中国科学: 数学 2021 年 第 51 卷 第 6 期: 833～846
SCIENTIA SINICA Mathematica
自然科学基金项目进展专栏 综 述

退化椭圆算子的特征值问题

献给陈恕行教授 80 华诞

陈化*, 陈洪葛
武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072
E-mail: chenhua@whu.edu.cn, hongge_chen@whu.edu.cn

收稿日期: 2020-07-06; 接受日期: 2021-02-25; 网络出版日期: 2021-03-08; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11631011) 资助项目

摘要 本文简要介绍退化椭圆算子的特征值问题的研究结果与研究方法; 以有限阶退化椭圆算子为主线, 主要阐述研究其 Dirichlet 特征值上下界估计和渐近估计的方法与结论.

关键词 次椭圆算子 次椭圆 Dirichlet 热核 Dirichlet 特征值 带权的 Sobolev 空间 广义 Métivier 指标

MSC (2020) 主题分类 35P15, 35P20, 35J70

1 引言

特征值问题是数学研究领域中的一个重要的研究课题, 这不仅反映在对线性和非线性偏微分方程的研究中, 而且还通过对几何谱不变量的研究在几何和拓扑上也具有重要的研究价值, 在物理上也同时与电磁波的色散现象、黑体辐射问题和量子力学等物理问题都有紧密的联系, 故而这方面的研究自 19 世纪开始直到现在一直是数学家和物理学家所关注的热点研究问题. 对于经典椭圆算子的特征值问题, Weyl [1] 在 1911 年首次得到了 Laplace 算子的特征值的首项渐近公式, 证明了区域的体积是几何谱不变量, 从而在偏微分算子的谱和几何的交叉研究方面开创了一个新的研究分支, 这即为 "谱几何" 研究的开始. 继 Weyl [1] 的开创性工作之后, Courant [2]、Carleman [3,4]、Hörmander [5]、Seeley [6]、Ivrii [7]、Melrose [8] 和 Levitan [9] 等多位杰出数学家相继在椭圆算子特征值的渐近问题上得到了一系列重要的结果. 此外, 椭圆算子特征值的上下界估计和相邻特征值的间隙估计等问题在偏微分方程和微分几何的理论研究上都有重要意义, 同时在物理和工程领域也有重要的应用, 进而也引起了人们的广泛关注. 关于这方面的问题, 可参见 Pólya [10]、Cheng 和 Li [11]、Li 和 Yau [12]、Li [13]、Kröger [14]、Laptev [15]、Cheng 和 Wei [16] 以及 Cheng 和 Yang [17,18] 等的工作. 另外, 关于经典椭圆算子特征值问题的研究, 我们还可以列出文献 [19–24] 和 [25–30] 等的工作以供读者参考.

作为经典椭圆算子的一种自然推广, 退化椭圆算子的理论研究在偏微分方程理论中具有重要的意义. 同时, 退化椭圆算子与几何、物理及概率论中所研究的许多对象均有着密切的关系, 如复几何中的

英文引用格式: Chen H, Chen H G. Eigenvalue problem of degenerate elliptic operators (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 833–846, doi: 10.1360/SSM-2020-0219

$\overline{\partial}$-Neumann 方程、量子力学中 Heisenberg 群上的 Kohn Laplace 算子和概率论中的 Malliavin 计算等. 自 20 世纪 60 年代 Fields 奖得主 Hörmander 对退化椭圆算子理论的开创性工作以来, 一大批著名数学家如 Folland、Stein、Fefferman、Métivier 和 Kohn 等相继在此领域也做了许多基础性理论研究. 具体而言, Hörmander [31] 在 1967 年首次建立了著名的平方和定理, 揭示了满足 Hörmander 条件的退化向量场所构成的一类平方和算子的亚椭圆性. 在 Hörmander [31] 的开创性工作之后, Kohn [32, 33]、Oleĭnik 和 Radkevich [34] 等利用拟微分算子的技巧相继给出了平方和定理的不同证明. 但是, Hörmander 等所建立的次椭圆估计并不是最佳的, 其正则性的阶一般无法被精确刻画. 为了得到精确的次椭圆估计, 在 20 世纪 70 年代, Folland 和 Stein [35] 研究了 Heisenberg 群上的 $\overline{\partial}_b$ 算子的正则性问题, 并利用奇异积分算子理论等工具得到了最佳的次椭圆估计 (其正则性的阶依赖于向量场的 Hörmander 指标). 接着 Folland [36] 将这一精确的结果推广到带有齐性结构的 Lie 群 (分层 Lie 群) 上的次 Laplace 算子上. 但是, 满足 Hörmander 条件的退化椭圆算子一般并不具备这种齐性群的结构. 为了突破这一关键的障碍, Rothschild 和 Stein [37] 在 1976 年建立了向量场的提升和逼近理论, 他们证明了满足 Hörmander 条件的退化椭圆算子在提升到更高维的空间后可以被具备这种齐性群结构的次 Laplace 算子局部逼近, 从而给出了满足 Hörmander 条件的一般退化椭圆算子的拟基本解的估计. 接着, 利用奇异积分算子等工具, 他们得到了至今为止最佳的次椭圆估计和正则性结果. Rothschild 和 Stein [37] 的里程碑式工作给出了研究退化椭圆算子的一套强有力的工具, 并由 Rothschild [38]、Nourrigat [39–41]、Helffer 和 Nier [42]、Helffer 和 Nourrigat [43, 44] 进一步推广. 基于这一理论工具, 退化椭圆算子的基本理论研究取得了长足的进步与发展. 例如, Jerison [45]、Jerison 和 Sánchez-Calle [46]、Sánchez-Calle [47] 得到了满足 Hörmander 条件的退化椭圆算子的 Green 核估计和热核估计及对应的 Poincaré 不等式等重要工具, Xu [48, 49] 研究了拟线性次椭圆方程并建立了 Hölder 估计, Bramanti 等 [50] 研究了非散度型退化抛物方程并给出了热核估计和 Harnack 不等式, 等等.

另一方面, 满足 Hörmander 条件的退化向量场对应着一种次 Riemann 几何的全新几何框架 (参见文献 [51]). 早在 20 世纪 30 年代, Chow [52] 和 Rashevskii [53] 独立证明了在 Hörmander 条件下, 区域内任意两点可以用以向量场形成的积分曲线组合而成的曲线来连接. 该结果后来被称为 Chow-Rashevskii 定理, 是次 Riemann 几何领域的第一个大定理. 通过进一步研究这种几何性质, Bony [54] 等给出了退化椭圆方程以及退化热方程的强极值原理和对应的 Harnack 不等式. 值得注意的是, 由 Chow-Rashevskii 定理可以得到一种不同于经典 Euclid 度量的全新的自然内在度量, 即 Carnot-Carathéodory 度量. 这种由向量场形成的积分曲线所刻画的抽象度量在退化椭圆算子和次 Riemann 几何领域的研究中都占据着重要地位, 几乎所有关于退化椭圆算子的基本核 (Green 核和热核) 的估计均依赖于此度量. 在 1981 年, Fefferman 和 Phong [55] 通过 Carnot-Carathéodory 度量给出了次椭圆估计的一种等价的几何描述. 为了进一步定量估计这种抽象的度量, Nagel 等 [56] 在 1985 年证明了著名的 “球盒子” 定理, 其给出了由 Carnot-Carathéodory 度量所形成的球的体积的显式估计公式. 在 Nagel、Stein 和 Wainger 的工作后, 关于退化椭圆算子的很多定量分析得以开展, 例如, Capogna 和 Danielli [57] 给出了非线性次椭圆方程的嵌入定理, Varopoulos 等 [58] 研究了 Carnot 群上的退化椭圆算子的热核及 Harnack 不等式, Yung [59] 给出了精确的 Sobolev 嵌入定理, 等等. 至今为止, 在 Hörmander 条件下的退化椭圆算子已经有了较为完备的理论框架, 可参见文献 [60].

