器, 使领导者达到反一致, 跟随者达到一致. 而这一复杂问题可以引入分组一致性理论来解决, 当前国内外针对基于分组一致性的姿态协同控制问题的研究仍然较少, 本文将针对这一问题进行分析和探究.

分组一致性的相关研究中, Yu和Wang^[20]较早提出了这一概念并给出了入度平衡和出度平衡的定义, 且进一步针对有向拓扑^[21,22]进行了研究. 文献[23]研究了带有脉冲的有向二阶系统; 文献[24]中, 系统为连通的二部图, 该研究设计了基于竞争关系的控制协议; 文献[25,26]研究了混合阶的异构系统, 这一类系统具有三个一致状态; 文献[27]在控制协议中加入了历史的状态值, 加快了系统实现分组一致的速度; 文献[28]针对一阶和二阶系统, 分别采用频域控制理论, 发现节点间的通信时滞仅影响收敛速度而不影响分组一致的实现. 已有研究中, 为了实现控制目标, 通常需要假设无向拓扑结构具有正的非零特征值^[20], 或者对有向拓扑结构加权^[21,22,28], 从而获得具有正实部的非零特征值.

后一种方法易于实现, 而前一种方法中, 系统具有正的非零特征值的假设缺乏确定的理论支持, 无法明确何种拓扑结构满足条件.

本文的创新点在于: 第一, 提出了基于分组一致性的姿态协同控制问题, 并以刚体集群作为对象进行研究; 第二, 针对分组条件下的无向通信拓扑结构, 定性给出了其Laplacian矩阵特征值的分布, 并定量地给出了矩阵非零特征值的上界, 这一结果降低了系统通信拓扑结构的设计难度; 第三, 设计了基于分组一致性的分布式控制器, 使刚体集群的姿态及角速度都能达到分组一致.

本文结构安排如下: 首先, 给出了分组一致性的相关知识; 其次, 对分组情况下的Laplacian矩阵, 给出了其特征值的分布及上界; 再次, 设计了分布式的控制器, 并应用Lyapunov稳定性理论进行了分析; 最后, 通过模型仿真验证了所提控制方法的有效性.

2 问题描述

2.1 预备知识

采用MRP描述, 刚体的动力学模型为

$$\frac{d}{dt}\sigma = G(\sigma)\omega, \quad (1)$$

$$J\frac{d}{dt}\dot{\omega} = (J\omega) \times \omega + u, \quad (2)$$

其中, $\sigma(t) \in \mathbb{R}^3$ 表示该刚体的姿态, $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$ 表示该刚体的角速度, $u \in \mathbb{R}^3$ 表示该刚体的控制器, J 为该刚体的转动惯量, 并假设所有刚体的转动惯量均相同. 算子 $G(\cdot): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 定义为

$$G(\sigma) = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \sigma^T \sigma}{2} \mathbf{I}_3 + (\sigma)^\wedge + \sigma \sigma^T \right], \quad (3)$$

其中,

$$(\sigma)^\wedge = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_3 & \sigma_2 \\ \sigma_3 & 0 & -\sigma_1 \\ -\sigma_2 & \sigma_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

考虑一个由 k_1+k_2 个刚体组成的集群, 并按照顺序编号1, 2, ..., k_1+k_2 , 其中前 k_1 个刚体组成第一分组, 记为 $i \in g_1$, $i=1, 2, \dots, k_1$; 后 k_2 个刚体组成第二分组, 记为 $i \in g_2$, $i=k_1+1, k_1+2, \dots, k_1+k_2$.

相应地, 考虑一个具有 k_1+k_2 个节点的无向图 $G=(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathbf{A})$, 每个刚体对应图中的一个节点, 节点的集合记为 $\mathcal{V}=\{v_1, v_2, \dots, v_{k_1+k_2}\}$. 若存在一条边连接节点 v_i 和 v_j , 记为 $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$, 则有边集合 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. 对于同一分组内的节点 i 和 j , 若存在 $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$, 则邻接矩阵元素 $\mathbf{A}$ 中的元素 $a_{ij}=1$, 否则 $a_{ij}=0$. 对于不同分组中的节点 i, j 和 k , 假设 $i \in g_1$ 且 $j, k \in g_2$, 并同时存在边 $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ 和 $(v_i, v_k) \in \mathcal{E}$, 则 $\mathbf{A}$ 中元素 a_{ij} 与 a_{ik} 的和为零, 即入度平衡^[20]

$$\begin{cases} \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} a_{ij} = 0, & i \in g_1, \\ \sum_{j=1}^{k_1} a_{ij} = 0, & i \in g_2. \end{cases} \quad (5)$$

分组情况下, 刚体集群的通信拓扑结构如图 1 所示.

本文后续的分析基于以下定义及假设条件.

定义 1 (分组一致^[20]) 以 $\mathbf{x}_i$ 表示第 i 个节点的状态, 则称系统达到分组一致, 当

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, & \forall i, j \in g_1, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, & \forall i, j \in g_2. \end{cases} \quad (6)$$

假设 1 对 $\forall i \in g_1$, 至多存在一对节点 $j, k \in g_2$, 使得 $a_{ij}=1, a_{ik}=-1$.

