

基于点密度插值的拓扑优化密度过滤方法研究¹⁾丁胜勇 范勇²⁾ 杨广栋

(三峡大学水电工程施工与管理湖北省重点实验室, 湖北宜昌 443002)

(三峡大学水利与环境学院, 湖北宜昌 443002)

摘要 在基于密度描述的拓扑优化方法中, 棋盘格式和灰度单元等数值不稳定问题严重影响着优化构型的可制造性和实用性. 为了解决这些问题, 提出了一种改进的密度过滤方法. 该方法首先将正方形单元中心点处密度作为设计变量, 并利用点插值方法获取设计域内光滑连续的材料密度分布. 然后, 将单元平均密度作为过滤后的单元物理密度用于结构刚度计算. 因此, 改进的密度过滤仍是一种线性过滤方法, 仅需在经典密度过滤基础上进行简单修改. 本文方法的核心在于利用了 Voronoi 图的最邻近原则, 该原则使得目标单元中心处的点密度对该单元内任意点的密度插值权重最大. 进一步地, 通过在点插值权重函数中引入一个优化参数, 达到控制灰度单元比例和确保收敛稳定性的目的. 与 Heaviside 映射过滤不同, 该优化参数并不会增加优化问题的非凸性, 导致优化求解的收敛性变差. 同时, 改进的密度过滤天然具有保体积特性, 有效避免了类似 Heaviside 映射过滤中迭代振荡现象的发生. 最小柔顺化问题的算例结果表明, 改进的密度过滤通过优化参数的改变, 既可避免棋盘格式, 又能获得接近理想的 0~1 分布的优化结果. 而且, 相较于 Heaviside 映射过滤, 其在求解过程中具有更好的鲁棒性及优化效率.

关键词 拓扑优化, 密度过滤, 棋盘格式, 灰度单元, 点插值方法

中图分类号: O302 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-24-108

RESEARCH ON TOPOLOGICAL OPTIMIZATION DENSITY FILTERING METHOD
BASED ON NODAL DENSITY INTERPOLATION¹⁾Ding Shengyong Fan Yong²⁾ Yang Guangdong(Hubei Key Laboratory of Construction and Management in Hydropower Engineering, China Three Gorges University,
Yichang 443002, Hubei, China)

(College of Hydraulic and Environmental Engineering, China Three Gorges University, Yichang 443002, Hubei, China)

Abstract In density-based topology optimization methods, the numerical instability problems, such as chessboard patten and gray scale elements affect the manufacturability and practicality of optimized structures seriously. In order to eliminate these problems, the paper proposes a modified density filtering method. The proposed method first takes the densities at the center points of square elements as the design variables, and uses the nodal interpolation method to obtain a smooth and continuous material density distribution within the design domain. Then, the average densities of elements are used as the filtered physical densities for structural stiffness calculation. Therefore, the modified density filter is still a linear filtering method, which only requires simple modifications on the basis of classical density filter. The key of the

2024-03-08 收稿, 2024-05-31 录用, 2024-06-01 网络版发表.

1) 湖北省高校优秀中青年科技创新团队 (T2020005), 湖北省杰出青年科学基金 (2023AFA048) 和湖北省青年拔尖人才培养计划资助项目.

2) 通讯作者: 范勇, 教授, 主要研究方向为水工结构智能建造技术. E-mail: yfan@ctgu.edu.cn

引用格式: 丁胜勇, 范勇, 杨广栋. 基于点密度插值的拓扑优化密度过滤方法研究. 力学学报, 2024, 56(9): 2788-2798

Ding Shengyong, Fan Yong, Yang Guangdong. Research on topological optimization density filtering method based on nodal density interpolation. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2024, 56(9): 2788-2798

modified density filter lies in utilizing the nearest neighbor principle of Voronoi diagram, which maximizes the density interpolation weight of the nodal density at the center of the target element for any point within the element. Furthermore, by introducing an optimization parameter into the nodal interpolation weight function, the goals of controlling the proportion of grayscale elements and ensuring convergence stability are achieved. Unlike the Heaviside mapping filters, the added optimization parameter does not increase the non-convexity of the optimization problem, resulting in a decrease in the convergence of the optimization solution. And the modified density filter naturally has the characteristic of volume preserving, effectively avoiding the occurrence of iterative oscillation phenomena similar to the Heaviside-type filters. The numerical results of the compliance minimization problem show that the modified density filter can avoid chessboard patten and obtain optimization result close to the ideal 0 ~ 1 distribution by only changing the optimization parameter. Moreover, compared to the Heaviside mapping filters, the proposed method has better robustness and optimization efficiency in the solving process.

Key words topology optimization, density filter, checkerboard patten, gray scale element, nodal interpolation method

引言

在连续体拓扑优化领域, 基于密度描述的方法常面临棋盘格式和网格依赖性数值不稳定的问题. 为避免这些数值上的不稳定性并确保优化结果的制造可行性, 正则化处理在拓扑优化中显得十分必要. 正则化处理是对优化问题施加的额外约束, 这种约束可以是显式的, 例如周界控制^[1]、局部或全局的密度梯度约束^[2-3]等, 也可以是隐式的, 例如敏度过滤^[4]、密度过滤^[5]和 PDE 过滤^[6]等. 这些约束能够修正设计变量值, 从而避免不合理的材料分布, 使优化结果更为稳定和可靠. 密度过滤作为一种典型的正则化技术, 主要通过单元本身及其一定半径内邻近单元的密度值的加权平均来替换原单元的密度值. 在实际分析中, 密度过滤展现出良好的稳定性和收敛性, 因此被广泛采用. 密度过滤的引入对于解决棋盘格式和网格依赖性数值不稳定起到了重要作用^[7-8]. 然而, 密度过滤也带来了一种新的问题, 即边界扩散现象^[9]. 这种现象具体表现为在结构边界区域出现大量灰度单元, 这些单元的密度值介于有效材料和孔洞之间, 导致边界识别变得困难, 使得拓扑结构缺乏实际制造和使用的价值.

针对拓扑优化中的灰度单元问题, 可通过定义密度阈值将大于某个中间密度值的部分直接视为固体部分^[10], 但这种后处理结果在某些情况下是不可接受的, 例如在柔性机构设计中, 清晰的边界定义对于机构的运动和功能尤为关键^[6]. 为此, 近 20 年来, 国内外学者在抑制灰度单元方面进行了广泛的研究并提出了多种有效的解决方案^[11-18]. 在这些方案中,

Heaviside 映射方案^[16,18]是最为常见的一种, 并在许多实际工程问题中都得到了成功的应用, 例如增材制造^[19]、流热耦合问题^[20]、非概率可靠性分析^[21]、破损-安全结构设计^[22]以及非线性刚度问题^[23]等. Heaviside 映射方案是在密度过滤的基础上, 通过额外附加一个 Heaviside 投影过滤, 利用 Heaviside 跃迁函数的特性, 将散乱的灰度单元惩罚归拢至 0 或 1. 由于 Heaviside 跃迁函数会导致优化问题变得高度非凸, Heaviside 投影过滤通常需要结合一个惩罚参数的连续性方案来避免收敛性问题, 即在优化过程中通过逐步增大惩罚参数值来逐渐加大惩罚力度. 此外, 为进一步确保优化过程的收敛性, 还需收紧优化求解器移动限制^[24]及采用更严格的收敛准则^[25]. Heaviside 投影过滤存在的另一个潜在问题是可能违反体积约束. 具体而言, Heaviside 投影过滤前后的体积分数可能并不相等, 导致目标函数和体积分数出现明显迭代振荡现象. 为此, 一种保体积 Heaviside 投影^[15], 在保证体积约束的条件下可得到接近 0 ~ 1 分布的最优拓扑. 但该映射函数形式复杂, 且在迭代过程中需重复计算一个用来保体积的阈值参数, 计算相对低效.