对于退化椭圆算子的特征值问题, 最早的研究工作属于 Métivier. 在 1976 年, Métivier [61] 利用 Rothschild 和 Stein 建立的向量场的提升和逼近理论给出了满足 Métivier 条件下的 Hörmander 型自伴次椭圆算子的特征值的渐近公式. 值得指出的是, Métivier 条件是一个关于 Hörmander 向量场的非常强的假设, 在这一条件下, 由向量场生成的 Lie 代数将具备某种定常的结构 (在次 Riemann 几何

中称为等度正则 (equiregular) 结构, 参见文献 [51]), 即此向量场所张成的 Lie 代数在每一点处的结构与点的位置无关. 因此, 满足 Métivier 条件的向量场可以被某 Carnot 群上带有齐性结构的左不变向量场局部逼近, 进而具备非常良好的性质. 然而, 在实际应用中存在大量仅满足 Hörmander 条件但并不满足 Métivier 条件的向量场. 在这更一般的情形下, Métivier 所给出的渐近公式将不再适用. 本文接下来将主要介绍仅满足 Hörmander 条件的向量场所形成的一般自伴退化椭圆算子的 Dirichlet 特征值问题的研究结果和相关研究方法, 这里所涉及的是本文作者团队近期在这一研究领域的一些研究结果.

2 有限阶退化椭圆算子

Hörmander [31] 于 1967 年引入了 Hörmander 条件, 在几何上也称为 Chow 条件 (参见文献 [51]), 其定义如下:

定义 2.1 (Hörmander 条件 [31]) 设 W 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $X=(X_1,X_2,\ldots,X_m)$ 为定义在 W 上的光滑实向量场. 令 $I=(j_1,\ldots,j_k)$ $(1\leqslant j_i\leqslant m)$ 为多重指标, 记 I 的长度为 $|I|=k$. 则向量场的 k 阶交换子定义为

$$X_I=[X_{j_1},[X_{j_2},\cdots[X_{j_{k-1}},X_{j_k}]\cdots]].$$

记 $T_x(W)$ 为点 x 处的切空间, 如果存在正整数 Q, 使得

$$\operatorname*{span}_{|I|\leqslant Q}\{X_I(x)\}=T_x(W),\quad \forall\, x\in W,$$

则称向量场 X 在 W 上满足 Hörmander 条件. 这里 Q 为使得 Hörmander 条件成立的最小正整数, 称其为向量场 X 的 Hörmander 指标. 这时称向量场 X 是有限阶退化的, 也称向量场 X 为 Hörmander 向量场.

例 2.1 考虑定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的 Grushin 型向量场 $X=\{\partial_{x_1},x_1\partial_{x_2}\}$, 则 X 满足 Hörmander 条件, 并且其 Hörmander 指标 $Q=2$.

对 $\mathbb{R}^n$ 中开集 W 上的一组向量场 $X=(X_1,X_2,\ldots,X_m)$, 我们可引入带权的 Sobolev 空间, 其定义如下:

定义 2.2 (带权的 Sobolev 空间 [62]) 定义

$$H_X^1(W)=\{u\in L^2(W)\mid X_ju\in L^2(W),j=1,\ldots,m\}.$$

容易验证, $H_X^1(W)$ 为一个 Hilbert 空间, 其范数为

$$\|u\|^2_{H_X^1(W)}=\|u\|^2_{L^2(W)}+\|Xu\|^2_{L^2(W)},$$

其中

$$\|Xu\|^2_{L^2(W)}=\sum_{j=1}^m\|X_ju\|^2_{L^2(W)}.$$

令 $\Omega\subset\subset W$ 为有界的连通开子集, $\partial\Omega$ 为光滑的且关于向量场 X 是非特征的, 即对任意 $x_0\in\partial\Omega$, 存在至少一个向量场 X_{j_0} $(1\leqslant j_0\leqslant m)$ 使得

$$X_{j_0}(x_0)\notin T_{x_0}(\partial\Omega).$$

显然, 向量场 X 在 $\overline{\Omega}$ 上也满足 Hörmander 条件. 在下文中为了方便起见, 假设在 $\overline{\Omega}$ 上的 Hörmander 指标也是 Q. 记 $H_{X,0}^1(\Omega)$ 表示 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H_X^1(W)$ 中的闭包. 此时, $H_{X,0}^1(\Omega)$ 也是一个 Hilbert 空间.

对满足 Hörmander 条件的向量场 $X=(X_1,\dots,X_m)$, 令

$$\Delta_X := -\sum_{j=1}^m X_j^* X_j,$$

则 Δ_X 为有限阶退化的二阶椭圆算子, 其中 X_j^* 为 X_j 的伴随算子, 并且有

$$X_j^* = -X_j - \mathrm{div} X_j.$$

关于 Δ_X 的方程 $\Delta_X u = f$ 称为有限阶退化椭圆方程. 对于 Hörmander 向量场及对应的退化椭圆算子 Δ_X, Hörmander [31]、Kohn [32, 33]、Oleĭnik 和 Radkevich [34] 给出了以下的次椭圆估计, 因此也称 Δ_X 为次椭圆算子.

命题 2.1 (ε- 次椭圆估计 I) 假设向量场 $X=(X_1,X_2,\dots,X_m)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集 W 上满足 Hörmander 条件, 则对任意满足 $\Omega \subset\subset W$ 的有界开集 Ω, 存在常数 $C>0$ 和 $\varepsilon>0$ 使得

$$\|u\|_{H^\varepsilon(\mathbb{R}^n)}^2 \leqslant C\bigg(\sum_{i=1}^m \|X_i u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\bigg), \quad \forall\, u \in H_{X,0}^1(\Omega), \tag{2.1}$$

其中

$$\|u\|_{H^\varepsilon(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^\varepsilon |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

为经典的 Sobolev 范数.