假设 2 图 G 是连通的, 且两个分组各自构成一个连通图.

基于以上定义及假设, 无向图 G 的邻接矩阵 $\mathbf{A}$ 可以

图 1 刚体集群的通信拓扑结构

Figure 1 The communication topology of the rigid body swarms.

表示为分块形式, 即

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{21} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}_{(k_1+k_2) \times (k_1+k_2)}, \quad (7)$$

其中, $\mathbf{A}_{11}$ 是 k_1 阶方阵, $\mathbf{A}_{22}$ 是 k_2 阶方阵, 且 $\mathbf{A}_{21}^T = \mathbf{A}_{12}$, 即 $\mathbf{A}_{21}$ 的行和、列和均为零.

与 $\mathbf{A}$ 对应的 Laplacian 矩阵 $\mathbf{L}$ 定义为 $L = [l_{ij}]_{(k_1+k_2) \times (k_1+k_2)}$, 其中, 非对角线上的元素 $l_{ij} = -a_{ij}$, 对角线上的元素 $l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^{k_1+k_2} a_{ij}$. 事实上, 由于入度平衡的条件,

$$\begin{cases} l_{ii} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k_1} a_{ij}, & i \in g_1, \\ l_{ii} = \sum_{\substack{j=k_1+1 \\ j \neq i}}^{k_1+k_2} a_{ij}, & i \in g_2. \end{cases} \quad (8)$$

矩阵 $\mathbf{L}$ 也可表示为分块形式:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & -\mathbf{A}_{21} \\ -\mathbf{A}_{12} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix}_{(k_1+k_2) \times (k_1+k_2)}. \quad (9)$$

在给出 Laplacian 矩阵 $\mathbf{L}$ 的性质之前, 首先给出 Ostrowski 圆盘定理.

引理 1 (Ostrowski 圆盘定理^[29]) 对于矩阵 $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 其特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则至少存在一个特征值 λ , 使得对某一 $\alpha \in [0, 1]$, 有下式成立:

$$|\lambda - a_{ii}| \leq R_i^\alpha C_i^{1-\alpha}, \quad (10)$$

其中,

$$R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad C_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}|. \quad (11)$$

即 $\mathcal{A}$ 的 n 个特征值都落在下面 n 个圆盘

$$D_i(\mathcal{A}) = \{z | |z - a_{ii}| \leq R_i^\alpha C_i^{1-\alpha}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

的并集 $\bigcup_{i=1}^n D_i(\mathcal{A})$ 中.

以下是二分组情况下 Laplacian 矩阵的一条重要性质.

2.2 分组情况下Laplacian矩阵特征值的分布

定理1 在包含两个分组的一致性问题上, 形如式(9)的Laplacian矩阵 $\mathbf{L}$ 有且仅有两个零特征值, 其余非零特征值均为正实数.

证明 由于图 G 是无向图, 因此邻接矩阵 $\mathbf{A}$ 是实对称矩阵, 实对称矩阵的特征值均为实数. 根据矩阵 $\mathbf{L}$ 的定义, 存在矩阵:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \\ & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

其中

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{k_1 \times k_1}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{k_2 \times k_2}, \quad (14)$$

使得

$$\mathbf{TL} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \mathbf{L}_{11} & -\mathbf{T}_1 \mathbf{A}_{21} \\ -\mathbf{T}_2 \mathbf{A}_{12} & \mathbf{T}_2 \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

由于 $\mathbf{L}_{11}$ 和 $\mathbf{L}_{22}$ 各自对应一个分组构成的连通无向图, 因此 $\mathbf{L}_{11}$ 和 $\mathbf{L}_{22}$ 各自有且仅有一个零特征值, 于是

$$\begin{cases} \text{rank}(\mathbf{T}_1 \mathbf{L}_{11}) = \text{rank}(\mathbf{L}_{11}) = k_1 - 1, \\ \text{rank}(\mathbf{T}_2 \mathbf{L}_{22}) = \text{rank}(\mathbf{L}_{22}) = k_2 - 1. \end{cases} \quad (16)$$

而 $\mathbf{A}_{21}$ 或 $\mathbf{A}_{12}$ 的行和、列和均为零, 因此

$$\begin{cases} \text{rank}(\mathbf{T}_1 \mathbf{A}_{21}) = \text{rank}(\mathbf{A}_{21}) \leq k_1 - 1, \\ \text{rank}(\mathbf{T}_2 \mathbf{A}_{12}) = \text{rank}(\mathbf{A}_{12}) \leq k_2 - 1. \end{cases} \quad (17)$$

根据式(16)和(17)可知,

$$\text{rank}(\mathbf{TL}) \leq k_1 + k_2 - 2. \quad (18)$$

因此矩阵 $\mathbf{L}$ 至少有两个零特征值.

