中国科学: 数学 2021 年 第 51 卷 第 6 期: 1073～1094
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
论 文

含摩擦效应的三维直管中定常可压缩亚音速 Euler 流

献给陈恕行教授 80 华诞

袁海荣[1,2,3]*, 赵勤[4]

1. 华东师范大学数学科学学院, 上海 200241;
2. 华东师范大学偏微分方程研究中心, 上海 200241;
3. 上海市核心数学与实践重点实验室, 上海 200241;
4. 上海交通大学数学科学学院, 上海 200240
E-mail: hryuan@math.ecnu.edu.cn, zhao@sjtu.edu.cn

收稿日期: 2019-04-16; 接受日期: 2019-07-17; 网络出版日期: 2020-04-07; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11371141 和 11871218) 和上海市科学技术委员会 (批准号: 18dz2271000) 资助项目

摘要 本文研究由带摩擦效应的三维非等熵可压缩 Euler 方程组描述的管道内气体的定常流动. 这种流动在工程中被称为 Fanno 流. 本文在等方截面平直管道中分别构造非平凡的亚音流、超音流和跨音激波. 由于对亚音流, 三维定常可压缩 Euler 方程组是典型的拟线性双曲 - 椭圆复合型方程组, 尚无一般理论, 本文提出一个源于跨音激波的边值问题, 通过证明上述特殊的亚音流关于进出口边界条件的高维扰动的稳定性, 说明该边值问题提法的合理性. 本文的证明基于对 Euler 方程组中双曲部分和椭圆部分的主部的分离, 以及设计恰当的非线性迭代格式. 特别地, 由于摩擦效应, Euler 方程组中双曲部分和椭圆部分出现了较强的相互作用, 诱导出一类含积分非局部项的二阶线性椭圆型方程混合边值问题. 本文用 Fourier 分析方法和二阶椭圆型方程正则性理论等研究了该非局部问题的适定性.

关键词 定常 Euler 方程组 亚音流 Fanno 流 摩擦 非局部椭圆型方程 双曲 - 椭圆复合型方程组

MSC (2020) 主题分类 35F30, 35M32, 35Q31, 76G25, 76N10

1 引言

本文研究多方气体 (状态方程为 $p = A(s)\rho^\gamma$) 在具摩擦效应的三维等方截面平直管道中的定常流动问题, 这里 p、ρ 和 s 分别表示气体的压强、质量密度和熵; 常数 $\gamma > 1$ 是绝热指数, 而函数 $A(s) = k_0 \exp(s/c_\nu)$, 其中 k_0 和 c_ν 是两个已知的正常数.

对三维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^3$, 取标准的直角坐标系, 记 $D = \{(x^0, x^1, x^2) \in \mathbb{R}^3 : x^0 \in (0, L), (x^1, x^2) \in (0, \pi) \times (0, \pi)\}$ 是一个长度为 L (> 0) 的等方截面平直管道. 在实际问题中, 由于管壁难以避免的不光

英文引用格式: Yuan H R, Zhao Q. Subsonic flows passing a duct for three-dimensional steady compressible Euler systems with friction (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1073–1094, doi: 10.1360/N012019-00103

© 2020《中国科学》杂志社

滑性, 气体在管道内流动时将受到某种摩擦力的作用. 例如, 对气体在长管道中的运输、航空发动机进气道和喷管形状的设计等, 实验和初步的理论分析都表明, 摩擦对管道中的流动形态有着非常显著的影响 (参见文献 [1]). 所以, 在空气动力学中, 这种带摩擦效应的可压缩流被命名为 Fanno 流. 本文希望从偏微分方程理论角度, 用数学工具严格分析摩擦对管道流的效应.

那么怎样描述摩擦力呢? 记 $u=(u^0,u^1,u^2)^\top$ 为气体的流动速度. 通常, 气体在管道 D 中主要沿着 x^0 方向流动, 即 $u^0>0$, 且 u^1 和 u^2 相对于 u^0 来说是小量. 根据空气动力学实验的结果 (参见文献 [1]), 不失一般性, 我们可以假设单位质量气体所受到的摩擦力的方向为 x^0- 轴负方向, 大小等于 $\mu(u^0)^2$, 其中 μ 可能依赖于气体 Mach 数 $M=|u|/c$ (函数 $c=\sqrt{\gamma p/\rho}$ 是音速). 这里为简单起见, 假设 $\mu>0$ 是一个常数. 于是得到如下带阻尼项的定常可压缩 Euler 方程组 (参见文献 [2,3]):

$$\operatorname{div}(\rho u\otimes u)+\operatorname{grad}p-\rho\mathfrak{b}=0, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}(\rho u)=0, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}(\rho Bu)-\rho\mathfrak{b}\cdot u=0, \tag{1.3}$$

其中 "div" 和 "grad" 是标准的散度和梯度算子, Bernoulli 量 $B\triangleq\frac{1}{2}|u|^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}$, 而 $\mathfrak{b}=(-\mu(u^0)^2,0,0)^\top$. 上述三个方程分别表示动量守恒、质量守恒和能量守恒.

当 $|u|<c$ 时, 流动称为亚音流; 当 $|u|>c$ 时, 流动称为超音流. 本文在管道 D 内构造了仅依赖于 x^0 的非平凡的 (即不是常值的) 亚音流、超音流和跨音激波. 我们发现, 摩擦对亚音流和超音流将产生完全不同的影响, 并会出现壅塞现象, 即给定长度的喷管有一个允许定常气流存在的最大可能的质量通量.

为了从数学理论角度研究这些流场, 以及开展数值计算的需要, 就要提出恰当的适定的边值问题. 这里最基本的困难源于如下事实: 对亚音流, 三维定常可压缩 Euler 方程组是一个典型的拟线性双曲 - 椭圆复合型方程组 (参见文献 [4]). 我们提出了一个源于跨音激波的边值问题. 该问题在管道侧壁给定滑移条件 (无渗透条件), 在出口给定压强, 在进口给定流场切向速度、熵和 Bernoulli 量. 我们将通过证明前述特殊的亚音流关于上述进、出口边界条件的高维扰动的稳定性, 说明该边值问题提法的合理性. 该结果也是进一步考察摩擦对跨音激波的致稳效应的必要基础 (参见文献 [5]).

为避开目前尚无法解决的一般来流情形下管壁对流场低正则性的影响 (涉及是否有边界层分离等复杂问题), 暂时集中力量于对定常 Euler 方程组本身性质的研究, 如同文献 [4], 假设管道进口流体相对于管壁 $[0,L]\times\partial([0,\pi]^2)$ 具有一定对称性. 这样一来, 与文献 [4] 类似, 就可以通过对称延拓的方法, 要求流动状态在 (x_1,x_2) 方向上是 2π 周期的, 并且压强 p、密度 ρ、熵 s 和速度分量 u^0 关于平面 $x^1=k\pi$ 和 $x^2=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ 是偶函数, 而速度分量 u^1 和 u^2 分别关于平面 $x^1=k\pi$ 和 $x^2=k\pi$ 是奇函数. 因此, 下文中将直接考察在 x^1 和 x^2 方向上周期为 2π 的流体运动, 而完全忽略侧边界.

如前所述, 对于亚音流, 三维定常可压缩 Euler 方程组是拟线性双曲 - 椭圆复合型的, 这是一类极具难度的偏微分方程, 目前尚无一般数学理论, 甚至提出一个适定的边值问题往往都具有挑战性. 下面简要回顾近年来相关研究的进展.

就我们所知, 虽然对亚音速绕流问题已有很多研究, 但都是基于等熵无旋的位势流方程开展的 (参见文献 [6] 及其参考文献). 对亚音流定常可压缩 Euler 方程组, 陈恕行先生围绕跨音激波问题, 最早开展了系统、深入的研究. 在两个自变数的情形 (二维管道), 他在文献 [7] 中引入了特征分解的方法, 分离了 Euler 方程组中的椭圆部分和双曲部分. 在文献 [8] 中, 他又引入了 Lagrange 坐标方法, 大大简化了双曲部分的求解. 这两个方法奠定了后续研究二维定常可压缩 Euler 方程组的其他方法的

基础 (如文献 [9–13] 等), 为解决二维扩张喷管中跨音激波的稳定性等重要问题铺平了道路 (参见文献 [14,15]), 被广泛应用于研究超音射流 [16,17]、亚音接触间断、激波反射和激波透射等其他问题 (参见文献 [18–22]).

对于三维情形, 定常可压缩 Euler 方程组变得更加复杂, 也不能期望引入显式的 Lagrange 坐标. 这方面的第一个工作是文献 [4] (参见文献 [23,24]), 在其中陈恕行先生和本文第一作者用拟微分算子技术对 Euler 方程组作了特征分解, 由此可以把定常 Euler 方程组分解为一个关于压强的二阶椭圆型方程, 以及关于速度和熵的 4 个输运方程. 在此基础上, Chen 和 Yuan [25] 讨论了球对称跨音激波的唯一性; Liu 等 [26] 解决了球对称跨音激波在高维小扰动下的稳定性. 特别地, 文献 [26] 避免了拟微分算子的运算, 建立了较一般的在乘积 Riemann 流形上分解定常可压缩 Euler 方程组的框架性结论, 发现了 Ventsell 边界条件和新型点态非局部边值问题等新现象.

本文正是在上述研究工作的基础上完成的. 但不同于文献 [26] 中研究的几何效应, 摩擦将导致 Bernoulli 量 B 沿着流线不再是常数, 从而即使对纯亚音流, 也将导致含积分型非局部项的二阶椭圆型方程的边值问题. 这在对定常可压缩 Euler 方程组的研究中是首次出现. 本文给出处理这类非局部问题的基本方法.

总的来说, 目前对三维定常亚音流可压缩 Euler 方程组的研究工作还非常少. 除本文和上述所引文献外, 只有文献 [27–29]. 这些文献提出了不同的边值问题, 研究了上述等方截面三维直管中的均匀的亚音流的稳定性 (即背景解是常量, 而非本文研究的非常值函数).

Chen 等 [30] 利用拟微分算子理论, 讨论了一类线性双曲 - 椭圆复合型方程组的边值问题的提法及其估计. 这也是目前为止唯一一项关于较一般的高维双曲 - 椭圆复合型方程组的数学理论的研究工作.

在陈恕行先生指导和影响下, 本文作者十几年来持续对定常可压缩 Euler 方程组开展研究. 事实表明, 这是一个既有广泛的物理背景和应用需求, 又与数学其他分支有密切联系的有待系统发掘的巨大宝库, 其中不但有大量有意义的问题亟待解决, 而且还有许多新的有趣的现象尚需探索.

在本节的最后, 介绍一下本文的结构安排. 第 2 节用常微分方程工具分别构造管道内一类特殊的亚音流、超音流和跨音激波; 然后, 针对上述特殊亚音流的稳定性, 提出一个边值问题 (S), 并给出本文的主要结果, 即定理 2.1. 第 3 节基于文献 [26] 中的框架, 分解方程组 (1.1)–(1.3), 最后将问题 (S) 等价化约为问题 (S3), 其中包括关于熵、Bernoulli 量和切向速度的 4 个输运方程, 以及一个关于压强的二阶椭圆型方程, 它们之间通过低阶项耦合. 第 4 节研究一个含积分非局部项的二阶线性椭圆型方程的混合边值问题. 最后, 第 5 节设计一个迭代格式, 由此建立一个非线性映射, 最终用推广了的 Banach 压缩映射原理 (Schauder 不动点定理) 完成了定理 2.1 的证明.

