

一些联图的 anti-Ramsey 数

丁吉丽¹, 边红^{1*}, 于海征²

(1. 新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017; 2. 新疆大学数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830046)

摘要: 图的 anti-Ramsey 数 $ar(G, H)$ 表示图 G 的最大边染色数, 使得图 G 不含彩虹的子图 H . 本文主要研究一些联图的 anti-Ramsey 数, 包括 $C_n \vee \overline{K_s}$ 、 $P_n \vee \overline{K_s}$ 、 $W_n \vee \overline{K_s}$ 和 $F_n \vee \overline{K_s}$, 其中子图主要包括短圈和三角形加一条悬挂边.

关键词: anti-Ramsey 数; 边染色; 联图; 彩虹

中图分类号: O 157.5

文献标志码: A

文章编号: 0438-0479(2021)06-0971-05

1 预备知识

图的 anti-Ramsey 数是由 Erdős 等^[1] 在 1973 年提出的. 若将图 G 的边染色中所有的边都染成不同的颜色, 则称图 G 是彩虹的. 图 G 的 anti-Ramsey 数 $ar(G, H)$ 是指图 G 的边染色中所用的最大颜色数, 使得图 G 不包含彩虹子图 H ^[1]. Erdős 等^[1] 最初研究 anti-Ramsey 数的母图是完全图, 且对完全图中的圈和路的 anti-Ramsey 数提出猜想, 并阐明了图的 anti-Ramsey 数和图的 Turán 数之间有着密切的联系. 图 H 的 Turán 数 $ex(n, H)$ 是指 n 个顶点的图中所包含的最大边数, 使得该图不包含同构于 H 的子图^[2].

沿着这条研究主线, 学者们研究了完全图中的其他图类的 anti-Ramsey 数, 比如: 树^[3]、小的二部图^[4]、点不交的圈^[5]、匹配^[6-8]等. 后来, 研究 anti-Ramsey 问题的母图从完全图变换成其他的图类, 比如完全二部图^[9-11]、完全分裂图^[12]、超立方体^[13]、平面三角剖分图^[14]、超图^[15]等.

本文中涉及的图都是简单的无向图, 相关的基本概念读者可以参考文献^[2]. 令 G 是一个图, $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别代表图 G 的顶点集和边集; \overline{G} 表示图 G 的补图. 若图 G_1 和 G_2 没有公共顶点, 则称 G_1 和 G_2 是点不交的. 图 $G_1 \cup G_2$ 是一个顶点集为 $V(G_1) \cup$

$V(G_2)$ 、边集为 $E(G_1) \cup E(G_2)$ 的图. 不相交的两个图 G_1 和 G_2 的联图 $G_1 \vee G_2$ 是指在图 $G_1 \cup G_2$ 中, 将图 G_1 中的每个顶点和图 G_2 中的每个顶点都连接起来所得到的图.

在图 G 中, 对于 $\forall v \in V(G)$, $\forall e \in E(G)$. 用 $C(G)$ 表示图 G 所有边的颜色的集合; $C(v)$ 表示与顶点 v 相关联的边的颜色的集合, $c(e)$ 表示边 e 的颜色. G_1 和 G_2 是图 G 中两个不同的子图, $E(G_1, G_2)$ 表示一个端点在 G_1 中, 另一个端点在 G_2 中的所有边的集合, $C(G_1, G_2)$ 表示 $E(G_1, G_2)$ 中所有边的颜色的集合.

若图 G 中有一条边恰好只有一个端点的度为 1, 则称这条边为悬挂边. 三角形加一条悬挂边的图, 记为 C_3^+ . 星图 $S_{1,n}$ 是特殊的完全二部图 $K_{1,n}$. P_n 和 C_n 分别表示 n 个顶点的路和 n 个顶点的圈. 由一个圈添加一个新的顶点 v , 并且把这个顶点 v 与圈上所有的顶点相连, 这样得到的图称为轮图, 新得到的边称为轮图的辐, 具有 n 条辐的轮图记为 W_n , 它的顶点集 $V(W_n) = \{v, v_1, \dots, v_n\}$. 任意两个顶点之间都恰好有一个公共顶点, 像这样的简单图称作友谊图, 记为 F_n . 显然 $|V(F_n)| = 2n + 1$, $|E(F_n)| = 3n$.

