共线平动点附近小推力轨道转移中的微分修正技术

周敬^{1,2*}, 胡军^{1,2}, 韩铭麟^{1,2}

1. 北京控制工程研究所, 北京 100190;

2. 空间智能控制技术重点实验室, 北京 100094

* E-mail: zhoujing_bice@126.com

收稿日期: 2020-03-31; 接受日期: 2020-05-29; 网络发表日期: 2020-10-28

国家重点研发计划(编号: 2018YFA0703800)资助项目

摘要 针对三体问题中共线平动点附近的小推力轨道转移问题, 提出了一种新的间接法求解方法. 首先, 根据最优控制理论推导了推力幅值和方向角的最优控制律, 得出协态变量初值是转移轨道唯一决定因素, 据此将轨道转移问题转化为两点边值问题; 然后, 将状态变量和协态变量整合形成增广系统, 利用微分修正原理设计了一种新的两点边值问题求解器. 同时, 引入调节因子和推力幅值延拓技术, 以提高求解器的鲁棒性、收敛性和解决转移时间较长时轨道难以收敛的问题; 最后以地月系统 L_1 点附近Halo轨道间的转移问题为例进行了仿真分析. 仿真结果表明, 基于微分修正技术的小推力轨道转移设计方法, 避免了常规的协态变量初值猜测过程, 可以实现 $[-1, 1]$ 范围内任意初值猜测情况下的迭代收敛, 说明了方法的有效性, 同时对于其他以两点边值问题为基础的工程实际问题也具有一定的普适性.

关键词 三体问题, 共线平动点轨道, 小推力转移, 间接法, 两点边值问题, 微分修正技术

1 引言

近年来, 深空探测受到世界各航天大国与组织越来越多的重视. 根据我国航天事业发展指南, 未来航天的三个重点方向之一就是深空探测^[1]. 因此, 与深空探测密切相关的各项基础和应用研究便成为了目前我国航天事业中的热点研究方向.

相比以二体运动问题为基础的近地空间航天活动, 深空探测所涉及的更多是三体问题. 动力学本质的区别使得三体问题相对二体问题更加复杂. 在三体问

题的研究中, 平动点(尤其是共线平动点)及其附近的周期/拟周期轨道所具有的独特位置优势和丰富的动力学特性^[2], 使其在深空探测任务设计中占据着重要的地位, 已经成为宇宙观测、天文研究的理想场所和星际高速公路(interplanetary superhighway, IPS)的门户站. 随着国内外深空探测技术的快速发展, 在地月系统共线平动点建立空间站, 以支持载人登月、火星探测等任务越发成为可能, 其中最具代表性的是2017年9月27日由美国国家航空航天局(NASA)提出、现已进入实质研发阶段的“深空之门计划”(lunar orbital

引用格式: 周敬, 胡军, 韩铭麟. 共线平动点附近小推力轨道转移中的微分修正技术. 中国科学: 技术科学, 2021, 51: 207–220

Zhou J, Hu J, Han M L. Differential correction method in low-thrust orbit transfers near the collinear libration points (in Chinese). Sci Sin Tech, 2021, 51: 207–220, doi: [10.1360/SST-2020-0140](https://doi.org/10.1360/SST-2020-0140)

platform-gateway, LOP-G). 由于空间站的建设和运行离不开轨道转移技术的支撑, 因此, 对三体问题中共线平动点附近的轨道转移(尤其是周期/拟周期轨道之间的转移)的研究兼具理论和工程应用价值.

按照推进方式的不同, 共线平动点附近的轨道转移同样分为脉冲转移和小推力转移两种方式. 相比脉冲转移, 小推力转移具有比冲高、推力小、工作时间长、推进剂消耗量少等特点, 具有广阔的应用前景. 小推力轨道转移问题通常可转化为一个非线性系统最优控制问题, 由于轨道动力学通常具有非线性(尤其是三体问题下的平动点轨道, 具有强非线性和不稳定性), 很难获得转移轨道的精确解析解, 因此通常采用数值方法加以解决, 主要分为直接法、间接法和混合法^[3].

直接法通常将状态变量和控制变量离散化, 利用配点技术将最优控制问题转化为高维非线性规划(non-linear programming, NLP)问题, 其优点在于状态变量和控制变量均具有实际物理意义, 初值易于猜测, 且收敛半径大、鲁棒性好; 其缺点在于参数序列庞大, 存在精度和计算量的矛盾, 求解难度大, 同时解的最优性无法保证, 只能事后验证. 直接法的求解方法主要有配点法^[4]、函数逼近法^[5]以及伪谱法^[6].

间接法利用古典变分法或Pontryagin极大值原理(Pontryagin maximum principle, PMP), 通过推导一阶最优必要条件, 将最优控制问题转化为两点边值问题(two-point boundary value problem, TPBVP), 其优点在于, 优化变量维数较少, 求解精度高, 解的最优性得到保证, 具有理论完备性; 其缺点在于引入了难以求解的TPBVP, 该问题的求解对协态变量初值非常敏感, 初值猜测的准确程度对算法的收敛性和可行性影响非常大, 如果初值猜测偏离真实解较大, 将导致无法求得最优解, 甚至算法发散. 由于协态变量不具有实际物理意义, 其初值难以猜测, 甚至其量级都难以确定, 因此收敛半径非常小^[7]. 间接法的求解方法主要有打靶法、Newton (类Newton、改进Newton)法以及随机优化方法等.

混合法兼顾直接法和间接法的特点, 利用了间接法推导的最优性条件, 然后以参数优化的方式进行求解, 其优点在于, 相比直接法求解结果更接近最优解, 计算量小; 相比间接法, 降低了初值敏感性; 其缺点在于, 其求解时间仍远高于间接法, 且因其舍弃了部分最优性条件, 无法严格保证解的最优性.

综上所述, 虽然间接法存在收敛性问题, 但其能够求得理论最优解, 且一旦收敛, 其计算效率依然比直接法和混合法快, 故学者们开始重新对间接法进行研究.

