求解广义特征值问题的 Sturm 序列方法

广义特征值问题

$$Ax = \lambda Bx, \qquad (1.1)$$

其中 A, B 是 $n \times n$ 实对称矩阵,是矩阵论和计算数学中的基本问题之一. 熟知,当 B 是正定矩阵时,$(A-\lambda B)$ 的顺序主子式形成一 Sturm 序列. 基于这个性质产生了一些著名的算法,如 Givens 方法,Gupta 方法. 然而,当 B 是半正定时,问题变得复杂多了,Sturm 序列性质不再可用,本文推广 Sturm 序列性质到 B 是半正定的情形并给出一个新的求解广义特征值的定位定理.

根据 Bounse-Gerstner 给出的约化方法,不失一般性,我们假设 A 是一对称不可约的三对角矩阵,$B = \mathrm{diag}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 是非负对角阵且 $b_1 > 0$.

对于 $i = 1, \cdots, n$, 令

$(A-\lambda B)^i$ 是 $(A-\lambda B)$ 的前 $i \times i$ 阶主子矩阵.

$p^i(\lambda) = \det(A-\lambda B)^i \ (p^0(\lambda) \equiv 1)$.

$\pi(i)$ 是 $p^i(\lambda)$ 的阶,

a_i 是 $p^i(\lambda)$ 中 $(-\lambda)^{\pi(i)}$ 项的系数.

$\{\xi_j^{(i)}\}_{j=1}^{\pi(i)}$ 是 $p^i(\lambda)$ 的 $\pi(i)$ 个根,

则 $\pi(i), a_i, \{\xi_j^{(i)}\}_{j=1}^{\pi(i)}$ 有如下关系:

定理 1(推广的 Sturm 定理) 对 $i = 1, \cdots, n-1$, 我们有

若 $a_i \cdot a_{i+1} > 0$, 则 $\pi(i+1) = \pi(i)$ 或 $\pi(i+1) = \pi(i) + 1$, 且

$$\xi_1^{(i+1)} < \xi_1^{(i)} < \cdots < \xi_{\pi(i+1)}^{(i+1)} < \xi_{\pi(i)}^{(i)},$$

当 $\pi(i+1) = \pi(i)$ 时, 或

$$\xi_1^{(i+1)} < \xi_1^{(i)} < \cdots < \xi_{\pi(i)}^{(i)} < \xi_{\pi(i+1)}^{(i+1)},$$

当 $\pi(i+1) = \pi(i) + 1$ 时.

若 $a_i \cdot a_{i+1} < 0$, 则 $\pi(i+1) = \pi(i)$ 或 $\pi(i+1) = \pi(i) - 1$, 且

$$\xi_1^{(i)} < \xi_1^{(i+1)} < \cdots < \xi_{\pi(i)}^{(i)} < \xi_{\pi(i+1)}^{(i+1)},$$

当 $\pi(i+1) = \pi(i)$ 时, 或

$$\xi_1^{(i)} < \xi_1^{(i+1)} < \cdots < \xi_{\pi(i+1)-1}^{(i+1)} < \xi_{\pi(i)}^{(i)},$$

当 $\pi(i+1) = \pi(i) - 1$ 时.

对任何实数 α, $b_k(\alpha)$ 定义为 $\{p^i(\alpha)\}_{i=0}^{k}$ 的变号数(如果 $p^i(\alpha) = 0$, 则令 $p^i(\alpha)$ 的符号为 $p^{i-1}(\alpha)$ 的符号, 可以证明此时 $p^{i-1}(\alpha) \neq 0$).

定理 2 (定位定理) 对任何实数 α, $p^n(\lambda) = \det(A - \lambda B)$ 于 $(-\infty, \alpha)$ 中的零点个数为 $b_n(\alpha) - EI$, 这里 $b_n(\alpha)$, EI 分别是 $\{p^i(\alpha)\}_{i=0}^{n}$, $\{a_i\}_{i=0}^{n}$ 的变号数.

我们称 EI 为 (A, B) 的特征值指标并给出了一个得到它的非常简单的方法.

由定理 2, 我们可以用二分法求得问题 (1.1) 的任一指定区间内的特征值.

李天岩

(密执安州立大学数学系)

张德统

(吉林大学计算中心,长春)

冯果忱

(吉林大学计算中心,长春)

S^7 上无 Lie 群构造

首先我们列出以下八个熟知的结果:

引理 1 连通紧致 Lie 群 G 是其中心 $C(G)$ 和若干个连通单正规子群 $G_1, \cdots, G_s$ 的乘积. 即

$$G = C(G) \cdot G_1 \cdots G_s,$$

其中 $G^* = G_1 \cdots G_s$ 是 G 的半单连通正规子群,任一 G_i 不交换,且此分解在不计次序时唯一.