本文中主要研究了几种联图的 anti-Ramsey 数, 包括 $C_n \vee \overline{K_s}$ 、 $P_n \vee \overline{K_s}$ 、 $W_n \vee \overline{K_s}$ 和 $F_n \vee \overline{K_s}$, 而研究该问题的子图主要包括短圈 C_3 、 C_4 和 C_3^+ .

收稿日期: 2020-10-06 录用日期: 2021-02-12

基金项目: 国家自然科学基金(11761070, 61662079, 11571155); 2020 年新疆维吾尔自治区研究生创新基金(XJ2020G232); 2021 年新疆维吾尔自治区教育厅新疆师范大学一流专业数学与应用数学资助项目

* 通信作者: bh1218@163.com

引文格式: 丁吉丽, 边红, 于海征. 一些联图的 anti-Ramsey 数[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2021, 60(6): 971-975.

Citation: DING J L, BIAN H, YU H Z. Anti-Ramsey numbers in some join graphs[J]. J Xiamen Univ Nat Sci, 2021, 60(6): 971-975. (in Chinese)



2 主要结果

首先,考虑联图 $C_n \vee \overline{K_s}$ 中的短圈和三角形加一条悬挂边的 anti-Ramsey 数,图 $C_n \vee \overline{K_s}$ 是一个圈 C_n 和一个空图 $\overline{K_s}$ 的联图,其中 $V(C_n) = \{x_1, \dots, x_n\}, V(\overline{K_s}) = \{z_1, \dots, z_s\}$.

2.1 联图 $C_n \vee \overline{K_s}$ 的 anti-Ramsey 数

完全分裂图 $K_n \vee \overline{K_s}$ 是一个完全图 K_n 和一个空图 $\overline{K_s}$ 的联图,关于完全分裂图中的三长圈 C_3 的 anti-Ramsey 数,已经有了如下定理 1 的结果:

定理 1^[12] 若 $n \geq 2, s \geq 1, n + s \geq 3$, 则 $ar(K_n \vee \overline{K_s}, C_3) = n + s - 1$.

因为 $C_3 = K_3$, 所以由定理 1 易得定理 2.

定理 2 若 $s \geq 1$, 则 $ar(C_3 \vee \overline{K_s}, C_3) = s + 2$.

定理 3^[14] 若 $n \geq 4$, 则 $ar(W_n, C_3) = n + 1$.

因为 $C_n \vee \overline{K_1} = W_n$, 所以对于 $n \geq 4, ar(C_n \vee \overline{K_1}, C_3) = ar(W_n, C_3) = n + 1$.

定理 4^[14] 若 $n \geq 4$, 则 $ar(\mathcal{T}_n, C_3) = \lfloor \frac{3n-6}{2} \rfloor$, 其中 \mathcal{T}_n 是指具有 n 个顶点的平面三角剖分图的图类.

因为 $C_n \vee \overline{K_2} = T_{n+2}$, 其中 T_{n+2} 是有 $n+2$ 个顶点的平面三角剖分图, 所以对于 $n \geq 4, ar(C_n \vee \overline{K_2}, C_3) = ar(T_{n+2}, C_3) = \lfloor \frac{3}{2}n \rfloor$.

定理 5 若 $n \geq 4, s \geq 1$, 则 $ar(C_n \vee \overline{K_s}, C_3^+) \geq ar(C_n \vee \overline{K_s}, C_3) \geq n + s$.

证明 $ar(C_n \vee \overline{K_s}, C_3^+) \geq ar(C_n \vee \overline{K_s}, C_3)$ 是显然的. 下面找到一种边染色方式, 用 $n + s$ 种颜色对图 $C_n \vee \overline{K_s}$ 的边染色, 使得图 $C_n \vee \overline{K_s}$ 不包含彩虹的子图 C_3 . 先用 n 种颜色将 C_n 染成彩虹的, 然后将 $\overline{K_s}$ 中的 s 个点对应的 s 个星染成单色星 $S_{1,n}$, 并且 s 个星的颜色互不相同. 此时, 必然不存在彩虹的子图 C_3 .

在完全二部图 $K_{n,s}$ 和完全分裂图 $K_n \vee \overline{K_s}$ 中, 关于四长圈 C_4 的 anti-Ramsey 数, 有定理 6 和定理 7.