通常, 间接法的研究重点在于协态变量初值猜测技术和具有良好收敛性的TPBVP求解器设计两个方面. 目前, 已有关于间接法的研究成果可以分为以下几类: (1) 打靶法^[8,9]通过设置合理的打靶函数, 利用随机初始化等方法对协态变量初值进行修正, 在获得打靶函数零点的同时, 也就获得了问题的最优解, 同时也可以与Newton迭代法配合使用^[10,11], 以获得较高的迭代效率; (2) 近似解析法^[12~14]通过逆多项式函数、正弦指数函数或Fourier级数等特定类型函数来拟合小推力转移轨道, 以此实现协态变量初值的有效估计, 最后结合一定的TPBVP求解器获得精确的转移轨道; (3) 同伦法^[15~17]通过对原问题进行简化处理, 在得到简化问题最优解的基础上, 逐渐改变同伦参数的取值, 使得待优化问题逐渐由简单问题过渡到原优化问题, 以此实现问题的求解; (4) 协态变量控制转换技术^[18~20]将协态变量约束在一个多维单位球内, 使得每个协态变量的初值猜测范围被约束在 $[-1, 1]$ 范围内, 大大提高了TPBVP的初值猜测效率, 进而提高求解的收敛性, 与之类似的方法还有示踪协态变量转换方法^[21]、伴随映射方法^[22]和缩放法^[23]; (5) Kalman滤波法^[24,25]以协态变量初值作为待估计参数, 以终端条件构造观测函数, 将TPBVP转化为参数估计问题加以解决. 此方法以概率论为基础, 避免了梯度矩阵的推导, 在一定程度上克服了初值猜测的困难; (6) 启发式方法^[26,27]主要基于启发式算法, 如遗传算法、粒子群算法等, 直接对协态变量初值进行优化. 其优点在于它们不受结果的局部性影响, 同时也不需要任何初始猜测值就能得到最优解, 其缺点是缺乏收敛性证明; 此外, 也可以通过引入梯度信息^[28,29]来提高计算效率和精度, 或者训练神经网络^[30]来学习获得最优转移时间、协态变量初值和最优控制律, 以克服协态变量初值猜测困难, 且具有一定的实时性和在线规划潜力.

小推力轨道转移通常具有机动时间长、非线性强的特点, 导致其优化问题一直是空间轨迹优化领域的研究热点和难点. 虽然上述有关间接法的研究均取得了较好结果, 但大都以近地轨道转移、星际轨道转移等常见的二体问题为研究背景, 而三体问题的不稳定性混沌性均有可能使得上述研究方法无法适用于平

动点附近的小推力轨道转移问题, 因此对其进行更深入的研究具有重要的理论意义和工程应用价值. 基于此背景, 本文在深入研究小推力轨道转移最优控制律的基础上, 发现协态变量初值之间的相对比值是转移轨道能否精确到达目标状态的唯一因素, 结合后期协态变量初值的归一化处理, 最终将协态变量初值猜测范围限制在 $[-1, 1]$ 范围内, 大大提高了协态变量初值的猜测效率. 然后, 基于微分修正技术, 设计了一种新的TPBVP求解器, 该求解器对于 $[-1, 1]$ 范围内的任意协态变量初值猜测, 均能实现快速收敛, 具有较强的鲁棒性和收敛性, 避免了常规的协态变量初值猜测过程, 大大降低了TPBVP的求解对初值的敏感性. 此外, 此求解器是在将小推力轨道转移问题提炼为TPBVP这一本质问题的基础上进行的, 因此本文研究成果不仅可以为我国未来的平动点空间站的建设和运行提供一定的理论指导, 同时对于以TPBVP为基础的其他领域的工程实际问题也具有一定的适用性.

2 圆型限制性三体问题模型

圆型限制性三体问题(circular restricted three-body problem, CRTBP)是最简单的三体运动模型, 通常用来研究最基本的运动规律, 而地月 L_1 点作为地球通向宇宙空间的门户^[31], 具有极其重要的工程应用价值. 因此本文以地月系统CRTBP下 L_1 点附近的周期轨道作为本文研究对象.

为方便描述航天器的运动和简化计算, 通常需要对相关物理量进行无量纲化处理. 相应的质量 $[M]$ 、长度 $[L]$ 和时间 $[T]$ 的归一化单位取为^[32]

$$\begin{cases} [M] = m_1 + m_2, \\ [L] = L_{12}, \\ [T] = \sqrt{L_{12}^3 / G(m_1 + m_2)}, \end{cases} \quad (1)$$

式中, m_1 和 m_2 为两主天体质量, L_{12} 为两主天体之间的距离, G 为万有引力常数, 其他相关变量(如推力加速度等)的归一化过程均可依据式(1)推导获得.

为了直观、清晰地描述航天器在CRTBP中的运动, 通常选择在会合坐标系(也称为质心旋转坐标系)下进行研究. 如图1所示, 会合坐标系 $O-XYZ$ 的原点位于两主天体的公共质心 O , X 轴由较大主天体指向较小主天体, Z 轴与主天体系统角动量方向平行, Y 轴满足右

手坐标系定则. 在会合坐标系下, 令矢量 $\mathbf{X} = [X, Y, Z]^T$ 和 $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}]^T$ 分别表示航天器的位置矢量和速度矢量, 则CRTBP下航天器运动的动力学方程为^[32]

$$\begin{cases} \ddot{X} - 2\dot{Y} = \frac{\partial \Omega}{\partial X} + F_X, \\ \ddot{Y} + 2\dot{X} = \frac{\partial \Omega}{\partial Y} + F_Y, \\ \ddot{Z} = \frac{\partial \Omega}{\partial Z} + F_Z, \end{cases} \quad (2)$$

式中, $\mathbf{F} = [F_X, F_Y, F_Z]^T$ 为会合坐标系下归一化后的推力加速度矢量, Ω 为伪势能函数, 可根据式(3)计算得到.

$$\Omega = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu), \quad (3)$$

式中, $\mu = m_2 / (m_1 + m_2)$ 为三体系统的质量比, r_1 和 r_2 分别表示航天器距离两主天体的距离, 有关此动力学的详细信息可参考文献[1].

为便于进一步描述航天器在 L_1 点附近的运动, 将会合坐标系的原点由主天体公共质心 O 平移至 L_1 点, 并取 L_1 点与最近主天体之间的距离作为新的单位长度, 形成一个新的坐标系, 称为 L_1 会合坐标系 L_1-xyz ^[33], 如图1所示. 在该坐标系下, 假设 $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ 表示航天器的位置矢量, $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$ 表示航天器的速度矢量, 那么两组变量 $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ 和 $\mathbf{X} = [X, Y, Z]^T$ 之间的转换关系为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\gamma_1}(X - X_1), \\ y = \frac{Y}{\gamma_1}, \\ z = \frac{Z}{\gamma_1}, \end{cases} \quad (4)$$

式中, X_1 为会合坐标系下 L_1 点距离主天体公共质心的

图1 (网络版彩图)地月系统CRTBP下的会合坐标系 $O-XYZ$ 和 L_1 会合坐标系 L_1-xyz

Figure 1 (Color online) Synodic coordinate system $O-XYZ$ and L_1 -centered synodic coordinate system L_1-xyz for CRTBP of Earth-Moon system.

距离, γ_1 为 L_1 点与最近主天体之间的距离.