2 特殊解及主要结论

如前所述, 下文将所考虑的三维等方截面平直管道看作 $\Omega = \{(x^0, x^1, x^2) : x^0 \in (0, L), x' = (x^1, x^2) \in \mathbb{T}^2\}$, 其中 $\mathbb{T}^2 = \{(x^1, x^2) : x^1, x^2 \in [0, 2\pi)\}$ 是二维平坦环面. 由于侧边界通过前述对称延拓已被忽略, 故管道 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 仅由 $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ 给出, 其中 $\Sigma_0 = \{0\} \times \mathbb{T}^2$ 和 $\Sigma_1 = \{L\} \times \mathbb{T}^2$ 分别是进口和出口. 为方便起见, 我们称速度场 $u = (u^0, u^1, u^2)^\top$ 中 u^0 为法向速度, $u' = (u^1, u^2)^\top$ 为切向速度.

2.1 特殊解

本节首先考察方程组 (1.1)–(1.3) 的一类特殊解. 假设在区域 Ω 内, 气体的流动状态仅依赖于 x^0,

法向速度 u^0 大于 0, 而切向速度 u' 恒为 0. 于是, 方程组 (1.1)–(1.3) 简化为下述常微分方程组:

$$\frac{d}{dx^0}(\rho u) = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dx^0}(\rho u^2 + p) = -\mu\rho u^2, \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dx^0}\left(\rho\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho}\right)u\right) = -\mu\rho u^3. \tag{2.3}$$

当气流的 Mach 数 $M \neq 1$ 时, 由上式容易解得

$$\frac{du}{dx^0} = \frac{\mu u M^2}{1-M^2}, \quad \frac{d\rho}{dx^0} = \frac{\mu\rho M^2}{M^2-1}, \quad \frac{dp}{dx^0} = \frac{\mu\gamma p M^2}{M^2-1}. \tag{2.4}$$

这里已经将法向速度 $u^0(x^0)$ 简写为 $u = u(x^0)$. 由定义可知, Bernoulli 量 $B = \frac{1}{2}u^2 + \frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho}$, 压强 $p = A(s)\rho^\gamma$, 于是,

$$\frac{dB}{dx^0} = -\frac{2\mu(\gamma-1)M^2}{(\gamma-1)M^2+2}B, \quad \frac{ds}{dx^0} = 0, \quad \frac{d\theta}{dx^0} = (\gamma-1)\frac{\mu\theta M^2}{M^2-1}, \tag{2.5}$$

其中 $\theta = p/(\rho R)$ 表示气体的温度, R 是气体常数. 注意到 Mach 数 M 满足下述解耦的方程:

$$\frac{dM}{dx^0} = \frac{\mu(\gamma+1)M^3}{2(1-M^2)}. \tag{2.6}$$

2.1.1 亚音解

假设管道中气流是亚音速的, 即当 $x^0 \in [0, L]$ 时, $0 < M < 1$. 容易看出,

$$\frac{du}{dx^0} > 0, \quad \frac{d\rho}{dx^0} < 0, \quad \frac{dp}{dx^0} < 0, \quad \frac{dM}{dx^0} > 0, \quad \frac{d\theta}{dx^0} < 0,$$

也就是说, 沿着流动的方向, 亚音速 Fanno 流的密度、压强和温度减小, 而速度和 Mach 数增加. 如果气体运动状态是连续的且 $M(0) < 1$, 则由常微分方程组 Cauchy 问题的解的唯一性可知, 在管道中, 气流总是处于亚音状态.

记在管道的入口处 $\{x^0 = 0\}$ 和出口处 $\{x^0 = L\}$, 气流的 Mach 数分别为 M_0 和 M_1 且 $0 < M_0 < M_1 < 1$. 对 (2.6), 关于 x^0 从 0 到 l 积分, 就得到

$$\int_{M_0}^{M_1} \frac{1-M^2}{M^3}dM = \int_0^l \frac{\mu(\gamma+1)}{2}dx^0,$$

从而, 管道的长度是

$$l = \frac{\frac{1}{M_0^2} - \frac{1}{M_1^2} + \ln M_0^2 - \ln M_1^2}{\mu(\gamma+1)}. \tag{2.7}$$

因此, 当处于亚音状态的气体从 Mach 数 $M_0 < 1$ 加速到音速 ($M_1 = 1$) 时, 容许的管道的最大长度是

$$L_{M_0} = \frac{\frac{1}{M_0^2} + \ln M_0^2 - 1}{\mu(\gamma+1)} > 0. \tag{2.8}$$

若管道的长度大于上述最大长度 L_{M_0}, 壅塞现象将会发生.

由 (2.7), 我们也可以推导出 $M(x^0) \in (0,1)$, 并且

$$\frac{1}{M(x^0)^2} + \ln M(x^0)^2 = \frac{1}{M_0^2} + \ln M_0^2 - \mu(\gamma+1)x^0, \tag{2.9}$$

其中 $x^0 \in (0, L_{M_0})$. 于是, 在管道的入口处或出口处给定初始值, 我们能够求解 $p(x^0)$、$\rho(x^0)$、$u(x^0)$、$B(x^0)$、$s(x^0)$ 和 $\theta(x^0)$.

这样, 在管道中, 我们构造了方程组 (1.1)–(1.3) 的一类特殊的亚音速 Fanno 解, 且不难看出它们解析地依赖于参数 $\{\gamma > 1, \mu > 0, M_0 \in (0,1), L \in (0, L_{M_0}), p(L) > 0, s(0) > 0\}$.

2.1.2 超音解

假设管道中气流是超音速的, 即当 $x^0 \in [0, L]$ 时, $M > 1$, 则

$$\frac{du}{dx^0} < 0, \quad \frac{d\rho}{dx^0} > 0, \quad \frac{dp}{dx^0} > 0, \quad \frac{dM}{dx^0} < 0, \quad \frac{d\theta}{dx^0} > 0,$$

也就是说, 与亚音流相反, 沿着流动的方向, 超音速 Fanno 流的密度、压强和温度增加, 而速度和 Mach 数减小. 此外, 如果气流状态是连续的, 且 $M(0) > 1$, 则允许气体总是处于超音速状态的管道的最大长度仍由 (2.8) 给出.

这样, 在管道中, 我们构造了一类特殊的超音速 Fanno 解, 它们解析地依赖于参数 $\{\gamma > 1, \mu > 0, M_0 \in (1, \infty), L \in (0, L_{M_0}), p(0) > 0, s(0) > 0\}$.

2.1.3 跨音激波解

有一种工程中重要的情形, 即在管道的入口处气流是超音速的, Mach 数 $M_0 > 1$, 而在出口气流是亚音速的. 这时, 管道内可能会出现一个正激波, 其上游气流是超音的, 而下游气流是亚音的. 记 U_- 和 U_+ 分别为该激波面前后的两个状态, 则如下 Rankine-Hugoniot 跳跃条件成立:

$$\begin{aligned}
&\rho_- u_- = \rho_+ u_+, \\
&\rho_- u_-^2 + p_- = \rho_+ u_+^2 + p_+, \\
&\left(\frac{1}{2}u_-^2 + \frac{\gamma p_-}{(\gamma-1)\rho_-}\right)\rho_- u_- = \left(\frac{1}{2}u_+^2 + \frac{\gamma p_+}{(\gamma-1)\rho_+}\right)\rho_+ u_+.
\end{aligned}$$

由此可以解出

$$M_+^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_-^2}{\gamma M_-^2 - \frac{\gamma-1}{2}}, \tag{2.10}$$

其中 M_- 和 M_+ 分别为激波前后的 Mach 数 (熵条件要求 $M_+ < M_-$, 所以只能是正激波前气流为超音速 ($M_- > 1$), 正激波后气流为亚音速 ($M_+ < 1$). 这种正激波也叫作跨音激波).

记 $L_1 < L_{M_0}$ 为正激波与管道的入口之间的距离. 利用 (2.7), 由

$$L_1 = \frac{\frac{1}{M_0^2} - \frac{1}{M_-^2} + \ln M_0^2 - \ln M_-^2}{\mu(\gamma+1)},$$

可知 M_- 的值. 然后, 根据 (2.10), 我们得到 M_+ 的值. 于是, 跨音激波与出口之间的最大距离为

$$L_2 = L_{M_+} = \frac{\frac{1}{M_+^2} + \ln M_+^2 - 1}{\mu(\gamma+1)}.$$

因此, 当 $M_0 > 1$, 并且 $L < L_1 + L_2$ 时, 我们在管道中构造了一类特殊的跨音激波解, 且它们解析地依赖于参数 $\{\gamma > 1, \mu > 0, M_0 \in (1, \infty), L_1 \in (0, L_{M_0}), L \in (0, L_1 + L_2), p(L) > 0, s(0) > 0\}$.

2.2 主要结论

为了后续工作研究跨音激波的稳定性 (参见文献 [5]), 也基于物理上的考虑 (参见文献 [2]), 本文提出方程组 (1.1)–(1.3) 的如下边值问题: 在管道的入口 Σ_0, 给定 Bernoulli 量、熵和切向速度分别为

$$B = B_0(x'), \quad s = s_0(x'), \quad u' = u_0'(x'); \tag{2.11}$$

在管道的出口处 Σ_1, 给定压强 (工程上称作背压)

$$p = p_1(x'), \tag{2.12}$$

其中 B_0、s_0 和 p_1 都是 $\mathbb{T}^2$ 上的已知函数, 而 $u_0'(x')$ 是 $\mathbb{T}^2$ 上的已知的向量场.

本文的主要目标是研究如下问题 (S): 在区域 Ω 内, 求方程组 (1.1)–(1.3) 的经典解, 使之满足边界条件 (2.11) 和 (2.12). 选取在第 2.1.1 小节构造的一个亚音速 Fanno 流 $U_b = (B_b(x^0), s_b(x^0), u_b' \equiv 0, p_b(x^0))$, 称之为背景解. 本文的主要结论如下:

定理 2.1 假设背景解 U_b 满足 S- 条件, 常数 $\alpha \in (0,1)$, 则存在仅依赖于背景解 U_b 和 α 的正的常数 ε_0 和 C, 使得如果

$$\begin{aligned}&\|B_0(x') - B_b(0)\|_{C^{3,\alpha}(\mathbb{T}^2)} + \|s_0(x') - s_b(0)\|_{C^{3,\alpha}(\mathbb{T}^2)} + \|u_0'(x')\|_{C^{3,\alpha}(\mathbb{T}^2;\mathbb{R}^2)}\\ &\quad + \|p_1(x') - p_b(L)\|_{C^{3,\alpha}(\mathbb{T}^2)}\\ &\qquad \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0,\end{aligned} \tag{2.13}$$

则问题 (S) 存在唯一的满足如下估计式的解 ($p \in C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})$, $s, B, u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$):

$$\|p - p_b\|_{C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|s - s_b\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|B - B_b\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|u'\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega};\mathbb{R}^2)} \leqslant C\varepsilon. \tag{2.14}$$

注 2.1 定理中的 S- 条件将在第 4 节定义 4.1 中给出. 那里证明了, 除去至多可数个参数 μ, 剩下的正数 μ 确定的背景解 U_b 都满足 S- 条件.

3 问题 (S) 的等价化约

对于在区域 Ω 内的向量场 u 和函数 f, 记 $D_u f = u \cdot \mathrm{grad} f$. 我们约定, 除非特别说明, 本文中乘积项里出现的重复的罗马字母指标从 0 到 2 求和, 重复的希腊字母指标从 1 到 2 求和.

下述是关于分解方程组 (1.1)–(1.3) 的一个重要结论 (参见文献 [26, 第 703 页]).