定理 6^[9] 若 $n \leq s, k \leq 2$, 则

$$ar(K_{n,s}, C_{2k}) = \begin{cases} (k-1)(n+s) - 2(k-1)^2 + 1, & n \geq 2k-1; \\ (k-1)s + n - (k-1), & k-1 \leq n \leq 2k-1; \\ sn, & n \leq k-1. \end{cases}$$

定理 7^[12] 若 $n \in \{2, 3\}, n + s \geq 4$, 则 $ar(K_n \vee \overline{K_s}, C_4) = ar(K_{n,s}, C_4) + 1$.

通过定理 6 和定理 7 可以得到, 对于 $s \geq 1, ar(C_3 \vee \overline{K_s}, C_4) = ar(K_3 \vee \overline{K_s}, C_4) = ar(K_{3,s}, C_4) + 1 = s + 3$.

定理 8 对于 $n \geq 3, n \leq s, ar(C_n \vee \overline{K_s}, C_4) \geq ar(K_{n,s}, C_4) + 1 = n + s$.

证明 找到一种边染色方式, 用 $n + s$ 种颜色对 $C_n \vee \overline{K_s}$ 的边进行染色, 使得 $C_n \vee \overline{K_s}$ 不包含彩虹的子图 C_4 .

对于 $n = 4$ 的情形, 用 $ar(K_{n,s}, C_4)$ 种颜色对 $K_{n,s}$ 的边染色, 使得 $K_{n,s}$ 不包含彩虹的子图 C_4 , 用一种新颜色对 C_n 的边染色, 使得 C_n 是一个单色图.

对于 $n = 3$ 和 $n \geq 5$ 的情形, 用 n 种颜色将 C_n 染成彩虹的, 剩余的边是由 $\overline{K_s}$ 中的 s 个顶点构成的 s 个星 $S_{1,n}$, 将这 s 个星染成单色星, 且每个星的颜色各不相同.

按照上面的染色方式, 若在 $C_n \vee \overline{K_s}$ 中存在一个 C_4 , 则它一定至少包含两条颜色相同的边.

定理 9 对于 $n \geq 5, n \leq s, ar(C_n \vee \overline{K_s}, C_4) \leq ar(K_{n,s}, C_4) + n - 1$.

证明 考虑用 $ar(K_{n,s}, C_4) + n$ 种颜色对 $C_n \vee \overline{K_s}$ 的边任意染色, 如果 $|C(K_{n,s})| \geq ar(K_{n,s}, C_4) + 1$, 那么在 $K_{n,s}$ 中可以找到彩虹的 C_4 . 因此, 可以假设 $|C(K_{n,s})| \leq ar(K_{n,s}, C_4)$ 且 $|C(C_n)| \leq n$, 而颜色数一共是 $ar(K_{n,s}, C_4) + n$, 所以 $|C(K_{n,s})| = ar(K_{n,s}, C_4), |C(C_n)| = n$ 且 $C(K_{n,s}) \cap C(C_n) = \emptyset$. $ar(K_{n,s}, C_4) = n + s - 1 > s$, 根据鸽巢原理, 至少存在一个点 $z_i \in V(\overline{K_s})$ 满足 $|C(z_i)| \geq 2$.

下面根据 n 的奇偶进行分类讨论:

情形 1 n 是奇数.

假设 $C_n \vee \overline{K_s}$ 中没有彩虹的 C_4 且 $c(x_1 z_i) = 1$, 那么 $c(x_m z_i) = 1$, 其中 $m = 1, 2, \dots, n$. 因此, 对于所有的 $z_i \in V(\overline{K_s})$ 满足 $|C(z_i)| = 1$, 产生矛盾. 因此, $C_n \vee \overline{K_s}$ 中存在彩虹的 C_4 .

情形 2 n 是偶数.

假设 $C_n \vee \overline{K_s}$ 中无彩虹的 C_4 且 $c(x_1 z_i) = 1$, 那么 $c(x_m z_i) = 1$, 其中 $m = 1, 3, 5, \dots, n-1$.

若 $c(x_2 z_i) = 2$, 则 $c(x_m z_i) = 2$, 其中 $m = 2, 4, 6, \dots, n$;

若 $c(x_2 z_i) = 1$, 则 $c(x_m z_i) = 1$, 其中 $m = 1, 2, 3, \dots, n-1, n$.