命题 2.2 (ε- 次椭圆估计 II) 假设向量场 $X=(X_1,X_2,\dots,X_m)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集 W 上满足 Hörmander 条件. 令 $\Omega \subset\subset W$ 为任一个有界开集, 函数 $\phi,\phi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$, 且在 ϕ 的支集上有 $\phi_1 \equiv 1$, 则存在 $\varepsilon>0$, 使得对于任意 $s \geqslant 0$ 有

$$\|\phi u\|_{H^{s+2\varepsilon}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\|\phi_1 \Delta_X u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} + \|\phi_1 u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}), \quad \forall\, u \in L^2(\Omega) \cap C^\infty(\Omega), \tag{2.2}$$

以及

$$\|u\|_{H^{s+2\varepsilon}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\|\Delta_X u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}), \quad \forall\, u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{2.3}$$

其中正常数 C 与 s 和 Ω 有关, 但是与 ε 无关.

注 2.1 假设向量场 $X=(X_1,X_2,\dots,X_m)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集 W 上满足 Hörmander 条件, 并且其 Hörmander 指标为 Q. Rothschild 和 Stein [37] 证明了命题 2.1 和 2.2 中的参数 ε 可具体取到 $\frac{1}{Q}$, 这也是迄今为止已知的最佳次椭圆估计.

对 Hörmander 向量场, 我们有如下带权的 Poincaré 不等式:

命题 2.3 (带权的 Poincaré 不等式 [62, 63]) 假设向量场 $X=(X_1,X_2,\dots,X_m)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的某一连通开子集 W 上满足 Hörmander 条件, 设 $\Omega \subset\subset W$ 为一个有界连通的开子集, 且 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是光滑的并且关于向量场是非特征的, 则退化椭圆算子 Δ_X 在 Ω 上的第一 Dirichlet 特征值 λ_1 是严格正的. 进一步地, 有如下带权的 Poincaré 不等式成立:

$$\lambda_1 \int_\Omega |u|^2 dx \leqslant \int_\Omega |Xu|^2 dx, \quad \forall\, u \in H_{X,0}^1(\Omega). \tag{2.4}$$

3　退化椭圆算子的 Dirichlet 特征值问题

接着, 考虑退化椭圆算子 $-\Delta_X$ 在 $H^1_{X,0}(\Omega)$ 上的 Dirichlet 特征值问题

$$\begin{cases}-\Delta_X u=\lambda u, & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{3.1}$$

由带权的 Poincaré 不等式 (2.4) 和 Lax-Milgram 定理容易证得退化椭圆算子 Δ_X 存在逆算子 Δ_X^{-1}, 且 $\Delta_X^{-1}:L^2(\Omega)\to H^1_{X,0}(\Omega)$ 是连续线性算子. 再由次椭圆估计 (命题 2.1) 可知嵌入 $H^1_{X,0}(\Omega)\hookrightarrow H^{\frac{1}{Q}}(\Omega)$ 是连续的, 并且嵌入 $H^{\frac{1}{Q}}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ 是紧的. 所以空间 $H^1_{X,0}(\Omega)$ 也可以紧嵌入到 $L^2(\Omega)$, 故退化椭圆算子 Δ_X 的逆算子 Δ_X^{-1} 是一个从 $L^2(\Omega)$ 到 $L^2(\Omega)$ 的紧算子. 根据紧算子的谱理论可知退化椭圆算子具有正的离散的特征值, 记作 $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, 且满足 $0<\lambda_1<\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\cdots\leqslant\lambda_k\leqslant\cdots$, 并且当 $k\to+\infty$ 时有 $\lambda_k\to+\infty$. 若令 $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为特征值 $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ 对应的特征函数, 则 $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 $H^1_{X,0}(\Omega)$ 空间的一组正交基, 并且为 $L^2(\Omega)$ 的一组规范正交基.

关于退化椭圆算子 Δ_X 的特征值问题, 其最早的研究结果由 Métivier[61] 在 1976 年得到. Métivier 首先对向量场 X 增加了如下更强的假设:

定义 3.1 (Métivier 条件 [61])　对 W 中的任意一点 x, 记 $V_j(x)$ $(1\leqslant j\leqslant Q)$ 为 x 点处切空间 $T_x(W)$ 的一个子空间, 其由长度不超过 j 的向量场 $X_1,\dots,X_m$ 的交换子所张成. 如果在 $\overline{\Omega}$ 中的每一点 x 的某一个邻域内, 向量空间 $V_j(x)$ 的维数 $\dim V_j(x)$ 都为与点 x 选取无关的常数 ν_j, 则称向量场 X 在 Ω 上满足所谓的 Métivier 条件, 其对应的 Métivier 指标定义为

$$\nu=\sum_{j=1}^{Q} j(\nu_j-\nu_{j-1}),\quad \nu_0:=0.\tag{3.2}$$

这里的 Métivier 指标 ν 也称为 Ω 关于向量场 X 的 Hausdorff 维数 (或齐性维数).

在这一更强的假设下, Métivier 得到了如下的渐近估计结果:

命题 3.1 (参见文献 [61, 定理 1.3])　假设向量场 X 同时满足 Hörmander 条件和 Métivier 条件, 对 Ω 上的自伴退化椭圆算子 Δ_X 的 Dirichlet 特征值问题, 有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^{-\frac{\nu}{2}}N(\lambda)=\int_{\Omega}\gamma(x)dx,\tag{3.3}$$

其中 $\gamma(x)$ 是定义在 Ω 上的严格正的连续函数, $N(\lambda):=\#\{k\mid\lambda_k\leqslant\lambda\}$ 为不超过 λ 的 Dirichlet 特征值的个数 (也称为 Dirichlet 计数函数), ν 为 (3.2) 中定义的 Métivier 指标. 估计式 (3.3) 等价于

$$\lambda_k=ck^{\frac{2}{\nu}}+o(k^{\frac{2}{\nu}}),\quad k\to+\infty,\tag{3.4}$$

这里 c 是依赖于区域 Ω 和向量场 X 的正常数.

注 3.1　Métivier 建立的渐近结果 (3.3) 和 (3.4) 也适用于紧致无边流形上满足 Métivier 条件的 Hörmander 向量场 X 所对应的退化椭圆算子 Δ_X (参见文献 [61, 推论 1.2]).

然而, 在实际应用中存在很多满足 Hörmander 条件但并不满足 Métivier 条件的向量场 (如例 2.1 中的 Grushin 型向量场), 在这更一般的情形下, Métivier 的渐近结果将不再适用.

另一方面, 退化椭圆算子特征值的上下界估计也引起了人们的广泛关注. 2015 年, Chen 和 Luo[64] 利用次椭圆估计 (命题 2.1) 对一般满足 Hörmander 条件的退化椭圆算子 Δ_X 的 Dirichlet 特征值给出了如下的显式下界估计:

命题 3.2 (参见文献 [64, 定理 1.1]) 令向量场 X 满足 Hörmander 条件, λ_k 为退化椭圆算子 Δ_X 的第 k 个 Dirichlet 特征值, 则有

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j \geqslant C_1 k^{1+\frac{2}{nQ}}, \quad \forall\, k \geqslant 1, \tag{3.5}$$

这里

$$C_1=\frac{nQ(2\pi)^{\frac{2}{Q}}}{C(nQ+2)(|\Omega|\cdot|B_n|)^{\frac{2}{nQ}}},$$

其中 $C>0$ 为依赖于向量场 X 和区域 Ω 的常数, $|B_n|$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积, Q 为向量场 X 对应的 Hörmander 指标, $|\Omega|$ 表示有界区域 Ω 的体积 (即 Ω 的 Lebesgue 测度).