命题 3.1 假设在 $\overline{\Omega}$ 内, $p \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $\rho, u \in C^1(\overline{\Omega})$, 且 $\rho > 0, u^0 \neq 0$, 那么, 在 Ω 内, p、ρ 和 u 满足定常可压缩 Euler 方程组 (1.1)–(1.3) 当且仅当它们在 Ω 内满足下述方程:

$$D_u B - \mathfrak{b} \cdot u = 0, \tag{3.1}$$

$$D_u A(s) = 0, \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}&D_u\left(\frac{D_u p}{\gamma p}\right) - \mathrm{div}\left(\frac{\mathrm{grad}\, p}{\rho}\right) - \partial_j u^k \partial_k u^j + \mathrm{div}\, \mathfrak{b} + L^0\left(\frac{D_u p}{\gamma p} + \mathrm{div}\, u\right)\\ &\quad + L^1(D_u B - \mathfrak{b} \cdot u) + L^2(D_u A(s)) + L^3\left(D_u u + \frac{\mathrm{grad}\, p}{\rho} - \mathfrak{b}\right)\\ &\qquad = 0,\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$D_u u^\beta + \frac{\partial_\beta p}{\rho} = 0, \quad \beta = 1, 2, \tag{3.4}$$

以及在 Σ_0 上满足边界条件

$$\frac{D_u p}{\gamma p} + \operatorname{div} u + L_1(D_u B - \mathfrak{b} \cdot u) + L_2(D_u A(s)) + L_3\left(D_u u + \frac{\operatorname{grad} p}{\rho} - \mathfrak{b}\right) = 0, \tag{3.5}$$

其中 $L^0(\cdot)$ 为线性函数, 并且当 $k = 1, 2, 3$ 时, $L^k(\cdot)$ 和 $L_k(\cdot)$ 是光滑函数, 且 $L^k(0) = 0$, $L_k(0) = 0$.

3.1 问题 (S1)

下面将利用命题 3.1, 将问题 (S) 化约为等价的问题 (S1). 由于我们的背景解在法向 (x^0 方向) 不是常量, 我们需要计算方程 (3.3) 和边界条件 (3.5) 的具体表达式, 通过确定辅助函数 L^k 和 L_k, 利用方程将法向的非小量转化为切向的小量.

3.1.1 压强的方程

我们推导方程 (3.3) 的具体表达式. 由直接计算可知,

$$\begin{aligned}
&D_u\left(\frac{D_u p}{\gamma p}\right) - \operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{grad} p}{\rho}\right) - \partial_j u^k \partial_k u^j + \operatorname{div} \mathfrak{b} \\
&= \frac{1}{\gamma p}[((u^0)^2 - c^2)\partial_0^2 p - c^2(\partial_1^2 p + \partial_2^2 p)] + \frac{1}{\gamma p}\left[u^0 \partial_0 u^0 \partial_0 p - \frac{(u^0)^2}{p}(\partial_0 p)^2 + \frac{\gamma p}{\rho^2}\partial_0 \rho \partial_0 p\right] \\
&\quad - (\partial_0 u^0)^2 - 2\mu u^0 \partial_0 u^0 + F_1(U),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中

$$F_1(U) = \sum_{(k,j)\neq(0,0)} \left(\frac{u^k u^j}{\gamma p}\partial_{jk} p + \frac{u^k}{\gamma p}\partial_k u^j \partial_j p - \frac{1}{\gamma p^2} u^k u^j \partial_k p \partial_j p - \partial_j u^k \partial_k u^j + \frac{1}{\rho^2}\delta_{kj}\partial_k \rho \partial_j p\right), \tag{3.7}$$

这里 δ_{kj} 是标准的 Kronecker 符号. 利用方程组 (1.1)–(1.3), 替换 (3.6) 中的 $u^0\partial_0 u^0$、$(\partial_0 u^0)^2$ 和 $(u^0)^2$ 这些项 (从而确定了辅助函数), 我们得到等式

$$\begin{aligned}
&D_u\left(\frac{D_u p}{\gamma p}\right) - \operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{grad} p}{\rho}\right) - \partial_j u^k \partial_k u^j + \operatorname{div} \mathfrak{b} \\
&= \frac{1}{\gamma p}\left[\left(2B - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}c^2\right)\partial_0^2 p - c^2(\partial_1^2 p + \partial_2^2 p)\right] - \frac{1}{\gamma p} 2\mu\left(B - \frac{c^2}{\gamma-1}\right)\partial_0 p \\
&\quad - \frac{2}{\gamma p^2}\left(B - \frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{c^4}{4\gamma}\frac{1}{B - \frac{c^2}{\gamma-1}}\right)(\partial_0 p)^2 + 2\mu^2\left(B - \frac{c^2}{\gamma-1}\right) \\
&\quad + F_1 + F_2,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中

$$\begin{aligned}
F_2 = &-((u^1)^2 + (u^2)^2)\left[\frac{1}{\gamma p}\partial_0^2 p + \frac{(\partial_0 p)^2}{\gamma p^2}\left(-1 + \frac{c^4}{\gamma}\frac{1}{2B - \frac{2c^2}{\gamma-1}}\frac{1}{2B - ((u^1)^2 + (u^2)^2) - \frac{2c^2}{\gamma-1}}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{\gamma p}\left[(\mu((u^1)^2 + (u^2)^2) - u^\beta \partial_\beta u^0)\partial_0 p + \rho^{\gamma-1}\partial_0 p \frac{u^\beta}{u^0}\partial_\beta A(s)\right]
\end{aligned}$$

$$-\frac{u^\beta\partial_\beta u^0}{(u^0)^2}\left(u^\beta\partial_\beta u^0+2\frac{\partial_0 p}{\rho}\right)-\mu^2((u^1)^2+(u^2)^2). \tag{3.9}$$

注意 F_1 和 F_2 中至多包含 u、ρ 和 s 的一阶导数.

将方程 (3.8) 两边乘以 γp 可知, 方程 (3.3) 等价于下述关于压强的二阶方程:

$$\begin{aligned}N(U)\triangleq&\left[\left(2B-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}c^2\right)\partial_0^2 p-c^2(\partial_1^2 p+\partial_2^2 p)\right]-2\mu\left(B-\frac{c^2}{\gamma-1}\right)\partial_0 p\\&-\frac{2}{p}\left(B-\frac{c^2}{\gamma-1}+\frac{c^4}{4\gamma}\frac{1}{B-\frac{c^2}{\gamma-1}}\right)(\partial_0 p)^2+2\mu^2\gamma p\left(B-\frac{c^2}{\gamma-1}\right)\\=&F_3(U)\triangleq-\gamma p(F_1+F_2).\end{aligned} \tag{3.10}$$

3.1.2 边界条件

令

$$L_3\left(D_u u+\frac{\operatorname{grad}p}{\rho}-\mathfrak{b}\right)=-\frac{1}{u^0}\left(D_u u^0+\frac{\partial_0 p}{\rho}+\mu(u^0)^2\right),$$

则有

$$\begin{aligned}&\rho u^0\left(\frac{D_u p}{\gamma p}+\operatorname{div}u+L_3\left(D_u u+\frac{\operatorname{grad}p}{\rho}-\mathfrak{b}\right)\right)\\&=\left(\frac{(u^0)^2}{c^2}-1\right)\partial_0 p-\mu\rho(u^0)^2+\rho u^0\partial_\beta u^\beta\\&\quad+u^0u^\beta\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{(u^0)^2}\right)\partial_\beta p+\frac{1}{\gamma-1}\frac{u^\beta}{u^0}\rho^\gamma\partial_\beta A(s)\\&\quad+\frac{\rho}{u^0}u^\sigma u^\beta\partial_\beta u^\sigma-\frac{\rho u^\beta}{u^0}\partial_\beta B.\end{aligned} \tag{3.11}$$

实际上, 这是在 Σ_0 上关于压强的 Robin 边界条件:

$$\partial_0 p-\frac{\mu\gamma(u^0)^2}{(u^0)^2-c^2}p=G_1(U)+G_2(U), \tag{3.12}$$

其中

$$G_1\triangleq-\frac{1}{\frac{(u^0)^2}{c^2}-1}\rho u^0\partial_\beta u^\beta, \tag{3.13}$$

$$G_2\triangleq-\frac{1}{\frac{(u^0)^2}{c^2}-1}\left[u^0u^\beta\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{(u^0)^2}\right)\partial_\beta p+\frac{1}{\gamma-1}\frac{u^\beta}{u^0}\rho^\gamma\partial_\beta A(s)+\frac{\rho}{u^0}u^\sigma u^\beta\partial_\beta u^\sigma-\frac{\rho u^\beta}{u^0}\partial_\beta B\right]. \tag{3.14}$$

通过以上的计算, 由命题 3.1 可知, 问题 (S) 等价于问题 (S1): 在区域 Ω 内, 求解方程 (3.1)、(3.2)、(3.10) 和 (3.4) 的经典解, 使其满足边界条件 (2.11)、(2.12) 和 (3.12).

3.2 问题 (S2)

上述问题 (S1) 是一个主部具非线性的二阶椭圆 - 一阶双曲耦合方程组. 由于我们本质上在研究一个关于背景解的小扰动问题, 本节 "线性化" 方程组 (3.1)、(3.10) 和 (3.12), 将其等价地写作 $\mathcal{L}(U-U_b)=\mathcal{N}(U-U_b)$ 的形式, 其中 U 表示 B、s、u' 和 p 等, 而 $\mathcal{L}$ 是一个线性算子, $\mathcal{N}(U)$ 是下述定义的高次项.

定义 3.1 记 $\hat{U}=U-U_b$. 称某表达式是一个高次项, 如果它包含 $\hat{U}|_{\partial\Omega}$ 及其一阶切向导数, 或者 $\hat{U}$ 及其导数 $D\hat{U}$ 和 $D^2\hat{U}$ 的乘积, 其中 $D^k u$ $(k=1,2)$ 为 u 的 k 阶导数.

3.2.1 Bernoulli 方程

由于背景解 B_b 满足方程 $\frac{d}{dx^0}B_b=-\mu u_b^2$, 不难得到

$$\begin{aligned}D_uB-\mathfrak{b}\cdot u&=D_u\hat{B}+\mu u^0((u^0)^2-(u_b)^2)\\&=D_u\hat{B}+2\mu u^0\left(\hat{B}-\frac{1}{\gamma-1}(c^2-c_b^2)\right)-\mu u^0((u^1)^2+(u^2)^2).\end{aligned}\tag{3.15}$$

利用表达式

$$c^2-c_b^2=\frac{\gamma-1}{\rho_b}\hat{p}+\rho_b^{\gamma-1}\widehat{A(s)}+O(1)(|\hat{p}|^2+|\widehat{A(s)}|^2),\tag{3.16}$$

其中 $O(1)$ 表示仅依赖于背景解 U_b 和 $|U-U_b|$ 的某个上界的有界量, 经简单的计算可知, (3.1) 等价于

$$D_u'\hat{B}+2\mu\hat{B}\triangleq\partial_0\hat{B}+\frac{u^1}{u^0}\partial_1\hat{B}+\frac{u^2}{u^0}\partial_2\hat{B}+2\mu\hat{B}=\frac{2\mu}{\gamma-1}\rho_b^{\gamma-1}\widehat{A(s)}+\frac{2\mu}{\rho_b}\hat{p}+H,\tag{3.17}$$

而

$$H=\mu((u^1)^2+(u^2)^2)+O(1)\frac{2\mu}{\gamma-1}(|\hat{p}|^2+|\widehat{A(s)}|^2).\tag{3.18}$$

3.2.2 压强方程

利用 $N(U_b)=0$, 我们有一个线性算子 $\mathcal{L}$, 使得 $\mathcal{L}(\hat{U})-F_4(U)=N(U)-N(U_b)=F_3(U)$, 其中 $F_4(U)$ 是一个高次项. 于是, 方程 (3.10) 等价于 $\mathcal{L}(\hat{U})=F_3(U)+F_4(U)$. 实际上, 记 $t=u_b^2/c_b^2=M_b^2\in(0,1)$, 经直接计算, 方程 (3.10) 能够写成下述形式:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\hat{p})&\triangleq(t-1)\partial_0^2\hat{p}-\partial_1^2\hat{p}-\partial_2^2\hat{p}+\mu d_1(t)\partial_0\hat{p}+\mu^2d_2(t)\hat{p}+\mu^2\rho_bd_3(t)\hat{B}+\mu^2\rho_b^\gamma d_4(t)\widehat{A(s)}\\&=F_5\triangleq\frac{1}{c_b^2}(F_3+F_4).\end{aligned}\tag{3.19}$$