由此说明, 若 $C_n \vee \overline{K_s}$ 中无彩虹的 C_4 , 则对于所有的 $z_i \in V(\overline{K_s}), |C(z_i)|$ 的最大值是 2. 若对于所有的

$z_i \in V(\overline{K_s})$ 均满足 $|C(z_i)| = 2$, 则 $|C(K_{n,s})| = 2s > n + s - 1$, 那么 $K_{n,s}$ 中有彩虹的 C_4 , 产生矛盾. 若对于所有的 $z_i \in V(\overline{K_s})$ 均满足 $|C(z_i)| = 1$, 则 $|C(K_{n,s})| = s$, 与至少存在一个点 $z_i \in V(\overline{K_s})$ 满足 $|C(z_i)| \geq 2$ 矛盾. 因此, 对于 $z_i, i = 1, 2, \dots, s$, 这 s 个点不存在两个点 z_j, z_k 满足 $|C(z_j)| = 2, |C(z_k)| = 2$ 且 $C(z_j) \cap C(z_k) = \emptyset$, 否则 $K_{n,s}$ 中就有彩虹的 C_4 . 此时, $|C(K_{n,s})| = 2 + s - 1 < n + s - 1 = \text{ar}(K_{n,s}, C_4)$ 且 $|C(C_n)| = n$, 产生矛盾. 因此, $C_n \vee \overline{K_s}$ 中存在彩虹的 C_4 .

类似于定理 8 的证明, 可以得到 $C_n \vee \overline{K_s}$ 中关于 C_t 的 anti-Ramsey 数的下界.

定理 10 若 $4 \leq t \leq n + s, n \geq 4, s \geq 1$, 且 t 是偶数, 则 $\text{ar}(C_n \vee \overline{K_s}, C_t) \geq \text{ar}(K_{n,s}, C_t) + 1$.

2.2 联图 $P_n \vee \overline{K_s}$ 的 anti-Ramsey 数

在这一节中, 考虑联图 $P_n \vee \overline{K_s}$ 中的短圈和三角形加一条悬挂边的 anti-Ramsey 数, 图 $P_n \vee \overline{K_s}$ 是一条路 P_n 和一个空图 $\overline{K_s}$ 的联图, 其中 $V(P_n) = \{y_1, \dots, y_n\}, V(\overline{K_s}) = \{z_1, \dots, z_s\}$.

当 $n = 2$ 时, $\text{ar}(P_2 \vee \overline{K_s}, C_3) = \text{ar}(K_2 \vee \overline{K_s}, C_3) = s + 1, s \geq 1$.

下面讨论当 $n \geq 3$ 时, $P_n \vee \overline{K_s}$ 中的 C_3 和 C_3^+ 的 anti-Ramsey 数.

引理 1^[14] 若 C_k 是边着色图 G 中的一个彩虹圈且 $k \geq 4$, 如果 $G[C_k]$ 有一条弦, 则在 G 中有一个长度小于 k 的彩虹圈.

定理 11 $\text{ar}(P_n \vee \overline{K_1}, C_3) = n, n \geq 3$.

证明 用 $n - 1$ 种不同的颜色将 P_n 染成彩虹的, 剩余的边用一种新的颜色染色, 此时 $P_n \vee \overline{K_1}$ 中一定不包含彩虹的 C_3 , 因此, $\text{ar}(P_n \vee \overline{K_1}, C_3) \geq n$.

如果用 $n + 1$ 种不同的颜色对 $P_n \vee \overline{K_1}$ 的边任意染色, 可以找到一个彩虹的 C_3 . 在 $P_n \vee \overline{K_1}$ 中, 取一个彩虹的生成子图 G , 使得 $P_n \vee \overline{K_1}$ 中的每种颜色都恰好有一条边在 G 中且使得 G 中属于 P_n 中的边尽可能多. $|C(P_n)| + |C(K_{n,1}) \setminus C(P_n)| = n + 1$, 因为 $|C(P_n)| \leq n - 1$, 所以 $|C(K_{n,1}) \setminus C(P_n)| \geq 2$.

要么 G 中有彩虹的 C_3 , 得证; 要么 G 中无彩虹的 C_3 , 但此时 G 中总有固定的结构 $C_k, k = 4, 5, \dots, n - 1$. 若 $F = P_n \vee \overline{K_1}$, 则 $F[C_k]$ 中有一条弦且 C_k 是彩虹的, 根据引理 1, 可以找到彩虹的 C_3 .

