漏斗颗粒流的物理因素影响研究

郑宁¹, 朱红伟¹, 黄德财^{2*}, 史庆藩^{1*}

1. 北京理工大学物理学院, 北京 100081;

2. 南京理工大学理学院, 南京 210094

*联系人, 黄德财, E-mail: hdc@njust.edu.cn; 史庆藩, E-mail: qfshi123@bit.edu.cn

收稿日期: 2020-05-05; 接受日期: 2020-06-16; 网络出版日期: 2020-08-13

国家自然科学基金(编号: 11974044, 11574153)资助项目

摘要 颗粒物质的流动行为简称颗粒流, 它广泛存在于日常生活、工业过程和自然环境的各个方面. 颗粒流性质既与颗粒自身的尺寸、形状、表面、密度等物理属性有关, 又与通道及出口条件等外部环境有关, 颗粒流呈现出丰富的非线性流动现象. 虽然颗粒流在工程应用方面已经取得重大研究进展, 但迄今尚未有统一描述颗粒流的方程. 因此, 研究颗粒流对于不同物理因素的响应特性不仅可以拓展对颗粒物质的认识, 澄清复杂流体输运中的基础科学问题, 还可以为建立本构方程提供思路. 鉴于漏斗颗粒流是颗粒流的主要研究方向之一, 因此本文主要介绍国内外关于漏斗颗粒流的流量、流动模式、颗粒速度以及颗粒堆积密度分布等随不同物理因素变化的规律, 并阐述这些规律的物理机制. 文中涉及的漏斗流包括重力场驱动下的竖直漏斗流、倾斜漏斗流以及速度场驱动下的水平漏斗流(传送带). 物理参数则有出口尺寸与形状、出口位置与方向、颗粒-颗粒间的摩擦系数、颗粒-漏斗壁间的摩擦系数、颗粒形状、混合颗粒、出口数目及出口间距、外部激励、障碍物、漏斗底部角度等. 这些研究结果对于调控颗粒流的流量、提升颗粒材料的输运效率有着重要的参考价值, 同时也为后续进一步研究颗粒流的动力学规律提供借鉴.

关键词 颗粒流, 流量, 漏斗流, 堵塞, 摩擦系数

PACS: 64.70.ps, 45.70.Mg, 47.57.Gc, 64.70.qj

1 引言

颗粒物质是由大量具有宏观尺寸的离散粒子组成的集合体系. 当颗粒物质受到外界能量激励时, 会表现出类似流体的运动状态, 这种状态被称之为颗粒流. 颗粒流广泛存在于工农业生产(离散物料的加工、输运、储存等)、日常生活(行人动态、交通流等)和自然

环境(滑坡、泥石流、沙丘移动等)中, 甚至星体的相互作用与演化过程. 2005年, *Science*把颗粒流体的动力学理论列为当今125个科学前沿问题之一^[1]. 2014年, 《中国学科发展战略: 流体动力学》将“颗粒物质与颗粒流”列为6个基础与前沿学科之一^[2].

颗粒流是个活跃而宽泛的研究领域, 包括漏斗流、斜坡流、转筒流和堆流等. 漏斗颗粒流因其丰富

引用格式: 郑宁, 朱红伟, 黄德财, 等. 漏斗颗粒流的物理因素影响研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 090005

Zheng N, Zhu H W, Huang D C, et al. The effects of physical factors on the granular hopper flow (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2020, 50: 090005, doi: [10.1360/SSPMA-2020-0161](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2020-0161)

的物理现象和广阔的应用背景一直以来是颗粒流领域的研究热点^[3-7]. 对于重力驱动的漏斗流来说, 会出现类似于交通流中的稀疏流(快速流)、密集流(慢速流)和堵塞的现象^[8-10]. 稀疏流通常是指颗粒堆积密度较低、运动速度较快、颗粒之间接触较少且多表现两体碰撞的颗粒流; 而密集流是指颗粒堆积密度较高、运动速度较慢、颗粒之间表现为多体碰撞的颗粒流. 当颗粒之间的相互作用较强, 在局部区域内(如出口附近)会形成较长的力链或力拱, 导致颗粒流的中断, 即堵塞现象^[11]. Haff^[12]和Kumaran^[13]类比气体动力学理论, 建立了适用于稀疏颗粒流的本构方程, 而Tüzün等人^[14]认为修正的塑性模型更适合描述密集流. 颗粒流不仅能以某一个流动状态单独存在而且还会发生稀疏流-密集流、密集流-堵塞之间的转变^[15-18], 这些非线性动力学性质与交通流问题紧密相关, 由此自1999年开始每隔两年会召开一次“交通流与颗粒流”(Traffic Flow and Granular Flow)国际会议^[19].