容易看出, 方程 (3.19) 是一个关于扰动压强的椭圆型方程. 另外, (3.19) 中的系数如下:

$$d_1(t)\triangleq-\frac{1}{t-1}((1+2\gamma)t^2+t-2),\tag{3.20}$$

$$d_2(t)\triangleq\frac{1}{(t-1)^3}(\gamma(1+\gamma)t^4-2\gamma(1+\gamma)t^3-(\gamma-3)t^2-2(4+\gamma)t+8),\tag{3.21}$$

$$d_3(t)\triangleq\frac{1}{(t-1)^3}(\gamma t^2+3t-4),\tag{3.22}$$

$$d_4(t)\triangleq-\frac{1}{\gamma-1}\frac{1}{(t-1)^3}(\gamma(\gamma-1)t^3+(5\gamma-3)t^2-2(\gamma-4)t-8),\tag{3.23}$$

而

$$\begin{aligned}-F_4=&\left(2\hat{B}-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}(c^2-c_b^2)\right)\partial_0^2\hat{p}-(c^2-c_b^2)\partial_\beta^2\hat{p}+2\mu^2\gamma\hat{p}\left(\hat{B}-\frac{1}{\gamma-1}(c^2-c_b^2)\right)\\&-2\mu\partial_0\hat{p}\left(\hat{B}-\frac{1}{\gamma-1}(c^2-c_b^2)\right)-\partial_0(p+p_b)\partial_0\hat{p}\left[\frac{|u|^2}{p}-\frac{u_b^2}{p_b}\right]-\frac{u_b^2}{p_b}(\partial_0\hat{p})^2\\&+(\partial_0p_b)^2\frac{\hat{p}}{p_b}\left[\frac{|u|^2}{p}-\frac{u_b^2}{p_b}\right]-\frac{\partial_0(p+p_b)\partial_0\hat{p}}{\gamma}\left(\frac{c^4}{p|u|^2}-\frac{c_b^4}{p_bu_b^2}\right)-\frac{c_b^4}{\gamma p_bu_b^2}(\partial_0\hat{p})^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{(\partial_0 p_b)^2}{\gamma}\left(\frac{1}{|u|^2}-\frac{1}{u_b^2}\right)\left[\left(\frac{c^4}{p}-\frac{c_b^4}{p_b}\right)+\frac{2c_b^4}{p_b u_b^2}\left(\frac{c^2-c_b^2}{\gamma-1}-\hat{B}\right)\right]\\
&-\frac{(\partial_0 p_b)^2}{\gamma u_b^2}\left[\left(\frac{c^2+c_b^2}{p}-\frac{2c_b^2}{p_b}\right)(c^2-c_b^2)-\frac{c_b^4}{p_b}\hat{p}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_b}\right)\right]\\
&-\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\partial_0^2 p_b+\frac{2\mu^2\gamma}{\gamma-1}p_b-\frac{2\mu}{\gamma-1}\partial_0 p_b-\frac{2}{\gamma-1}\frac{(\partial_0 p_b)^2}{p_b}\right.\\
&\left.+\frac{2c_b^2}{\gamma p_b u_b^2}(\partial_0 p_b)^2\left(1+\frac{1}{\gamma-1}\frac{c_b^2}{u_b^2}\right)\right]\times[O(1)(|\hat{p}|^2+|\widehat{A(s)}|^2)].
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

3.2.3 边界条件

由背景解 p_b 满足方程 (2.4) 可知, 边界条件 (3.12) 等价于

$$
\partial_0(p-p_b)-\mu\gamma\left(\frac{p(u^0)^2}{(u^0)^2-c^2}-\frac{p_b(u_b)^2}{(u_b)^2-c_b^2}\right)=:G_1+G_2. \tag{3.25}
$$

利用 (3.16), 可进一步将 (3.25) 写作

$$
\partial_0\hat{p}+\gamma_0\hat{p}=G\triangleq G_1+G_2+G_3, \tag{3.26}
$$

其中 γ_0 是一个当 $\mu>0$ 时由背景解在 $x^0=0$ 处决定的负常数:

$$
\gamma_0\triangleq-\mu\frac{\gamma M_b(0)^4-M_b(0)^2+2}{(M_b(0)^2-1)^2}<0, \tag{3.27}
$$

并且

$$
\begin{aligned}
G_3=\mu\gamma\Bigg\{&\left(\frac{(u^0)^2}{(u^0)^2-c^2}-\frac{u_b^2}{u_b^2-c_b^2}\right)\hat{p}+p_b\frac{u_b^2(c^2-c_b^2)-c_b^2((u^0)^2-u_b^2)}{u_b^2-c_b^2}\left[\frac{1}{(u^0)^2-c^2}-\frac{1}{u_b^2-c_b^2}\right]\\
&-\frac{p_b c_b^2}{(u_b^2-c_b^2)^2}[2\underline{(B-B_b)-(u^1)^2-(u^2)^2}]+\frac{2p_b B_b}{(u_b^2-c_b^2)^2}[O(1)(|\hat{p}|^2+|\widehat{A(s)}|^2)\\
&+\rho_b^{\gamma-1}\underline{(A(s)-A(s_b))}]\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

注意 G_2 和 G_3 是高次项 (带下划线的项可由给定的边值条件确定, 于是满足定义 3.1), 而 G_1 依赖于切向速度 u' 在 Σ_0 上的边界值及其一阶导数.

因此, 我们只需求解<u>问题 (S2)</u>: 寻求函数 $U=(\hat{B},\widehat{A(s)},\hat{p},u')$, 使其满足下述问题:

$$
\begin{cases}
D_u'\hat{B}+2\mu\hat{B}=\dfrac{2\mu}{\gamma-1}\rho_b^{\gamma-1}\widehat{A(s)}+\dfrac{2\mu}{\rho_b}\hat{p}+H, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\
\hat{B}=B_0(x')-B_b(0), & \text{在 } \Sigma_0 \text{ 上},
\end{cases}
\tag{3.29}
$$

$$
\begin{cases}
D_u\widehat{A(s)}=0, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\
\widehat{A(s)}=A(s_0(x'))-A(s_b(0)), & \text{在 } \Sigma_0 \text{ 上},
\end{cases}
\tag{3.30}
$$

$$
\begin{cases}
\mathcal{L}(\hat{p})=F_5, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\
\partial_0\hat{p}+\gamma_0\hat{p}=G, & \text{在 } \Sigma_0 \text{ 上},\\
\hat{p}=p_1(x')-p_b(L), & \text{在 } \Sigma_1 \text{ 上},
\end{cases}
\tag{3.31}
$$

$$\begin{cases} D_u u^\beta + \dfrac{\partial_\beta p}{\rho} = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad \beta = 1, 2, \\ u^\beta = u_0^\beta(x'), & \text{在 } \Sigma_0 \text{ 上}. \end{cases} \tag{3.32}$$

3.3 问题 (S3)

在问题 (S2) 中, (3.31) 是一个二阶椭圆型方程的混合边值问题, (3.29)、(3.30) 和 (3.32) 是输运方程的 Cauchy 问题; 在适当的迭代格式下, 可以认为它们的主部是线性的, 非线性项都放到右端高次项中去了. 特别注意, 它们含有耦合的低阶项. 为了尽可能地解耦, 我们按下列方法进一步等价化约问题 (S2).

首先, 考察关于扰动 Bernoulli 量 $\hat{B}$ 的 Cauchy 问题 (3.29):

$$\begin{cases} D'_u \hat{B} + 2\mu \hat{B} = \dfrac{2\mu}{\gamma - 1} \rho_b^{\gamma-1} \widehat{A(s)} + \dfrac{2\mu}{\rho_b} \hat{p} + H, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ \hat{B} = B_0(x') - B_b(0), & \text{在 } \Sigma_0 \text{ 上}. \end{cases} \tag{3.33}$$

对于 Ω 内的向量场 u, 我们分析定义在 $x' = (x^1, x^2) \in \mathbb{T}^2$ 和 $x^0 \in [0, L]$ 上的非自治向量场 $\frac{u'}{u^0}(x^0, x')$. 对 $\bar{x} \in \mathbb{T}^2$, 记经过点 $(0, \bar{x})$ 的积分曲线为 $x' = \varphi(x^0, \bar{x})$. 由常微分方程理论可知, 对于正的常数 δ 和 $k \in \mathbb{N}$, 如果 $u \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ 并且 $u^0 > \delta$, 那么, $\varphi(x^0, \bar{x})$ 是区域 Ω 内的 $C^{k,\alpha}$ $(\alpha \in (0,1))$ 函数. 此外, 对于固定的 x^0, 映射 $\varphi_{x^0} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $\bar{x} \mapsto x' = \varphi(x^0, \bar{x})$ 是一个 $C^{k,\alpha}$ 微分同胚.

引理 3.1 假设 $u = (u^0, u') \in C^{0,1}$ 并且 $u^0 > \delta$, 则存在一个正的常数 $C = C(\delta, L)$, 使得对于任意的 $x' \in \mathbb{T}^2$ 和 $x_0 \in [0, L]$, 成立如下估计式:

$$|(\varphi_{x^0})^{-1} x' - x'| \leqslant C \|u'\|_{C^0(\bar{\Omega})}. \tag{3.34}$$

证明 记 $\bar{x} = (\varphi_{x^0})^{-1} x'$, 则 $|\varphi_{x^0}(\bar{x}) - \bar{x}| \leqslant \int_0^{x^0} |\frac{u'}{u^0}(\tau, \varphi(\tau, \bar{x}))| \, d\tau \leqslant C \|u'\|_{C^0(\bar{\Omega})}$, 证毕. □

利用特征线方法, 输运方程 (3.33) 的解有如下形式:

$$\begin{aligned} \hat{B}(x) &= \hat{B}(x^0, \varphi_{x^0}(\bar{x})) \\ &= \mathrm{e}^{-2\mu x^0} \hat{B}_0(\bar{x}) + \int_0^{x^0} \mathrm{e}^{2\mu(\tau - x^0)} \left(\frac{2\mu}{\gamma - 1} \rho_b^{\gamma-1} \widehat{A(s)} + \frac{2\mu}{\rho_b} \hat{p} + H \right)(\tau, \varphi_\tau(\bar{x})) \, d\tau. \end{aligned} \tag{3.35}$$

记

$$F_6 = -\mu^2 \rho_b d_3(t) \int_0^{x^0} \mathrm{e}^{2\mu(\tau - x^0)} \left(\frac{2\mu}{\rho_b} \hat{p}(\tau, \varphi_\tau(\bar{x})) - \frac{2\mu}{\rho_b} \hat{p}(\tau, x') + H(\tau, \varphi_\tau(\bar{x})) \right) d\tau. \tag{3.36}$$