定理 12 若 $n \geq 3$, 则 $\text{ar}(P_n \vee \overline{K_1}, C_3^+) = \text{ar}(P_n \vee \overline{K_1}, C_3) = n$.

证明 $\text{ar}(P_n \vee \overline{K_1}, C_3^+) \geq \text{ar}(P_n \vee \overline{K_1}, C_3)$ 显然成立. 下面只要证明 $\text{ar}(P_n \vee \overline{K_1}, C_3^+) \leq n$. 如果用 $n + 1$ 种颜色对 $P_n \vee \overline{K_1}$ 的边任意染色, 可以找到彩虹的 C_3^+ . $\text{ar}(P_n \vee \overline{K_1}, C_3) = n < n + 1$, 那么在 $P_n \vee \overline{K_1}$ 中一定存在一个彩虹的 C_3 .

彩虹的 C_3 的位置有两种, 如图 1 所示.

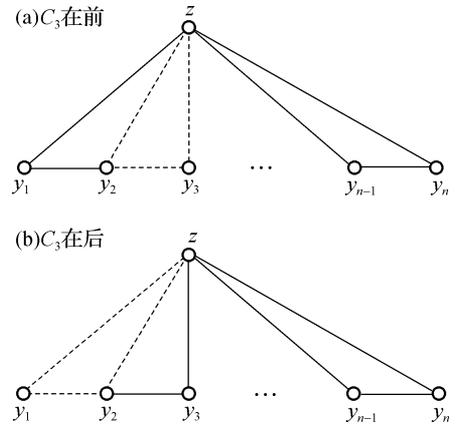


图 1 $P_n \vee \overline{K_1}$ 中 C_3 的两种位置

Fig. 1 Two location of C_3 in $P_n \vee \overline{K_1}$

假设 $P_n \vee \overline{K_1}$ 中没有彩虹的 C_3^+ , 根据彩虹 C_3 的位置, 分以下两种情形讨论:

情形 1 彩虹 C_3 位于前一种位置(图 1(a)).

至少有 $(n - 2) + 2$ 条边的颜色属于 $C(C_3)$, $P_n \vee \overline{K_1}$ 中其余边数是 $(2n - 1) - (n + 3) = n - 4$, 而 $n + 1 - |C(C_3)| = n - 2, n - 4 < n - 2$, 剩余边数小于剩余颜色数, 产生矛盾.

情形 2 彩虹 C_3 位于后一种位置(图 1(b)).

至少有 $(n - 2) + 1$ 条边的颜色属于 $C(C_3)$, $P_n \vee \overline{K_1}$ 中其余边数是 $(2n - 1) - (n - 1 + 3) = n - 3$, 而 $n + 1 - |C(C_3)| = n - 2, n - 3 < n - 2$, 剩余边数小于剩余颜色数, 产生矛盾.

因此, $P_n \vee \overline{K_1}$ 中存在彩虹的 C_3^+ , 证毕.

定理 13 若 $n \geq 3, s \geq 1$, 则 $\text{ar}(P_n \vee \overline{K_s}, C_3^+) \geq \text{ar}(P_n \vee \overline{K_s}, C_3) \geq n - 1 + s$.

证明 $\text{ar}(P_n \vee \overline{K_s}, C_3^+) \geq \text{ar}(P_n \vee \overline{K_s}, C_3)$ 显然成立. 如果找到一种边染色方式, 用 $n - 1 + s$ 种不同的颜色对 $P_n \vee \overline{K_s}$ 的边染色, 使得 $P_n \vee \overline{K_s}$ 不含彩虹的 C_3 , 那么 $\text{ar}(P_n \vee \overline{K_s}, C_3) \geq n - 1 + s$ 成立.

用 $n - 1$ 种不同的颜色对 P_n 的边染色, 使得 P_n 是彩虹的, 另外 $\overline{K_s}$ 中的 s 个顶点对应着 s 个单色星 $S_{1,n}$, 每个星的颜色互不相同. 假如存在一个 C_3 , 则一定会有两条同色边, 产生矛盾.

定理 14 若 $n \geq 2, n+s \geq 4$, 则 $\text{ar}(P_n \vee \overline{K_s}, C_4) \geq \text{ar}(K_{n,s}, C_4) + 1$.