又至多存在两个线性无关的非零向量 $\mathbf{x}_1 =$

$$\left[\frac{1}{k_1}, \dots, \frac{1}{k_1}, 0, \dots, 0 \right]^T, \quad \mathbf{x}_2 = \left[0, \dots, 0, \frac{1}{k_2}, \dots, \frac{1}{k_2} \right]^T \text{ 满足}$$

$$\mathbf{L}\mathbf{x}_1 = 0, \quad \mathbf{L}\mathbf{x}_2 = 0. \quad (19)$$

其余任意满足 $\mathbf{L}\mathbf{x} = 0$ 的向量均为 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 的线性组合, 因此矩阵 $\mathbf{L}$ 至多有两个零特征值. 综上, 矩阵 $\mathbf{L}$ 有且仅有两个零特征值.

对于矩阵 $\mathbf{L}$, 计算可得

$$\begin{cases} R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k_1+k_2} |a_{ij}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k_1} |a_{ij}|, & i \in g_1, \\ C_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k_1+k_2} |a_{ji}| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k_1} |a_{ji}|, & i \in g_1, \\ R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k_1+k_2} |a_{ij}| = \sum_{\substack{j=k_1+1 \\ j \neq i}}^{k_1+k_2} |a_{ij}|, & i \in g_2, \\ C_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k_1+k_2} |a_{ji}| = \sum_{\substack{j=k_1+1 \\ j \neq i}}^{k_1+k_2} |a_{ji}|, & i \in g_2. \end{cases} \quad (20)$$

又因为 $\mathbf{L}$ 是对称矩阵, 因此

$$\begin{cases} R_i = C_i, & i \in g_1, \\ R_i = C_i, & i \in g_2. \end{cases} \quad (21)$$

则根据式(10), 结合式(8), (20)与(21), 有

$$\begin{cases} \left| \lambda - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k_1} a_{ij} \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k_1} |a_{ij}|, & i \in g_1, \\ \left| \lambda - \sum_{\substack{j=k_1+1 \\ j \neq i}}^{k_1+k_2} a_{ij} \right| \leq \sum_{\substack{j=k_1+1 \\ j \neq i}}^{k_1+k_2} |a_{ij}|, & i \in g_2. \end{cases} \quad (22)$$

由于

$$\begin{cases} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k_1} a_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k_1} |a_{ij}| > 0, \\ \sum_{\substack{j=k_1+1 \\ j \neq i}}^{k_1+k_2} a_{ij} = \sum_{\substack{j=k_1+1 \\ j \neq i}}^{k_1+k_2} |a_{ij}| > 0. \end{cases} \quad (23)$$

因此根据Ostrowski定理, 得到特征值的分布如图2所示.

根据前述结论, 矩阵 $\mathbf{L}$ 有且仅有两个零特征值. 通过观察图2可知, 所有圆盘的圆心均位于实轴的正半部分, 因此其余非零实特征值均位于实轴的正半部分上, 即其余非零特征值均为正实数. 并且根据Ostrowski圆盘, Laplacian矩阵的最大非零特征值:

图 2 Ostrowski圆盘
Figure 2 The Ostrowski disk.

$$\lambda_{\max} \leq 2\max_i R_i. \quad (24)$$

定理1证毕.

注: 定理1的意义在于, 在分组情况下, 对于无向且非加权的通信拓扑结构, 只需要满足假设1和假设2, 即可使Laplacian矩阵的非零特征值具有正实部, 为通信拓扑结构的设计提供了依据和指导.

3 刚体集群姿态协同控制方法

要控制刚体集群保持不同姿态达到分组一致, 这一目标可描述为

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\sigma_i(t) - \sigma_j(t)\| = 0, \forall i, j \in g_1, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\omega_i(t) - \omega_j(t)\| = 0, \forall i, j \in g_1, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\sigma_i(t) - \sigma_j(t)\| = 0, \forall i, j \in g_2, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\omega_i(t) - \omega_j(t)\| = 0, \forall i, j \in g_2. \end{cases} \quad (25)$$

定理2 假设刚体集群的动力学模型为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \sigma_i = \mathbf{G}(\sigma_i) \omega_i, \\ \mathbf{J} \frac{d}{dt} \omega_i = (\mathbf{J} \omega_i) \times \omega_i + \mathbf{u}_i, \end{cases} \quad (26)$$

其中, σ_i , ω_i 分别为第 i 个刚体的姿态和角速度, 算子 $\mathbf{G}(\sigma_i)$ 的定义如式(3)所示, 则刚体集群的姿态和角速度能够达到式(25)所描述的分组一致, 其中第 i 个刚体

的控制器 $\mathbf{u}_i$ 定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i = & -\mathbf{G}^T(\sigma_i) \sum_{j=1}^{k_1} a_{ij}(\sigma_i - \sigma_j) - \sum_{j=1}^{k_1} a_{ij}(\omega_i - \omega_j) \\ & + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} a_{ij}(\mathbf{G}^T(\sigma_i) \sigma_j + \omega_j), \quad i \in g_1, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i = & -\mathbf{G}^T(\sigma_i) \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} a_{ij}(\sigma_i - \sigma_j) - \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} a_{ij}(\omega_i - \omega_j) \\ & + \sum_{j=1}^{k_1} a_{ij}(\mathbf{G}^T(\sigma_i) \sigma_j + \omega_j), \quad i \in g_2. \end{aligned} \quad (28)$$

证明 选定Lyapunov函数为

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k_1+k_2} \omega_i^T \mathbf{J} \omega_i + \frac{1}{2} \sigma^T \mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_3 \sigma. \quad (29)$$

由定理2可知, $\mathbf{L}$ 的非零特征值均为正实数, 根据Kronecker积的性质, $\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_3$ 的非零特征值也为正实数, 并根据转动惯量 $\mathbf{J}$ 的定义可知, $V \geq 0$ 成立.