实际上, F_6 是一个高次项 ($\partial_\beta \hat{p}$ 是小量, 而 u' 接近于 0 推出 φ_{x^0} 接近于恒等映射, 从而, 由 (3.34) 可知, $|(\varphi_{x^0})^{-1}(x') - x'|$ 是小量). 将 (3.35) 代入方程 (3.31), 得到

$$\begin{aligned} &(t(x^0) - 1)\partial_0^2 \hat{p} - \partial_1^2 \hat{p} - \partial_2^2 \hat{p} + \mu d_1(t) \partial_0 \hat{p} + \mu^2 d_2(t) \hat{p} + 2\mu^3 \mathrm{e}^{-2\mu x^0} \rho_b d_3(t) \int_0^{x^0} \frac{\mathrm{e}^{2\mu\tau}}{\rho_b(\tau)} \hat{p}(\tau, x') d\tau \\ &= -\mu^2 \rho_b^\gamma d_4(t) \widehat{A(s)} - \mu^2 \mathrm{e}^{-2\mu x^0} \rho_b d_3(t) \left(\hat{B}_0(\bar{x}) + \int_0^{x^0} \frac{2\mu}{\gamma - 1} \mathrm{e}^{2\mu\tau} \rho_b^{\gamma-1} \widehat{A(s)}(\tau, \varphi_\tau(\bar{x})) \, d\tau \right) \\ &\quad + F_5 + F_6. \end{aligned} \tag{3.37}$$

记

$$
\begin{aligned}
&e_1(x^0)=t(x^0)-1<0,\quad e_2(x^0)=\mu d_1(t(x^0)),\\
&e_3(x^0)=\mu^2 d_2(t(x^0)),\quad e_4(x^0)=2\mu^3\mathrm{e}^{-2\mu x^0}\rho_b(x^0)d_3(t(x^0)),\\
&e_5(x^0)=-\mu^2(\rho_b(x^0))^\gamma d_4(t(x^0)),\quad e_6(x^0)=-\mu^2\mathrm{e}^{-2\mu x^0}\rho_b(x^0)d_3(t(x^0)),\\
&b(\mu,\tau)=\frac{\mathrm{e}^{2\mu\tau}}{\rho_b(\tau)},\quad F=F_5+F_6,
\end{aligned}
$$

以及

$$
F_0=e_5(x^0)\widehat{A(s)}+e_6(x^0)\left(\hat{B}_0(\bar{x})+\int_0^{x^0}\frac{2\mu}{\gamma-1}\mathrm{e}^{2\mu\tau}\rho_b^{\gamma-1}\widehat{A(s)}(\tau,\varphi_\tau(\bar{x}))\,d\tau\right),\tag{3.38}
$$

则方程 (3.37) 可简写为

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}(\hat{p})&\triangleq e_1(x^0)\partial_0^2\hat{p}-\partial_1^2\hat{p}-\partial_2^2\hat{p}+e_2(x^0)\partial_0\hat{p}+e_3(x^0)\hat{p}+e_4(x^0)\int_0^{x^0}b(\mu,\tau)\hat{p}(\tau,x')\,d\tau\\
&=F_0+F.
\end{aligned}\tag{3.39}
$$

注意在 (3.39) 中含有一个非局部项 $e_4(x^0)\int_0^{x^0}b(\mu,\tau)\hat{p}(\tau,x')\,d\tau$. 这与文献 [26] 不同, 它表明与几何效应相比, 摩擦对于流动有更显著的影响—即使对纯亚音流, 也会出现非局部问题. 这是在对三维定常可压缩 Euler 方程组的研究中, 首次出现积分形式的非局部项.

这样, 问题 (3.31) 可以写成如下解耦了的形式:

$$
\begin{cases}
\mathfrak{L}(\hat{p})=F_0+F, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\
\partial_0\hat{p}+\gamma_0\hat{p}=G, & \text{在 } \Sigma_0 \text{ 上},\\
\hat{p}=p_1(x')-p_b(L), & \text{在 } \Sigma_1 \text{ 上}.
\end{cases}\tag{3.40}
$$

我们得到等价于问题 (S2) 的问题 (S3): 在区域 Ω 内, 寻找 (3.29)、(3.30)、(3.40) 和 (3.32) 的经典解 $\hat{U}=(\hat{B},\widehat{A(s)},\hat{p},u')$. 注意这仍然是非线性问题.

4 非局部线性二阶椭圆型方程的混合边值问题

本节研究源于问题 (3.40) 的一个含非局部项的二阶线性椭圆型方程的混合边值问题

$$
\begin{cases}
\mathfrak{L}(\hat{p})=h(x), & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\
\partial_0\hat{p}+\gamma_0\hat{p}=g_0(x'), & \text{在 } \Sigma_0 \text{ 上},\\
\hat{p}=g_1(x'), & \text{在 } \Sigma_1 \text{ 上},
\end{cases}\tag{4.1}
$$

其中非齐次项 $h\in C^{k-2,\alpha}(\bar{\Omega})$, $g_0\in C^{k-1,\alpha}(\mathbb{T}^2)$, $g_1\in C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^2)$, $\alpha\in(0,1)$, $k=2,3,\ldots$

方程 (4.1) 的难点在于椭圆算子 $\mathfrak{L}$ 包含一个非局部项, 难以直接用极值原理或者能量估计的办法得到其可解性. 这里的关键是, 如何保证解的唯一性, 以避免可能出现的特征值问题.

4.1 唯一性

在什么条件下, 问题 (4.1) 的 $H^2(\Omega)$ 强解 $\hat{p}$ 是唯一的? 为此, 考察下述齐次问题:

$$\begin{cases} \mathfrak{L}(\hat{p}) = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ \partial_0 \hat{p} + \gamma_0 \hat{p} = 0, & \text{在 } \Sigma_0 \text{ 上}, \\ \hat{p} = 0, & \text{在 } \Sigma_1 \text{ 上}. \end{cases} \tag{4.2}$$

由 Sobolev 嵌入定理可知, Sobolev 空间 $H^2(\Omega)$ 嵌入到 Hölder 空间 $C^{0,\frac{1}{2}}(\bar{\Omega})$, 从而, $H^2(\Omega)$ 强解是有界的. 进一步, 将非局部项 $e_4(x^0)\int_0^{x^0} b(\mu,\tau)\hat{p}(\tau,x')\,d\tau$ 看作非齐次项. 二阶椭圆型方程 Dirichlet 问题和斜微商问题的 Schauder 理论 [31] 告诉我们, 对于任意的 $\alpha \in (0,\frac{1}{2})$, 有 $\hat{p} \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. 由此容易推出, 如果 $\hat{p} \in H^2(\Omega)$ 是方程 (4.2) 的一个强解, 则 $\hat{p} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ 是一个经典解.

下面利用 Fourier 分析的方法来研究何时 $\hat{p} \equiv 0$. 记 $m = (m_1, m_2)$, $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2) = (m_1 x^1, m_2 x^2)$, 则由上述函数 $\hat{p}$ 的正则性可知, 成立

$$\begin{aligned} \hat{p}(x) = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \lambda_m \{ & p_{1,m}(x^0)\cos(\tilde{x}^1)\cos(\tilde{x}^2) + p_{2,m}(x^0)\sin(\tilde{x}^1)\cos(\tilde{x}^2) \\ & + p_{3,m}(x^0)\cos(\tilde{x}^1)\sin(\tilde{x}^2) + p_{4,m}(x^0)\sin(\tilde{x}^1)\sin(\tilde{x}^2)\}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

相应的 Fourier 系数是

$$\begin{aligned} p_{1,m}(x^0) &= \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} \hat{p}(x)\cos(\tilde{x}^1)\cos(\tilde{x}^2)\,dx^1dx^2, \\ p_{2,m}(x^0) &= \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} \hat{p}(x)\sin(\tilde{x}^1)\cos(\tilde{x}^2)\,dx^1dx^2, \\ p_{3,m}(x^0) &= \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} \hat{p}(x)\cos(\tilde{x}^1)\sin(\tilde{x}^2)\,dx^1dx^2, \\ p_{4,m}(x^0) &= \frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} \hat{p}(x)\sin(\tilde{x}^1)\sin(\tilde{x}^2)\,dx^1dx^2, \end{aligned}$$

以及

$$\lambda_m = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & \text{若 } m_1 = m_2 = 0, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{若 } m_1 \text{ 和 } m_2 \text{ 中有一个为 } 0, \\ 1, & \text{若 } m_1 > 0, \quad m_2 > 0. \end{cases}$$

因为 $\hat{p} \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, $k \geqslant 2$, 容易推出 $p_{i,m}(x^0) \in C^{k,\alpha}([0,L])$ $(i = 1,2,3,4)$, 并且级数 (4.3) 在 $C^{k-2}(\bar{\Omega})$ 范数下收敛.

于是可以将 (4.3) 代入方程 (4.2), 得到每个 $p_{i,m}(x^0)$ $(x^0 \in [0,L])$ 都要满足下述含非局部项的常微分方程:

$$e_1(x^0)p''_{i,m} + e_2(x^0)p'_{i,m} + (e_3(x^0) + |m|^2)p_{i,m} + e_4(x^0)\int_0^{x^0} b(\mu,\tau)p_{i,m}(\tau)\,d\tau = 0, \tag{4.4}$$

以及边界条件

$$p'_{i,m}(0) + \gamma_0 p_{i,m}(0) = 0, \quad p_{i,m}(L) = 0. \tag{4.5}$$

下面的任务就是寻找条件保证所有的 $p_{i,m}=0$ $(i=1,2,3,4)$.

假设 $p_{i,m}(0)=0$, 记 $\mathcal{P}_{i,m}(x^0)=\int_0^{x^0} b(\mu,\tau)p_{i,m}(\tau)\,d\tau$, 则边值问题 (4.4) 和 (4.5) 可以写作

$$\begin{cases}\tilde{e}_1(x^0)\mathcal{P}_{i,m}'''+\tilde{e}_2(x^0)\mathcal{P}_{i,m}''+\tilde{e}_3(x^0)\mathcal{P}_{i,m}'+e_4(x^0)\mathcal{P}_{i,m}=0,\\ \mathcal{P}_{i,m}(0)=\mathcal{P}_{i,m}'(0)=\mathcal{P}_{i,m}''(0)=0,\\ \mathcal{P}_{i,m}'(L)=0,\end{cases}\tag{4.6}$$

其中, 所有系数如下:

$$\tilde{e}_1(x^0)=\frac{e_1(x^0)}{b(\mu,x^0)}<0,\tag{4.7}$$

$$\tilde{e}_2(x^0)=\left(\frac{e_2(x^0)}{b(\mu,x^0)}-\frac{2e_1(x^0)b'(\mu,x^0)}{b^2(\mu,x^0)}\right),\tag{4.8}$$

$$\tilde{e}_3(x^0)=\left(\frac{(e_3(x^0)+|m|^2)}{b(\mu,x^0)}-\frac{e_2(x^0)b'(\mu,x^0)+e_1(x^0)b''(\mu,x^0)}{b^2(\mu,x^0)}+\frac{2e_1(x^0)(b'(\mu,x^0))^2}{b^3(\mu,x^0)}\right),\tag{4.9}$$

而 $b'(\mu,x_0)=\partial b(\mu,x_0)/\partial x^0$, $b''(\mu,x_0)=\partial^2 b(\mu,x_0)/(\partial x^0)^2$.

根据常微分方程 Cauchy 问题解的唯一性, 很明显, 在 $[0,L]$ 中, $p_{i,m}\equiv 0$. 若存在某个 i 和 m, 使得 $p_{i,m}(0)\neq 0$, 记

$$w_{i,m}(x^0)=\frac{p_{i,m}(x^0)}{p_{i,m}(0)},\quad \mathcal{W}_{i,m}(x^0)=\int_0^{x^0} b(\mu,\tau)w_{i,m}(\tau)d\tau,$$

则

$$\begin{cases}\tilde{e}_1(x^0)\mathcal{W}_{i,m}'''+\tilde{e}_2(x^0)\mathcal{W}_{i,m}''+\tilde{e}_3(x^0)\mathcal{W}_{i,m}'+e_4(x^0)\mathcal{W}_{i,m}=0,\\ \mathcal{W}_{i,m}(0)=0,\quad \mathcal{W}_{i,m}'(0)=b(\mu,0),\quad \mathcal{W}_{i,m}''(0)=b'(\mu,0)-\gamma_0 b(\mu,0),\\ \mathcal{W}_{i,m}'(L)=0.\end{cases}\tag{4.10}$$

定义 4.1 称背景解 U_b 满足 S- 条件, 如果对于每一个 $i=1,2,3,4$ 和 $m\in\mathbb{Z}^2$, 问题 (4.10) 不存在经典解.