引理 2 连通交换 Lie 群 G 是某一环面与某一维数的欧氏空间的乘积,即当 G 为复 Lie 群时,G 与某 $(C^m/Z^m + iZ^m) \times C^n$ 同构;当 G 为实 Lie 群时,G 与某 $(R^m/Z^m) \times$

$\times R^n$ 同构。

引理3 紧单 Lie 群仅有以下几种类型:

$A_l = SU(l+1), \dim A_l = l^2+2l, l \geqslant 1$;
$B_l = SO(2l+1,R), \dim B_l = 2l^2+l, l \geqslant 2$; $C_l = Sp(l)$, $\dim C_l = 2l^2+l$, $l \geqslant 3$; $D_l = SO(2l, R)$, $\dim D_l = 2l^2-l$, $l \geqslant 4$; 和 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8, 其中 $\dim G_2 = 14$, $\dim F_4 = 52$, $\dim E_6 = 78$, $\dim E_7 = 133$, $\dim E_8 = 248$.

引理4 若G是连通且单连通的 Lie 群,则G的任一连通正规子群是闭子群.

引理5 Lie 群G关于其某一闭子群H的因子空间G/H是一解析流形,且自然投射 p: $G \to G/H$ 解析. 当H正规时, G/H 也是 Lie 群.

引理6(E. Cartan) Lie 群G的任一闭子群在诱导拓扑下为G的 Lie 子群.

引理7 设 p: $E \to B$ 是一纤维映射, $x_0 \in p^{-1}(b_0) = F$, $b_0 \in B$, 则存在一自然的同态 ∂: $\pi_{n+1}(B, b_0) \to \pi_n(F, x_0)$, 使下面的序列正合:

$$\cdots \to \pi_{n+1}(E, x_0) \to \pi_{n+1}(B, b_0) \to \pi_n(F, x_0) \to \pi_n(E, x_0) \to \cdots \to \pi_1(B, b_0) \to \pi_0(F, x_0) \to \pi_0(E, x_0) \to \pi_0(B, b_0),$$

其中 π_n 为 n 阶同伦群, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

引理8 设H是 Lie 群G的闭子群, H正规,则自然投射 p: $G \to G/H$ 是一纤维映射.

从上面的八个引理和反证法可以依次证明以下的结果:

定理1 S^7 不是 Lie 群.

定理2 S^n 是 Lie 群当且仅当 $n = 0, 1, 3$.

定理3 S^n 是拓扑群当且仅当 $n=0, 1, 3$.

徐森林 周 坚
(中国科学技术大学数学系,合肥)

关于 Hall-Higman 简化

Hall-Higman 简化定理在群的局部分析及单群分类中都有着重要的意义. 但该定理中有一很强的限制条件: 作用群与被作用群的阶互素. 本文将这一条件去掉, 完整地刻划了群的内部特征,推广了 Hall-Higman 简化,使之可方便地用于共轭作用等情形,给出了一些有意义的应用并对各种可能出现的情形给出了实例.

定理 设G是一有限群, H为G的一作用群,H非平凡地作用在G上,但平凡地作用在G的每个H-不变真子群上. 则G有唯一的极大 H-不变子群 $C = C_G(H) = N_G(H) \neq G$, 且$C$是$G$的正规交换子群. 从而$G$的每个 H-不变真子群N, 均有 $[G, H]N \leqslant C_G(N)$. $F(G) \neq C$ 当且仅当 $F(G) = G$ 为一 p-群. 进一步有下列:

I. $[G, H] \neq G$ 时, 有 $|G/C| = p$, $H/C_H(G)$ 同构于C的一个子群, 从而 H' 平凡地作用在G上.

II. 当$[G, H] = G$时, G的每个H-不变真子群均含于 $Z(G)$, 且下列情形之一成立:

(1) 若G的可解剩余 $R_S(G) \neq G$,则G是一个类不超过 2 的 p-群, G' 与 $G/Z(G)$ 均为初等交换 p-群或单位元群, 若 $p \neq 2$ 则对每个 $x \in G$, 有 $x^p = 1$.

(2) 若 $R_S(G) = G$, 则 $C = Z(G) = F(G) = \phi(G)$. G是一完全拟幂零群, $\bar{G} = G/Z(G) = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_k$ 为同构的非交换单群的直积. 对每个 $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, 存在 $H_i \leqslant H$ 使得 $|H:H_i| = k$, 并且有$G_i \cong \mathrm{Inn}(G_i) \leqslant H_i/C_{H_i}(G_i) \leqslant \mathrm{Aut}(G_i)$.

推论A 设G为一有限群, H为G的一可解作用群, 若H非平凡地作用在G上但