注 3.2 注意到 $\lambda_k \leqslant \lambda_{k+1}$, 从 (3.5) 可推导出 $\lambda_k \geqslant C_1 k^{\frac{2}{nQ}}$. 这个结果可以回到经典 Laplace 算子的情形, 即若取 $\Delta_X=\Delta$, 则 (3.5) 中的常数 C_1 可以取到 $\frac{nC_n}{n+2}$, 这与 Li 和 Yau [12] 给出的下界估计结果是一致的.

注 3.3 通过比较命题 3.2 和 Métivier 的渐近结果 (3.4), 容易观察到, 当 $Q>1$ 时, (3.5) 得到的 λ_k 的下界的多项式的阶是 k 的 $\frac{2}{Qn}$ 次幂, 如果向量场同时满足 Hörmander 条件和 Métivier 条件, 则从 (3.5) 得到的 λ_k 的下界的阶将严格小于 Métivier 的渐近式 (3.4) 中的阶. 这说明命题 3.2 中的下界估计的阶在 Métivier 条件下并不是最佳的. 事实上, 以下的例子说明 (3.5) 中下界估计的阶的确是不精确的.

例 3.1 考虑定义在 Heisenberg 群 $\mathbb{H}_N\subset\mathbb{R}^{2N+1}$ 上由向量场 $X=(X_1,\dots,X_N,Y_1,\dots,Y_N)$ 形成的 Kohn Laplace 算子, 其中

$$X_j=\partial_{x_j}+2y_j\partial_t, \quad Y_j=\partial_{y_j}-2x_j\partial_t, \quad j=1,\dots,N.$$

容易验证, X 同时满足 Hörmander 条件和 Métivier 条件, 其 Hörmander 指标和 Métivier 指标分别为 $Q=2$ 和 $\nu=2N+2$. 对这个特殊的向量场 X 所形成的退化椭圆算子 Δ_X 在区域 Ω 上的 Dirichlet 特征值问题 (3.1), Hansson 和 Laptev [65] 在 2008 年证明了

$$\lambda_k \geqslant \left(\frac{2(2\pi)^{N+1}(N+1)^{N+2}}{C_N(N+2)^{N+1}|\Omega|}\right)^{\frac{1}{N+1}}\cdot k^{\frac{1}{N+1}}, \quad \forall\, k\geqslant 1, \tag{3.6}$$

这里

$$C_N=\sum_{n_1,\dots,n_N\geqslant 0}(2(n_1+\cdots+n_N)+N)^{-(N+1)}.$$

从这一例子可知 $nQ=2(2N+1)>2N+2=\nu$, 这里特征值 λ_k 的下界关于 k 的阶为 $\frac{2}{\nu}=\frac{1}{N+1}$, 这与 Métivier 的渐近结果 (3.4) 中的阶是一致的, 故而是最佳的. 由 (3.5), 下界估计的阶是

$$\frac{2}{nQ}=\frac{1}{2N+1}<\frac{1}{N+1},$$

故而是不精确的.

为了得到在一般 Hörmander 条件下更为精确的下界估计, 我们需要引入如下的广义 Métivier 指标 (这也称为区域 Ω 关于向量场 X 的各向异性维数 (non-isotropic dimension) (参见文献 [59])).

定义 3.2 (广义 Métivier 指标[64])　对 W 中的任意一点 x, 同样记 $V_j(x)$ $(1 \leqslant j \leqslant Q)$ 为 x 点处切空间 $T_x(W)$ 的一个子空间, 它由长度不超过 j 的向量场 $X_1, \ldots, X_m$ 的交换子所张成. 对 W 中的任意一点 x, 令 $\nu_j(x) = \dim V_j(x)$, 则 x 点处的逐点齐性维数 $\nu(x)$ 定义为

$$\nu(x) := \sum_{j=1}^{Q} j(\nu_j(x) - \nu_{j-1}(x)), \quad \nu_0(x) := 0. \tag{3.7}$$

设 $\Omega \subset\subset W$ 为一个开子集, 定义 Ω 上的广义 Métivier 指标为

$$\tilde{\nu} = \max_{x \in \overline{\Omega}} \nu(x). \tag{3.8}$$

注 3.4　从 (3.7) 和 (3.8) 可以得到当 $Q > 1$ 时有 $n + Q - 1 \leqslant \tilde{\nu} < nQ$. 如果 Métivier 条件满足, 则有 $\tilde{\nu} = \nu$.

Chen 和 Luo[64] 考虑了 Grushin 型退化向量场 $X = (\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{n-1}}, x_1^l \partial_{x_n})$ 的 Dirichlet 特征值问题, 其中 l 为正整数. 假设有界区域 Ω 具有光滑非特征的边界 $\partial\Omega$, 且 $\Omega \cap \{x_1 = 0\} \neq \emptyset$. 这时, 向量场 X 在 Ω 上不满足 Métivier 条件, 但向量场 X 是有限退化的, 且 Hörmander 指标 $Q = l + 1 \geqslant 2$, 广义 Métivier 指标 $\tilde{\nu} = n + Q - 1 = n + l$. 通过运用适当的投影技巧, Chen 和 Luo[64] 得到了这种 Grushin 型算子的 Dirichlet 特征值的更佳的下界估计, 即 $\lambda_k \geqslant c_1 k^{\frac{2}{\tilde{\nu}}}$. 这一精确的下界结果后来被陈化等继续推广到更一般的 Grushin 型算子, 可参见文献 [66].

为了研究一般满足 Hörmander 条件的退化椭圆算子的特征值问题, 我们需要考虑其对应的退化的 Dirichlet 热核.

4　次椭圆 Dirichlet 热核

次椭圆算子 Δ_X 对应的次椭圆 Dirichlet 热核 $h_D(x, y, t)$ 是退化热算子 $\partial_t - \Delta_X$ 的基本解. 具体来说, 即对每个固定的点 $y \in \Omega$, $h_D(x, y, t)$ 为下列方程的解:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_X\right) h_D(x, y, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \tag{4.1}$$

并且 $h_D(x, y, t)$ 具备下列基本性质:

(1) $h_D(x, y, t) \in C^\infty(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^+) \cap C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+)$. 同时, 对任意固定的 $(y, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$, 有 $h_D(x, y, t) \in H_{X,0}^1(\Omega)$.