针对上述问题, 本文基于点密度插值技术提出一种改进的密度过滤方法, 以克服优化中出现的棋盘格式和灰度单元等数值不稳定问题. 通过与经典密度过滤和 Heaviside 映射过滤的对比, 阐明所提方法的优越性. 最后, 利用最小柔顺性优化问题的标准算例验证改进的密度过滤方法在优化求解过程中的稳定性和高效性.

1 基于密度描述的拓扑优化模型

1.1 SIMP 密度插值模型

最小柔顺性优化问题是拓扑优化最流行的测试算例之一. 在基于有限元的密度描述模型中, 设计区域被有限元网格离散化, 因此, 优化问题离散后的数学表达式为

$$\left. \begin{aligned} \text{find } \boldsymbol{\rho} &= \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n\} \\ \text{min } f &= \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_e \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e \\ \text{s.t. } \mathbf{K} \mathbf{U} &= \mathbf{F} \\ g &= V/V_0 - g_v \leq 0 \\ \mathbf{0} &\leq \boldsymbol{\rho} \leq \mathbf{1} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, $\boldsymbol{\rho}$ 表示密度设计变量向量, n 为密度设计变量的数量, f 为结构的柔度值, $\mathbf{K}$, $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{F}$ 分别为整体刚度矩阵, 位移列向量和等效结点力列向量, $\mathbf{k}_e$ 和 $\mathbf{u}_e$ 分别对应单元 e 的刚度矩阵和位移列向量, V 和 V_0 分别表示材料体积和设计域体积, g_v 是体积分数阈值.

在 SIMP 方法中, 单元密度 ρ_i 与单元弹性模量 E_i 之间存在如下函数关系

$$E_i = [\varepsilon + \rho_i^p (1 - \varepsilon)] E_0 \quad (p \geq 1) \quad (2)$$

其中, E_i 是实体材料弹性模量, ε 是为防止刚度矩阵奇异的一个极小值, p 是用于惩罚灰度单元的惩罚指数.

1.2 经典的密度过滤及 Heaviside 投影过滤

密度过滤是在特定的过滤半径下, 通过加权平均对原设计密度变量进行过滤. 过滤后的密度变量也称为物理密度, 在优化过程中主要用于结构刚度计算, 其表达式为^[5]

$$\bar{\rho}_i = \frac{\sum_{j \in \Omega_i} H_{ij} v_j \rho_j}{\sum_{j \in \Omega_i} H_{ij} v_j} \quad (3)$$

其中, ρ_j 和 $\bar{\rho}_i$ 分别表示过滤前和过滤后的密度变量, v_j 是单元 j 的体积, Ω_i 为以单元 i 为中心的过滤半径内的单元集合, 权重函数 H_{ij} 可表示为

$$H_{ij} = \max \{0, 1 - d(i, j) / R\} \quad (4)$$

其中, $d(i, j)$ 表示单元 i 和 j 中心点的空间距离, R 为过滤半径.

为消除密度过滤产生的灰度单元, 可进一步使用 Heaviside 投影过滤. 3 种经典的 Heaviside 映射方

案包括: Heaviside 映射^[18]、改进的 Heaviside 映射^[16]和保体积 Heaviside 映射^[15], 其表达式分别为

$$\tilde{\rho}^1 = 1 - e^{-\beta \bar{\rho}} + \bar{\rho} e^{-\beta} \quad (5)$$

$$\tilde{\rho}^2 = e^{-\beta(1-\bar{\rho})} - (1-\bar{\rho})e^{-\beta} \quad (6)$$

$$\tilde{\rho}^3 = \begin{cases} \eta [e^{-\beta(1-\bar{\rho}/\eta)} - (1-\bar{\rho}/\eta)e^{-\beta}] & (0 \leq \bar{\rho} \leq \eta) \\ (1-\eta) [1 - e^{-\beta(\bar{\rho}-\eta)/(1-\eta)} + (\bar{\rho}-\eta)e^{-\beta/(1-\eta)}] + \eta & (\eta \leq \bar{\rho} \leq 1) \end{cases} \quad (7)$$

其中, $\tilde{\rho}^1$ 、 $\tilde{\rho}^2$ 和 $\tilde{\rho}^3$ 表示 Heaviside 投影过滤后的单元密度, β 是 Heaviside 投影过滤中的惩罚因子, 当 β 不断增大时, 上述投影函数逐步逼近 Heaviside 跃迁函数. η 是保体积 Heaviside 映射用来保证过滤前后体积相等的阈值, 其值由如下保体积条件计算得到

$$\sum_e \bar{\rho}_e v_e = \sum_e \tilde{\rho}_e^3 v_e \quad (8)$$

式 (8) 可用二分法或黄金分割搜索法进行求解^[15].

2 基于点密度插值的改进密度过滤

2.1 点密度插值方法

与上述基于单元层次的过滤不同, 另一种流行的方式是通过插值或近似方法得到设计域内光滑连续分布的密度场, 即点密度插值^[26]. 相较于单元密度, 点密度在设计变量的定义上具有更好的灵活性和自由度. 在点密度插值中, 密度变量点的位置既可与有限元网格相关, 例如单元结点^[27]、单元边中点^[28]或子单元中心点^[29]等, 也可与有限元网格无关, 例如独立点密度^[30-31].

根据点密度插值方法, 设计域内任意点 $\mathbf{x}_i$ 处的插值密度 $\hat{\rho}(\mathbf{x}_i)$ 可表示为

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}_i) = \frac{\sum_{j \in \Omega_{x_i}} \omega_j(\mathbf{x}_i) \rho_j}{\sum_{j \in \Omega_{x_i}} \omega_j(\mathbf{x}_i)} \quad (9)$$

其中, Ω_{x_i} 表示以点 $\mathbf{x}_i$ 为中心的插值半径内的设计变量点集合, $\omega_j(\mathbf{x}_i)$ 为点插值权重函数.

对比式 (3) 和式 (9), 两者在形式上具有相似性. 与经典密度过滤相同, 由于提供了对材料密度的局部梯度控制, 点密度插值也可有效抑制棋盘格式的产生, 但其优化结果仍存在灰度单元的问题. 此外,

对于点密度插值, 由于材料密度在每个单元内部具有空间非均匀性, 优化迭代过程的灵敏度计算会涉及到复杂的单元积分问题, 进而导致计算效率的下降.