因此, L_1 会合坐标系下航天器运动的动力学方程为^[33]

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + f_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{\partial \Omega}{\partial y} + f_y, \\ \ddot{z} = \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{\partial \Omega}{\partial z} + f_z, \end{cases} \quad (5)$$

式中, $\mathbf{f} = [f_x, f_y, f_z]^T$ 为 L_1 会合坐标系下归一化后的推力加速度矢量. 为便于表示, 将上述推力加速度矢量转化为式(6)所示的大小和方向的形式.

$$\begin{cases} f_x = U \cos \alpha \cos \beta, \\ f_y = U \sin \alpha \cos \beta, \\ f_z = U \sin \beta, \end{cases} \quad (6)$$

式中, U 为推力加速度幅值, α , β 分别表示推力的方位角和高低角.

将式(3)、(4)和(6)代入动力学方程(5)中, 得到详细的动力学方程, 为

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}, \dot{y} = \dot{y}, \dot{z} = \dot{z}, \\ \ddot{x} = \frac{1}{\gamma_1} \left[X_2 + \gamma_1 x - \frac{(1-\mu)(X_2 + \mu + \gamma_1 x)}{M} - \frac{\mu(X_2 + \mu + \gamma_1 x - 1)}{N} \right] + 2\dot{y} + U \cos \alpha \cos \beta, \\ \ddot{y} = \frac{1}{\gamma_1} \left[\gamma_1 y - \frac{\gamma_1 y(1-\mu)}{M} - \frac{\gamma_1 \mu y}{N} \right] - 2\dot{x} + U \sin \alpha \cos \beta, \\ \ddot{z} = \frac{1}{\gamma_1} \left[-\frac{\gamma_1 z(1-\mu)}{M} - \frac{\gamma_1 \mu z}{N} \right] + U \sin \beta, \end{cases} \quad (7)$$

式中, M , N 为定义的中间变量, 可根据式(8)计算得到.

$$\begin{cases} M = [(X_2 + \mu + \gamma_1 x)^2 + \gamma_1^2 y^2 + \gamma_1^2 z^2]^{3/2}, \\ N = [(X_2 + \mu + \gamma_1 x - 1)^2 + \gamma_1^2 y^2 + \gamma_1^2 z^2]^{3/2}. \end{cases} \quad (8)$$

3 小推力轨道转移优化模型

根据轨道转移动力学模型(7), 取 $\mathbf{x} = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$

和 $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^T = [f_x, f_y, f_z]^T$ 分别为状态变量和控制变量, 则可将上述轨道转移优化问题转化为标准最优控制问题的形式:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}). \quad (9)$$

在小推力转移轨道优化设计中, 通常以燃料(或推进剂)消耗最少作为优化目标, 因此, 最优控制问题的性能指标函数 J 设置为

$$J = \int_{t_0}^{t_f} U dt, \quad (10)$$

式中, t_0 表示轨道转移起始时刻, 通常为0, t_f 表示轨道转移终止时刻, 通常为自由变量.

根据轨道转移起点和终点的状态矢量 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_f$, 该最优控制问题的边界条件为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{x}(t_f) &= \mathbf{x}_f. \end{aligned} \quad (11)$$

考虑到实际小推力发动机的推力大小是有限的, 其所能提供的最大推力加速度记为 $U_{\max}$, 则控制变量的约束为

$$0 \leq \|\mathbf{u}\|_2 \leq U_{\max}. \quad (12)$$

根据最优控制理论, 设置Hamilton函数 H 为

$$H = U + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (13)$$

式中, $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6]^T$ 表示与原动力学方程(7)中六个状态变量对应的协态变量矢量.

将式(7)和(9)代入式(13), 并进行整合, 得到详细的Hamilton函数 H 的表达式为

$$\begin{aligned} H = & \lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 \dot{y} + \lambda_3 \dot{z} + \lambda_4 \left(\frac{1}{\gamma_1} \left[X_2 + \gamma_1 x - \frac{(1-\mu)(X_2 + \mu + \gamma_1 x)}{M} - \frac{\mu(X_2 + \mu + \gamma_1 x - 1)}{N} \right] + 2\dot{y} \right) \\ & + \lambda_5 \left(\frac{1}{\gamma_1} \left[\gamma_1 y - \frac{\gamma_1 y(1-\mu)}{M} - \frac{\gamma_1 \mu y}{N} \right] - 2\dot{x} \right) + \lambda_6 \left(\frac{1}{\gamma_1} \left[-\frac{\gamma_1 z(1-\mu)}{M} - \frac{\gamma_1 \mu z}{N} \right] \right) + U(1 + \lambda_4 \cos \alpha \cos \beta + \lambda_5 \sin \alpha \cos \beta + \lambda_6 \sin \beta). \end{aligned} \quad (14)$$

依据Pontryagin极大值原理, 最优控制律应使得式(14)中的Hamilton函数 H 取最小^[34], 因此最优推力方向角 α, β 所满足的条件为

$$\begin{cases} \cos\alpha\cos\beta = -\lambda_4 / \sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2}, \\ \sin\alpha\cos\beta = -\lambda_5 / \sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2}, \\ \sin\beta = -\lambda_6 / \sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2}. \end{cases} \quad (15)$$

故推力方向角 α, β 的最优控制律为

$$\begin{cases} \alpha^* = \arctan(-\lambda_5 / -\lambda_4), \\ \beta^* = \arcsin(-\lambda_6 / \sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2}). \end{cases} \quad (16)$$

推力加速度幅值 U 的最优控制律, 即最优控制问题的开关函数为

$$U^* = \begin{cases} U_{\max}, & \sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2} > 1, \\ 0, & \sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2} \leq 1. \end{cases} \quad (17)$$

在多数小推力轨道转移过程中, 发动机由于推力小而处于长时间工作状态. 基于此, 将上述推力加速度幅值 U 的最优控制律(17)做一定的简化, 即假设发动机全程开机工作, 如式(18)所示, 而这也与文献[11]中的结论相一致.

$$U^* = U_{\max}. \quad (18)$$

协态变量矢量 λ 的微分方程可以通过Hamiltonian函数 H 的正则方程获得, 即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \\ \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \end{cases} \quad (19)$$

由于原动力学方程(7)形式较为复杂, 且具有强非线性, 而协态变量矢量 λ 的微分方程涉及Hamiltonian函数 H 对状态变量 $\mathbf{x}$ 求偏导, 求解过程和结果非常复杂烦琐, 这里不再详细给出.

本文中轨道转移的起点和终点状态 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_f$ 事先固定, 将推力加速度幅值 U 和方向角 α, β 的最优控制律(16)和(18)代入到轨道转移动力学方程(7)中, 分析发现, 最优转移轨道能否由转移起点 $\mathbf{x}_0$ 出发准确到达目标点 $\mathbf{x}_f$ 完全取决于协态变量矢量 λ , 而 λ 的微分方程已由Hamiltonian函数 H 对状态变量 $\mathbf{x}$ 求偏导所确定, 故 λ 在任意时刻的取值完全依赖于其初值 λ_0 . 由此可见, 小

推力轨道转移问题的实质就是TPBVP, 只要获得了精确的协态变量初值 λ_0 , 最优小推力转移轨道也就随之确定.