颗粒物质的存放与输运一般都是利用筒仓进行, 而带有出口的筒仓常被称为漏斗. 广义上, 凡是能使颗粒物质流进和流出的系统均可称之为漏斗, 相应的颗粒流即称之为漏斗流. 研究和利用漏斗颗粒流的特性已经有了很长的历史, 如沙漏计时就是利用了漏斗颗粒流的密集流的特性. 当沙漏内的颗粒堆积超过一定高度时, 出口流量与颗粒的堆积高度无关, 可以稳定在一个恒定值. 1895年, 德国工程师Janssen在将颗粒物质看作是连续介质的基础上, 引入力学转向系数, 即盛装颗粒物质的容器壁会承担部分颗粒物质的重力, 从而合理地理论上解释了粮仓效应, 进而揭示了沙漏计时的物理机制^[20,21]. 事实上, 对颗粒运动起主要作用的是由于接触形变产生的摩擦力和弹性力, 当密集颗粒体系受到外力时, 在颗粒体系的很多局域区域内, 会形成较强的力链结构, 颗粒体系可以像固体一样存在稳定的结构. 同时, 又因为颗粒流是一个强耗散体系, 粗糙的颗粒表面使得外界能量很快转移到原子层面, 使得颗粒体系在微观区域里表现出非平衡态特征, 在较小的剪切应力下, 颗粒体系可以像流体一样流动^[22,23]. 因而, 颗粒流的基础物理问题一直是工程师和物理学家关注的焦点^[24-27]. 但因为缺乏对颗粒流的物理机制的认识, 如何有效控制漏斗颗粒流的宏观流动状态一直是工程师难以解决的问题.

事实上, 漏斗颗粒流中的很多问题与颗粒在出口

处的流动特性有关. 通常颗粒通过出口的流动有三种状态: 连续流、间歇流和完全阻塞. 如果漏斗出口足够大, 颗粒可以连续不断的流出, 这种状态为连续流. 如果漏斗出口足够小, 则在出口上方处, 颗粒之间会有力拱效应的出现, 发生堵塞现象. 如果力拱不稳定, 短时间内力拱会自发解除, 颗粒的流动将恢复, 流动与阻塞往复交替, 这种状态为间歇流. 如果力拱稳定, 阻塞现象将一直持续, 这种状态为完全阻塞. 在完全阻塞情况下若要恢复颗粒的流动, 则需要通过外力手段来破坏力拱. 显然, 颗粒流在出口处的流动形态与出口的形状有密切关系. 作为影响颗粒流动的物理因素之一, 早期的研究集中在出口形状如平底(倾角)圆形出口、平底(倾角)矩形出口等. 随着实验和模拟的深入研究, 工程师和物理学家们发现与颗粒流动特性相关的物理参数还有颗粒与颗粒之间的摩擦系数、颗粒与漏斗壁之间的摩擦系数、颗粒的形状、混合颗粒直径之比、出口的数量以及出口之间的距离、底部倾角等. 最近, 研究者还通过调控外部激励、设置障碍物等方法来改变颗粒流动特性. 在以上研究的基础上, 结合动力学理论与几何结构等因素提出了很多建设性的唯象理论和方程. 其中, Beverloo公式^[28]一直是工业界计算密集颗粒流流量的标准. 研究不同物理因素对颗粒流的影响, 其结果不仅有助于阐明颗粒流动特性的物理机制, 更可为颗粒输运效率提升、交通流疏通、行人紧急疏散以及某些自然灾害预防等实际问题的解决提供重要参考.

需要指出的是, 国内学者从工程应用的角度出发, 通过建立模型并结合计算机模拟来研究颗粒流已经取得重大进展, 其中最具代表性的是李静海等人^[29]关于颗粒流体复杂系统的多尺度模拟. 他们的成果不仅体现在国内外的大量论文和著述中^[30-36], 更是将其应用到了国民经济建设当中. 但从物理学的角度来说, 我们还只能对颗粒流的动力学特征给出一般性的描述, 目前还没有统一的描述颗粒流的方程. 如何在颗粒流的宏观流动状态与微观区域状态之间建立定量的描述方程, 认识颗粒流背后的物理机制, 将在未来很长一段时间内是个艰巨的挑战. 显然, 尽可能地发现和总结各种不同物理因素对颗粒流的影响, 能够丰富人们对颗粒流的个性和共性问题的认识, 为最终建立颗粒流理论提供参考.

本文正是基于漏斗颗粒流动力学性质的复杂性和

重要研究背景, 结合近几年课题组在漏斗颗粒流方面的研究成果, 从物理的角度出发对漏斗颗粒流的研究作一个简要概述, 尤其是物理因素对漏斗颗粒流的影响, 期望能为后续进一步揭示颗粒流的动力学规律, 建立本构方程提供思路, 为工业设计应用提供参考.

2 漏斗颗粒流的物理因素影响研究

图1为几种典型形状的漏斗示意图, 出口处的尺寸大小和形状等几何结构是影响颗粒流流量的主要物理因素. 因而对其研究的成果也最为丰富.