2.2 改进的密度过滤

在点密度插值的基础上, 本节进一步提出一种改进的密度过滤方法. 如图 1 所示, 首先, 将设计域离散为均匀正方形网格, 并将每个正方形单元中心点的密度值作为设计变量 ρ . 然后, 通过定义一个插值半径 R 并利用式 (9), 获得设计域内光滑连续的密度场 $\hat{\rho}(\mathbf{x})$. 最后, 将每个正方形单元内的平均密度作为过滤后的单元物理密度, 其值可由下式计算

$$\hat{\rho}_i = \int_{\Omega_i^e} \hat{\rho}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} / |E_i| \approx \frac{1}{|E_i|} \sum_{j=1}^{np} |J|_j \omega_j \hat{\rho}(P_j) \quad (10)$$

其中, Ω_i^e 表示第 i 个单元所在区域, $|E_i|$ 为其单元面积, P_j 和 ω_j 分别表示高斯积分公式的积分点和权函数, $|J|$ 为雅可比行列式, np 为积分点个数, 本文取 $np = 4$.

由式 (10) 计算的单元物理密度, 既隐含了对材料密度的局部梯度控制, 又有效避免了在优化迭代过程中进行单元积分计算. 式 (9) 中的权重函数采用文献 [31] 推荐的 Shepard 插值, 其表达式为

$$\omega_i(\mathbf{x}) = 1/d_i^q(\mathbf{x}) \quad (q \geq 1) \quad (11)$$

其中, $d_i(\mathbf{x})$ 表示插值点 $\mathbf{x}$ 和设计变量点 i 的空间距离. 值得一提的是, 式 (11) 在文献 [31] 的基础上额外增加了一个权重指数 q , 其主要作用是抑制边界扩展现象, 其取值将在 3.2 节进行具体讨论.

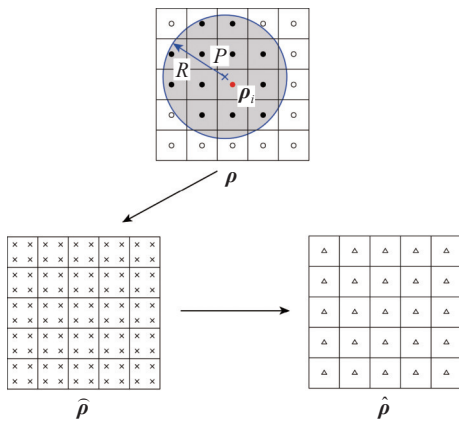


图 1 基于点密度插值的改进密度过滤

Fig. 1 Modified density filter based nodal density interpolation

3 Heaviside 投影过滤与改进的密度过滤对比

3.1 灵敏度分析

优化问题式 (1) 采用 MMA 求解器求解, 因此需要计算目标函数和体积约束函数对设计变量的一阶导数.

3.1.1 Heaviside 映射过滤

首先, 对于经典密度过滤, 可将式 (3) 改写成矩阵形式

$$\bar{\rho} = \mathbf{P}^{\mathcal{F}_1} \rho \quad (12)$$

其中, ρ 和 $\bar{\rho}$ 分别为过滤前和过滤后的单元密度列向量且 $\rho, \bar{\rho} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, 线性映射矩阵 $\mathbf{P}^{\mathcal{F}_1}$ 表达式为

$$(\mathbf{P}^{\mathcal{F}_1})_{ij} = H_{ij} v_j \left/ \sum_{j \in \Omega_i} H_{ij} v_j \right. \quad (13)$$

且 $\mathbf{P}^{\mathcal{F}_1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. 由于 Heaviside 投影过滤是对密度过滤后的单元密度进行二次过滤, 根据链式求导法则, 其对应的目标函数的灵敏度为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \rho} &= \frac{\partial f}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \rho} = (\mathbf{P}^{\mathcal{F}_1})^T \mathbf{J}_{\mathcal{F}_n}(\bar{\rho}) \frac{\partial f}{\partial \bar{\rho}} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\rho}} \right)_i &= \frac{\partial f}{\partial \bar{\rho}_i} = p(1-\varepsilon) \tilde{\rho}_i^{(p-1)} \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_i^0 \mathbf{u}_i \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中, $\bar{\rho}$ 为 Heaviside 投影过滤后的单元密度列向量且 $\bar{\rho} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{k}_i^0$ 为当 $E_i = E_0$ 时, 第 i 个单元的刚度矩阵. $\mathbf{J}_{\mathcal{F}_n}(\bar{\rho}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为 Heaviside 非线性映射 $\mathcal{F}_n: \bar{\rho} \rightarrow \bar{\rho}$ 的雅可比矩阵, 其表达式为

$$\mathbf{J}_{\mathcal{F}_n}(\bar{\rho}) = \text{diag}[\bar{\rho}'_1(\bar{\rho}_1), \bar{\rho}'_2(\bar{\rho}_2), \dots, \bar{\rho}'_n(\bar{\rho}_n)] \quad (15)$$

最后, 体积约束的灵敏度为

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} = (\mathbf{P}^{\mathcal{F}_1})^T \mathbf{J}_{\mathcal{F}_n}(\bar{\rho}) \frac{\mathbf{v}}{V_0} \quad (16)$$

其中, $\mathbf{v}$ 为单元体积列向量且 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

3.1.2 改进的密度过滤

对于改进的密度过滤, 可将式 (9) 和式 (10) 改写成矩阵形式

$$\hat{\rho} = \mathbf{P}^{\mathcal{A}} \hat{\rho} = \mathbf{P}^{\mathcal{A}} \mathbf{P}^{\mathcal{B}} \rho = \mathbf{P}^{\mathcal{H}_1} \rho \quad (17)$$

其中, ρ 和 $\hat{\rho}$ 分别为过滤前的点密度和过滤后的单元密度列向量且 $\rho, \hat{\rho} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\hat{\rho}$ 为通过点密度插值计算的单元积分点处的点密度列向量且 $\hat{\rho} \in \mathbb{R}^{4n \times 1}$. 矩阵

$\mathbf{P}^{\mathcal{A}}$ 和 $\mathbf{P}^{\mathcal{B}}$ 表达式分别为

$$(\mathbf{P}^{\mathcal{A}})_{ij} = \begin{cases} |J|_j \varpi_j / |E_i|, & j \in \Omega_i^e \\ 0, & j \notin \Omega_i^e \end{cases} \quad (18)$$

$$(\mathbf{P}^{\mathcal{B}})_{ij} = \begin{cases} \omega_j(\mathbf{x}_i) / \sum_{j \in \Omega_{x_i}} \omega_j(\mathbf{x}_i), & j \in \Omega_{x_i} \\ 0, & j \notin \Omega_{x_i} \end{cases} \quad (19)$$

且 $\mathbf{P}^{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{n \times 4n}$, $\mathbf{P}^{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{4n \times n}$. 式 (17) 表明了改进后的密度过滤仍然是一个线性映射 $\mathcal{H}_l: \boldsymbol{\rho} \rightarrow \hat{\boldsymbol{\rho}}$, 且 $\mathbf{P}^{\mathcal{H}_l} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. 因此, 与经典的密度过滤相同, 其对应的目标函数的灵敏度为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\rho}} &= \frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial \boldsymbol{\rho}} = (\mathbf{P}^{\mathcal{H}_l})^T \frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}} \right)_i &= \frac{\partial f}{\partial \hat{\rho}_i} = p(1-\varepsilon) \hat{\rho}_i^{(p-1)} \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_i^0 \mathbf{u}_i \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

则体积约束的灵敏度为

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\rho}} = (\mathbf{P}^{\mathcal{H}_l})^T \frac{\mathbf{v}}{V_0} \quad (21)$$

通过两种方法灵敏度表达式的对比可以看出, 改进的密度过滤仅需在经典密度过滤上进行简单修改, 相较于 Heaviside 映射过滤形式上更为简洁. 同时, 由于改进的密度过滤采用密度插值, 过滤前后结构的体积相同条件是自然满足的, 因此, 在优化迭代过程中改进的密度过滤并不会出现振荡问题.