对 V 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^{k_1+k_2} \omega_i^T \mathbf{J} \dot{\omega}_i + \sigma^T \mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_3 \dot{\sigma} \\ &= \sum_{i=1}^{k_1+k_2} \omega_i^T [(\mathbf{J} \omega_i) \times \omega_i + \mathbf{u}_i] + \sigma^T \mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_3 \dot{\sigma} \\ &= \sum_{i=1}^{k_1+k_2} \omega_i^T \mathbf{u}_i + \sigma^T \mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_3 \dot{\sigma}, \end{aligned} \quad (30)$$

其中,

$$\dot{\sigma} = \left[(\mathbf{G}(\sigma_1)\omega_1)^T, \dots, (\mathbf{G}(\sigma_{k_1+k_2})\omega_{k_1+k_2})^T \right]^T. \quad (31)$$

将式(31)代入式(30), 得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^{k_1+k_2} \left[\omega_i^T \mathbf{u}_i + \sigma_i^T \sum_{j=1}^{k_1+k_2} a_{ij} (\mathbf{G}(\sigma_i)\omega_i - \mathbf{G}(\sigma_j)\omega_j) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{k_1+k_2} \omega_i^T \left[\mathbf{u}_i + \mathbf{G}^T(\sigma_i) \sum_{j=1}^{k_1+k_2} a_{ij} (\sigma_i - \sigma_j) \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

根据入度平衡的假设,

$$\begin{cases} \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} a_{ij} (\sigma_i + \omega_i) = 0, & i \in g_1, \\ \sum_{j=1}^{k_1} a_{ij} (\sigma_i + \omega_i) = 0, & i \in g_2. \end{cases} \quad (33)$$

于是控制输入可以统一重写为

$$\mathbf{u}_i = -\mathbf{G}^T(\sigma_i) \sum_{j=1}^{k_1+k_2} a_{ij} (\sigma_i - \sigma_j) - \sum_{j=1}^{k_1+k_2} a_{ij} (\omega_i - \omega_j). \quad (34)$$

因此式(32)可以写作

$$\begin{aligned} \dot{V} &= - \sum_{i=1}^{k_1+k_2} \omega_i^T \sum_{j=1}^{k_1+k_2} a_{ij} (\omega_i - \omega_j) \\ &= -\omega^T \mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_3 \omega. \end{aligned} \quad (35)$$

由于 $\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_3$ 的非零特征值均为正实数, 因此 $\dot{V} \leq 0$ 恒成立. 根据LaSalle不变原理^[30], 所有满足 $\dot{V} \leq 0$ 的 (σ, ω) 组成集合 Ω , H 是所有满足 $\dot{V} = 0$ 的 (σ, ω) 的集合, 且 Ψ 是 H 中的最大不变集. 因此, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 所有由 Ω 内出发的解都趋于 Ψ . 当 $\dot{V} = 0$ 时, 可知 $\omega^T \mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_3 \omega = 0$, 该等式的成立有两种情况, 即

$$\omega = 0, \quad (36)$$

或者

$$\mathbf{L}\omega^1 = \mathbf{L}\omega^2 = \mathbf{L}\omega^3 = 0, \quad (37)$$

其中非零向量

$$\omega^1 = [\omega_1^1, \omega_2^1, \dots, \omega_{k_1+k_2}^1]^T \in \mathbb{R}^{k_1+k_2},$$

$$\omega^2 = [\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_{k_1+k_2}^2]^T \in \mathbb{R}^{k_1+k_2},$$

$$\omega^3 = [\omega_1^3, \omega_2^3, \dots, \omega_{k_1+k_2}^3]^T \in \mathbb{R}^{k_1+k_2}.$$

当式(36)成立时, 所有刚体的角速度为零, 根据刚体动力学模型(1)和(2)可知:

$$\sum_{j=1}^{k_1+k_2} a_{ij} (\sigma_i - \sigma_j) = 0. \quad (38)$$

则根据入度平衡的假设, 有

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k_1} a_{ij} (\sigma_i - \sigma_j) + \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} a_{ij} \sigma_j = 0, \\ \sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2} a_{ij} (\sigma_i - \sigma_j) + \sum_{j=1}^{k_1} a_{ij} \sigma_j = 0 \end{cases} \quad (39)$$

成立, 即

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{k_1} = \sigma_{g_1}^*, \\ \sigma_{k_1+1} = \sigma_{k_1+2} = \dots = \sigma_{k_1+k_2} = \sigma_{g_2}^*. \end{cases} \quad (40)$$

这意味着两个分组内的刚体姿态分别达到一致状态 $\sigma_{g_1}^*$ 和 $\sigma_{g_2}^*$.