然而, TPBVP的求解本身就是一个具有挑战性的难题, 主要体现在初值猜测问题和TPBVP求解器设计问题两个方面. (1) 对于初值猜测问题, 通常情况下约束条件和性能指标对初值非常敏感, 初值猜测的精确程度直接影响算法的收敛性和可行性. 如果初值猜测偏离真实解太多, 计算过程往往会陷入局部极值, 导致很难求得全局最优解, 极端情况下甚至会发散. 因此, 间接法的收敛半径非常小, 而当转移时间较长时, 该问题更加明显. 此外, 由于引入的协态变量本身不具有实际物理意义, 无法获得有关其取值范围的先验信息, 导致其初值很难猜测, 甚至连量级都无法确定. 故协态变量初值猜测问题是TPBVP求解的首要问题. (2) 对于TPBVP求解器设计问题, TPBVP通常具有非线性, 导致很难获得其解析解. 因此, 在解决协态变量初值猜测问题的前提下, 下一步的重点就是寻找一种具有良好收敛性的数值求解方法, 而这种数值求解方法的实质就是TPBVP求解器设计方法.

基于以上分析可以看出, 利用间接法求解平动点附近小推力轨道转移问题的最大难点和挑战在于解决协态变量初值猜测问题和设计一个具有良好收敛性的TPBVP求解器. 下面对这两个问题的解决方法分别进行讨论.

首先介绍协态变量初值猜测技术. 对于 λ_0 初值猜测问题, 分析推力方向角 α, β 的控制律(15)和(16)可以发现, 两方向角 α, β 的取值仅取决于协态变量 $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ 之间的相对比值, 与 $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ 自身的绝对大小无关. 在此基础上, 再辅以后期微分修正过程中对协态变量初值 λ_0 进行归一化处理, 便可以将各协态变量 $\lambda_1 \sim \lambda_6$ 的初值猜测范围限制在 $[-1, 1]$ 范围(等价于多维单位球)内. 这就是本文研究方法将协态变量初值猜测限定在 $[-1, 1]$ 范围内的理论依据, 类似于文献[18~20]将协态变量取值限制在多维单位球内.

对于TPBVP求解器设计问题, 可以利用微分修正技术加以解决.

4 TPBVP求解器设计

在三体问题研究中, 微分修正技术作为一种有效

的数值方法, 已成功应用于平动点轨道(如Halo轨道等)的数值修正中, 其可以根据终端状态误差线性地修正系统初值, 并通过若干次迭代过程最终获得满足终端约束的状态初值, 而恰巧TPBVP求解的本质就是如何获得精确的协态变量初值. 因此, 本文将微分修正技术与TPBVP的求解进行有机结合, 可解决以小推力轨道转移问题为代表的一系列以TPBVP为基础的工程实际问题.

对于自治系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \quad (20)$$

假设满足此系统的相流表示为 $\varphi(\mathbf{x}; t)$, 初始状态为 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, 目标状态(也称为靶点)为 $\mathbf{x}_d$, 相流时间为 t_1 , 则无初值修正下的实际终端状态表示为 $\varphi(\mathbf{x}_0; t_1) = \mathbf{x}_1$. 为使相流能够到达目标状态, 需要对初值 $\mathbf{x}_0$ 和相流时间 t_1 进行修正以满足 $\varphi(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0; t_1 + \delta t_1) = \mathbf{x}_d$. 为计算修正量 $\delta\mathbf{x}_0$ 和 δt_1 , 将 $\varphi(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0; t_1 + \delta t_1)$ 在 $\mathbf{x}_1$ 处进行Taylor展开, 即

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0; t_1 + \delta t_1) &= \varphi(\mathbf{x}_0; t_1) + \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}_0; t_1)}{\partial \mathbf{x}_0} \delta\mathbf{x}_0 \\ &\quad + \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}_0; t_1)}{\partial t_1} \delta t_1 + \text{H.O.T}, \end{aligned} \quad (21)$$

式中, H.O.T表示高阶项(high-order-terms).

则实际终端状态 $\mathbf{x}_1$ 与目标状态 $\mathbf{x}_d$ 之差为

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_1 \\ &= \varphi(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0; t_1 + \delta t_1) - \varphi(\mathbf{x}_0; t_1). \end{aligned} \quad (22)$$

将式(21)代入式(22), 并忽略高阶项H.O.T的影响, 可获得微分修正方程为

$$\delta\mathbf{x}_1 = \Phi(t_0; t_1) \delta\mathbf{x}_0 + \dot{\mathbf{x}}_1 \delta t_1, \quad (23)$$

式中, $\Phi(t_0; t_1)$ 为该系统的状态转移矩阵, 在一定程度上刻画了相流的初始状态改变量对终端状态改变量所产生的影响, 其计算过程可以参考文献[35].

鉴于本文所研究的轨道转移问题的实质是协态变量初值修正问题, 结合上述微分修正技术, 本文将个状态变量 $\mathbf{x} = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$ 和6个协态变量 $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6]^T$ 进行整合, 形成了一个新的增广系统 $\mathbf{X} = [\mathbf{x}^T; \boldsymbol{\lambda}^T]^T$, 其动力学方程可通过式(19)整合得到, 即

$$\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \partial H / \partial \boldsymbol{\lambda} \\ -\partial H / \partial \mathbf{x} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

考虑到本文中的转移时间(time of flight, TOF)为自由量, 是通过优化过程得到的, 而非微分修正过程, 即有 $\delta t_1 = 0$. 因此, 根据式(23), 小推力轨道转移问题下的微分修正方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_d \\ \boldsymbol{\lambda}_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \boldsymbol{\lambda}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{1,1} & \Phi_{1,2} \\ \Phi_{2,1} & \Phi_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x}_0 \\ \delta\boldsymbol{\lambda}_0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

式中, $\Phi_{i,j} (i, j = 1, 2)$ 为 12×12 维状态状态转移矩阵 Φ 的 6×6 维分块矩阵, $\boldsymbol{\lambda}_d$ 表示终端时刻的协态变量取值.