证明 用 $\text{ar}(K_{n,s}, C_4)$ 种颜色对 $K_{n,s}$ 的边染色, 使得 $K_{n,s}$ 不含彩虹的子图 C_4 , 将 P_n 用另一种新颜色染成单色图, 如果 $P_n \vee \overline{K_s}$ 包含一个彩虹 C_4 , 那么至少包含 P_n 中的两条同色边, 产生矛盾.

类似于定理 13 和定理 14 的结果及证明, 可以得到 $P_n \vee \overline{K_s}$ 中关于 C_t 的 anti-Ramsey 数的下界, 按照 t 的奇偶性, 分别如定理 15 和定理 16 所示.

定理 15 若 $3 \leq t \leq n+s$ 且 t 是奇数, 则 $\text{ar}(P_n \vee \overline{K_s}, C_t) \geq n-1+s$.

定理 16 若 $4 \leq t \leq n+s$ 且 t 是偶数, 则 $\text{ar}(P_n \vee \overline{K_s}, C_t) \geq \text{ar}(K_{n,s}, C_t) + 1$.

2.3 联图 $W_n \vee \overline{K_s}$ 的 anti-Ramsey 数

考虑联图 $W_n \vee \overline{K_s}$ 中的短圈和三角形加一条悬挂边的 anti-Ramsey 数, 图 $W_n \vee \overline{K_s}$ 是一个轮图 W_n 和一个空图 $\overline{K_s}$ 的联图, 其中 $V(W_n) = \{v, v_1, \dots, v_n\}$, $V(\overline{K_s}) = \{z_1, \dots, z_s\}$.

已知对于 $n \geq 4$, $\text{ar}(W_n, C_3) = n+1$, 下面证明对于 $n \geq 4$, $\text{ar}(W_n, C_3^+) = \text{ar}(W_n, C_3) = n+1$.

定理 17 若 $n \geq 4$, 则 $\text{ar}(W_n, C_3^+) = n+1$.

证明 $\text{ar}(W_n, C_3^+) \geq \text{ar}(W_n, C_3) = n+1$ 显然成立. 下面只需证明 $\text{ar}(W_n, C_3^+) \leq n+1$. 如果用 $n+2$ 种颜色对 W_n 的边任意染色, 可以找到彩虹的 C_3^+ . 由于 $\text{ar}(W_n, C_3) = n+1 < n+2$, 那么此时 W_n 中一定包含一个彩虹的 C_3 . 根据轮图的结构特性, C_3 中的两条边是相邻的两条辐, 还有一条边是外圈上的边. $W_n - C_3$ 是有 $n-2$ 个顶点的路 P_{n-2} . 若 $C(P_{n-2}, C_3) \cap C(C_3) = \emptyset$, 则一定存在彩虹的 C_3^+ . 若 $C(P_{n-2}, C_3) \cap C(C_3) \neq \emptyset$, 假设 $C(P_{n-2}, C_3) \subset C(C_3)$, $|C(W_n)| \leq n-3+3 = n < n+2$, 则产生矛盾. 因此, $E(P_{n-2}, C_3)$ 中一定有一条边 e 的颜色不在 C_3 中, C_{3+e} 即是彩虹的 C_3^+ .

因为 $W_3 = K_1$, 所以根据定理 1 可知 $\text{ar}(W_3 \vee \overline{K_s}, C_3) = s+3$.

定理 18 若 $n \geq 4$, 则 $s \geq 1$, $\text{ar}(W_n \vee \overline{K_s}, C_3^+) \geq \text{ar}(W_n \vee \overline{K_s}, C_3) + s = n+1+s$.

证明 $\text{ar}(W_n \vee \overline{K_s}, C_3^+) \geq \text{ar}(W_n \vee \overline{K_s}, C_3)$ 显然成立. 只要找到一种边染色方式用 $n+1+s$ 种颜色对 $W_n \vee \overline{K_s}$ 的边染色, 使得 $W_n \vee \overline{K_s}$ 不含彩虹的 C_3 即可. 将 W_n 的 n 条辐染成同一种颜色 c , W_n 剩余的 n 条边染成不一样的颜色, 另外 $\overline{K_s}$ 中的 s 个顶点对应着 s 个

单色星 $S_{1,n+1}$. 此时 W_n 中的 C_3 一定有两条边的颜色都是 c ; 而一条边在 W_3 中、两条边在 $K_{n+1,s}$ 中的 C_3 , $K_{n+1,s}$ 中的这两条边关联 $\overline{K_s}$ 中的同一个顶点, 颜色一样. 因此 $W_n \vee \overline{K_s}$ 不含彩虹的 C_3 .