3.2 优化参数的连续性方案

3.2.1 Heaviside 映射过滤

拓扑优化结果的离散程度与 Heaviside 映射函数中的惩罚因子 β 的取值密切相关. 为了获得高度离散化的拓扑结果, 需要采用较大的惩罚因子 β 值. 然而, 较大的 β 值会增大优化问题的非凸性, 难以保证优化结果的全局最优性. 为了获得较好的收敛解, 在优化迭代过程中通常采用优化参数的连续性方案, 即在保证收敛性的前提下缓慢增大 β 值直至上限. 因此, 本文采用如下优化参数的连续性方案: 惩罚因子 β 从初始值 $\beta_{\text{ini}} = 0.5$ 以 $\beta_{\text{new}} = 1.5\beta_{\text{old}}$ 的增加方式, 逐渐增大到 β_{max} , 其中每个 β 值需满足设定的收敛条件, 且小循环最大次数为 50 次. Heaviside 映射和改进的 Heaviside 映射 $\beta_{\text{max}} = 500$, 保体积 Heaviside 映射 $\beta_{\text{max}} = 200$.

3.2.2 改进的密度过滤

由于正方形网格为一种特殊的 Voronoi 图, 根

据 Voronoi 图的最邻近原则, 某单元区域内的任一点 $\mathbf{x} \in \Omega_i^e$ 到该单元对应的密度点 ρ_i 的距离小于到其他密度点的距离, 即

$$d_i(\mathbf{x}) < d_j(\mathbf{x}) \quad (j = 1, 2, \dots, n \text{ and } j \neq i) \quad (22)$$

进一步地, 结合式 (11) 可知, 密度点 ρ_i 对单元区域 Ω_i^e 内的任一点 $\mathbf{x}$ 的密度插值权重最大, 且该插值权重会随着权重指数 q 的增大而增大. 对于图 1 中点 P , 密度点 ρ_i 对应的插值权重随着权重指数 q 不断增大而逐渐趋近于 1, 如图 2 所示. 由此可见, 权重指数 q 的取值直接影响着密度场的插值结果, 且该结论同样适用于三维情况.

为进一步说明该问题, 考虑一个 5×5 的正方形网格, 假设各单元中心点处密度值呈 0 ~ 1 交替分布, 图 3 给出了不同权重指数 q 下密度场的插值结

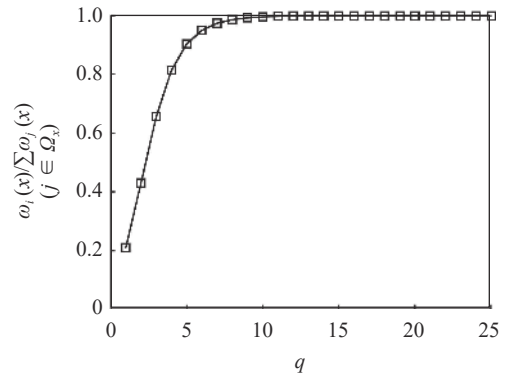


图 2 不同 q 值时密度点 ρ_i 对点 P 的插值权重

Fig. 2 Interpolation weights of density point ρ_i to point P at different values of q

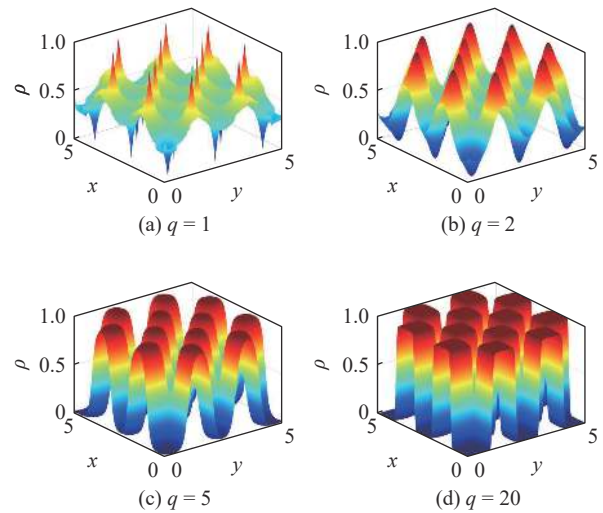


图 3 不同权重指数 q 下密度场的插值结果

Fig. 3 Interpolation results of density field under different weight indices q

果. 由图中结果可见, 当权重指数 q 较小时, 目标单元内部的密度会受到周边单元密度点的影响, 从而避免相邻单元间密度出现跳跃, 保证了密度分布的平滑性; 随着权重指数 q 的增加, 周边单元密度点的影响逐渐变小, 插值密度结果在单元边界处发生突变, 各单元间表现出 0~1 密度交替分布. 因此, 改进的密度过滤可通过控制权重指数 q 的值来消除灰度单元, 达到类似于 Heaviside 映射过滤的效果.

同样地, 为了保证优化迭代过程的稳定性, 这里给出一种关于权重指数 q 的连续化方案: 权重指数 q 从初始值 $q_{\text{ini}} = 1$ 以 $q_{\text{new}} = 1.2q_{\text{old}}$ 的增加方式, 逐渐增大到 $q_{\text{max}} = 25$, 其中每个 q 值需满足设定的收敛条件, 且小循环最大次数为 50 次.

3.3 程序实施流程

3.3.1 Heaviside 映射过滤

Heaviside 映射方案的实施主要包含两个步骤. 第一步, 采用密度过滤进行循环计算, 直到满足收敛条件或最大循环次数的要求. 然后, 以第一步的优化结果为基础, 在第二步中使用 3.2 节所给出的 Heaviside 映射过滤的优化参数连续性方案. 具体程序流程如图 4 所示.

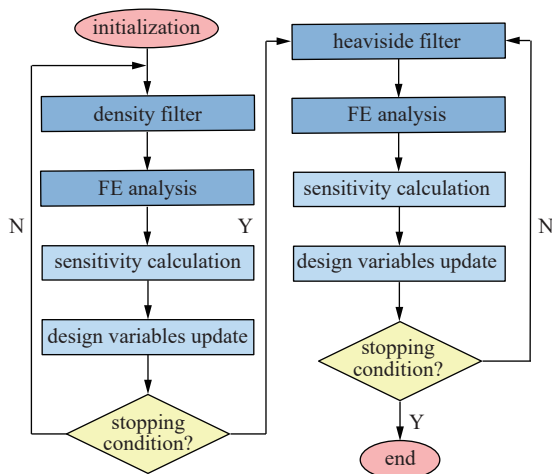


图 4 Heaviside 映射方案的程序流程图

Fig. 4 Program flowchat of Heaviside mapping scheme

3.3.2 改进的密度过滤

改进的密度过滤方案的实施同样包含两个步骤. 第一步, 令式 (11) 中的权重指数 $q = 1$, 采用改进的密度过滤进行循环计算, 直到满足收敛条件或最大循环次数的要求. 然后, 在第二步中使用 3.2 节中改进密度过滤的优化参数连续性方案, 即 $q > 1$. 具体程序流程如图 5 所示.