以工业生产中的带有圆形出口的竖直漏斗为例, 基于几何构型和维度分析导出的Beverloo流量公式被广泛采用^[28]:

$$Q \propto C\rho\sqrt{g}(A-kD)^{n+1/2}, \quad (1)$$

其中, Q 是流量, ρ 是颗粒的堆积密度, D 是颗粒直径, $n=1$ 对应为二维漏斗, 此时 A 为出口宽度, $n=2$ 对应为三维漏斗, 此时 A 为圆形出口直径, C 和 k 为与颗粒形状有关的无量纲拟合参数, C 的值通常在0.55–0.65之间, k 的值一般在1–2之间, 但是, 对个别颗粒物质如沙子 k 值为2.9. 从式(1)可以看出, 由于 k 不为0, 则在出口尺寸不为0时, 流量却有可能为0. 为了解释式(1), Brown和Richards^[37]提出了一种空环假设(Empty Annulus Hypothesis), 即在出口边界的 $D/2$ 距离内, 圆形颗粒的中心无法进入, 因此, 有效出口尺寸修正为 $A-kD$. 此外,

图1 几种典型形状的漏斗示意图. (a)–(c) 为平底漏斗; (d)–(f) 带有一定倾角的漏斗

Figure 1 Examples of typical silos. (a)–(c) Silos with flat bottom; (d)–(f) silos with inclined bottom.

文献[37]中还提出了自由落体力拱(Free-Fall Arch)模型对方程(1)进行了定性解释: 假设出口上方存在稳定的力拱, 力拱上方的颗粒近似为静止状态, 力拱下方的颗粒做自由落体运动, 力拱的高度与出口直径成正比. 以二维竖直漏斗为例, 根据牛顿第二定律, 出口处颗粒的速度为 $v \propto \sqrt{gA}$, 颗粒通过出口的流量与速度和出口尺寸的关系为 $Q \propto \rho AV$, 继而可得 $Q \propto \rho\sqrt{g}A^{3/2}$. 由于空环效应的存在, 出口处流量 Q 应改写为 $Q \propto \rho\sqrt{g}(A-kD)^{3/2}$, 而这正是式(1)的二维形式. 式(1)被公认为是漏斗颗粒流研究的基本公式.

2.1 漏斗几何结构的影响

2.1.1 出口尺寸与形状

作为一个半经验公式, 方程(1)在预测大出口尺寸的出口流量方面取得了很大的成功, 但它也存在一定的局限性: (1) 只适用于圆形出口以及空气影响可以忽略的情况, 对于矩形出口或不规则出口的流量则无法预测; (2) 对于较小出口尺寸的流量无法预测, 因为小尺寸出口会发生颗粒阻塞的现象, 此时方程失效; (3) 参数 C 和 k 无法反映其他物理因素对流量的影响. 因此, 后来的研究者们根据其所用的实验系统和理论模型改进并发展了Beverloo流量公式.

Mankoc等人^[38]通过实验结合模拟的方法详细研究了方程(1)的适用范围, 除了证明方程(1)只适用于大出口连续颗粒流外, 还在Beverloo等人的工作基础上提出了适用于任意大小圆形出口尺寸的流量方程

$$Q = C\rho\sqrt{g}\left(1 - \frac{1}{2}e^{-b(A-D)}\right)(A-D)^{n+1/2}, \quad (2)$$

式中 C 和 b 均为拟合参数. 显见, 当出口尺寸等于颗粒直径时颗粒流消失. 与方程(1)相比, 方程(2)中的指数因子起到了调制孔径尺寸的作用, 修正了方程(1)不适合小尺寸出口的缺陷. 作者将这一作用的物理机制归结于出口附近颗粒的低堆积密度, 但这种经验性解释一直缺乏实验证据. 为进一步揭示流量与出口尺寸之间依赖关系的物理机制, Ahn等人^[39]使用三种不同圆形出口尺寸的漏斗和两种不同尺寸的颗粒研究了流量与颗粒通过出口时沿径向的平均法向应力的函数关系, 实验发现颗粒在出口处的流动具有三种状态: 当颗粒流无阻塞流动时流量随法向应力的增大而增大, 当流量达到最大值时开始出现颗粒阻塞现象; 随着法向

应力的继续增加, 流量因颗粒阻塞而开始减小; 随着法向应力的进一步增大, 流量趋近一个渐近值, 此时流量与法向应力无关. Rubio-Largo等人^[40]的实验与离散元模拟同样揭示了在出口上方高度为1个出口直径的位置, 有一个明显的压力突变. 显然, 出口附近径向压力增大这一结论是设计既安全又经济的颗粒流出口所必须考虑的重要因素.

除了圆形出口以外, 其他形状的出口也很常见. Myers和Sellers^[41]实验观测了矩形出口的颗粒流量, 并通过对方程(1)的修正提出了矩形出口的流量方程:

$$Q = 1.03\rho\sqrt{g}(L_1 - kD)(L_2 - kD)^{1/2}, \quad (3)$$

式中 L_1 和 L_2 分别为出口的长和宽. 利用方程(3)拟合实验数据发现, 参数 k 的取值范围与方程(1)较为一致. 然而, 需要指出的是, 迄今为止关于其他出口形状对颗粒流的影响研究较少, 这是因为这些出口的参数变化比

较丰富, 因而导致出口附近颗粒的速度分布、密度分布等呈现非常复杂的状态, 所以较难获得流量与出口形状的变化规律.