当式(37)成立时, 根据分组情况下Laplacian矩阵 $\mathbf{L}$ 的性质可知, 必有

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_{k_1} = \omega_{g_1}^*, \\ \omega_{k_1+1} = \omega_{k_1+2} = \dots = \omega_{k_1+k_2} = \omega_{g_2}^* \end{cases} \quad (41)$$

成立, 即两个分组内的刚体角速度分别达到非零一致状态 $\omega_{g_1}^*$ 和 $\omega_{g_2}^*$. 于是根据式(2), (11)与(18), 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\omega_i \times (\mathbf{J}\omega_i) - \mathbf{G}^T(\sigma_i) \sum_{j=1}^{k_1+k_2} a_{ij} (\sigma_i - \sigma_j) \right] = 0, \quad (42)$$

即

$$\begin{cases} \left[\mathbf{G}(\sigma_i)\omega_{g_1}^* \right]^T \sum_{j=1}^{k_1+k_2} a_{ij} (\sigma_i - \sigma_j) = 0, \\ \left[\mathbf{G}(\sigma_i)\omega_{g_2}^* \right]^T \sum_{j=1}^{k_1+k_2} a_{ij} (\sigma_i - \sigma_j) = 0. \end{cases} \quad (43)$$

对于式(43), 若向量 $\mathbf{G}(\sigma_i)\omega_{g_1}^* = 0$ 或 $\mathbf{G}(\sigma_i)\omega_{g_2}^* = 0$, 则 $\mathbf{G}(\sigma_i) = 0$, 而根据 $\mathbf{G}(\sigma_i)$ 的定义, 此类 σ_i 无解, 因此 $\mathbf{G}(\sigma_i)\omega_{g_1}^* \neq 0$, $\mathbf{G}(\sigma_i)\omega_{g_2}^* \neq 0$.

若向量 $\sum_{j=1}^{k_1+k_2} a_{ij} (\sigma_i - \sigma_j) \neq 0$, 则在同一分组内至

少存在一对 i 和 j , 使得 $a_{ij}(\sigma_i - \sigma_j) \neq 0$. 此时 $u_i \neq u_j$, 则

$$J \frac{d}{dt} \omega_i \neq J \frac{d}{dt} \omega_j. \quad (44)$$

与前述两个分组内的刚体角速度分别达到一致的结论相矛盾, 因此向量 $\sum_{j=1}^{k_1+k_2} a_{ij}(\sigma_i - \sigma_j) = 0$. 根据式 (38), (39) 及 (40), 两个分组内的刚体姿态分别达到一致状态 $\sigma_{g_1}^*$ 和 $\sigma_{g_2}^*$.

综上所述, 给定控制器 (27) 和 (28), 刚体集群的姿态及角速度都能够达到分组一致, 实现了姿态的协同控制.

注: 对于式 (40) 及 (41), 可能存在以下两类特殊情况:

(1) $\omega_{g_1}^* = \omega_{g_2}^*, \sigma_{g_1}^* \neq \sigma_{g_2}^*$, 即两个分组内刚体角速度的一致状态相同, 姿态的一致状态不同;

(2) $\omega_{g_1}^* = \omega_{g_2}^*, \sigma_{g_1}^* = \sigma_{g_2}^*$, 即两个分组内刚体角速度的一致状态相同, 姿态的一致状态相同.

受两个分组的拓扑结构、每个分组内刚体的初始状态等因素的影响, 以上两类特殊情况是存在的. 在这两类情况下, 分组失去意义. 因此为了避免这两类情况的出现, 且使刚体集群内的分组能够达到指定的不同的一致状态, 可以进一步设计带有虚拟领导者的控制器, 本文在此暂不赘述.

4 算法验证

为验证本文所设计的控制器的有效性, 给定一个由 5 个刚体组成的刚体集群, 其中前 3 个刚体组成第一分组 g_1 , 后两个刚体组成第二分组 g_2 . 集群的通信拓扑结构如图 1 所示, 相应的邻接矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

参照文献 [31] 中给出的参数, 对刚体集群给定三类初始条件, 其中姿态的单位为弧度(rad), 角速度的单位为弧度每秒(rad/s).

(1) 第一类初始条件

初始姿态为

$$\begin{cases} \sigma_1 = [-1.29 & -1.75 & 0.02]^T, \\ \sigma_2 = [-0.23 & 1.57 & -2.25]^T, \\ \sigma_3 = [0.42 & -2.37 & -0.22]^T, \\ \sigma_4 = [-0.65 & 0.76 & -1.25]^T, \\ \sigma_5 = [0.7 & -1.27 & -0.52]^T. \end{cases} \quad (46)$$

初始角速度为

$$\begin{cases} \omega_1 = [-1.42 & 2.58 & 4.61]^T, \\ \omega_2 = [-0.82 & 3.26 & 0.94]^T, \\ \omega_3 = [2.48 & 3.58 & 2.09]^T, \\ \omega_4 = [-2.42 & 1.58 & 1.61]^T, \\ \omega_5 = [0 & 0 & 0]^T. \end{cases} \quad (47)$$