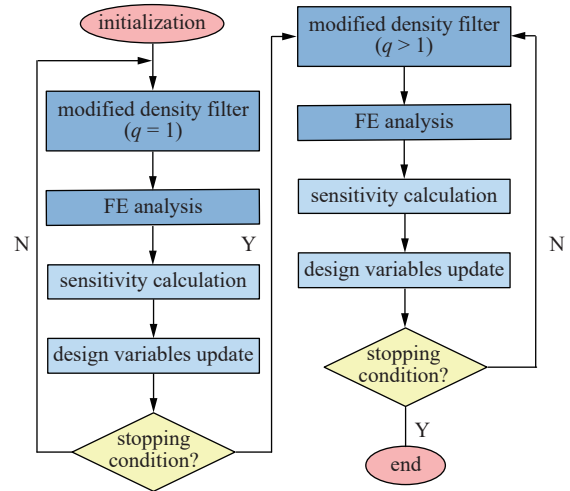


图 5 改进的密度过滤方案的程序流程图

Fig. 5 Program flowchat of modified density filtering scheme

4 数值算例

为了验证本文所提改进的密度过滤方法的适用性和高效性, 通过两个标准算例将本文方法与经典密度过滤及 Heaviside 投影过滤进行对比分析. 为了后文表述方便, 现将经典密度过滤和改进密度过滤分别记为 D-filter 和 MD-filter, 将 Heaviside 映射、改进的 Heaviside 映射和保体积 Heaviside 映射分别记为 H-filter, MH-filter 和 VH-filter. 对于 MMA 求解器, 在经典密度过滤和改进密度过滤中, 使用标准参数 ($\text{asyinit} = 0.5$, $\text{asyincr} = 1.2$, $\text{asydecr} = 0.7$), 且每个增量的小循环采用收敛条件 $\|\Delta \rho\|_{\infty} < 0.01$; 而在 Heaviside 映射过滤中, 为避免迭代过程中的收敛问题, 根据文献 [25], 使用修改参数 ($\text{asyinit} = 0.1/(1 + \beta)$, $\text{asyincr} = 1.2$, $\text{asydecr} = 0.7$) 和收敛条件 $\|\Delta \rho\|_{\infty} < 1.0 \times 10^{-8}$. 为度量优化结果中灰度单元比例, 使用文献 [16] 提出的灰度指标, 其表达式为

$$M_{nd} = \frac{\sum_e 4\bar{\rho}_e(1 - \bar{\rho}_e)}{n} \times 100\% \quad (23)$$

其中, $\bar{\rho}_e$ 表示各单元刚度计算的物理密度, n 表示有限单元总数. 若所有单元密度为 0~1 分布, 则 $M_{nd} = 0$; 若所有单元密度为 0.5, 则 $M_{nd} = 1$.

4.1 二维悬臂梁问题

考虑如图 6 所示的二维悬臂梁模型, 将其离散为 120×40 的正方形网格. 模型中各计算参数为: $E_0 = 1$, $\nu = 0.3$, $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-4}$, 惩罚指数 $p = 3$, 体积分数阈值 $g_v = 0.5$, 过滤半径 $R = 3$.

首先, 分别采用 D-filter 和 MD-filter ($q = 1$) 进行求解, 设置最大循环次数为 150 次. 图 7 展示了 D-filter 和 MD-filter 所得到的拓扑优化结果. 从图示结果可以观察到, 两种方法产生了相似的优化构型, 验证了 MD-filter 能够有效地对材料密度进行局部梯度控制, 进而抑制棋盘格式的出现. 然而, MD-filter 同样面临灰度单元问题. 此外, 如表 1 所示, D-filter 的灰度指标和目标函数值略低于 MD-filter, 这表明 D-filter 的收敛速度相较于 MD-filter 略优, 但差距不大.

然后, 基于 3.2 节所述的优化参数连续性方案, 在第一步优化结果的基础上, 进一步分别采用 3 种 Heaviside 映射过滤 (H-filter, MH-filter 和 VH-filter) 及 MD-filter ($q > 1$) 进行求解, 以消除第一步拓扑结果中出现的灰度单元. 图 8 给出了各方法所获得的拓扑优化结果. 根据图示结果可以观察到, 经过 3 种 Heaviside 映射过滤或改进密度过滤的处理后, 均获得了清晰的优化结果. 其中, H-filter 在迭代过程中去

除了初始拓扑结果中部分较为细小的分支, 这是由于 H-filter 对拓扑构型的实体部分施加与过滤半径相关的最小尺度特征约束. 相比之下, MH-filter 是对拓扑构型的空洞部分施加最小尺度特征约束, 其效果在于消除了初始拓扑结果中空洞边界的棱角. 此外, VH-filter 和 MD-filter 得到的拓扑构型与初始拓扑结果基本一致.

对比表 2 中各方法的迭代结果, 在 3 种 Heaviside 映射过滤中, VH-filter 表现出最高的效率, 最小的灰度指标和目标函数值. 同时, MD-filter 也获得了令人满意的优化结果, 其总迭代次数明显少于 Heaviside 映射过滤, 且优化结果接近理想的 0~1 分布 ($M_{nd} < 1\%$).

图 9 给出了采用不同过滤方法时目标函数和体

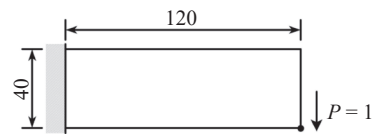


图 6 二维悬臂梁模型的设计域和边界条件
Fig. 6 Design domain and boundary conditions of 2D cantilever beam model

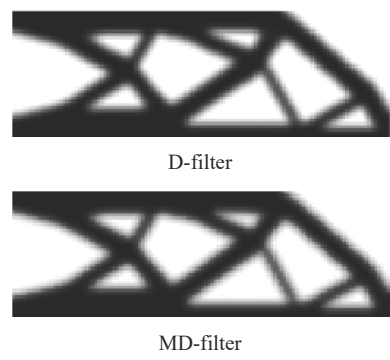


图 7 二维悬臂梁 D-filter 和 MD-filter 的拓扑构型
Fig. 7 Topological configurations of D-filter and MD-filter in 2D cantilever beam

表 1 二维悬臂梁 D-filter 和 MD-filter 的迭代结果
Table 1 Iteration results of D-filter and MD-filter in 2D cantilever beam

Method	Iter.	V/V_0	$M_{nd}/\%$	Obj.
D-filter	150	0.50	27.45	207.19
MD-filter	150	0.50	29.68	211.20