随着摄像技术和图像处理技术的发展, 颗粒流的研究手段变的更加先进. Janda等人^[42,43]利用实验与图像处理技术相结合的方法研究了竖直二维筒仓底部出口处的流量. 通过统计瞬时流量(如统计每150 ms时间内通过出口的颗粒数)来严格地获取流量与时间的变化关系, 这与方程(1)的维度分析方法有着很大的不同. 他们首先通过实验精确测定了不同出口尺寸下出口处的颗粒速度和密度分布(图2和3), 发现速度和密度分布曲线存在着相似性, 在此基础上对式(1)进行改进, 最后得到了流量与出口宽度的依赖关系

$$Q = C'\sqrt{gR}\phi_0(1 - ae^{-\beta R})R, \quad (4)$$

式中 C' 由颗粒直径与出口处的堆积密度分布所决定,

图 2 (网络版彩图) (a) 不同出口尺寸下的速度分布图(图例见(b)); (b) 归一化的速度分布图, 连续黑线为速度标度函数; (c) 出口中心处颗粒的速度与出口半径的关系^[43]. 图片来源文献[43], 已获得授权

Figure 2 (Color online) (a) Velocity profiles for different outlet sizes (labels are in the (b) panel); (b) normalized velocities and the black continuous line is a scaling function of velocity; (c) the velocity in the outlet center as a function of R of the outlet^[43]. Reproduced from ref. [43] with permission.

图 3 (网络版彩图) (a) 不同出口尺寸下的堆积密度分布图; (b) 归一化的堆积密度分布图(图例与图2相同, 连续黑线为堆积密度标度函数); (c) 出口中心处堆积密度与出口半径的关系^[43]. 图片来源文献[43], 已获得授权

Figure 3 (Color online) (a) Packing density profiles for different outlet sizes; (b) distribution of normalized packing density of the data displayed in (a). The symbols are the same as that in Figure 2 and the black continuous line is a scaling function of packing density. (c) Dependence of the packing density in the orifice center with R ^[43]. Reproduced from ref. [43] with permission.

R 是出口宽度的一半, ϕ_0 是出口处堆积密度分布的极大值, α 和 β 是拟合参数. 另外, 研究还发现存在一个临界出口尺寸 A_c (约在 $4.5D$ 附近), 当出口宽度 $A > A_c$ 时, 流量波动较小, 遵循高斯分布, 当 $A < A_c$ 时会有阻塞发生, 该情形下, 瞬时流量有较大的波动.

漏斗在长期的不间断使用过程中, 不可避免地会使出口边界发生磨损, 而出口形状的变化是否会导致漏斗流量的变化就成为一个不可忽视的现实问题. 对此, Wan等人^[44]从实验和模拟两方面研究了孔口形状对三维垂直漏斗流量的影响. 考虑孔口磨损后的剖面, 如图4所示, 其中磨损程度用弧面半径表示, $R=0$ 表示尚未磨损, R 越大表示磨损程度越大. 实验发现, 当孔口由直角变为圆弧面时流量会增加. 通过修正Beverloo方程中的参数 k 为 $k = \alpha + \beta e^{-\gamma R}$, 再结合计算机模拟, 最终给出了内孔为圆弧面时出口的流量方程:

$$Q = C\rho\sqrt{g}(A - (\alpha + \beta e^{-\gamma R})D)^{5/2}, \quad (5)$$

其中 α, β, γ 为拟合参数. 当 $R=0$ 时, 方程(5)退化为方程(1). 另外, 通过分析出口处颗粒的堆积密度 ϕ 和速度 v 的分布发现, 孔口形状发生变化后堆积密度保持不变, 但导致了颗粒竖直下落方向速度大小的变化. 根据质量守恒方程

$$Q = 2\sigma \int_0^A \phi(x)v(x)dx, \quad (6)$$

其中 $\sigma = \pi D^2/4$ 是颗粒在二维面上投影密度, 可以推断出流量发生变化的物理机制是圆弧面出口诱导了竖直速度发生变化所致.

除了重力场作用下的漏斗流, 重力场作用下的斜面颗粒流也是自然界和工业过程中常见的颗粒流形态. Hou等人^[15,45]实验研究了二维斜面颗粒流从稀疏

图 4 (网络版彩图)孔口磨损后的剖面示意图

Figure 4 (Color online) Schematic cross section of worn orifice.

流到密集流的转变. 如图5所示为流量与出口尺寸的关系. 首先, 在固定初始颗粒流量, 逐渐减小出口尺寸时, 存在一临界值 d_c 使流量发生突然减小; 其次, 在固定出口的尺寸时, 颗粒流量增大到一临界值 Q_d 时, 也会发生流量突然减小的现象. 即二者都会发生稀疏流向密集流的转变. 该项研究找到了发生转变时的流量与出口尺寸、颗粒尺寸及通道宽度之间的普适标度关系, 因而在国际上是一项标志性成果.