在轨道转移问题中, 只需确保状态变量 $\mathbf{x}$ 到达目标状态 $\mathbf{x}_d$ 即可, 而对协态变量终值 $\boldsymbol{\lambda}_d$ 的取值以及 $\boldsymbol{\lambda}$ 是否到达 $\boldsymbol{\lambda}_d$ 无要求. 因此, 只需要提取式(25)中的第一行便可, 即

$$\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_1 = \Phi_{1,1} \delta\mathbf{x}_0 + \Phi_{1,2} \delta\boldsymbol{\lambda}_0. \quad (26)$$

此外, 在轨道转移中转移起点 $\mathbf{x}_0$ 是固定不变的, 即 $\delta\mathbf{x}_0 = 0$, 故最终得到本文提出的基于微分修正技术的新的TPBVP求解器为

$$\delta\boldsymbol{\lambda}_0 = \Phi_{1,2}^{-1}(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_1). \quad (27)$$

对于TPBVP, 当协态变量初值猜测较为准确时, TPBVP求解器具有很快的收敛速度, 然而, 较为精确的初值猜测通常难以获得. 当猜测值距离精确值偏差较大时, 每一步的修正量矢量 $\delta\boldsymbol{\lambda}_0$ 相对上一步变化幅度非常大, 往往造成迭代发散. 为提高迭代算法的鲁棒性和收敛性, 本文参考Newton下山法的思想, 在迭代过程中引入了调节因子. 因此, 进一步改进的基于微分修正技术的TPBVP求解器为

$$\delta\boldsymbol{\lambda}_0 = k \Phi_{1,2}^{-1}(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_1), \quad (28)$$

式中, k 为引入的调节因子, 其取值范围可设置为 $(0, 1]$. 当迭代过程逐渐接近最优解时, 可适当增大 k 的取值. 引入调节因子的实质是以降低收敛速度为代价来提高算法的鲁棒性和收敛性, 即使如此, 其收敛速度依然较快. 本文中 k 的取值情况为

$$k = \begin{cases} 0.1, \sigma > 10^{-2}, \\ 0.5, \sigma \leq 10^{-2}, \end{cases} \quad (29)$$

式中, σ 为迭代过程中的轨道转移精度.

由于状态转移矩阵 Φ 是在对非线性系统线性化的基础上获得的, 并不能非常精确地表示非线性系统的状态转移情况, 因此, 需要对式(28)进行若干次迭代, 最终获得一定精度条件下的精确协态变量初值 λ_0 . 下面给出TPBVP求解器的收敛性证明.

对于小推力轨道转移动力学模型(7), 将其转化为式(20)形式后, 假设要求的系统精确状态初值记为 $\mathbf{x}^*$, 其初始猜测值记为 $\mathbf{x}_0$, 经一步修正后的猜测值记为 $\mathbf{x}'_0 = \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0$, 要到达的终端状态(即“靶点”)记为 $\mathbf{x}_d$, 则有如下相流关系:

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{x}_0; t_1) = \mathbf{x}_p \\ \varphi(\mathbf{x}'_0; t_1) = \mathbf{x}'_p \\ \varphi(\mathbf{x}^*; t_1) = \mathbf{x}_d \end{cases} \quad (30)$$

假设未修正之前系统的终端状态误差为

$$\Delta_1 = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}_p \quad (31)$$

经过一步修正后的终端状态误差为

$$\Delta_2 = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}'_p \quad (32)$$

根据本文提出的TPBVP求解器, 初始状态修正量 $\delta\mathbf{x}_0$ 为

$$\delta\mathbf{x}_0 = k\Phi^{-1}(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_p) = k\Phi^{-1}\Delta_1 \quad (33)$$

对 Δ_2 进行Taylor展开, 有

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \mathbf{x}_d - \mathbf{x}'_p = (\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_p) - (\mathbf{x}'_p - \mathbf{x}_p) \\ &= \Delta_1 - [\varphi(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0; t_1) - \varphi(\mathbf{x}_0; t_1)] \\ &= \Delta_1 - \left[\varphi(\mathbf{x}_0; t_1) + \frac{\partial\varphi(\mathbf{x}_0; t_1)}{\partial\mathbf{x}_0}\delta\mathbf{x}_0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{x}_0; t_1)}{2\partial\mathbf{x}_0^2}(\delta\mathbf{x}_0)^2 + \dots - \varphi(\mathbf{x}_0; t_1) \right] \\ &= \Delta_1 - [\Phi k\Phi^{-1}\Delta_1 + O(k)] \\ &= (1-k)\Delta_1 - O(k), \end{aligned} \quad (34)$$

式中, $O(k)$ 表示包含 k 的多项式.

由于 $k \in (0, 1]$, 则必然存在一个足够小的 k , 使得 $\lim_{k \rightarrow 0} O(k) = 0$, 从而有

$$\|(1-k)\Delta_1 - O(k)\| < \|\Delta_1\|. \quad (35)$$

故最终得到

$$\|\Delta_2\| = \|(1-k)\Delta_1 - O(k)\| < \|\Delta_1\|. \quad (36)$$

根据式(36), 说明经过一步修正后, 终端状态偏差是减小的, 即证明了TPBVP求解器的收敛性.

图2所示为本文方法的流程图.

5 算法验证

为验证本文所提方法的有效性, 在Inter Core i3-350M(2.26GHz)处理器、4G RAM环境下, 利用MATLAB(R2014a)仿真软件, 编写了TPBVP求解器等仿真程序, 以此进行数值仿真分析.

本节以地月CRTBP中 L_1 点附近的Halo轨道作为研究对象, 利用本文所提方法对不同Halo轨道之间的小推力轨道转移进行研究. 初始Halo轨道的振幅记为 A_{z1} , 目标Halo轨道的振幅记为 A_{z2} , 转移起点和终点的状态矢量分别记为 $\mathbf{x}_0$ 和 $\mathbf{x}_f$, 以上参数在 L_1 会合坐标系下的无量纲(dimensionless unit, DU)取值见表1.

在小推力轨道转移问题的求解中, 不同的转移时间所对应的求解难度是不同的. 通常转移时间越长, 求解过程对初值的敏感性越大, 求解难度越大. 因此, 为适应不同的任务背景要求, 下面分别针对不同转移时间下的小推力轨道转移进行仿真研究.

5.1 转移时间较短

当转移时间较短时, 小推力发动机常处于最大推力工作. 根据目前小推力发动机的最大工作能力, 通过式(1)对推力加速度进行归一化, 得到的最大推力加速度记为 $U_{\max} = 2$ (DU). 假设轨道转移时间TOF小于一个平均轨道周期, 即 $\text{TOF} < (T_1 + T_2)/2 = T$ (T_1, T_2 分别表示出发轨道和目标轨道的周期, T 则为平均轨道周期), 小推力转移轨道的优化过程按照流程图2所示. 由于无法事先确定最优转移时间TOF, 但考虑到小推力转移轨道相对于原出发轨道可以认为是小推力作用下的一种轨道摄动, 是一个小幅变化、缓慢进行的过程. 因此, 可以根据式(30)获得转移时间的初始估计值.

$$\text{TOF}_0 = \left(\frac{\text{mod}(\varphi_2 - \varphi_1, 2\pi)}{2\pi} + N \right) T, \quad (37)$$

式中, φ_1, φ_2 分别表示转移起点和终点的相位, N 为时间意义下的转移轨道整“圈数”, 取值为整数.

在此基础上, 保持推力加速度幅值不变, 以 $[-1, 1]$

图 2 基于微分修正技术的小推力转移轨道优化方法流程图

Figure 2 Flow chart of the method of low-thrust transfer optimization based on differential correction.