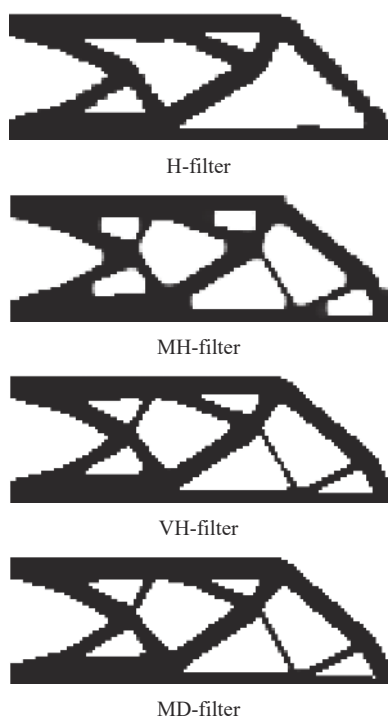


图 8 二维悬臂梁 Heaviside 投影过滤和 MD-filter 的拓扑构型
Fig. 8 Topological configurations of Heaviside-type filters and MD-filter in 2D cantilever beam

表 2 二维悬臂梁 Heaviside 投影过滤和 MD-filter 的迭代结果
Table 2 Iteration results of Heaviside-type filters and MD-filter in 2D cantilever beam

Method	Iter.	V/V_0	$M_{nd}/\%$	Obj.
H-filter	900	0.50	1.05	185.27
MH-filter	900	0.50	2.17	180.03
VH-filter	750	0.50	0.07	176.75
MD-filter	171	0.50	0.24	177.45

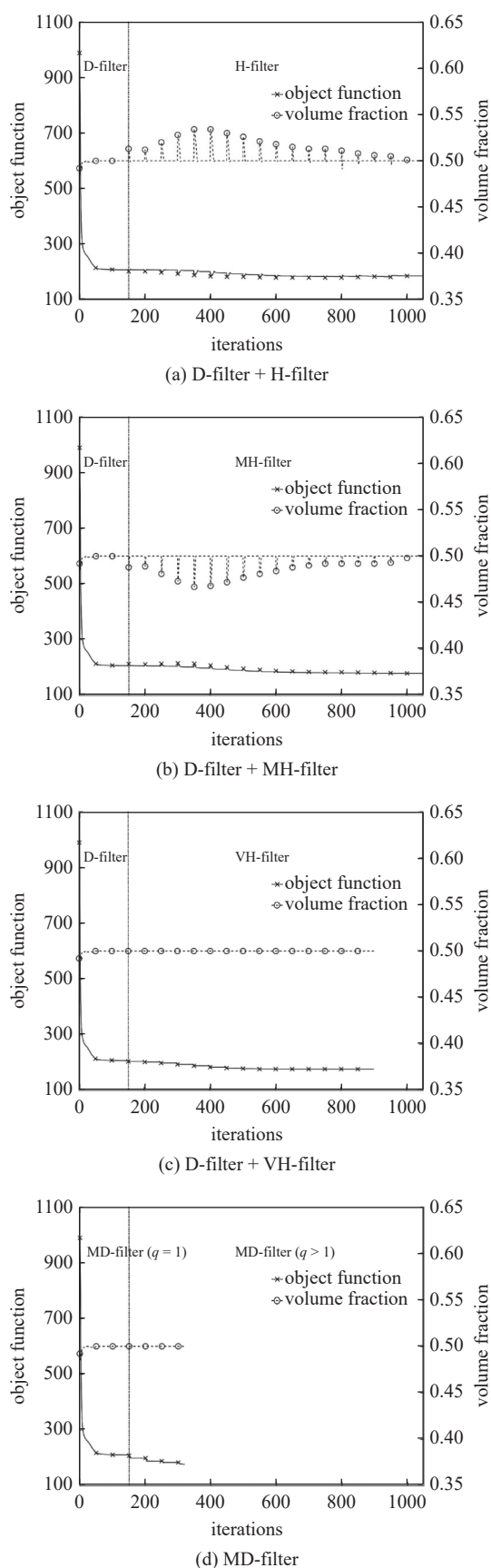


图 9 二维悬臂梁不同过滤方法的迭代历程比较

Fig. 9 Comparison of iterative processes of different filters for 2D cantilever beam

积分数的迭代历史曲线. 图中竖线表示 3.3 节程序实施流程中两个分析步的分界线. 对比图中竖线左边的部分, D-filter 和 MD-filter ($q = 1$) 的曲线变化趋势基本一致, 进一步验证了当 $q = 1$ 时, MD-filter 具有与 D-filter 相当的过滤效果. 由图中竖线右边的部分可见, H-filter 和 MH-filter 中迭代曲线在惩罚因子 β 发生变化时出现明显振荡现象. 正如前文所述, H-filter 和 MH-filter 都是非保体积的, 这是引起迭代振荡的主要原因. 而 VH-filter 过滤前后的总体积是相同的, 即迭代过程的体积约束能够得到保证, 因此其迭代过程相对来说更为稳定. 相较而言, MD-filter 仍为线性过滤, 其权重指数 q 的增大不会影响优化问题的非凸性, 同时其过滤前后总体积恒等, 因此, MD-filter 迭代过程表现非常稳定, 并且快速收敛到一个较好的优化解.

4.2 三维悬臂梁问题

为进一步验证本文所提方法在三维问题中的适用性, 将 4.1 节中的二维悬臂梁扩展为图 10 所示的三维悬臂梁模型, 并将其离散为 $120 \times 40 \times 4$ 的正方体网格, 各计算参数仍沿用二维问题中的参数.

在三维悬臂梁问题中, 整个求解过程同样分为两个步骤. 首先, 分别采用 D-filter 和 MD-filter ($q = 1$) 进行求解, 最大循环次数为 150 次. 最终的拓扑构型和优化迭代结果分别如图 11 和表 3 所示. 通过对比两种方法的优化结果, 可以观察到 D-filter 和 MD-filter 仍表现出相似的优化性能, 验证了 MD-filter 在三维优化问题中抑制棋盘格式方面的有效性. 然而, 从图 11 的拓扑构型和表 3 的灰度指标来看, 拓扑结果的边界处同样存在大量灰度单元.

在第一步优化结果的基础上, 再次分别采用三种 Heaviside 映射过滤 (H-filter, MH-filter 和 VH-filter) 及 MD-filter ($q > 1$) 来消除第一步优化结果中的灰度单元. 图 12 的最终拓扑结果表明各方法在消

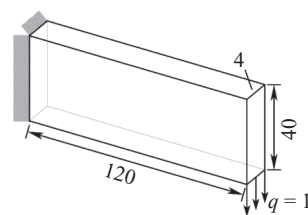


图 10 三维悬臂梁模型的设计域和边界条件

Fig. 10 Design domain and boundary conditions of 3D cantilever beam model

除灰度单元方面均表现良好. 通过对比表 4 中各方法的优化迭代结果, MD-filter 得到了与 VH-filter 相近的灰度指标和目标函数值, 且明显优于 H-filter 和 MH-filter 的结果. 在所有的方方法中, MD-filter 总迭代次数最少, 计算效率最高. 从图 13 给出的各方法迭