实际上, 如果背景解 U_b 满足 S- 条件, 那么所有的 $p_{i,m}=0$, 则问题 (4.2) 仅有平凡解. 下述引理表明, 几乎所有的背景解 U_b 都满足 S- 条件.

引理 4.1 存在一个由至多可列个数构成的集合 $\mathcal{S}\subset(0,+\infty)$, 使得当 $\mu\in(0,+\infty)\setminus\mathcal{S}$ 时, 由它确定的背景解 U_b 都满足 S- 条件.

证明 由背景解 U_b 的构造可知, (4.10) 中所有的系数 e_1、e_2、e_3、e_4 和 b 都实解析地依赖于参数 μ. 根据常微分方程理论 [32], Cauchy 问题 (4.10) 的唯一解 $\mathcal{W}_{i,m}=\mathcal{W}_{i,m}(x^0;\mu)$ 关于参数 μ 也是实解析的函数. 特别地, $\vartheta_{i,m}(\mu)\triangleq\mathcal{W}_{i,m}'(L;\mu)=b(\mu,L)w_{i,m}(L)$ 是关于 $\mu\geqslant 0$ 的实解析函数.

对于给定的 $i=1,2,3,4$, $m\in\mathbb{Z}^2$, $\mu_0>0$, 假设存在无穷多的 $\mu\in[0,\mu_0]$, 使得 $\vartheta_{i,m}(\mu)=0$, 则由闭区间 $[0,\mu_0]$ 的紧性可知, 函数 $\vartheta_{i,m}(\mu)$ 存在一个非孤立的零点. 由非平凡一元实解析函数零点的孤立性可知, 函数 $\vartheta_{i,m}(\mu)$ 必须恒为 0, 从而, $\vartheta_{i,m}(0)=0$.

另一方面, 当 $\mu=0$ 时, 问题 (4.10) 变为

$$\begin{cases}e_1(x^0)w_{i,m}''+|m|^2w_{i,m}=0,\\ w_{i,m}(0)=1,\quad w_{i,m}'(0)=0.\end{cases}\tag{4.11}$$

因为 $e_1(x^0) < 0$, 所以, 极大值原理和 Hopf 边界点引理 [31] 告诉我们, $w_{i,m}(L;0) \neq 0$, 即 $\vartheta_{i,m}(0) \neq 0$, 与上述 $\vartheta_{i,m}(0) = 0$ 的结论矛盾.

由此, 对于每一个固定的 $m \in \mathbb{Z}^2$, $\mu_0 > 0$, 函数 $\vartheta_{i,m}(\mu)$ 在 $(0, \mu_0]$ 上至多存在有限个零点. 于是存在至多可列个参数 $\mu \in (0, \infty)$, 使得 Cauchy 问题 (4.10) 可能有一个解. 证毕. □

4.2 先验估计

我们接着考察问题 (4.1) 的解的先验估计. 将非局部项

$$e_4(x^0) \int_0^{x^0} b(\mu, \tau)\hat{p}(\tau, x')\, d\tau$$

看作非齐次项, 应用二阶椭圆型方程 Dirichlet 问题和斜微商问题的 Schauder 理论, 并结合高阶正则性理论和插值不等式 [31] 可知, 若 $\hat{p} \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ $(k = 2, 3)$ 是问题 (4.1) 的解, 则 $\hat{p}$ 满足下述估计式:

$$\|\hat{p}\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} \leqslant C(\|\hat{p}\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \|h\|_{C^{k-2,\alpha}(\bar{\Omega})} + \|g_0\|_{C^{k-1,\alpha}(\mathbb{T}^2)} + \|g_1\|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^2)}), \tag{4.12}$$

其中 C 为仅依赖于背景解 U_b 和 α 的常数.

进一步, 利用紧性方法 (参见文献 [26, 第 738 页]), 只要 S- 条件成立, 我们就可得到下述先验估计:

$$\|\hat{p}\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} \leqslant C(\|h\|_{C^{k-2,\alpha}(\bar{\Omega})} + \|g_0\|_{C^{k-1,\alpha}(\mathbb{T}^2)} + \|g_1\|_{C^{k,\alpha}(\mathbb{T}^2)}). \tag{4.13}$$

这里要求问题 (4.2) 只有零解是关键的.

4.3 近似解

下面利用 Fourier 级数来构造问题 (4.1) 的近似解, 进而证明问题 (4.1) 存在解.

不失一般性, 可设 $g_1 = 0$. 另外, 记函数序列 $\{h^{(n)}\}_n \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ 在 $C^{k-2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 中收敛于 h, 序列 $\{g_0^{(n)}\}_n \subset C^\infty(\mathbb{T}^2)$ 在 $C^{k-2,\alpha}(\mathbb{T}^2)$ 中收敛于 g_0. 对于固定的 n, 考察问题 (4.1), 其中函数 h 和 g_0 分别替换为 $h^{(n)}$ 和 $g_0^{(n)}$.

假设

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \lambda_m \{ & h_{1,m}^{(n)}(x^0)\cos(\tilde{x}^1)\cos(\tilde{x}^2) + h_{2,m}^{(n)}(x^0)\sin(\tilde{x}^1)\cos(\tilde{x}^2) \\ & + h_{3,m}^{(n)}(x^0)\cos(\tilde{x}^1)\sin(\tilde{x}^2) + h_{4,m}^{(n)}(x^0)\sin(\tilde{x}^1)\sin(\tilde{x}^2)\}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} g_0^{(n)}(x') = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \lambda_m \{ & (g_0^{(n)})_{1,m}\cos(\tilde{x}^1)\cos(\tilde{x}^2) + (g_0^{(n)})_{2,m}\sin(\tilde{x}^1)\cos(\tilde{x}^2) \\ & + (g_0^{(n)})_{3,m}\cos(\tilde{x}^1)\sin(\tilde{x}^2) + (g_0^{(n)})_{4,m}\sin(\tilde{x}^1)\sin(\tilde{x}^2)\}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

则对于 (4.3) 中的 $\hat{p}$, 每个 $\mathcal{P}_{i,m}(x^0)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ 应该满足下述三阶常微分方程两点边值问题:

$$\begin{cases} \tilde{e}_1(x^0)\mathcal{P}_{i,m}''' + \tilde{e}_2(x^0)\mathcal{P}_{i,m}'' + \tilde{e}_3(x^0)\mathcal{P}_{i,m}' + e_4(x^0)\mathcal{P}_{i,m} = h_{i,m}^{(n)}(x^0), \\ \mathcal{P}_{i,m}(0) = 0, \quad \mathcal{P}_{i,m}''(0) + \left(\gamma_0 - \dfrac{b'(\mu,0)}{b(\mu,0)}\right)\mathcal{P}_{i,m}'(0) = b(\mu,0)(g_0^{(n)})_{i,m}, \\ \mathcal{P}_{i,m}'(L) = 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

我们知道, 在 S- 条件的假设下, 齐次问题只有零解. 由常微分方程理论可知, 线性问题 (4.16) 存在唯一的解 (Fredholm 择一性). 注意到 $h_{i,m}^{(n)}(x^0) \in C^\infty([0,L])$, 以及 (4.16) 中的系数都是实解析函数, 可知 $p_{i,m}(x^0) = \frac{1}{b(\mu,x^0)}\mathcal{P}'_{i,m}(x^0)$ 属于 $C^\infty([0,L])$.

现在, 当 $N \in \mathbb{N}$ 给定时, 定义

$$\begin{aligned}
\hat{p}_N(x) = &\sum_{m_1,m_2=0}^{N} \lambda_m\{p_{1,m}(x^0)\cos(\tilde{x}^1)\cos(\tilde{x}^2) + p_{2,m}(x^0)\sin(\tilde{x}^1)\cos(\tilde{x}^2) \\
&+ p_{3,m}(x^0)\cos(\tilde{x}^1)\sin(\tilde{x}^2) + p_{4,m}(x^0)\sin(\tilde{x}^1)\sin(\tilde{x}^2)\}, \\
h_N^{(n)}(x) = &\sum_{m_1,m_2=0}^{N} \lambda_m\{h_{1,m}^{(n)}(x^0)\cos(\tilde{x}^1)\cos(\tilde{x}^2) + h_{2,m}^{(n)}(x^0)\sin(\tilde{x}^1)\cos(\tilde{x}^2) \\
&+ h_{3,m}^{(n)}(x^0)\cos(\tilde{x}^1)\sin(\tilde{x}^2) + h_{4,m}^{(n)}(x^0)\sin(\tilde{x}^1)\sin(\tilde{x}^2)\}, \\
(g_0^{(n)})_N(x') = &\sum_{m_1,m_2=0}^{N} \lambda_m\{(g_0^{(n)})_{1,m}\cos(\tilde{x}^1)\cos(\tilde{x}^2) + (g_0^{(n)})_{2,m}\sin(\tilde{x}^1)\cos(\tilde{x}^2) \\
&+ (g_0^{(n)})_{3,m}\cos(\tilde{x}^1)\sin(\tilde{x}^2) + (g_0^{(n)})_{4,m}\sin(\tilde{x}^1)\sin(\tilde{x}^2)\}.
\end{aligned}$$

不难看出, $\hat{p}_N, h_N^{(n)} \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $(g_0^{(n)})_N \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, 并且 $\hat{p}_N$ 满足边值问题

$$\begin{cases}
\mathfrak{L}(\hat{p}_N) = h_N^{(n)}, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\
\partial_0\hat{p}_N + \gamma_0\hat{p}_N = (g_0^{(n)})_N, & \text{在 } \Sigma_0 \text{ 上}, \\
\hat{p}_N = 0, & \text{在 } \Sigma_1 \text{ 上}.
\end{cases} \tag{4.17}$$

因此, 对于任意的 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, 只要 $N_1 < N_2$, 由估计式 (4.13) 可知,

$$\|\hat{p}_{N_2} - \hat{p}_{N_1}\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} \leqslant C(\|h_{N_2}^{(n)} - h_{N_1}^{(n)}\|_{C^{k-2,\alpha}(\bar{\Omega})} + \|(g_0^{(n)})_{N_2} - (g_0^{(n)})_{N_1}\|_{C^{k-1,\alpha}(\mathbb{T}^2)}).$$

因为在 $C^{k-2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 中, $h_N^{(n)} \to h^{(n)}$, 以及在 $C^{k-1,\alpha}(\mathbb{T}^2)$ 中, $(g_0^{(n)})_N \to g_0^{(n)}$, 则序列 $\{\hat{p}_N\}$ 在 $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ 中是一个 Cauchy 序列. 于是存在函数 $\hat{p}^{(n)} \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, 使得当 $N \to \infty$ 时, 在 $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ 中, $\hat{p}_N \to \hat{p}^{(n)}$. 在问题 (4.17) 中, 令 $N \to \infty$, 容易得到 $\hat{p}^{(n)}$ 为问题 (4.1) 的一个 $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ 解, 其中, 函数 h 和 g_0 分别替换为 $h^{(n)}$ 和 $g_0^{(n)}$.