为了揭示颗粒流由稀疏流向密集流转变的内禀机制, Huang等人^[16,17]开展了一系列的实验和计算机模拟研究. 结果发现, 出口附近存在一个关键区域, 颗粒流状态与该局域区域内的流量、密度和速度之间存在着定量关系, 如图6所示. 他们首次阐明了通道内的稀疏流和密集流之间的转变是一个具有随机性的定态转变过程. 颗粒流动状态可以分为稳态稀疏流、亚稳态稀疏流、非稳态密集流和稳态密集流. 该结果对进一步构建颗粒流本构方程具有重要的理论意义, 对如何控制颗粒流和交通流等类似现象具有较强参考价值.

考虑到许多工业过程中小颗粒输运常常在空气存在的环境中进行, Hilton和Cleary^[46]研究了有空气作用时的三维漏斗圆形出口的流量. 他们从出口内的颗粒动力学特性出发推导出了有空气作用时流量方程:

$$Q = \pi\rho A^2 \tau_\eta g, \quad (7)$$

式中 τ_η 为黏性时间尺度(Viscous Time Scale). 方程(7)表明, 当颗粒尺寸较小时空气对颗粒流的影响较大, 以至于出口流量显著降低, 这一结论与实验结果基本吻合.

除了重力场驱动作用下的竖直漏斗颗粒流和斜面颗粒流, 利用传送带驱动进行水平输运颗粒是工业应用中的一个重要装置^[47]. 研究表明^[48-51], 出口流量与开口尺寸 A 和传送带速度 V 紧密相关. 当出口宽度 $A \geq 6D$ 时, 颗粒保持连续流动状态. 当出口宽度 A 固定时, 传送带速度 V 存在一个临界速度 V_c , $V < V_c$ 时, 流量满足与方程(1)相似的规律:

$$Q = C \frac{V}{D^2} (A - kD), \quad (8)$$

其中, k 为拟合参数, 其取值范围在1-3之间, C 为与初始堆积密度 ϕ 相关的常数, 这个结论与Bao等人^[47]的实验结果相同. 当速度 $V \geq V_c$ 时, 流量只与开口尺寸相关而与速度大小无关, 即 $Q \propto (A - kD)^{3/2}$.

图 5 出口流量 Q 随出口尺寸 d 的变化关系图。其中，曲线 ABCDE 为固定入口流量时，当 $d > d_c$ ，颗粒流为稀疏流，当 $d < d_c$ ，颗粒流为稀疏流。曲线 ACD 对应为密集流流量^[15]。图片来源文献^[15]，已获得授权

Figure 5 Outflow rate Q as a function of exit size d . The curve ABCDE is for the condition of the fixed inflow rate. For $d > d_c$, the flow is dilute state, and for $d < d_c$, the flow is dense state. The curve ACD is the dense flow rate. Reproduced from ref. [15] with permission.

图 6 出口流量与堆积密度变化关系。其中， $Q_{\max}$ 为最大稀疏流流量， Q_d 为密集流流量^[16]。图片来源文献^[16]，已获得授权

Figure 6 The relationship between flow rate and packing fraction. $Q_{\max}$ and Q_d are the maximum flow rate and the flow rate of stable dense flow state, respectively [16]. Reproduced from ref. [16] with permission.

事实上，由于水平驱动下系统各物理参量之间的关系相对更加复杂，因此对于水平颗粒流还有很多问题值得研究。

2.1.2 出口数目和出口间距

工业生产中的筒仓卸料是一个常见的颗粒流问题。为了提高卸料效率或保护筒仓结构，人们有时在筒仓底部设置两个或多个出口。事实上，出口尺寸和出口数量与颗粒流的堵塞现象密切相关。Mondal 等人^[52]和 Kunte 等人^[53]都通过 DEM 模拟研究了两个流孔之间的距离对拱稳定性的影响，发现阻塞概率随着孔间距的减小而减小，但同时两孔间的颗粒又提升了拱的稳定性，这又增加了每个出口的堵塞概率。这个结论表明，对于同一个筒仓来说，存在出口尺寸大小与出口个数及位置的优化问题。Maiti 等人^[54]采用图像测速 (PIV) 技术研究了竖直准二维矩形筒仓内颗粒通过两个孔的流动情况。通过观测颗粒的速度场分布，他们发现，当出口位于仓壁附近时流量会增加。当双孔位置对称且近仓壁时，流量几乎是单口流量的 2 倍 (图 7)。作者给出了适用于双出口流动的修正 Beverloo 流量公式：

$$Q = Q_{e=0}(1 + A_1 e^{B_1}), \quad (9)$$

其中 A_1 和 B_1 为拟合参数， $e = 2d_i/W$ 定义为偏心率， d_i 是出口轴线与筒仓轴线之间的距离， W 为筒仓宽度。

Xu 等人^[55]实验研究了准二维竖直漏斗颗粒流。漏斗平底上开有两个对称出料口。根据图 8 所示的测量数据，即不同出口宽度下流量与孔间距的关系，提出了一个流量的经验方程：

$$Q = Q_{\lambda \rightarrow \infty}(1 + \alpha e^{-\beta \lambda}), \quad (10)$$