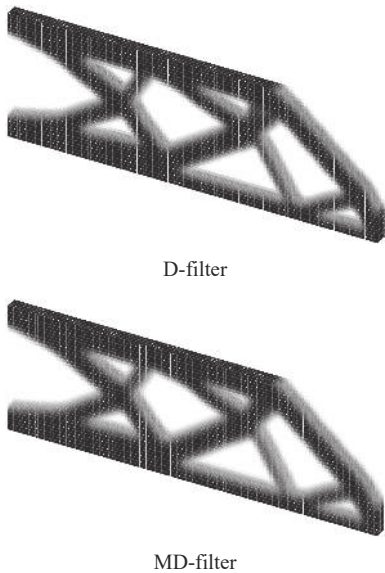


图 11 三维悬臂梁 D-filter 和 MD-filter 的拓扑构型
Fig. 11 Topological configurations of D-filter and MD-filter in 3D cantilever beam

表 3 三维悬臂梁 D-filter 和 MD-filter 的迭代结果

Table 3 Iteration results of D-filter and MD-filter in 3D cantilever beam				
Method	Iter.	V/V_0	$M_{nd}/\%$	Obj.
D-filter	150	0.50	27.10	821.01
MD-filter	150	0.50	30.18	842.44

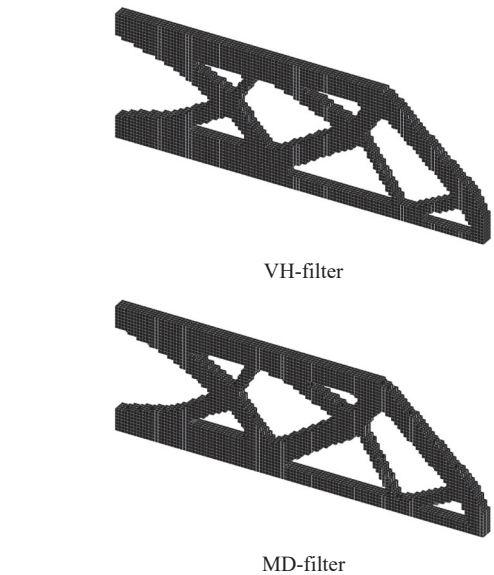
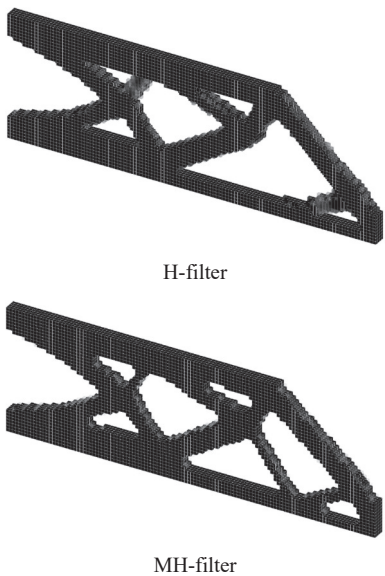


图 12 三维悬臂梁 Heaviside 投影过滤和 MD-filter 的拓扑构型
Fig. 12 Topological configurations of Heaviside-type filters and MD-filter in 3D cantilever beam

代历程曲线也可以看出, 在三维问题中, MD-filter 的迭代过程仍保持着稳定和较快的收敛速度.

表 4 三维悬臂梁 Heaviside 投影过滤和 MD-filter 的迭代结果

Table 4 Iteration results of Heaviside-type filters and MD-filter in 3D cantilever beam				
Method	Iter.	V/V_0	$M_{nd}/\%$	Obj.
H-filter	900	0.50	1.81	716.73
MH-filter	900	0.50	2.03	711.49
VH-filter	750	0.50	0.01	699.58
MD-filter	255	0.50	0.06	703.09

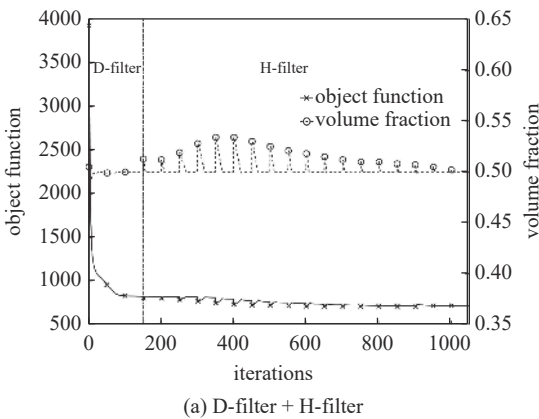


图 13 三维悬臂梁不同过滤方法的迭代历程比较
Fig. 13 Comparison of iterative processes of Different Filters for 3D cantilever beam

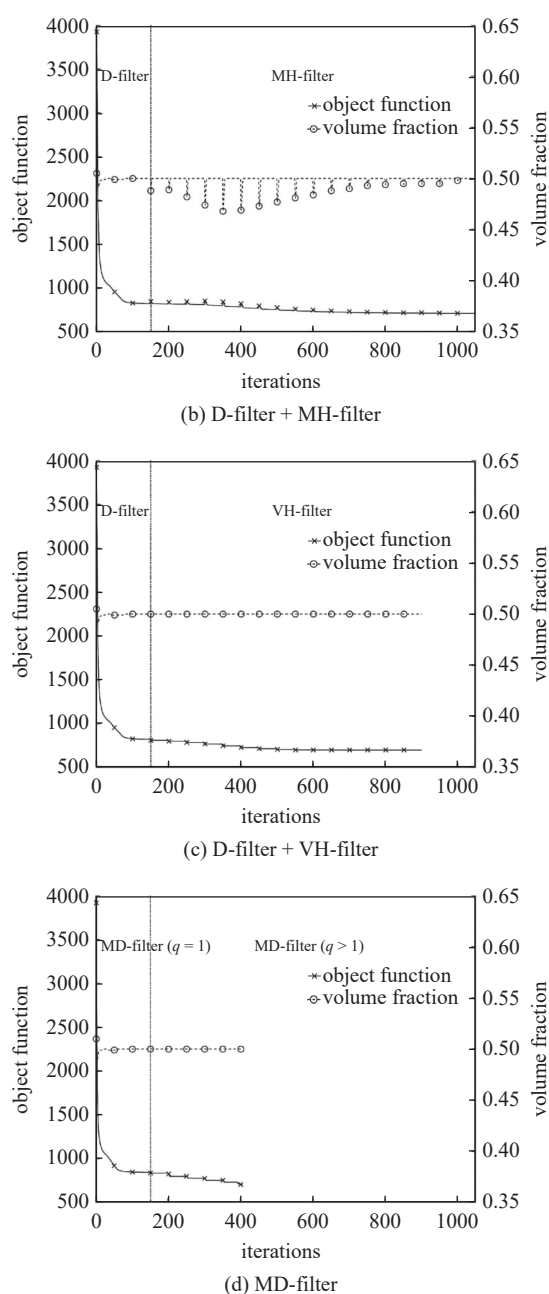


图 13 三维悬臂梁不同过滤方法的迭代历程比较 (续)

Fig. 13 Comparison of iterative processes of different filters for 3D cantilever beam (continued)

5 结论

本文基于点密度插值技术提出一种改进的密度过滤方法. 该方法通过在插值权函数中增加一个权重指数, 以消除拓扑优化中存在的棋盘格式和灰度单元等数值不稳定问题. 当权重指数等于 1 时, 改进的密度过滤可有效抑制优化结果中棋盘格式的出现, 获得与经典密度过滤基本一致的拓扑构型. 当权重指数逐渐增大时, 改进的密度过滤方法能够使得优化结果边界的灰度区域逐步收缩, 最终获得接近

理想 0 ~ 1 分布的材料布局, 达到类似于 Heaviside 映射过滤的效果. 与 Heaviside 映射过滤不同, 改进的密度过滤中权重指数的增大并不会使得优化问题非凸性的增加, 导致优化求解的收敛性变差. 同时, 由于采用密度插值, 改进的密度过滤中过滤前后的体积分恒等, 天然避免了类似 Heaviside 映射过滤中迭代振荡现象的出现. 数值算例的结果也表明, 改进的密度过滤在拓扑优化求解过程中具有比 Heaviside 映射过滤更好的稳定性及收敛性.