将估计式 (4.13) 用于上面得到的近似解序列 $\{\hat{p}^{(n)}\}_n$, 就有了一致估计

$$\|\hat{p}^{(n)}\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} \leqslant C(\|h^{(n)}\|_{C^{k-2,\alpha}(\bar{\Omega})} + \|g_0^{(n)}\|_{C^{k-1,\alpha}(\mathbb{T}^2)}) \leqslant C(\|h\|_{C^{k-2,\alpha}(\bar{\Omega})} + \|g_0\|_{C^{k-1,\alpha}(\mathbb{T}^2)}).$$

由 Arzela-Ascoli 定理知, 存在 $\{\hat{p}^{(n)}\}$ 的一个子序列, 在 $C^k(\bar{\Omega})$ 范数下收敛于某个函数 $\hat{p} \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. 在 $\hat{p}^{(n)}$ 满足的边值问题中, 直接取极限 $n \to \infty$ 可知, $\hat{p}$ 就是问题 (4.1) 的一个经典解. 因此, 我们得到下述引理:

引理 4.2 假设 S- 条件成立, 则问题 (4.1) 存在唯一的解 $\hat{p} \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, 并且满足估计式 (4.13).

5 亚音 Fanno 流的稳定性

对于 $k = 2, 3$, 以及 $p \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, $s, B, u' \in C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega})$, 定义范数

$$\|U\|_k \triangleq \|p\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|s\|_{C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|B\|_{C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega})} + \sum_{\beta=1}^{2}\|u^\beta\|_{C^{k-1,\alpha}(\overline{\Omega})}, \tag{5.1}$$

其中 $U=(p,s,B,u'=(u^1,u^2))$. 记

$$X_{K\varepsilon}\triangleq\{U:\|U-U_b\|_3\leqslant K\varepsilon \text{ 且满足边界条件 (2.11) 和 (2.12)}\},$$

其中 $K>0$ 为待定常数. 我们需选择合适的 K 和 ε_0, 利用问题 (S3) 来构造 $X_{K\varepsilon}$ (其中 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$) 上的映射 $\mathcal{T}$, 说明它在 $\|\cdot\|_2$ 范数下压缩. 由此, 利用 Banach 压缩映像原理 (其实也就是 Schauder 不动点定理) 可知, 映射 $\mathcal{T}$ 在 $X_{K\varepsilon}$ 内有唯一的不动点 U. 由 $\mathcal{T}$ 的构造方法知, 这样的不动点就是问题 (S3) 的解, 这也就证明了定理 2.1.

5.1 映射 $\mathcal{T}$ 的构造

对于任意的 $U\in X_{K\varepsilon}$, 通过以下方式定义映射 $\mathcal{T}:U\mapsto\tilde{U}$. 记 $\hat{U}=\tilde{U}-U_b$, 这样只需确定 $\hat{U}$. 另外, 记 C 为只依赖于背景解及 α 的正的常数. 为书写简单起见, 允许它们的具体值在各个估计式中可以不同.

5.1.1 求解熵 $\widetilde{A(s)}$

利用方程 (3.30), 熵 $\widehat{A(s)}$ 满足下述输运方程的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} D_u\widehat{A(s)}=0, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ \widehat{A(s)}=A(s_0(x'))-A(s_b(0)), & \text{在 } \Sigma_0 \text{ 上}. \end{cases}\tag{5.2}$$

这里, 速度场 u 作为 $U\in X_{K\varepsilon}$ 的分量是给定了的函数 (注意 u^0 可从 B 的定义式解出). 我们用经典的特征线方法求解上述方程. 一旦解得 $\widehat{A(s)}$, 就可以得到 $\widetilde{A(s)}=A(s_b)+\widehat{A(s)}$. 因为 $u\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, 并且 $s_0(x')-s_b(0)\in C^{3,\alpha}(\mathbb{T}^2)$, 就有如下引理:

引理 5.1 问题 (5.2) 存在唯一的解 $\widehat{A(s)}\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, 并且满足

$$\|\widehat{A(s)}\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})}\leqslant C\|A(s_0)-A(s_b)\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{T}^2)}\leqslant C\varepsilon.\tag{5.3}$$

在第二个不等式中, 我们要求条件 (2.13) 成立.

5.1.2 求解压强 $\tilde{p}$

接下来, 考虑关于压强 $\hat{p}$ 的混合边值问题 (3.40):

$$\begin{cases} e_1(x^0)\partial_0^2\hat{p}-\partial_1^2\hat{p}-\partial_2^2\hat{p}+e_2(x^0)\partial_0\hat{p}+e_3(x^0)\hat{p}+e_4(x^0)\displaystyle\int_0^{x^0}b(\mu,\tau)\hat{p}(\tau,x')\,d\tau & \\ \quad =F_0+F, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ \partial_0\hat{p}+\gamma_0\hat{p}=G, & \text{在 } \Sigma_0 \text{ 上},\\ \hat{p}=p_1(x')-p_b(L), & \text{在 } \Sigma_1 \text{ 上}. \end{cases}\tag{5.4}$$

这里, 对 (3.38) 中的非齐次项 F_0, 取 $\widehat{A(s)}$ 为引理 5.1 的解, 则有估计式 $\|F_0(U)\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}\leqslant C\varepsilon$.

下面分析非齐次项 $F(U)$, 其中 $U\in X_{K\varepsilon}$ 为给定函数, 而 $\hat{U}=U-U_b$. 对 (3.36) 中的 F_6 和 (3.24) 中的 F_4, 由直接计算可导出

$$\|F_6\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}+\|F_4\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}\leqslant CK^2\varepsilon^2.$$

另外, 对于 (3.10) 中的 F_3, 根据切向速度 u' 是小量的性质, 有

$$\|\gamma p(F_1+F_2)\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant CK^2\varepsilon^2,$$

以及

$$\|F_3\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant CK^2\varepsilon^2.$$

因此, 我们得到估计

$$\|F(U)\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant C(\varepsilon+K^2\varepsilon^2). \tag{5.5}$$

再分析边界项 $G(U)$, 其中 $U\in X_{K\varepsilon}$ 为给定函数. 对 (3.13) 中的 G_1, 切向速度 u' 为给定的边界值 $u_0'(x')\in C^{3,\alpha}(\mathbb{T}^2;\mathbb{R}^2)$, 于是, 由 (2.14) 推出

$$\|G_1\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{T}^2)} \leqslant C\varepsilon.$$

对于 (3.14) 中的 G_2, u'、$A(s)$ 和 B 为给定的边界值 $u_0'(x')$、$A(s_0)(x')$ 和 $B_0(x')$. 因此,

$$\|G_2\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{T}^2)} \leqslant CK\varepsilon^2.$$

至于 (3.28) 中的 G_3, 下划线项为给定的边界值, 从而,

$$\|G_3\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{T}^2)} \leqslant C(\varepsilon+K^2\varepsilon^2).$$

总结以上三个估计式, 可得

$$\|G(U)\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{T}^2)} \leqslant C(\varepsilon+K^2\varepsilon^2). \tag{5.6}$$

利用 S- 条件和引理 4.2, 我们得到下列引理:

引理 5.2 问题 (5.4) 存在唯一的解 $\hat{p}\in C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})$, 并且满足

$$\begin{aligned}\|\hat{p}\|_{C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})} &\leqslant C(\|F_0(U)\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}+\|F(U)\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}+\|G(U)\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{T}^2)}+\|p_1-p_b\|_{C^{3,\alpha}(\mathbb{T}^2)})\\ &\leqslant C(\varepsilon+K^2\varepsilon^2).\end{aligned} \tag{5.7}$$

由此得到了 $\tilde{p}=\hat{p}+p_b$.

5.1.3 求解 Bernoulli 量 $\tilde{B}$

取引理 5.1 和 5.2 得到的解 $\widehat{A(s)}$ 和 $\hat{p}$, 利用方程 (3.29), 考察如下关于 $\hat{B}$ 的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} D_u'\hat{B}+2\mu\hat{B}=\dfrac{2\mu}{\gamma-1}\rho_b^{\gamma-1}\widehat{A(s)}+\dfrac{2\mu}{\rho_b}\hat{p}+H, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ \hat{B}=B_0(x')-B_b(0), & \text{在 } \Sigma_0 \text{ 上}, \end{cases} \tag{5.8}$$

其中速度场 u 作为 $U\in X_{K\varepsilon}$ 的分量是给定函数. 类似于求解熵 $\widehat{A(s)}$, 我们用特征线方法可求解上述方程. 一旦解出 $\hat{B}$, 就得到了 $\tilde{B}=B_b+\hat{B}$.

对于 (3.18) 中的非齐次项 $H(U)$, $U\in X_{K\varepsilon}$ 为给定函数, 而 $\hat{U}=U-U_b$, 通过直接计算, 我们有估计式

$$\|H\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant CK^2\varepsilon^2.$$

又因为 $u\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, 以及 $B_0(x')-B_b(0)\in C^{3,\alpha}(\mathbb{T}^2)$, 就有下列引理:

引理 5.3 问题 (5.8) 存在唯一的解 $\hat{B} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, 并且满足

$$\begin{aligned}\|\hat{B}\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} &\leqslant C(\|B_0 - B_b\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{T}^2)} + \|\widehat{A(s)}\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|\hat{p}\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|H\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})}) \\ &\leqslant C(\varepsilon + K^2\varepsilon^2),\end{aligned} \tag{5.9}$$

其中在第二个不等式中, 我们利用了估计式 (2.13)、(5.3) 和 (5.7).

5.1.4 求解切向速度场 $\tilde{u}'$

切向速度分量 $\tilde{u}^\beta$ $(\beta = 1, 2)$ 满足输运方程 (3.32). 以 $\beta = 1$ 为例, 考虑下述 $\tilde{u}^1$ 满足的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} u^j \partial_j \tilde{u}^1 + \dfrac{1}{\rho}\partial_1 \tilde{p} = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ \tilde{u}^1 = u_0^1(x'), & \text{在 } \Sigma_0 \text{ 上}, \end{cases} \tag{5.10}$$

其中 $u_0^1(x')$ 为给定的边界值, 而 $\tilde{p}$ 由引理 5.2 给出.

我们不难得到如下引理:

引理 5.4 问题 (5.10) 存在唯一的解 $\tilde{u}^1 \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, 并且满足

$$\|\tilde{u}^1\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant C(\|u_0^1\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{T}^2)} + \|\hat{p}\|_{C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})}) \leqslant C(\varepsilon + K^2\varepsilon^2). \tag{5.11}$$

在第二个不等式中, 我们要求 (2.13) 成立.

对于 $\tilde{u}^2$, 我们也有类似的结果.

结论 对于任意给定的 $U \in X_{K\varepsilon}$, 按上述方法, 我们得到了唯一的 $\tilde{U} = (\tilde{p}, \tilde{s}, \tilde{B}, \tilde{u}')$, 并且由估计式 (5.3)、(5.7)、(5.9) 和 (5.11), 可推出

$$\|\tilde{U} - U_b\|_3 \leqslant C(\varepsilon + K^2\varepsilon^2).$$

取 $K = \max\{2C, 1\}$ 和 $\varepsilon_0 \leqslant \min\{1/K^2, 1\}$, 则对于任意 $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, 有

$$\|\tilde{U} - U_b\|_3 \leqslant K\varepsilon. \tag{5.12}$$

这样, 我们证明了 $\tilde{U} \in X_{K\varepsilon}$, 从而, $\mathcal{T}$ 是 $X_{K\varepsilon}$ 上的映射.

5.2 映射 $\mathcal{T}$ 的压缩性 (连续性)

对任意的 $U^{(1)}, U^{(2)} \in X_{K\varepsilon}$, 记 $\tilde{U}^{(i)} = \mathcal{T}(U^{(i)})$, $i = 1, 2$. 下面来说明当 ε_0 很小时, 映射

$$\mathcal{T} : X_{K\varepsilon} \to X_{K\varepsilon}, \quad U \mapsto \tilde{U}$$

在下述意义下压缩:

$$\|\tilde{U}^{(1)} - \tilde{U}^{(2)}\|_2 \leqslant \frac{1}{2}\|U^{(1)} - U^{(2)}\|_2. \tag{5.13}$$

为了证明 (5.13), 考虑 $\bar{U} = \tilde{U}^{(1)} - \tilde{U}^{(2)}$ 所满足的问题.