其中 $Q_{\lambda \rightarrow \infty}$ 是出口间距接近无穷大时的流量， α 、 β 是拟合参数， λ 是出口间距。图中实线即为利用式 (10) 拟合实验数据的结果。可以看出，流量随孔间距的减小而增大，但不会超过出口等于两出口之和的单孔的流量。需要指出的是，这个结论对于必须开出两孔或多孔情况下的孔间距设计具有重要参考价值。此外，根据观测的出口上方堆积密度分布以及垂直速度分布，发现平均垂直速度很大程度上取决于孔间距，但堆积密度与孔间距无关。由质量守恒方程 (方程 (6))，可以推测流量发生变化的物理机制是孔间距改变了颗粒的竖直速度。

最近，Fullard 等人^[56]采用粒子图像测速 (PIV) 结合离散元方法，研究了具有两个对称出口的二维矩形筒仓内颗粒流的动力学特性，结果如图 9 所示。当孔间距接近 0 时流量 (红色实心圆) 为最大值，随着孔间距增加，

图 7 (网络版彩图)单孔和对称双孔情况下 Q 与 e 的关系, 颗粒直径范围 $D=300\text{--}500\text{ }\mu\text{m}$ ^[54]. 图片来源文献[54], 已获得授权

Figure 7 (Color online) Mass flow rate as a function of e for single orifice and double symmetrical orifices. The grain diameter is at the range of $D=300\text{--}500\text{ }\mu\text{m}$ [54]. Reproduced from ref. [54] with permission.

图 8 (网络版彩图)流量 Q 与出口间距的关系. 不同类型符号点代表不同的出口宽度, 实线为利用方程(10)的实验拟合曲线^[55]. 图片来源文献[55], 已获得授权

Figure 8 (Color online) Flow rate Q as a function of the inter-orifice distance λ . Every point is averaged from five measurements. The solid line is the fitting curve [55]. Reproduced from ref. [55] with permission.

流量先是降到一个最小值, 然后上升. 当孔间距无穷远 (两孔没有相互作用) 时流量为单孔流量的两倍并保持不变, 这与文献[54,55]的实验观察有所不同. 对此, 他们用DEM方法降低了颗粒的摩擦系数, 所得流量随孔间距的变化如图中的蓝色星型符号所示, 得到了与文献[57]一致的结果. 这表明两个出口的筒仓中颗粒物质的流动行为除了与孔间距有关之外, 还与颗粒之间的摩擦系数有关.

至于颗粒流通过多个孔口的情况, Kamath等人^[58]

图 9 (网络版彩图)用DEM方法模拟所得归一化流量与孔间距之间 λ 的关系^[56]. 图片来源文献[56], 已获得授权

Figure 9 (Color online) Normalized flow rate as a function of opening spacing λ for the DEM numerical experiments [56]. Reproduced from ref. [56] with permission.

的DEM模拟结果表明, 当以适当的频率打开和关闭相邻的出口时, 可以减少停滞区, 并使整个筒仓的颗粒分布更加均匀.

实际上, 颗粒物质通过多孔流出的特性与交通流及行人的疏散过程非常类似. Sticco等人^[59]基于社会力学模型(Social Force Model)模拟了行人从有两个出口门的房间中的疏散, 结果发现, 当两个相同大小的门合并成一个大门时(门间距为0), 行人离开房间耗时最少, 即人流量最大; 当门与门的间距增大到某一值时, 耗时增加并达到一个最大值, 即人流量最小. 随着门与门的间距继续增加, 耗时开始减小(人流量开始增大). 显然, 颗粒流的研究结果应用于交通流或行人疏散的工程实践有着经济安全的巨大优势.

2.1.3 出口位置和出口方向

漏斗的出口并不总是在容器底部, 有时会位于侧壁, 由此开口方向并不垂直于漏斗底部, 作用在颗粒上的重力在流动中往往会等效减小, 颗粒流动特性自然会受到出口位置的显著影响. Medina等人^[60]考虑了在漏斗底面和侧壁的出口对流量的影响. 实验分析了无黏性砂子和砂糖通过平底漏斗流量, 出口形状分别为圆形、矩形和等边三角形, 他们发现流量除了与出口形状、位置相关, 还受漏斗侧边壁的厚度和颗粒的休止角影响. 他们在实验基础上总结了颗粒通过侧壁出口的流量经验公式. 对于圆形出口, 流量公式为

$$Q = CQ_0 \left[\arctan\left(\frac{A}{w}\right) - \theta_r \right], \quad (11)$$

其中, C 为拟合参数, Q_0 为圆形开口在底边壁的流量, A 为出口直径, w 为漏斗侧壁的厚度, θ_r 为颗粒的休止角. 对于矩形和等边三角形出口, 流量公式为

$$Q = CQ_0(\alpha - \theta_r), \quad (12)$$

其中 α 是与漏斗侧壁厚度相关的角度, 对于矩形出口, $\alpha = \arctan(f/w)$ 其中 f 为矩形出口的高度; 对于等边三角形出口, $\alpha = \arctan(h/w)$, 其中 h 为等边三角形的高. 在前人研究的基础上, Zhou 等人^[61]开展了更为系统的工作, 他们采用实验、二维离散模拟和连续模拟的方法, 对颗粒通过漏斗侧壁出口的流量进行了研究, 漏斗包含圆柱形和矩形漏斗, 出口为矩形出口(如图10). 发现在矩形漏斗中流量与出口满足 $Q \propto WD^{3/2}$; 在圆形漏斗中流量满足 $Q \propto W^{3/2}D$.