范围的随机数作为协态变量的初值猜测值, 然后利用微分修正技术获得当前转移时间TOF下的收敛后的转移轨道, 如果此收敛转移轨道的转移精度没有达到预设精度, 说明此TOF非最优, 那么采用手动调试或遗传算法等方法对转移时间TOF进行优化, 直到某TOF

对应的收敛转移轨道的转移精度达到预设精度为止, 而此时对应的转移时间TOF和迭代收敛后的精确协态变量初值 λ_0 就是小推力轨道转移的最优解. 仿真分析发现, 当小推力发动机以最大推力工作时, 最优TOF的优化结果为 $0.6T$, 满足 $\text{TOF} < T$.

图3所示为最优 $\text{TOF}=0.6T$ 下, 100组 $[-1, 1]$ 范围内的任意协态变量初值猜测下的迭代过程Monte Carlo仿真结果. 从图中可以看出, 虽然初始猜测值不同, 但最终收敛值(即精确协态变量初值 λ_0)相同, 具体收敛结果为表2中 $\text{TOF}=0.6T$ 对应的结果.

图4为轨道转移精度随微分修正迭代次数的变化关系, 从图中可以看出, 转移轨道快速收敛到最优转移轨道上.

图5为最终获得的最优小推力转移轨道. 可以看出, 虽然三体问题具有强非线性、不稳定性和混沌性,

表 1 Halo轨道间小推力轨道转移相关参数

Table 1 Values of parameters related to low-thrust orbit transfer between Halo orbits

参数	取值 (DU)
A_{z1}	0.4
A_{z2}	0.6
$\mathbf{x}_0$	$[-0.0454, 0.3080, 0.3757, 0.2476, 0.9810, -0.4521]$
$\mathbf{x}_f$	$[-0.0117, -0.3814, 0.5902, -0.3123, 1.2199, 0.6202]$

图 3 $\lambda_1 \sim \lambda_6$ 的初值迭代曲线

Figure 3 Iteration result of initial values of $\lambda_1 \sim \lambda_6$.

表 2 不同转移时间下优化得到的最优推力幅值、转移精度和精确协态变量初值**Table 2** Values of optimal thrust, transfer accuracy and initial values of co-states for different TOF

转移时间TOF (DU)	推力幅值 U (DU)	转移精度 (DU)	精确协态变量初值 λ_0 (DU)
$0.6T$	2.00000	6.8351×10^{-4}	$[-0.41261, -0.04858, 0.85698, -0.14405, 0.06850, 0.25986]$
$1.6T$	1.67435	9.1194×10^{-5}	$[-0.42292, 0.76281, -0.43056, -0.16590, 0.11075, 0.11866]$
$2.6T$	0.73488	9.5675×10^{-5}	$[0.88729, -0.29029, 0.09699, 0.31770, 0.13193, 0.02642]$
$3.6T$	0.45257	2.8482×10^{-3}	$[0.55388, -0.15224, 0.66026, 0.09907, 0.14770, -0.44996]$

但在较短转移时间下, 小推力转移轨道依然很平滑规则. 究其原因, 虽然微分修正技术是在非线性动力学线性化的基础上获得的, 但当转移时间较短时, 线性化过程所忽略的高阶项的影响较小, 状态转移矩阵还能够较精确地刻画非线性系统的状态转移过程, 因此, 无论 $[-1, 1]$ 范围内的随机数生成的协态变量初值猜测

具体为何值, 只要TOF取最优, 基于微分修正技术的迭代过程总能快速收敛到最优解.

图6为最优推力方向角 α, β 的时间序列, 该曲线连续变化, 且较为光滑规则, 不存在直接法中常见的跳变和不规则情况, 一定程度上说明了间接法在小推力转移轨道优化问题中相比直接法在稳定性方面更具优势. 图7为对应的三轴推力加速度的时间序列, 可以看出, 各轴均满足最大推力加速度约束.

综上所述, 当最优转移时间TOF确定后, 任意给定 $[-1, 1]$ 范围的随机数作为协态变量初值猜测, 基于微分修正技术的新的TPBVP求解器总能使协态变量由任意猜测的初值快速收敛到精确初值, 同时也使转移轨道逐渐收敛到最优轨道, 说明本文提出的基于微分修正技术的小推力转移轨道优化方法可避免常规的协态变量初值猜测过程, 极大地降低了TPBVP的求解过程对初值猜测的敏感性.

图 4 轨道转移精度随微分修正迭代次数的变化关系**Figure 4** The history of accuracy of transfer with iteration of differential correction. **图 5** (网络版彩图)转移时间较短时的最优小推力转移轨道
Figure 5 (Color online) The optimal low-thrust transfer with short TOF.

5.2 转移时间较长

协态变量的初值猜测偏差随时间的传播逐渐累

图 6 (网络版彩图)最优推力方向角 α, β 时间序列**Figure 6** (Color online) The time history of the optimal thrust angles α, β .

图7 (网络版彩图)最优三轴推力加速度时间序列

Figure 7 (Color online) The time history of the optimal thrust accelerations in xyz axis.

积, 轨道转移时间越长, TPBVP中的非线性影响越大, 求解过程对协态变量初值越敏感, 优化难度越大. 因此, 当转移时间较长, 即 $TOF > T$ 时, 如果依然采用转移时间较短时的方法, 直接利用 $[-1, 1]$ 范围内的随机数生成的协态变量初值猜测, 迭代过程会出现大幅振荡现象, 微分修正过程很难收敛, 而这也是TPBVP求解中经常遇到的问题. 为解决此问题, 考虑到转移时间较短情况下的精确协态变量初值已经优化得到, 为充分利用此结果, 可以将其作为转移时间较长情况下的协态变量初值的猜测值, 然后采用推力幅值延拓技术^[11], 通过手动调试或遗传算法等方法优化推力加速度幅值, 最终获得较长转移时间下的最优推力加速度幅值和协态变量初值.

为体现转移时间的“逐圈”增加, 同时考虑到转移时间较短时的最优TOF为 $0.6T$, 故本节设定的四组转移时间从小到大依次为: $0.6T$, $1.6T$, $2.6T$, $3.6T$, 以此来对比分析不同转移时间下的最优小推力轨道转移情况. 具体的优化结果见表2, 对应的转移轨道、最优推力方向角 α , β 和三轴推力加速度的时间序列如图8所示.

根据图8中的转移轨道可以发现, 当转移时间越长时, 三体问题下Halo轨道之间的小推力转移轨道与二体问题下的小推力转移轨道差别也越大, 不再是典型的“螺旋形”轨迹. 究其原因, 一方面是在优化过程中没有对转移轨道的路径进行约束; 另一方面是三体问题下的平动点轨道所围绕的是 $L1$ 平动点这样的引力

平衡点, 而非一个自然天体, 导致引力场较弱, 容易受到外界环境和初始轨道状态的扰动, 加之强非线性使得转移轨道对初始状态非常敏感, 因此, 很难形成规则的“螺旋形”小推力转移轨道.