(2) 第二类初始条件

初始姿态和角速度为

$$\begin{cases} \sigma_1 = [0 & 0 & 0]^T, \\ \sigma_2 = [0 & 0 & 0]^T, \\ \sigma_3 = [0 & 0 & 0]^T, \\ \sigma_4 = [0 & 0 & 0]^T, \\ \sigma_5 = [0 & 0 & 0]^T, \end{cases} \quad (48)$$

$$\begin{cases} \omega_1 = [-1.42 & 2.58 & 4.61]^T, \\ \omega_2 = [-0.82 & 3.26 & 0.94]^T, \\ \omega_3 = [2.48 & 3.58 & 2.09]^T, \\ \omega_4 = [-2.42 & 1.58 & 1.61]^T, \\ \omega_5 = [0 & 0 & 0]^T. \end{cases}$$

(3) 第三类初始条件

初始姿态和角速度为零, 即

$$\begin{cases} \sigma_1 = [-1.29 & -1.75 & 0.02]^T, \\ \sigma_2 = [-0.23 & 1.57 & -2.25]^T, \\ \sigma_3 = [0.42 & -2.37 & -0.22]^T, \\ \sigma_4 = [-0.65 & 0.76 & -1.25]^T, \\ \sigma_5 = [0.7 & -1.27 & -0.52]^T, \end{cases} \quad (49)$$

$$\begin{cases} \omega_1 = [0 & 0 & 0]^T, \\ \omega_2 = [0 & 0 & 0]^T, \\ \omega_3 = [0 & 0 & 0]^T, \\ \omega_4 = [0 & 0 & 0]^T, \\ \omega_5 = [0 & 0 & 0]^T. \end{cases}$$

仿真结果如图3~5所示, 在三类初始条件下, 刚体集群的姿态和角速度均能达到分组一致, 并且在初始姿态为零时, 刚体集群姿态的时间响应和角速度的时间响应收敛速度最快, 姿态的时间响应的波动周期最长。

在第一类初始条件下, g_1 内角速度的一致状态为 $\omega_{g_1}^* = [-1.87 \ 1.03 \ 0.64]^T$, g_2 内角速度的一致状态为 $\omega_{g_2}^* = [0.75 \ 1.34 \ 0.55]^T$ 。在第二类初始条件下, g_1 内角速度的一致状态为 $\omega_{g_1}^* = [-0.14 \ -0.16 \ -0.36]^T$,

图3 第一类初始条件下姿态与角速度的时间响应. (a) 第一方向的时间响应; (b) 第二方向的时间响应; (c) 第三方向的时间响应

Figure 3 The time response of attitude and angular velocity under the first initial condition. (a) The time response on the first direction; (b) the time response on the second direction; (c) the time response on the third direction.

图 4 第二类初始条件下姿态与角速度的时间响应. (a) 第一方向的时间响应; (b) 第二方向的时间响应; (c) 第三方向的时间响应

Figure 4 The time response of attitude and angular velocity under the second initial condition. (a) The time response on the first direction; (b) the time response on the second direction; (c) the time response on the third direction.

g_2 内角速度的一致状态为 $\omega_{g_2}^* = [0.11 \ -0.07 \ -0.01]^T$.
在第三类初始条件下, g_1 内角速度的一致状态为

$\omega_{g_1}^* = [-0.35 \ -1.17 \ 0.18]^T$, g_2 内角速度的一致状态为
 $\omega_{g_2}^* = [0.21 \ -0.14 \ 0.65]^T$. 在以上任一初始条件下, 由

图 5 第三类初始条件下姿态与角速度的时间响应. (a) 第一方向的时间响应; (b) 第二方向姿态与角速度的时间响应; (c) 第三方向姿态与角速度的时间响应

Figure 5 The time response of attitude and angular velocity under the third initial condition. (a) The time response on the first direction; (b) the time response on the second direction; (c) the time response on the third direction.

于两个分组的角速度的一致状态都不为零, 因此两个分组姿态的时间响应都是时变的, 但集群的姿态仍然是分组一致的.

第二类和第三类初始条件的仿真结果表明: 在本文所提出的控制器的作用下, 无论是初始姿态相同, 或是初始角速度相同, 刚体集群达到分组一致后, 姿

态都是呈周期性变化的, 而每个方向上的角速度最终都会稳定在某一对常值. 这一规律为控制器的应用提供了思路. 同时要注意到, 姿态的时间响应的波动周期与角速度的大小相关, 要控制该周期的长短, 只需要控制角速度达到分组一致后的大小即可, 后续将研究使角速度收敛到指定值的控制器以及使姿态收敛到固定值的控制器.

5 结论与讨论

姿态协同控制问题是刚体集群控制及应用的重要问题, 分组一致性理论的引入对该问题具有重要意义, 能够满足控制刚体集群保持不同姿态的需求.

本文在分组一致性理论的基础上, 给出了通信拓扑结构Laplacian矩阵特征值的分布, 为稳定性分析提供了确切的依据. 采用MRP描述刚体运动模型, 并设计了分布式的控制器, 使刚体集群的姿态和角速度都能达到分组一致, 即不同分组的刚体能够保持不同的姿态, 达到了控制目的.

需要指出的是, 本文的研究建立在刚体集群的通信拓扑结构是无向图的假设之上. 这一假设具有一定的局限性, 不适用于刚体之间仅存在有向通信的情况. 另外, 在本文研究中, 两个分组的态度和角速度有可能相等, 这使得分组失去了意义, 在实际应用中有可能导致任务失败. 因此, 在后续的研究中, 需要进一步考虑有向拓扑的情况以及带领导者的情况.