除了开口位于边壁, Wang 等人^[62]通过分子动力学模拟研究了二维通道中出口位置对颗粒流的影响. 发现与中心出口相比, 当出口靠近通道侧壁时流量更大(如图11所示). 他们认为当出口从中心位置移到侧壁位置时, 有效出口尺寸增大是流量增加的主要原因.

当出口位置在侧壁时, 出口方向与重力方向成垂直关系, 这暗示了出口方向可能也会对流量有所影响. 研究流量与出口方向之间的关系是一个有趣的问题. Sheldon 等人^[63]将漏斗倾斜, 可得到不同的出口方向. 他们实验研究了圆柱形漏斗中出口方向对流量的影

图 10 筒仓的示意装置. (a) 矩形筒仓, 开口位于侧壁; (b) 圆柱形筒仓, 开口位于侧壁^[61]. 图片来源文献^[61], 已获得授权
Figure 10 Schematic setup of silo. (a) Rectangular silo with an opening at the lateral wall; (b) cylindrical silo with an opening at the lateral wall^[61]. Reproduced from ref. [61] with permission.

响, 他们特意研究出口方向分别位于漏斗底部和侧面, 发现二者流量都满足 Beverloo 方程, 区别在于方程中拟合参数 k 值的大小, 侧壁出口方向的参数 k 大于底部出口方向, 从而底部出口流量大于侧壁出口流量, 底部出口流量最大增加约为 100%. Serrano 等人^[64]更进一步, 在实验中考虑了漏斗侧壁的厚度和漏斗倾斜角度, 研究了倾斜圆柱形漏斗中颗粒通过侧边壁的流量, 并给出了流量经验公式

$$Q = CQ_\beta(A, w, \beta), \quad (13)$$

其中 C 为拟合参数, $Q_\beta(A, w, \beta)$ 为分段函数

$$Q_\beta(A, w, \beta) \propto \begin{cases} Q_0(\beta + \alpha - \theta_r) \frac{\sin(\beta + \alpha - \theta_r)}{\sin(\alpha - \theta_r)}, & \beta^* \leq \beta \leq \beta_m \\ \frac{1.819Q_0}{\sin(\alpha - \theta_r)} [1 + (\beta - \beta_m)], & \beta_m < \beta \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

其中, $\alpha = \arctan(A/w)$, β 为漏斗倾斜角度, $\beta_m = 2.028 - (\alpha - \theta_r)$, $\beta^* = -(\alpha - \theta_r)$.

除了对流动特性的研究, Thomas 等人^[65]更为关注不同倾角对颗粒堵塞的影响, 他们也将平底柱形漏斗倾斜, 总结出了出口尺寸 D 和出口倾角 θ 的堵塞相图(如图12所示), 发现较大的倾斜角度使系统更容易堵塞.

图 11 (网络版彩图) 流量随出口尺寸变化的模拟结果. 正方形和圆形分别代表中心出口和侧面出口^[62]. 图片来源文献^[62], 已获得授权

Figure 11 (Color online) The simulation of flow rate as a function of exit size. The squares and circles indicate the data from an exit located at center of the bottom wall and of the lateral wall, respectively^[62]. Reproduced from ref. [62] with permission.

图 12 (网络版彩图)颗粒的堵塞相图. (a) 出口为圆孔; (b) 出口为矩形. 实心圆表示临界孔径或矩形临界出口宽度 D_c [65]. 图片来源文献[65], 已获得授权

Figure 12 (Color online) Clogging phase diagram of glass spheres discharged from circular opening (a) and a rectangular slit (b) [65]. The solid circles indicate data from a critical opening radius or a critical rectangular slit width D_c . Reproduced from ref. [65] with permission.

2.1.4 漏斗角度

漏斗角度是影响颗粒流的另一个重要参数. 由于颗粒流系统的复杂性, 人们用不同方法对其进行了研究. Ristow等人[66]利用分子动力学方法模拟了竖直漏斗出口附近停滞区的形状和壁面上的压力, 发现壁面上的压力随时间呈幂指数衰减, 停滞区则当漏斗角度大于 70° 以后消失, 同时颗粒流的流动模式由漏斗流 (Funnel Flow) 转变为整体流 (Mass Flow). Tüzün等人[14]基于沙漏理论 (Hour-Glass Theory) 导出了漏斗流量的计算公式

$$Q = \frac{\pi \rho_b \sqrt{g} A^{5/2}}{2} \sqrt{\frac{1+K}{2(2K-3)}} \frac{1-\cos\theta}{\sin^{5/2}\theta}, \quad (14)$$

这里 K 是 Rankine's 压力参数. 然而, 利用式(14)预测流量的理论值大约是实验测量值的两倍. 产生这种差异的原因是在公式推导过程中假设漏斗壁光滑和自由落体拱上应力为零.