参 考 文 献

- 1 Haber RB, Jog CS, Bendsøe MP. A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter. *Structural Optimization*, 1996, 11(1-2): 1-12
- 2 Borrvall T. Topology optimization of elastic continua using restriction. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2001, 8(4): 351-385
- 3 Petersson J, Sigmund O. Slope constrained topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, 41(8): 1417-1434
- 4 Sigmund O, Petersson J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*, 1998, 16(1): 68-75
- 5 Bourdin B. Filters in topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50(9): 2143-2158
- 6 Wang F, Lazarov BS, Sigmund O. On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization. *Structural & Multidisciplinary Optimization*, 2011, 43(6): 767-784
- 7 Deaton JD, Grandhi RV. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. *Structural & Multidisciplinary Optimization*, 2014, 49: 1-38
- 8 Sigmund O, Maute K. Topology optimization approaches: A comparative review. *Structural & Multidisciplinary Optimization*, 2013, 48(6): 1031-1055
- 9 Sigmund O. A 99 line topology optimization code written in matlab. *Structural & Multidisciplinary Optimization*, 2001, 21(2): 120-127
- 10 Talischi C, Paulino GH, Pereira A, et al. PolyTop: A matlab implementation of a general topology optimization framework using unstructured polygonal finite element meshes. *Structural & Multidisciplinary Optimization*, 2012, 45(3): 329-357
- 11 徐中明, 李丹彤, 张志飞等. 结合单元渐进删除的变密度拓扑优化方法. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2023, 35(3): 482-490 (Xu Zhongming, Li Dantong, Zhang Zhifei, et al. Topology optimization method using SIMP combined with evolutionary deletion of elements. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2023, 35(3): 482-490 (in Chinese))
- 12 高翔, 王林军, 杜义贤. 改进的抑制灰度单元的拓扑优化方法. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2020, 32(12): 2003-2012 (Gao Xiang, Wang Linjun, Du Yixian. An improved topology optimization method for suppressing gray elements. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2020, 32(12): 2003-2012 (in Chinese))

- 13 许小奎, 郭宝峰, 金森. 基于密度体积插值方法的结构拓扑优化. *中国机械工程*, 2017, 28(11): 1269-1273 (Xu Xiaokui, Guo Baofeng, Jin Miao. Structural topology optimization based on density-volume interpolation scheme. *China Mechanical Engineering*, 2017, 28(11): 1269-1273 (in Chinese))
- 14 秦浩星, 安宗文, 孙道明. 改进的导重法求解拓扑优化问题及灰度过滤技术. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2015, 27(10): 2001-2007 (Qin Haoxing, An Zongwen, Sun Daoming. Improved guide-weight method on solving topology optimization problems and gray-scale filtering method. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2015, 27(10): 2001-2007 (in Chinese))
- 15 Xu S, Cai Y, Cheng G. Volume preserving nonlinear density filter based on heaviside functions. *Structural & Multidisciplinary Optimization*, 2010, 41(4): 495-505
- 16 Ole S. Morphology-based black and white filters for topology optimization. *Structural & Multidisciplinary Optimization*, 2007, 33: 401-424
- 17 Fuchs MB, Jiny S, Peleg N. The SRV constraint for 0/1 topological design. *Structural & Multidisciplinary Optimization*, 2005, 30(4): 320-326
- 18 Guest JK, Prévost JH, Belytschko T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions. *International journal for numerical methods in engineering*, 2004, 61(2): 238-254
- 19 王超, 徐斌, 段尊义等. 面向增材制造的应力最小化连通性拓扑优化. *力学学报*, 2021, 53(4): 1070-1080 (Wang Chao, Xu Bin, Duan Zunyi, et al. Additive manufacturing-oriented stress minimization topology optimization with connectivity. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(4): 1070-1080 (in Chinese))
- 20 李新磊, 吴坤, 赵林英等. 面向发动机再生冷却的流热耦合拓扑优化. *力学学报*, 2023, 55(11): 2661-2674 (Li Xinlei, Wu Kun, Zhao Linying, et al. Topology optimization of coupled thermal-fluid problems for regenerative cooling engines. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(11): 2661-2674 (in Chinese))
- 21 战俊杰, 彭秀林, 白仲航. 考虑有界场的几何不确定性非概率可靠性拓扑优化. *力学学报*, 2023, 55(9): 2056-2067 (Zhan Junjie, Peng Xiulin, Bai Zhonghang. Non-probability reliability-based topology optimization against geometric uncertainty with a bounded field model. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(9): 2056-2067 (in Chinese))
- 22 王选, 时元昆, 杨博等. 基于响应面方法的破损-安全结构可靠性拓扑优化. *力学学报*, 2023, 55(5): 1206-1216 (Wang Xuan, Shi Yuankun, Yang Bo, et al. Reliability-based topology optimization of fail-safe structures using response surface method. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(5): 1206-1216 (in Chinese))
- 23 范志瑞, 杨志勋, 许琦等. 海洋柔性立管防弯器结构非线性刚度拓扑优化. *力学学报*, 2022, 54(4): 929-938 (Fan Zhirui, Yang Zhixun, Xu Qi, et al. Nonlinear stiffness topology optimization for the bend stiffener of flexible riser. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(4): 929-938 (in Chinese))
- 24 Guest JK, Asadpoure A, Ha SH. Eliminating beta-continuation from Heaviside projection and density filter algorithms. *Structural & Multidisciplinary Optimization*, 2011, 44(4): 443-453
- 25 Li L, Khandelwal K. Volume preserving projection filters and continuation methods in topology optimization. *Engineering structures*, 2015, 85(15): 144-161
- 26 Matsui K, Terada K. Continuous approximation of material distribution for topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, 59(14): 1925-1944
- 27 Rahmatalla SF, Swan CC. A Q4/Q4 continuum structural topology optimization implementation. *Structural & Multidisciplinary Optimization*, 2004, 27: 130-135
- 28 Paulino GH, Le CH. A modified Q4/Q4 element for topology optimization. *Structural & Multidisciplinary Optimization*, 2009, 37: 255-264
- 29 Nguyen TH, Paulino GH, Song J, et al. Improving multiresolution topology optimization via multiple discretizations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2012, 92(6): 507-530
- 30 Kang Z, Wang Y. A nodal variable method of structural topology optimization based on Shepard interpolant. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2012, 90(3): 329-342
- 31 Kang Z, Wang Y. Structural topology optimization based on non-local Shepard interpolation of density field. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, 200(49-52): 3515-3525