(2) 对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 有

$$\lim_{t \to 0^+} \int_\Omega h_D(x, y, t) \varphi(y) dy = \varphi(x).$$

(3) 对任意 $x, y \in \partial\Omega$, 有 $h_D(x, y, t) = 0$. 同时, $h_D(x, y, t)$ 关于 x 和 y 对称, 即

$$h_D(x, y, t) = h_D(y, x, t).$$

(4) 对任意 $s, t > 0$, 有

$$h_D(x, y, t + s) = \int_\Omega h_D(x, z, t) h_D(z, y, s) dz.$$

(5) 对任意 $(x,y,t)\in\Omega\times\Omega\times(0,+\infty)$, 有 $h_D(x,y,t)>0$. 同时, 对任意 $(x,t)\in\Omega\times(0,+\infty)$, 有

$$\int_\Omega h_D(x,y,t)dy\leqslant 1.$$

(6) 对每个函数 $f_0(x)\in L^2(\Omega)$, $f(x,t)=\int_\Omega h_D(x,y,t)f_0(y)dy$ 为下列退化热方程的解:

$$\begin{cases}\left(\Delta_X-\dfrac{\partial}{\partial t}\right)f(x,t)=0, & (x,t)\in\Omega\times(0,+\infty),\\ \lim\limits_{t\to 0+}f(x,t)=f_0(x), & 于\ L^2(\Omega),\\ f(x,t)=0, & 于\ \partial\Omega\times(0,+\infty).\end{cases}$$

事实上, 我们有如下的命题:

命题 4.1 (参见文献 [67, 命题 4.1]) 满足 Hörmander 条件的次椭圆算子 Δ_X 存在一个在 $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times(0,+\infty)$ 上适定的次椭圆 Dirichlet 热核 $h_D(x,y,t)$, 并且其有以下的级数展开:

$$h_D(x,y,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_i t}\phi_i(x)\phi_i(y),\tag{4.2}$$

这里 ϕ_i 为对应的 Dirichlet 特征函数, 同时对任意 $a>0$, 级数 (4.2) 在 $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times[a,+\infty)$ 上一致收敛. 进一步地, $h_D(x,y,t)$ 是唯一的, 并且满足以上提到的性质 (1)–(6).

文献 [68] 给出了通过半群理论建立经典 Laplace 算子的 Dirichlet 热核的方法, 此方法也适合于满足 Hörmander 条件的自伴次椭圆算子. 除了半群理论之外, 我们还可以通过概率论和位势理论等工具来建立次椭圆 Dirichlet 热核. 特别地, 我们也可以直接证明级数 (4.2) 的一致收敛性来建立次椭圆 Dirichlet 热核, 这个方法需要用到如下关于 Hörmander 向量场的带权的 Sobolev 不等式 (参见文献 [59]):

命题 4.2 (带权的 Sobolev 嵌入定理 [59]) 记 $\tilde{\nu}$ 为向量场 X 在 Ω 上的广义 Métivier 指标, 则对 $1\leqslant p<\tilde{\nu}$, 存在一个常数 $C=C(\Omega,X)>0$, 使得对任意 $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$, 有

$$\|u\|_{L^q(\Omega)}\leqslant C(\|Xu\|_{L^p(\Omega)}+\|u\|_{L^p(\Omega)}),\tag{4.3}$$

其中 $q=\frac{\tilde{\nu}p}{\tilde{\nu}-p}$.

结合带权的 Poincaré 不等式 (命题 2.3), 可得下面的带权的 Sobolev 不等式:

命题 4.3 (带权的 Sobolev 不等式) 存在依赖于 X 和区域 Ω 的常数 $C>0$, 使得对每个 $u\in H^1_{X,0}(\Omega)$ 有

$$\left(\int_\Omega |u|^{\frac{2\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}-2}}dx\right)^{\frac{\tilde{\nu}-2}{2\tilde{\nu}}}\leqslant C\left(\int_\Omega |Xu|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.\tag{4.4}$$

由带权的 Sobolev 不等式 (4.4) 并结合 Moser 迭代技术可以得到 Dirichlet 特征函数的 L^∞ 估计, 即下面的命题:

命题 4.4 (参见文献 [67, 命题 3.1]) 存在依赖于 X 和区域 Ω 的常数 $C_1>0$, 使得

$$\|\phi_i\|_\infty\leqslant C_1\cdot\lambda_i^{\frac{\tilde{\nu}}{4}},\tag{4.5}$$

其中 $\|\cdot\|_\infty$ 记作 Ω 上的 L^∞ 范数.

利用 Dirichlet 特征函数的 L^∞ 估计式 (4.5) 和特征值的显式下界估计 (3.5), 容易得到级数 (4.2) 的一致收敛性, 从而证明次椭圆 Dirichlet 热核 $h_D(x,y,t)$ 的存在性. 接着, 利用次椭圆估计 (命题 2.2) 和 Bony 强极值原理 (参见文献 [54, 定理 3.2]), 可证明 $h_D(x,y,t)$ 的基本性质 (1)–(6). 详细的证明可参见文献 [67, 命题 4.1].

文献 [67] 建立了次椭圆 Dirichlet 热核的对角渐近估计.

命题 4.5 (参见文献 [67, 命题 5.4]) 存在一个定义在 $\overline{\Omega}$ 上的非负可测函数 γ_0, 其对任意 $x\in\Omega$ 满足 $\gamma_0(x)>0$, 并且有

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{\nu(x)}{2}} h_D(x,x,t)=\gamma_0(x), \quad \forall\, x\in\overline{\Omega}. \tag{4.6}$$

进一步地, 从带权的 Sobolev 不等式还可推出次椭圆 Dirichlet 热核 $h_D(x,y,t)$ 的一致上界估计.

定理 4.1 (参见文献 [67, 定理 1.1]) $h_D(x,y,t)$ 满足如下的一致上界估计:

$$h_D(x,x,t)\leqslant \frac{C}{t^{\frac{\tilde{\nu}}{2}}}, \quad \forall\,(x,t)\in\Omega\times(0,+\infty), \tag{4.7}$$

这里 $\tilde{\nu}$ 为 X 在 Ω 上的广义 Métivier 指标, C 为依赖于 X 和 Ω 的正常数.

5 退化椭圆算子的 Dirichlet 特征值的估计

由次椭圆 Dirichlet 热核 $h_D(x,y,t)$ 的一致上界估计, 并利用 $h_D(x,y,t)$ 的级数展开公式, 可以得到 Dirichlet 特征值的精确下界估计.

定理 5.1 (参见文献 [67, 定理 1.2]) 假设 $X=(X_1,X_2,\ldots,X_m)$ 为一组定义在连通区域 $W\subset\mathbb{R}^n$ 上的实光滑向量场, 且在 W 上满足 Hörmander 条件. 令 $\Omega\subset\subset W$ 为一个有界的连通开子集, $\partial\Omega$ 为光滑的且关于向量场 X 是非特征的. 如果 Hörmander 指标 $Q\geqslant 2$, 则对任意 $k\geqslant 1$, 有

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\geqslant C_1\cdot k^{1+\frac{2}{\tilde{\nu}}}, \tag{5.1}$$

这里 $\tilde{\nu}$ 为向量场 X 在 Ω 上的广义 Métivier 指标, $C_1=(C\mathrm{e}|\Omega|)^{-\frac{2}{\tilde{\nu}}}$ 是一个依赖于 Ω 和 $\tilde{\nu}$ 的正常数, 常数 $C>0$ 来自于带权的 Sobolev 不等式 (4.4).