参考文献

- 1 Duan H B, Qiu H L, Chen L, et al. Prospects on unmanned aerial vehicle autonomous swarm technology (in Chinese). *Sci Tech Rev*, 2018, 36: 90–98 [段海滨, 邱华鑫, 陈琳, 等. 无人机自主集群技术研究展望. *科技导报*, 2018, 36: 90–98]
- 2 Niu Y F, Xiao X J, Ke G Y. Operation concept and key techniques of unmanned aerial vehicle swarms (in Chinese). *National Defense Sci Tech*, 2013, 34: 37–43 [牛轶峰, 肖湘江, 柯冠岩. 无人机集群作战概念及关键技术分析. *国防科技*, 2013, 34: 37–43]
- 3 Fang Y K, Yuan B W, Meng Z Y, et al. Attitude control in multi-satellite cooperative observations for distributed remote sensing (in Chinese). *Opt Precis Eng*, 2019, 27: 58–68 [方元坤, 袁斌文, 孟子阳, 等. 分布式遥感编队多星协同观测中的姿态控制. *光学精密工程*, 2019, 27: 58–68]
- 4 Ren W. Distributed cooperative attitude synchronization and tracking for multiple rigid bodies. *IEEE Trans Contr Syst Technol*, 2010, 18: 383–392
- 5 Abdessameud A, Tayebi A. Attitude synchronization of a group of spacecraft without velocity measurements. *IEEE Trans Automat Contr*, 2009, 54: 2642–2648
- 6 Xia Y Q, Zhou N, Lu K F, et al. Attitude control of multiple rigid bodies with uncertainties and disturbances. *J Automat Sin*, 2015, 2: 2–10
- 7 Dang H T, Yin G X, Li Q H. Adaptive attitude cooperative control for spacecraft formation flying under directed communication topology (in Chinese). *Navigat Posit Tim*, 2015, 2: 7–15 [党宏涛, 伊国兴, 李清华. 基于有向图的航天器编队飞行自适应姿态协同控制. *导航定位与授时*, 2015, 2: 7–12]
- 8 Ma L, Wang S C, Min H B, et al. Distributed attitude consensus for multiple rigid body systems with communication delay and jointly connected topologies (in Chinese). *Contr Theor Appl*, 2016, 33: 1162–1170 [马龙, 王仕成, 闵海波, 等. 通信时延和联合连通拓扑下多刚体系统分布式姿态一致性控制. *控制理论与应用*, 2016, 33: 1162–1170]
- 9 Liang H C, Wang J Y, Sun Z W, et al. Decentralized attitude synchronization of spacecraft formation under disturbances (in Chinese). *J Harbin Inst Tech*, 2016, 48: 13–19 [梁海朝, 王剑颖, 孙兆伟, 等. 多小型飞行器自主编队姿态协同控制方法. *哈尔滨工业大学学报*, 2016, 48: 13–19]
- 10 Ma M Y, Dong C Y, Ma S Q, et al. Coordinated control of multiple quadrotors formation on SO(3) (in Chinese). *Contr Theor Appl*, 2018, 35: 1229–1238 [马鸣宇, 董朝阳, 马思迁, 等. 基于SO(3)的多四旋翼无人机编队协同控制. *控制理论与应用*, 2018, 35: 1229–1238]
- 11 Zheng Z, Li P, Qian M S. Spacecraft attitude coordination control with angular velocity and input constraints (in Chinese). *Acta Automat Sin*, 2019, doi: 10.16383/j.aas.c180736 [郑重, 李鹏, 钱默抒. 具有角速度和输入约束的航天器姿态协同控制. *自动化学报*, 2019, doi: 10.16383/j.aas.c180736]
- 12 Wang Z P, Guo F Z, Sun Z W, et al. Event-triggered distributed attitude coordination control of satellite formation (in Chinese). *J Harbin Inst Tech*, 2018, 50: 41–47 [王智鹏, 郭凤至, 孙兆伟, 等. 事件驱动的卫星编队姿态分布式协同控制. *哈尔滨工业大学学报*, 2018, 50: 41–47]
- 13 Zhou N, Xia Y, Wang M, et al. Finite-time attitude control of multiple rigid spacecraft using terminal sliding mode. *Int J Robust Nonlinear Control*, 2015, 25: 1862–1876