联图 $W_n \vee \overline{K_s}$ 中 4 长圈 C_4 的位置存在 3 种情况: 第 1 种是 4 条边都在 W_n 中(图 2(a)), 第 2 种是 4 条边都在 $K_{n+1,s}$ 中(图 2(b)), 第 3 种是两条边在 W_n 中、两条边在 $K_{n+1,s}$ 中(图 2(c)).

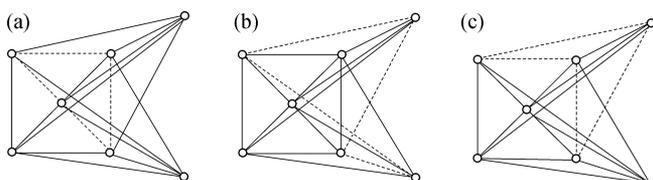


图 2 $W_4 \vee \overline{K_2}$ 中 C_4 的 3 种位置

Fig. 2 Three location of C_4 in $W_4 \vee \overline{K_2}$

定理 19 若 $n \geq 3, s \geq 1$, 则 $\text{ar}(W_n \vee \overline{K_s}, C_4) \geq 1 + \text{ar}(K_{n+1,s}, C_4)$.

证明 找到一种边染色方式, 用 $1 + \text{ar}(K_{n+1,s}, C_4)$ 种颜色对 $W_n \vee \overline{K_s}$ 的边染色, 使得 $W_n \vee \overline{K_s}$ 不含彩虹的 C_4 . 将 $K_{n+1,s}$ 的边用 $\text{ar}(K_{n+1,s}, C_4)$ 种颜色染色, 使得它不包含彩虹的 C_4 , W_n 用另一种新的颜色 c . 对于 C_4 的 4 条边都在 W_n 中和 4 条边都在 $K_{n+1,s}$ 中, 这两种情况一定不是彩虹的 C_4 ; 对于 C_4 的第 3 种情况, 至少有两条边在 W_n 中, 有相同的颜色 c , 也一定不是彩虹的, 产生矛盾.

2.4 联图 $F_n \vee \overline{K_s}$ 的 anti-Ramsey 数

友谊图是任意两点之间都恰好有一个公共顶点的图. 图 $F_n \vee \overline{K_s}$ 是一个友谊图 F_n 和一个空图 $\overline{K_s}$ 的联图, 其中 $V(F_n) = \{v, v_1, \dots, v_{2n}\}$, $V(\overline{K_s}) = \{z_1, z_2, \dots, z_s\}$. 这里主要研究图 $F_n \vee \overline{K_s}$ 的 anti-Ramsey 数.

定理 20 若 $n \geq 2$, 则 $\text{ar}(F_n, C_3) = 2n$.

证明 对于友谊图 F_n , 实质上是 n 个三角形有一个公共顶点的图. 按照这样的特性, 用 n 种颜色将每个三角形中和公共顶点关联的两条边染成一样的颜色, 剩余的 n 条边用新的 n 种不同的颜色染色, 此时在 F_n 中一定不含彩虹的 C_3 . 因此, $\text{ar}(F_n, C_3) \geq 2n$.

如果用 $2n+1$ 种颜色对 F_n 的边任意染色, 根据鸽巢原理, 那么至少有一个三角形的 3 条边颜色不一样, 即找到一个彩虹的 C_3 . 因此, $\text{ar}(F_n, C_3) < 2n+1$.

定理 21 若 $n \geq 2$, 则 $\text{ar}(F_n, C_3^+) = 2n$.

证明 $\text{ar}(F_n, C_3^+) \geq \text{ar}(F_n, C_3) = 2n$ 是显然的. 下面证明 $\text{ar}(F_n, C_3^+) \leq 2n$. 如果用 $2n+1$ 种颜色对 F_n

的边任意染色,可以找到彩虹子图 C_3^+ , 因为 $2n+1 > \text{ar}(F_n, C_3)$, 所以 F_n 中存在彩虹 C_3 . 不失一般性地, 假设彩虹 $C_3 := z v_1 v_2 z$ 且 F_n 中没有彩虹的 C_3^+ , 则 $E = \{e = v v_i \mid 3 \leq i \leq 2n\}$, $C(E) = \{c(v v_i) \mid 3 \leq i \leq 2n\} \subset C(C_3)$, $|E(F_n) \setminus (E \cup C_3)| = n-1$, 那么剩余的颜色数是 $2n+1-3=2n-2 > n-1$, 产生矛盾. 因此在集合 E 中总有一条边 e 和 C_3 中的颜色不相同, 故 $C_3 + e$ 是彩虹的 C_3^+ , 得证.