同时, 通过 Tauberian 定理 (参见文献 [69, 定理 1.1])、命题 4.5 和定理 4.1, 我们还可以建立对一般 Hörmander 向量场形成的自伴退化椭圆算子 Δ_X 的 Dirichlet 特征值的渐近公式.

定理 5.2 (参见文献 [67, 定理 1.3]) 假设向量场 $X=(X_1,X_2,\ldots,X_m)$ 满足定理 5.1 中的条件, 则在 $\overline{\Omega}$ 上存在一个非负的可测函数 γ_0, 其对任意 $x\in\Omega$ 满足 $r_0(x)>0$, 并且有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^{-\frac{\tilde{\nu}}{2}}N(\lambda)=\frac{1}{\Gamma(\frac{\tilde{\nu}}{2}+1)}\cdot\int_H\gamma_0(x)dx, \tag{5.2}$$

这里 $H:=\{x\in\Omega\mid \nu(x)=\tilde{\nu}\}$ 是区域 Ω 的一个子集, $\nu(x)$ 为逐点齐性维数, $N(\lambda):=\#\{k\mid 0<\lambda_k\leqslant\lambda\}$ 为 Dirichlet 计数函数. 进一步可得如下结论:

- 若 H 的 Lebesgue 测度 $|H|>0$, 则有

$$\lambda_k=\left(\frac{\Gamma(\frac{\tilde{\nu}}{2}+1)}{\int_H\gamma_0(x)dx}\right)^{\frac{2}{\tilde{\nu}}}\cdot k^{\frac{2}{\tilde{\nu}}}+o(k^{\frac{2}{\tilde{\nu}}}), \quad k\to+\infty; \tag{5.3}$$

若 $|H|=0$, 则有

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{k^{\frac{2}{\tilde{\nu}}}}{\lambda_k}=0. \tag{5.4}$$

定理 5.2 有如下明显的推论:

推论 5.1 记 λ_k 为次椭圆算子 Δ_X 在 Ω 上的 Dirichlet 特征值, 则 $\lambda_k \approx k^{\frac{2}{\tilde{\nu}}}$ $(k\to+\infty)$ 成立当且仅当 $|H|>0$. 这个结果的几何意义是, 当 $|H|>0$ 时, 区域 Ω 上关于向量场 X 的各向异性维数 $\tilde{\nu}$ 为谱不变量.

注 5.1 从定理 5.2 容易看到, 若集合 $H=\{x\in\Omega\mid \nu(x)=\tilde{\nu}\}$ 的 Lebesgue 测度为正, 则定理 5.1 中对特征值 λ_k 的下界估计关于 k 的阶是最优的. 特别地, 如果向量场满足 Métivier 条件, 则意味着 $H=\Omega$, 因此 $|H|>0$ 显然成立. 这时, 渐近公式 (5.3) 与 Métivier 的渐近公式 (3.4) 是一致的. 因此, 定理 5.2 推广了 Métivier 在 1976 年得到的结果 (命题 3.1). 可见 Métivier 当年所提出的 Métivier 条件仅给出了退化椭圆算子的特征值具有第一项渐近的充分条件, 而这里定理 5.2 中的条件 $|H|>0$ 是退化椭圆算子的特征值具有第一项渐近的充要条件. 如果集合 $|H|=0$, 则定理 5.2 的结论可以推导出当 $k\to+\infty$ 时 $\lambda_k^{-1}=o(k^{-\frac{2}{\tilde{\nu}}})$ (这表明 λ_k 趋向于无穷大的速度比 $k^{\frac{2}{\tilde{\nu}}}$ 要快), 这时在 (5.1) 中得到的特征值下界估计的阶将是不精确的.

注 5.2 定理 5.1 和 5.2 的结果也适用于紧致无边流形上满足 Hörmander 条件向量场 X 所对应的退化椭圆算子 Δ_X (参见文献 [70]).

注 5.3 这里关于一般的 Hörmander 向量场所对应的退化椭圆算子的特征值研究, 在复几何的一类问题的研究上具有重要的应用. 在复几何上需要研究 CR (Cauchy-Riemann) 流形上的 CR 向量场, 为简单起见, 令 M 为复 Euclid 空间 $\mathbb{C}^n$ $(n\geqslant 2)$ 上由 $\rho=0$ 定义的光滑实超曲面. 记 $(z_1,\ldots,z_n)$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的坐标. 不失一般性, 假设在 M 上有

$$\rho_{z_n}:=\frac{\partial\rho}{\partial z_n}\neq 0,$$

则

$$L_j=\frac{\partial}{\partial z_j}-\frac{\rho_{z_j}}{\rho_{z_n}}\frac{\partial}{\partial z_n}\quad (j=1,\ldots,n-1)$$

为 M 上 CR 向量场的一组基. 令 $X_j=\mathrm{Re}(L_j)$ 和 $X_{j+n}=\mathrm{Im}(L_j)$ 分别为复向量场 L_j 的实部和虚部, 则向量场 $X=(X_1,\ldots,X_{2n-2})$ 满足 Hörmander 条件当且仅当 M 在 Bloom-Graham 意义下是有限型的, 这在几何上等价于在 M 中不包含任何复超曲面 (参见文献 [71]). 当 M 为 Levi 非退化时, 向量场 X 的 Hörmander 指标为 2 并且满足 Métivier 条件. 此外, 另一种满足 Métivier 条件的情形是 M 为一致有限的非退化情形 (参见文献 [72]). 例如, $M\subset\mathbb{C}^3$ 是由 $z_1^2+z_2^2=z_3^2$ 定义的 Freeman 锥的情形. 一般来说, 具有上述更为复杂的几何背景的 Hörmander 向量场 X 不会满足 Métivier 条件. 向量场的广义 Métivier 指标与 M 上的 Levi 形式的退化程度有关, 此指标为 2 当且仅当其沿着至少一个 CR 方向的点是 Levi 非退化的, 而在其他情形时其指标将大于等于 3. 向量场 X 形成的 Hörmander 次椭圆算子与 M 上的 Kohn Laplace 算子密切相关. 在 Métivier 条件下, 我们知道对应的 M 为强拟凸的, 关于这方面谱理论的研究已有大量的结果 (参见文献 [73]). Métivier 条件不成立时对应于 M 为有限型并且弱拟凸的情形, 这方面目前的研究结果还所知甚少, 也更有意义和具有挑战性.

另外, 关于退化椭圆算子 Δ_X 的 Dirichlet 特征值 λ_k 的上界, 我们也有如下的结果:

定理 5.3 (参见文献 [67, 定理 1.4])　假设向量场 $X=(X_1,X_2,\ldots,X_m)$ 满足定理 5.1 中的条件, 令 λ_k 为自伴次椭圆算子 Δ_X 的第 k 个 Dirichlet 特征值, 则有

$$\lambda_k \leqslant \tilde{C}\cdot(k-1)^{\frac{2}{n}}+\lambda_1,\quad \forall\, k\geqslant 1, \tag{5.5}$$

这里 $\tilde{C}>0$ 是一个依赖于 X 和 Ω 的常数.