此外, 根据图8中的最优推力方向角的仿真结果, 依然表明不同转移时间下的最优推力方向角时间序列较为规则, 没有出现跳变情况. 进一步说明了间接法在小推力转移轨道优化问题中相比直接法在稳定性方面更具优势. 同时根据图8中的三轴推力加速度的时间序列, 可以看出其均满足相应的最大推力加速度约束.

为进一步说明本文间接法的优越性, 采用与直接法对比的方式, 所选直接法为近年来较为流行的Gauss伪谱法, 利用GPOPSII这一成熟的工具包, 对同样条件下的轨道转移进行仿真分析. 两种方法的仿真结果对比见表3.

从表3可以看出, 在相同转移条件下, 本文提出的间接法的求解效率相比直接法分别提高了3.8868, 5.0631, 17.8735和5.0806倍, 说明在求解效率方面, 间接法的优势明显. 同时, 在性能指标方面, 间接法也均略微优于直接法, 这主要得益于本文应对转移时间较长时所引入的推力幅值延拓技术. 因此, 本文提出的间接法相比直接法, 在求解效率和最优性方面均具有一定优势.

综上所述, 无论转移时间长短, 本文提出的基于微分修正技术的TPBVP求解方法能够有效解决地月系统 $L1$ 点附近Halo轨道间的小推力转移轨道优化设计问题, 且其在求解效率和最优性方面相比直接法均具有一定优势. 同时, 由于本文所提方法是在将小推力轨道转移问题提取为TPBVP这一本质问题的基础上进行的, 因此对于其他以TPBVP为本质的工程实际问题也具有一定的普适性.

6 结论

本文针对三体问题下共线平动点轨道附近的小推力轨道转移问题, 在深入研究平动点附近运动特性和TPBVP的基础上, 提出了基于微分修正技术的小推力转移轨道优化设计方法, 整理如下.

(1) 通过最优控制理论推导了推力幅值和方向角的最优控制律, 并将小推力轨道转移问题转化为TPBVP, 证明了协态变量的初值是决定转移轨道能否

图 8 (网络版彩图) 转移时间分别为 $1.6T$ ((a)~(c)), $2.6T$ ((d)~(f)) 和 $3.6T$ ((g)~(i)) 时的优化结果. (a), (d), (g) 转移轨道; (b), (e), (h) 推力方向角时间序列; (c), (f), (i) 三轴推力加速度时间序列

Figure 8 (Color online) The result of optimization when $TOF=1.6T$ ((a)~(c)), $2.6T$ ((d)~(f)) and $3.6T$ ((g)~(i)), respectively. (a), (d), (g) Transfer trajectory; (b), (e), (h) time history of thrust angles; (c), (f), (i) time history of thrust accelerations in xyz axis.

表 3 间接法和直接法的仿真结果对比

Table 3 The comparison between results of indirect method and direct method

转移时间 TOF (DU)	优化方法	性能指标 J (DU)	程序运行时间 (s)	效率提升倍数
$0.6T$	间接法	3.3145	6.3572	3.8868
	直接法	3.3145	24.7092	
$1.6T$	间接法	7.4404	10.0224	5.0631
	直接法	8.4719	50.7444	
$2.6T$	间接法	5.3066	10.8965	17.8735
	直接法	5.7137	194.7599	
$3.6T$	间接法	4.5250	38.8539	5.0806
	直接法	8.5340	197.3998	

收敛到目标状态的唯一决定因素;

(2) 将状态变量和协态变量整合形成一个增广系统, 基于微分修正技术设计了一种新的TPBVP求解器, 同时引入调节因子和推力幅值延拓技术, 可有效提高迭代算法的收敛性、鲁棒性和解决转移时间较长时轨道难以收敛的问题。

(3) 当转移时间较短时, 任意 $[-1, 1]$ 范围内的随机数作为协态变量的初值猜测, 求解器均可实现快速收

敛, 当转移时间较长时, 以较短转移时间下获得的精确协态变量初值作为新的猜测值, 同时结合推力幅值延拓技术, 最终获得了相应的最优转移轨道。这大大提高了间接法的鲁棒性和收敛性。

(4) 提出的基于微分修正技术的小推力转移轨道优化方法是在提取出的TPBVP这一本质问题的基础上获得的, 因此, 对于其他以TPBVP为基础的工程实际问题也具有一定的普适性。

参考文献

- Meng Y H, Zhang Y D, Chen Q F. Dynamics and Control of Spacecraft Near Libration Points (in Chinese). Beijing: Science Press, 2015. 49–50 [孟云鹤, 张跃东, 陈琪峰. 平动点航天器动力学与控制. 北京: 科学出版社, 2015. 49–50]
- Lei H L, Xu B. High-order solutions around the stable libration points in the low-thrust restricted three-body system (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2015, 45: 1207–1217 [雷汉伦, 徐波. 小推力限制性三体系统下稳定平动点附近的高阶解. 中国科学: 技术科学, 2015, 45: 1207–1217]
- Ren Y, Cui P Y, Luan E J. Low-thrust trajectory design method based on nominal orbit (in Chinese). *J Jilin Univ: Tech Ed*, 2006, 36: 998–1002 [任远, 崔平远, 栾恩杰. 基于标称轨道的小推力轨道设计方法. 吉林大学学报: 工学版, 2006, 36: 998–1002]
- Sun J W, Qiao D, Cui P Y. Study on the optimal trajectories of lunar soft landing with fixed-thrust using SQP method (in Chinese). *J Astronaut*, 2006, 27: 99–102 [孙军伟, 乔栋, 崔平远. 基于SQP方法的常推力月球软着陆轨道优化方法. 宇航学报, 2006, 27: 99–102]
- Zhu J F, Xu S J. Optimization of lunar soft landing trajectory based on adaptive simulated annealing genetic algorithm (in Chinese). *Acta Aer Astr Sin*, 2007, 28: 806–812 [朱建丰, 徐世杰. 基于自适应模拟退火遗传算法的月球软着陆轨道优化. 航空学报, 2007, 28: 806–812]
- Park B G, Tahk M J. Three-dimensional trajectory optimization of soft lunar landings from the parking orbit with considerations of the landing site. *Int J Control Autom Syst*, 2011, 9: 1164–1172
- E Z B, Guzzetti D. Multi-revolution low-thrust trajectory optimization using symplectic methods. *Sci China Tech Sci*, 2020, 63: 506–519
- Woollands R, Taheri E, Junkins J L. Efficient computation of optimal low thrust gravity perturbed orbit transfers. *J Astronaut Sci*, 2020, 67: 458–484
- Chupin M, Haberkorn T, Trélat E. Low-thrust Lyapunov to Lyapunov and Halo to Halo missions with L^2 -minimization. *ESAIM-Math Model Num*, 2017, 51: 965–996
- Cheng X, Wang P, Cui N G. Indirect optimization of earth escape trajectories adopting a variable specific impulse rocket (in Chinese). *Miss Space Veh*, 2011, 5: 24–28 [程兴, 王鹏, 崔乃刚. 基于间接法的变比冲发动机作用下地球逃逸轨道设计. 导弹与航天运载技术, 2011, 5: 24–28]
- Shen H X, Li H N. Indirect optimization of low-thrust multi-resolution orbit transfers for geostationary-orbit satellites (in Chinese). *J Astronaut*, 2017, 38: 1041–1047 [沈红新, 李恒年. 静止卫星小推力多圈转移轨道间接优化. 宇航学报, 2017, 38: 1041–1047]
- Taheri E, Li N I, Kolmanovsky I. Co-states initialization of minimum-time low-thrust trajectories using shape-based methods. In: *Advances in Computing and Communications*. Boston, 2016. 4053–4058
- Taheri E, Li N I, Kolmanovsky I. Co-state initialization for the minimum-time low-thrust trajectory optimization. *Adv Space Res*, 2017, 59: 2360–2373
- Restrepo R L, Russell R P. Shadow trajectory model for fast low-thrust indirect optimization. *J Spacecraft Rockets*, 2016, 54: 44–54
- Wall B. Indirect optimization of low-thrust trajectories using homotopy. In: *29th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*. Kaanapali: Amer Astronaut Soc, 2019
- Tang G, Jiang F. Capture of near-Earth objects with low-thrust propulsion and invariant manifolds. *Astrophys Space Sci*, 2016, 361: 10
- Chi Z, Li H, Jiang F, et al. Power-limited low-thrust trajectory optimization with operation point detection. *Astrophys Space Sci*, 2018, 363: 122
- Ranieri C L, Ocampo C A. Indirect optimization of spiral trajectories. *J Guidance Control Dyn*, 2006, 29: 1360–1366
- Lee D, Bang H. Efficient initial costates estimation for optimal spiral orbit transfer trajectories design. *J Guidance Control Dyn*, 2009, 32: 1943–1947