第 1 步 根据 (5.2), $\overline{A(s)}$ 满足下述方程:

$$\begin{cases} D_{u^{(1)}}\overline{A(s)} + D_{u^{(1)}-u^{(2)}}\widehat{A(s)}^{(2)} = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ \overline{A(s)} = 0, & \text{在 } \Sigma_0 \text{ 上}. \end{cases}$$

由引理 5.1 可知,

$$\|\overline{A(s)}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})} \leqslant C\|u^{(1)} - u^{(2)}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})}\|\widehat{A(s)}^{(2)}\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leqslant C\varepsilon\|U^{(1)} - U^{(2)}\|_2. \tag{5.14}$$

第 2 步 基于问题 (5.4), 我们发现 $\bar{p}$ 满足

$$\begin{cases} \mathfrak{L}(\bar{p}) = \bar{F}_0 - F(U^{(2)}), & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ \partial_0\bar{p} + \gamma_0\bar{p} = G(U^{(1)}) - G(U^{(2)}), & \text{在 } \Sigma_0 \text{ 上}, \\ \bar{p} = 0, & \text{在 } \Sigma_1 \text{ 上}, \end{cases}$$

其中

$$\bar{F}_0 = e_5(x^0)\overline{A(s)} + e_6(x^0)\int_0^{x^0} \frac{2\mu}{\gamma-1}\mathrm{e}^{2\mu\tau}\rho_b^{\gamma-1}\overline{A(s)}(\tau, \varphi_\tau(\bar{x}))\,d\tau.$$

利用引理 5.2 和 (5.14), 可直接计算出

$$\begin{aligned} \|\bar{p}\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} &\leqslant C(\|\overline{A(s)}\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|F(U^{(1)}) - F(U^{(2)})\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|G(U^{(1)}) - G(U^{(2)})\|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{T}^2)}) \\ &\leqslant C\varepsilon\|U^{(1)} - U^{(2)}\|_2. \end{aligned} \tag{5.15}$$

第 3 步 利用 (5.8), 得到 $\bar{B}$ 所满足的问题如下:

$$\begin{cases} D'_{u^{(1)}}\bar{B} + 2\mu\bar{B} + D_{u^{(1)}-u^{(2)}}\hat{B}^{(2)} = \dfrac{2\mu}{\gamma-1}\rho_b^{\gamma-1}\overline{A(s)} + \dfrac{2\mu}{\rho_b}\bar{p} + H(U^{(1)}) - H(U^{(2)}), & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ \bar{B} = 0, & \text{在 } \Sigma_0 \text{ 上}. \end{cases}$$

利用引理 5.3、(5.14) 和 (5.15), 有

$$\begin{aligned} \|\bar{B}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})} &\leqslant C(\|\overline{A(s)}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})} + \|\bar{p}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})} + \|u^{(1)} - u^{(2)}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})}\|\hat{B}^{(2)}\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \\ &\quad + \|H(U^{(1)}) - H(U^{(2)})\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})}) \\ &\leqslant C\varepsilon\|U^{(1)} - U^{(2)}\|_2. \end{aligned} \tag{5.16}$$

第 4 步 由 (5.10) 可知, $\bar{u}^1$ 满足下述方程:

$$\begin{cases} (u^j)^{(1)}\partial_j\bar{u}^1 + ((u^j)^{(1)} - (u^j)^{(2)})\partial_j(\tilde{u}^1)^{(2)} = -\dfrac{1}{\rho^{(1)}}\partial_1\bar{p} + \left(\dfrac{1}{\rho^{(2)}} - \dfrac{1}{\rho^{(1)}}\right)\partial_1\tilde{p}^{(2)}, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ \bar{u}^1 = 0, & \text{在 } \Sigma_0 \text{ 上}. \end{cases}$$

由引理 5.4 和 (5.15) 就可得到估计式

$$\begin{aligned} \|\bar{u}^1\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})} \leqslant C(&\|\bar{p}\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} + \|u^{(1)} - u^{(2)}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})}\|(\tilde{u}^1)^{(2)}\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \\ &+ \|\rho^{(1)} - \rho^{(2)}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})}\|\hat{p}^{(2)}\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})}) \end{aligned}$$

$$\leqslant C\varepsilon\|U^{(1)}-U^{(2)}\|_2. \tag{5.17}$$

对于 $\tilde{u}^2$, 也有类似的估计式.

结论 总结以上估计式 (5.14)–(5.17), 就得到

$$\|\tilde{U}^{(1)}-\tilde{U}^{(2)}\|_2 \leqslant C\varepsilon\|U^{(1)}-U^{(2)}\|_2.$$

取 ε_0 充分小, 使得 $C\varepsilon_0<1/2$, 就推出 (5.13).

因此, 由 Banach 压缩映射原理 (或 Schauder 不动点定理, 注意到 $X_{K\varepsilon}$ 在范数 $\|\cdot\|_2$ 下是一个紧子集) 知, 映射 $\mathcal{T}$ 在 $X_{K\varepsilon}$ 内有唯一的不动点 U. 根据映射 $\mathcal{T}$ 的构造方法可知, 此不动点是问题 (S3) 的一个解. 另一方面, 对于问题 (S3) 在 $X_{K\varepsilon}$ 中的一个解, 它必定是映射 $\mathcal{T}$ 的不动点. 这样, 我们完成了定理 2.1 的证明.

参考文献

1 Farokhi S. Aircraft Propulsion. Hoboken: John Wiley & Sons, 2008
2 Courant R, Friedrichs K O. Supersonic Flow and Shock Waves. Heidelberg: Springer-Verlag, 1976
3 Dafermos C M. Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics, 3rd ed. Heidelberg: Springer-Verlag, 2010
4 Chen S X, Yuan H R. Transonic shocks in compressible flow passing a duct for three-dimensional Euler systems. Arch Ration Mech Anal, 2008, 187: 523–556
5 Yuan H R, Zhao Q. Stabilization effect of frictions for transonic shocks in steady compressible Euler flows passing three-dimensional ducts. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2020, 40: 470–502
6 Dong G C, Ou B. Subsonic flows around a body in space. Comm Partial Differential Equations, 1993, 18: 355–379
7 Chen S X. Stability of transonic shock fronts in two-dimensional Euler systems. Trans Amer Math Soc, 2005, 357: 287–308
8 Chen S X. Stability of a Mach configuration. Comm Pure Appl Math, 2006, 59: 1–35
9 Yuan H R. On transonic shocks in two-dimensional variable-area ducts for steady Euler system. SIAM J Math Anal, 2006, 38: 1343–1370
10 Chen G-Q, Chen J, Feldman M. Transonic shocks and free boundary problems for the full Euler equations in infinite nozzles. J Math Pures Appl (9), 2007, 88: 191–218
11 Yuan H R. Examples of steady subsonic flows in a convergent-divergent approximate nozzle. J Differential Equations, 2008, 244: 1675–1691
12 Chen G-Q G, Deng X M, Xiang W. Global steady subsonic flows through infinitely long nozzles for the full Euler equations. SIAM J Math Anal, 2012, 44: 2888–2919
13 Fang B X, Liu L, Yuan H R. Global uniqueness of transonic shocks in two-dimensional steady compressible Euler flows. Arch Ration Mech Anal, 2013, 207: 317–345
14 Chen S X. Compressible flow and transonic shock in a diverging nozzle. Comm Math Phys, 2009, 289: 75–106
15 Li J, Xin Z P, Yin H C. Transonic shocks for the full compressible Euler system in a general two-dimensional de Laval nozzle. Arch Ration Mech Anal, 2013, 207: 533–581
16 Chen G-Q, Kukreja V, Yuan H R. Well-posedness of transonic characteristic discontinuities in two-dimensional steady compressible Euler flows. Z Angew Math Phys, 2013, 64: 1711–1727
17 Kukreja V, Yuan H R, Zhao Q J. Stability of transonic jet with strong shock in two-dimensional steady compressible Euler flows. J Differential Equations, 2015, 258: 2572–2617
18 Bae M. Stability of contact discontinuity for steady Euler system in infinite duct. Z Angew Math Phys, 2013, 64: 917–936
19 Chen S X, Hu D, Fang B X. Stability of the E-H type regular shock refraction. J Differential Equations, 2013, 254: 3146–3199
20 Chen S X. Global existence and stability of a stationary Mach reflection. Sci China Math, 2015, 58: 11–34
21 Chen S X. Mathematical Analysis of Shock Wave Reflection. Singapore: Springer, 2020 [陈恕行. 激波反射的数学分析. 上海: 上海科学技术出版社, 2018]
22 Hu D, Sheng W C. Stability of E-H type regular shock refraction. J Math Phys, 2018, 59: 111504

23 Yuan H R. Transonic shocks for steady Euler flows with cylindrical symmetry. Nonlinear Anal, 2007, 66: 1853–1878
24 Chen S X. Transonic shocks in 3-D compressible flow passing a duct with a general section for Euler systems. Trans Amer Math Soc, 2008, 360: 5265–5289
25 Chen G-Q G, Yuan H R. Local uniqueness of steady spherical transonic shock-fronts for the three-dimensional full Euler equations. Commun Pure Appl Anal, 2013, 12: 2515–2542
26 Liu L, Xu G, Yuan H R. Stability of spherically symmetric subsonic flows and transonic shocks under multidimensional perturbations. Adv Math, 2016, 291: 696–757
27 Chen C, Xie C J. Three dimensional steady subsonic Euler flows in bounded nozzles. J Differential Equations, 2014, 256: 3684–3708
28 Chen C. Three dimensional non-isentropic subsonic Euler flows in rectangular nozzles. Nonlinear Anal Real World Appl, 2015, 21: 153–160
29 Weng S K. A new formulation for the 3-D Euler equations with an application to subsonic flows in a cylinder. Indiana Univ Math J, 2015, 64: 1609–1642
30 Chen S X, Wang Z J, Zhang Y Q. The setting of boundary conditions for boundary value problems of hyperbolic-elliptic coupled systems. Acta Math Appl Sin Engl Ser, 2008, 24: 375–390
31 Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin: Springer-Verlag, 2001
32 Walter W. Ordinary Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1998

Subsonic flows passing a duct for three-dimensional steady compressible Euler systems with friction

Hairong Yuan & Qin Zhao

Abstract This paper studies steady motion of gas in a rectilinear duct with square cross-sections, governed by the three-dimensional (3-d) non-isentropic compressible Euler equations with a friction term. Such flows are called Fanno flows in engineering. We construct respectively special subsonic flows, supersonic flows and transonic shocks in the duct. Since the 3-d steady compressible Euler equations are of quasi-linear hyperbolic-elliptic composite type for subsonic flows, and there is no general theory up to now, we formulate a boundary value problem arising from studies of transonic shocks, and prove the well-posedness of this problem by showing that the special subsonic flows constructed above are stable under small multi-dimensional perturbations. The proof depends on separation of the elliptic and hyperbolic parts in the Euler equations, and designation of a suitable nonlinear iteration scheme. Particularly, there are strong interactions between the elliptic part and the hyperbolic part due to the appearance of friction, and we deduce a linear mixed boundary value problem of a second-order elliptic equation with an integral-type nonlocal term. Its well-posedness is established by applying methods of Fourier analysis and regularity theory of second-order elliptic equations.

Keywords **steady Euler system, subsonic flow, Fanno flow, friction, nonlocal elliptic equations, system of hyperbolic-elliptic composite type**

MSC(2020) **35F30, 35M32, 35Q31, 76G25, 76N10**

doi: 10.1360/N012019-00103