定理 22 若 $n \geq 2, s \geq 1$, 则 $\text{ar}(F_n \vee \overline{K_s}, C_3^+) \geq \text{ar}(F_n \vee \overline{K_s}, C_3) \geq 2n+1$.

证明 $\text{ar}(F_n \vee \overline{K_s}, C_3^+) \geq \text{ar}(F_n \vee \overline{K_s}, C_3)$ 是显然的, 只需要证明 $\text{ar}(F_n \vee \overline{K_s}, C_3) \geq 2n+1$ 即可. F_n 用 $\text{ar}(F_n, C_3) = 2n$ 种颜色染, 使得它不含彩虹的 C_3 , $\overline{K_s}$ 中 s 个顶点对应着 s 个单色星 $S_{1,2n+1}$, 若包含一个彩虹的 C_3 , 则一定会有两条边来自同一个单色星, 产生矛盾.

参考文献:

- [1] ERDŐS P, SIMONOVITS M, SÓS V T. Anti-Ramsey theorems[J]. Infinite and Finite Sets, 1973, 12(1): 633-643.
- [2] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory[M]. Berlin: Springer, 2008.
- [3] JIANG T, WEST D B. Edge-colorings of complete graphs that avoid polychromatic trees[J]. Discrete Math, 2004, 274:137-145.
- [4] AXENOVICH M, JIANG T. Anti-Ramsey numbers for small complete bipartite graphs[J]. Ars Combin, 2004, 73:311-318.

- [5] JIN Z, LI X. Anti-Ramsey numbers for graphs with independent cycles[J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2009, 16(1):1-8.
- [6] CHEN H, LI X, TU J. Complete solution for the rainbow number of matchings[J]. Discrete Math, 2009, 309(10): 3370-3380.
- [7] HAAS R, YOUNG M. The anti-Ramsey number of perfect matching[J]. Discrete Math, 2012, 312:933-937.
- [8] SCHIRMEYER I. Rainbow numbers for matchings and complete graphs[J]. Discrete Math, 2004, 286:157-162.
- [9] AXENOVICH M, JIANG T, KÜNDGEN A. Bipartite anti-Ramsey numbers of cycles[J]. Journal of Graph Theory, 2004, 47(1):9-28.
- [10] LI X, TU J, JIN Z. Bipartite rainbow numbers of matchings [J]. Discrete Math, 2009, 309(8):2575-2578.
- [11] JIN Z, LI L. Edge-colorings of complete bipartite graphs without large rainbow trees [J]. Ars Combinatoria Waterloo then Winnipeg, 2013, 111:75-84.
- [12] GORGOL I. Anti-Ramsey numbers in complete split graphs[J]. Discrete Mathematics, 2016, 339(7): 1944-1949.
- [13] AXENOVICH M, HARBORTH H, KEMNITE A, et al. Rainbows in the hypercube[J]. Graphs Combin, 2007, 23(2):123-133.
- [14] HORŇÁK M, JENDROL S, SCHIRMEYER I, et al. Rainbow numbers for cycles in plane triangulations[J]. Journal of Graph Theory, 2015, 78:248-257.
- [15] GU R, LI J, SHI Y. Anti-Ramsey numbers of paths and cycles in hyper-graphs[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2020, 34(1):271-307.

Anti-Ramsey numbers in some join graphs

DING Jili¹, BIAN Hong^{1*}, YU Haizheng²

(1. School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi 830017, China;

2. College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi 830046, China)

Abstract: The anti-Ramsey number $\text{ar}(G, H)$ is the maximum number of colors in an edge-coloring of G such that G contains no rainbow subgraphs isomorphic to H . In this paper, we primarily study the anti-Ramsey numbers in some joins of graphs, including $C_n \vee \overline{K_s}$, $P_n \vee \overline{K_s}$, $W_n \vee \overline{K_s}$ and $F_n \vee \overline{K_s}$, whereas those subgraphs include short cycles and the triangle with a pendant edge.

Keywords: anti-Ramsey number; edge-coloring; join graph; rainbow