- 14 Li P. Global finite-time attitude consensus tracking control for a group of rigid spacecraft. *Int J Syst Sci*, 2017, 48: 2703–2712
- 15 Yang L Y, Lv J T, Lin Y, et al. Finite-time attitude coordination control for formation spacecraft (in Chinese). In: The 29th Chinese Control and Decision Conference (CCDC 2017). Chongqing, 2017. 1556–1561 [杨丽媛, 吕建婷, 林杨, 等. 编队航天器有限时间姿态协同控制. 见: 第29届中国控制与决策会议(CCDC 2017). 重庆, 2017. 1556–1561]
- 16 Peng S P, Long Z P, Ma X. Coordinated attitude control for spacecraft formation flying under complicated condition (in Chinese). *Electron Opt Contr*, 2017, 24: 50–54 [彭司萍, 龙正平, 马骅. 一种复杂条件下编队姿态协同控制方法. 电光与控制, 2017, 24: 50–54]
- 17 Zhou J, Gong C L, Li H, et al. Finite-time distributed synchronization of spacecraft formation attitude with complex constraints (in Chinese). *J Astronaut*, 2018, 39: 1340–1347 [周健, 龚春林, 栗华, 等. 复杂约束下的编队姿态有限时间协同控制方法. 宇航学报, 2018, 39: 1340–1347]
- 18 Fu J B, Liu M. Coordinated attitude control for SAR satellites with communication delay (in Chinese). In: The 36th Chinese Control Conference (CCC2017). Dalian, 2017. 7869–7873 [傅敬博, 刘明. 星间通讯延迟情形下的SAR卫星编队姿态协同控制. 见: 第36届中国控制大会(CCC2017). 大连, 2017. 7869–7873]
- 19 Weng S, Yue D, Xie X, et al. Distributed event-triggered cooperative attitude control of multiple groups of rigid bodies on manifold $SO(3)$. *Inf Sci*, 2016, 370-371: 636–649
- 20 Yu J, Wang L. Group consensus of multi-agent systems with undirected communication graphs. In: 2009 7th Asian Control Conference. Hong Kong: IEEE, 2009. 105–110
- 21 Yu J, Wang L. Group consensus in multi-agent systems with switching topologies and communication delays. *Syst Control Lett*, 2010, 59: 340–348
- 22 Yu J, Wang L. Group consensus of multi-agent systems with directed information exchange. *Int J Syst Sci*, 2012, 43: 334–348
- 23 Liu J, Zhou J. Distributed impulsive group consensus in second-order multi-agent systems under directed topology. *Int J Control*, 2014, 88: 910–919
- 24 Wang Y Z, Du Y X, Wang Q. Weighted group-consensus analysis of multi-agent systems with and without time-delay network (in Chinese). *Contr Decis*, 2015, 30: 1993–1998 [王玉振, 杜英雪, 王强. 多智能体时滞和无时滞网络的加权分组一致性分析. 控制与决策, 2015, 30: 1993–1998]
- 25 Wen G, Huang J, Wang C, et al. Group consensus control for heterogeneous multi-agent systems with fixed and switching topologies. *Int J Control*, 2015, 89: 259–269
- 26 Feng Y, Zheng W X. Group consensus control for discrete-time heterogeneous first- and second-order multi-agent systems. *IET Control Theor Appl*, 2018, 50: 753–760
- 27 Wang W, Liu F X, Xu H. Fast group consensus of multiagent systems based on memory states (in Chinese). *Contr Decis*, 2017, 32: 535–540 [王伟, 刘付显, 徐浩. 基于记忆状态的多智能体系统快速分组一致性. 控制与决策, 2017, 32: 535–540]
- 28 Ji L H, Zhao X Y. Group consensus of multi-agent networks with multiple time delays (in Chinese). *J Syst Simulat*, 2018, 30: 1287–1293 [纪良浩, 赵新月. 多时滞影响下多智能体网络的分组一致性. 系统仿真学报, 2018, 30: 1287–1293]
- 29 Li Q. Eight Lectures on Matrix Theory (in Chinese). Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1988 [李乔. 矩阵论八讲. 上海: 上海科技出版社, 1988]
- 30 Khalil H K. Nonlinear Systems (in Chinese). 3rd ed. Zhu Y S, Dong H, Li Z Z, et al., translated. Beijing: Electronic Industry Press, 2011 [Khalil H K. 非线性系统. 第3版. 朱义胜, 董辉, 李作洲, 等, 译. 北京: 电子工业出版社, 2011]
- 31 Weng S X. Research on cooperative attitude control of multiple rigid bodies system (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2014 [翁盛煊. 多刚体系统姿态协同控制研究. 博士学位论文. 武汉: 华中科技大学, 2014]

Cooperative attitude control in rigid body swarms based on group consensus

ZHOU ShaoLei, WANG ShuaiLei, LIU Wei, ZHAO XueYuan, QI YaHui & YAN Shi

Naval Aviation University, Yantai 264001, China

Cooperative attitude control is a key problem in the application of rigid body swarms, yet, there is little research into maintaining different attitudes within rigid body swarms. To solve this problem, group consensus theory is introduced, and attitude control based on group consensus is proposed. Modified Rodrigues parameters are used to describe the attitude of rigid bodies, and these rigid bodies are separated into two subgroups. Based on the in-degree balance and application of Ostrowski's theorem, the distribution of eigenvalues of a Laplacian matrix is shown for the undirected communication topology of the rigid body swarms when the swarms consists of two subgroups, providing an accurate basis for stability analysis. A distributed controller is designed, and utilizing Lyapunov stability theory, the effectiveness of the controller is theoretically demonstrated and the proposed algorithm is verified using computer simulation.

rigid body, swarms, group consensus, attitude, angular velocity, eigenvalue

doi: [10.1360/SST-2019-0295](https://doi.org/10.1360/SST-2019-0295)