- 20 Nah R S, Vadali S R, Braden E. Fuel-optimal, low-thrust, three-dimensional earth-mars trajectories. *J Guidance Control Dyn*, 2001, 24: 1100–1107
- 21 Chen S, Li H, Baoyin H. Multi-rendezvous low-thrust trajectory optimization using costate transforming and homotopic approach. *Astrophys Space Sci*, 2018, 363: 128
- 22 Tang G, Jiang F, Li J. Fuel-optimal low-thrust trajectory optimization using indirect method and successive convex programming. *IEEE Trans Aerosp Electron Syst*, 2018, 54: 2053–2066
- 23 Jiang F, Tang G. Systematic low-thrust trajectory optimization for a multi-rendezvous mission using adjoint scaling. *Astrophys Space Sci*, 2016, 361: 117
- 24 Zhang R, Han C. Trajectory tracking guidance for low-thrust geosynchronous orbit insertion using piecewise constant control. In: AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference. Stevenson, 2017
- 25 Li J, Han C. Unscented Kalman filter for low-thrust orbit transfer optimization (in Chinese). *J Astronaut*, 2014, 35: 144–150 [李鉴, 韩潮. 小推力最优轨道转移问题的UKF估计算法. 宇航学报, 2014, 35: 144–150]
- 26 Pontani M. Optimal low-thrust hyperbolic rendezvous for Earth-Mars missions. *Acta Astronaut*, 2019, 162: 608–619
- 27 Pontani M, Conway B. Optimal low-thrust orbital maneuvers via indirect swarming method. *J Optim Theor Appl*, 2014, 162: 272–292
- 28 Ma H, Xu S. Optimization of bounded low-thrust rendezvous with terminal constraints by interval analysis. *Aerospace Sci Tech*, 2018, 79: 58–69
- 29 Zeng H, Zhang J. Modeling low-thrust transfers between periodic orbits about five libration points: Manifolds and hierarchical design. *Acta Astronaut*, 2018, 145: 408–423
- 30 Li H, Baoyin H, Topputo F. Neural networks in time-optimal low-thrust interplanetary transfers. *IEEE Access*, 2019, 7: 156413
- 31 Lo M, Ross S. The lunar L1 gateway: Portal to the stars and beyond. In: AIAA Space 2001 Conference and Exposition. Albuquerque, 2001. 28–30
- 32 Szebehely V, Singer S F. Theory of Orbits: The Restricted Problems of Three Bodies. New York, London: Academic Press, 1967. 16
- 33 Liu L, Hou X Y. Theory and Applications of Deep Space Exploration Orbits (in Chinese). Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2015. 106–107 [刘林, 侯锡云. 深空探测轨道理论与应用. 北京: 电子工业出版社, 2015. 106–107]
- 34 Hu S S, Wang Z Q, Hu W L. Optimal Control Theory and System (in Chinese). Beijing: Science Press, 2013. 73 [胡寿松, 王执铨, 胡维礼. 最优控制理论与系统. 北京: 科学出版社, 2013. 73]
- 35 Zhao Y S, Shi P, Zhang C. Dynamics of Deep Space Flight (in Chinese). Beijing: China Astronautic Publishing House, 2016. 152–154 [赵育善, 师鹏, 张晨. 深空飞行动力学. 北京: 中国宇航出版社, 2016. 152–154]

Differential correction method in low-thrust orbit transfers near the collinear libration points

ZHOU Jing^{1,2}, HU Jun^{1,2} & HAN MingLin^{1,2}

¹ *Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China;*

² *Science and Technology on Space Intelligent Control Laboratory, Beijing 100094, China*

Differential correction method in low-thrust orbit transfers near the collinear libration points. A novel indirect method is proposed to solve the problem of low-thrust transfers near the collinear libration points in a three-body problem. First, the optimal control laws of thrust amplitude and angles were deduced according to the optimal control theory. It was found that the initial value of the co-state variables is the only determining factor and accordingly the problem of orbit transfer was transformed into a two-point boundary value problem (TPBVP). The state variables and co-state variables were then combined into an augmented system, and a new TPBVP solver was designed using the differential correction method. A regulatory factor and the thrust continuation approach were introduced and adopted for improving the robustness and convergence and overcoming the divergency problem when the time of flight is relatively long. Finally, numerical simulations of transfers between Halo orbits around the L_1 libration point of the Earth-Moon three-body system were conducted. Simulation results show that this method avoids the routine process of guessing the initial values of co-state variables; therefore, transfers quickly converge when the initial values of co-state variables are taken randomly from $[-1, 1]$, proving the validity and generality of the proposed method for other engineering problems based on TPBVP.

three-body problem, collinear libration point orbits, low-thrust transfer, indirect method, two-point boundary value problem, differential correction method

doi: [10.1360/SST-2020-0140](https://doi.org/10.1360/SST-2020-0140)