回顾前面经典的 Laplace 算子的特征值结果, 可知在非退化情形下 Laplace 算子的 Dirichlet 特征值 λ_k 有如下的渐近估计:

$$\lambda_k \approx k^{\frac{2}{n}},\quad k\to+\infty.$$

因此, (5.5) 的结果仅证明了对退化椭圆算子的 Dirichlet 特征值 λ_k 的上界估计具有与非退化情形时同样的阶, 即在一般 Hörmander 条件下, 退化椭圆算子的 Dirichlet 特征值 λ_k 的上界的阶不会超过 $k^{\frac{2}{n}}$. 若 Hörmander 指标 $Q>1$, 则有 $\tilde{\nu}>n$, 于是从上面推论 5.1 的结果可以看出, 当 $|H|>0$ 时, 这个上界估计 (5.5) 不是精确的. 但是当 $|H|=0$ 时, 退化椭圆算子的 Dirichlet 特征值 λ_k 趋于无穷大的速度比 $k^{\frac{2}{\tilde{\nu}}}$ 要快, 下面的结果将说明在这样的情形下, 甚至于退化椭圆算子的 Dirichlet 特征值 λ_k 的下界的阶也会达到 $k^{\frac{2}{n}}$ (也就是与经典的非退化椭圆算子的特征值的增长阶数是一致的). 这表明在定理 5.3 中得到的退化椭圆算子的 Dirichlet 特征值 λ_k 的上界的阶在某些一般的退化情形下已经是无法再改进了, 所以较之经典的非退化情形, 对退化椭圆算子的特征值研究要复杂得多.

为了这一目的, 我们需要引入以下的条件:

条件 (A)　称向量场 $X=(X_1,X_2,\ldots,X_m)$ 在 Ω 上满足假设条件 (A), 如果

$$\int_{\Omega}\frac{dx}{\sum|\det(Y_{i_1},Y_{i_2},\ldots,Y_{i_n})(x)|}<+\infty, \tag{5.6}$$

这里的求和将遍历集合 $\{X_1,X_2,\ldots,X_m\}$ 的所有 n 重组合 $(Y_{i_1},Y_{i_2},\ldots,Y_{i_n})$.

注 5.4　$|H|=0$ 为条件 (A) 的必要条件. 文献 [67] 证明了当 $n\geqslant 3$ 时, $\mathbb{R}^n$ 上的向量场 $\{\partial_{x_1},\ldots,\partial_{x_{n-1}},x_1\partial_{x_n},\ldots,x_{n-1}\partial_{x_n}\}$ 满足假设条件 (A).

在条件 (A) 下, 我们有如下更高阶的下界估计:

定理 5.4 (参见文献 [67, 定理 1.5])　若向量场 $X=(X_1,X_2,\ldots,X_m)$ 满足定理 5.1 中的条件, 并且在 Ω 上满足假设条件 (A), 则有

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \geqslant C\cdot k^{1+\frac{2}{n}},\quad \forall\, k\geqslant 1, \tag{5.7}$$

这里常数 $C>0$ 与 k 无关, λ_i 为第 i 个 Dirichlet 特征值.

注 5.5　定理 5.4 的结论意味着, 在假设条件 (A) 下, 退化椭圆算子的 Dirichlet 特征值 $\lambda_k\geqslant C\cdot k^{\frac{2}{n}}$. 因此, 在这种情形下有 $\lambda_k\approx k^{\frac{2}{n}}$ $(k\to+\infty)$, 此时关于 λ_k 的上界估计 (5.5) 里 k 的阶数是最佳的.

参考文献

1 Weyl H. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung). Math Ann, 1912, 71: 441–479

2 Courant R. Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Math Z, 1920, 7: 1–57

3 Carleman T. Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes. C R Sieme Congr Math Scand (Stockholm), 1935, 8: 34–44

4 Carleman T. Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen. Ber Sachs Acad Wiss Leipzig, 1936, 88: 119–132

5 Hörmander L. The spectral function of an elliptic operator. Acta Math, 1968, 121: 193–218

6 Seeley R. A sharp asymptotic remainder estimate for the eigenvalues of the Laplacian in a domain of $\mathbb{R}^3$. Adv Math, 1978, 29: 244–269

7 Ivrii V Y. Second term of the spectral asymptotic expansion of the Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary. Funct Anal Appl, 1980, 14: 98–106

8 Melrose R B. Weyl's conjecture for manifolds with concave boundary. Proc Sympos Pure Math, 1980, 36: 257–274

9 Levitan B M. Asymptotic behaviour of the spectral function of an elliptic operator. Russian Math Surveys, 1971, 26: 165–232

10 Pólya G. On the eigenvalues of vibrating membranes. Proc Lond Math Soc (3), 1961, 3: 419–433

11 Cheng S Y, Li P. Heat kernel estimates and lower bound of eigenvalues. Comment Math Helv, 1981, 56: 327–338

12 Li P, Yau S T. On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem. Comm Math Phys, 1983, 88: 309–318

13 Li P. Geometric Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 2012

14 Kröger P. Estimates for sums of eigenvalues of the Laplacian. J Funct Anal, 1994, 126: 217–227

15 Laptev A. Dirichlet and Neumann eigenvalue problems on domains in Euclidean spaces. J Funct Anal, 1997, 151: 531–545

16 Cheng Q M, Wei G X. A lower bound for eigenvalues of a clamped plate problem. Calc Var Partial Differential Equations, 2011, 42: 579–590

17 Cheng Q M, Yang H C. Bounds on eigenvalues of Dirichlet Laplacian. Math Ann, 2007, 337: 159–175

18 Cheng Q M, Yang H C. Estimates on eigenvalues of Laplacian. Math Ann, 2005, 331: 445–460

19 Avakumović V G. Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Math Z, 1956, 65: 327–344

20 Kac M. Can one hear the shape of a drum? Amer Math Monthly, 1966, 73: 1–23

21 Payne L E, Pólya G, Weinberger H F. On the ratio of consecutive eigenvalues. J Math Phys, 1956, 35: 289–298

22 Pleijel A. On the eigenvalues and eigenfunctions of elastic plates. Comm Pure Appl Math, 1950, 3: 1–10

23 Thompson C J. On the ratio of consecutive eigenvalues in N-dimensions. Stud Appl Math, 1969, 48: 281–283

24 Chavel I. Eigenvalues in Riemannian Geometry, Volume 115. Orlando: Academic Press, 1984

25 Herot A. Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators. Basel: Birkhäuser Verlag, 2006

26 Hile G N, Protter M H. Inequalities for eigenvalues of the Laplacian. Indiana Univ Math J, 1980, 29: 523–538

27 Levine H A, Protter M H, Payne L E. Unrestricted lower bounds for eigenvalues for classes of elliptic equations and systems of equations with applications to problems in elasticity. Math Methods Appl Sci, 1985, 7: 210–222

28 Ilias S, Makhoul O. Universal inequalities for the eigenvalues of a power of the Laplace operator. Manuscripta Math, 2010, 132: 75–102

29 McKean Jr H P, Singer I M. Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. J Differential Geom, 1967, 1: 43–69

30 Melas A D. A lower bound for sums of eigenvalues of the Laplacian. Proc Amer Math Soc, 2003, 131: 631–636

31 Hörmander L. Hypoelliptic second order differential equations. Acta Math, 1967, 119: 147–171

32 Kohn J J. Pseudo-differential operators and hypoellipticity. Proc Sympos Pure Math, 1973, 23: 61–69

33 Kohn J J. Pseudo-differential operators and non-elliptic problems. In: Pseudo-differential Operators. Heidelberg-Berlin: Springer, 2010, 157–165

34 Oleĭnik O A, Radkevich E V. Second Order Equations With Nonnegative Characteristic Form. Boston: Springer, 1973

35 Folland G B, Stein E M. Estimates for the $\overline{\partial_b}$-complex and analysis on the Heisenberg group. Comm Pure Appl Math, 1974, 27: 429–522

36 Folland G B. Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups. Ark Mat, 1975, 13: 161–207

37 Rothschild L P, Stein E M. Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. Acta Math, 1976, 137: 247–320

38 Rothschild L P. A criterion for hypoellipticity of operators constructed from vector fields. Comm Partial Differential Equations, 1979, 4: 645–699

39 Nourrigat J. Subelliptic Estimates for Systems of Pseudo-differential Operators. Recife: University of Recife, 1982

40 Nourrigat J. Subelliptic systems. Comm Partial Differential Equations, 1990, 15: 341–405

41 Nourrigat J. Systèmes sous-elliptiques II. Invent Math, 1991, 104: 377–400

42 Helffer B, Nier F. Hypoelliptic Estimates and Spectral Theory for Fokker-Planck Operators and Witten Laplacians. Berlin: Springer, 2005

43 Helffer B, Nourrigat J F. Approximation d'un système de champs de vecteurs et applications à l'hypoellipticité. Ark Mat, 1979, 17: 237–254

44 Helffer B, Nourrigat J. Hypoellipticité Maximale pour des Opérateurs Polynomes de Champs de Vecteurs. Progress in Mathematics, vol. 58. Boston: Birkhäuser, 1985

45 Jerison D S. The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition. Duke Math J, 1986, 53: 503–523

46 Jerison D S, Sánchez-Calle A. Estimates for the heat kernel for a sum of squares of vector fields. Indiana Univ Math J, 1986, 35: 835–854

47 Sánchez-Calle A. Fundamental solutions and geometry of the sum of squares of vector fields. Invent Math, 1984, 78: 143–160

48 Xu C J. Regularity for quasilinear second-order subelliptic equations. Comm Pure Appl Math, 1992, 45: 77–96

49 Xu C J. Semilinear subelliptic equations and Sobolev inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition. Chinese J Contemp Math, 1994, 15: 183–193

50 Bramanti M, Brandolini L, Lanconelli E, et al. Non-Divergence Equations Structured on Hörmander Vector Fields: Heat Kernels and Harnack Inequalities. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 204. Providence: Amer Math Soc, 2010

51 Montgomery R. A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91. Providence: Amer Math Soc, 2002

52 Chow W L. Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. In: The Collected Papers of Wei-Liang Chow. World Scientific Series in 20th Century Mathematics, vol. 8. Singapore: World Scientific, 2002, 47–54

53 Rashevskii P K. About connecting two points of complete non-holonomic space by admissible curve (in Russian). Uch Zapiski Ped Inst Libknexta, 1938, 2: 83–94

54 Bony J M. Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1969, 19: 277–304

55 Fefferman C, Phong D H. Subelliptic eigenvalue problems. In: Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund, Volume II. Belmont: Wadsworth International Group, 1981, 590–606

56 Nagel A, Stein E M, Wainger S. Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties. Acta Math, 1985, 155: 103–147

57 Capogna L, Danielli D, Garofalo N. An embedding theorem and the Harnack inequality for nonlinear subelliptic equations. Comm Partial Differential Equations, 1993, 18: 1765–1794

58 Varopoulos N T, Saloff-Coste L, Coulhon T. Analysis and Geometry on Groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1993

59 Yung P L. A sharp subelliptic Sobolev embedding theorem with weights. Bull Lond Math Soc, 2015, 47: 396–406

60 Bramanti M. An Invitation to Hypoelliptic Operators and Hörmander's Vector Fields. Cham: Springer, 2014

61 Métivier G. Fonction spectrale et valeurs propres d'une classe d'operateurs non elliptiques. Comm Partial Differential Equations, 1976, 1: 467–519

62 Xu C J. Subelliptic variational problems. Bull Soc Math France, 1990, 118: 147–169

63 Jost J, Xu C J. Subelliptic harmonic maps. Trans Amer Math Soc, 1998, 350: 4633–4649

64 Chen H, Luo P. Lower bounds of Dirichlet eigenvalues for some degenerate elliptic operators. Calc Var Partial Differential Equations, 2015, 54: 2831–2852

65 Hansson A M, Laptev A. Sharp spectral inequalities for the Heisenberg Laplacian. In: Groups and Analysis: The Legacy of Hermann Weyl. Cambridge: Cambridge University Press, 2008, 100–115

66 Chen H, Chen H G, Duan Y R, et al. Lower bounds of Dirichlet eigenvalues for a class of finitely degenerate Grushin type elliptic operators. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2017, 37: 1653–1664

67 Chen H, Chen H G. Estimates of Dirichlet eigenvalues for a class of sub-elliptic operators. Proc Lond Math Soc (3), 2020, doi: 10.1112/plms.12392

68 Grigor'yan A. Heat Kernel and Analysis on Manifolds. Providence: Amer Math Soc, 2009

69 Arendt W, Nittka R, Peter W, et al. Weyl's law: Spectral properties of the Laplacian in mathematics and physics. In: Mathematical Analysis of Evolution, Information, and Complexity. New York: John Wiley & Sons, 2009, 1–71

70 Chen H, Chen H G. Estimates of eigenvalues for subelliptic operators on compact manifold. J Math Pures Appl (9), 2019, 131: 64–87

71 Baouendi M S, Ebenfelt P, Rothschild L P, et al. Real Submanifolds in Complex Space and Their Mappings. Princeton: Princeton University Press, 1999
72 Baouendi M S, Huang X, Rothschild L P. Regularity of CR mappings between algebraic hypersurfaces. Invent Math, 1996, 125: 13–36
73 Beals R, Greiner P C, Stanton N K. The heat equation on a CR manifold. J Differential Geom, 1984, 20: 343–387

Eigenvalue problem of degenerate elliptic operators

Hua Chen & Hongge Chen

Abstract We briefly introduce the methods to study the eigenvalue problem of degenerate elliptic operators and some results in this area. Focusing on the finitely degenerate elliptic operator, we mainly present the results of the upper and lower bounds of Dirichlet eigenvalues and their asymptotic estimates.

Keywords **sub-elliptic operator, sub-elliptic Dirichlet heat kernel, Dirichlet eigenvalue, weighted Sobolev space, generalized Métivier index**

MSC(2020) **35P15, 35P20, 35J70**

doi: 10.1360/SSM-2020-0219