Alonso-Marroquin等人[67]模拟研究了二维竖直漏

斗中漏斗倾角对流量的影响, 给出了流量与漏斗角度 θ 的经验公式

$$Q = C \left(\frac{g}{D} \right)^{1/2} \frac{(A/D - c_0)^{3/2}}{\sin^{1/2}\theta}, \quad (15)$$

其中 C 与 c_0 为拟合参数. 图13所示为流量对漏斗角度的依赖关系, 空心圆为模拟数据, 实线为用方程(19)拟合所得, 可以看出模拟结果与公式拟合很好.

黄德财等人[68]用分子动力学模拟研究了二维通道中出口角度对颗粒流流量的影响. 发现在固定入口流量和固定颗粒数两种条件下, 开口角度增大都可以提高颗粒流的流量(图14). 通过进一步的计算发现增加开口角度可以提高颗粒流出开口的流动速度, 并且最大出口流量与颗粒的流动速度呈线性关系.

基于对二维竖直平底漏斗流的流量表达式(4)的修正, Benyammine等人[69]提出了描述漏斗角度对流量影响的物理模型, 认为漏斗角度对出口处拱形的曲率半径 ($\tilde{R} = R / \cos\theta$) 有影响, 并在此基础上提出了新的流量表达式

$$Q = C' \sqrt{gR} \phi_0 \left(1 - \alpha e^{-\frac{\beta R}{D \cos\theta}} \right) R, \quad (16)$$

式中 D 是颗粒直径, θ 是漏斗角度. 考虑到水平和竖直两类颗粒流的出口处具有相似的几何特征. Wang等人[70]借鉴式(16)模型的数学形式, 提出了二维水平颗粒流的流量与漏斗角度的表达式

$$Q = C' v_b \phi_0 \left(1 - \alpha e^{-\frac{\beta A}{D \cos\theta}} \right) A. \quad (17)$$

实验测量的不同漏斗角度和开口尺寸条件下的流量如图15所示. 根据方程(17)拟合实验数据的结果如图15中实线所示. 可以看出拟合曲线与实验结果吻合得较好, 说明方程(17)可以很好地描述水平颗粒流通过有角度的漏斗的出口流量.

2.2 颗粒性质的影响

2.2.1 摩擦系数

颗粒与颗粒之间、颗粒与漏斗侧壁之间的摩擦系数在实验上进行定量调控比较困难, 所以研究摩擦系数对颗粒流的影响主要以模拟为主. Ristow[71]用分子动力学方法模拟了二维竖直漏斗中具有不同摩擦系数的颗粒流. 结果发现, 颗粒间的摩擦系数 μ 越大, 流量越

图 13 (网络版彩图)流量与漏斗角度的依赖关系^[67]. 图片来源文献^[67], 已获得授权

Figure 13 (Color online) The relationship between flow rate and hopper angle ^[67]. Reproduced from ref. ^[67] with permission.

图 14 出口流量 Q 随开口角度 θ 的变化关系. 符号 Δ 为固定入口大小到的最大出口流量. 符号 $\blacksquare$ 和 $\circ$ 分别为由固定颗粒数得到的密集流流量和最大出口流量^[68]. 图片来源文献^[68], 已获得授权

Figure 14 Flow rate Q as a function of hopper angle θ . Δ indicates the maximum flow rate when the aperture size is fixed. $\blacksquare$ and $\circ$ represent the dense flow rate and maximum flow rate, respectively, when the particle number is fixed ^[68]. Reproduced from ref. ^[68] with permission.

小. Koivisto等人^[72]对比了表面粗糙颗粒和表面光滑颗粒的颗粒流的流出形态, 发现光滑颗粒的流量以递减的方式从漏斗流出, 此时颗粒流呈现牛顿流体流动的特性, 而有摩擦的粗糙颗粒则以恒定的颗粒速度排出.

颗粒流的通道边界不可避免地会影响到颗粒流的流动特性. Yu等人^[73]用DEM方法研究了三维锥形竖直漏斗侧壁的粗糙程度对颗粒流影响, 发现颗粒与侧壁间静摩擦系数不仅对壁面附近颗粒的速度分布有影

图 15 (网络版彩图)在不同的驱动速度和开口尺寸下, 缩放流量 Q^* 与 $A/(D\cos\theta)$ 的关系^[70]. 实心符号来自 $A=6.6$ cm的数据, 而空心符号来自 $A=11$ cm的数据. 所有数据都坐落在一条主曲线上. 图片来源文献^[70], 已获得授权

Figure 15 (Color online) Scaled flow rate Q^* as a function of $A/(D\cos\theta)$ for different belt velocities and orifice sizes. The solid symbols are for an orifice width $A=6.6$ cm, and the hollow symbols for $A=11$ cm. All data points collapse together to form a master curve ^[70]. Reproduced from ref. ^[70] with permission.

响, 而且随着静摩擦系数的增大, 颗粒流流动模式由整体流向漏斗流转变. Zhang等人^[74]的DEM模拟结果则进一步表明侧壁面摩擦对颗粒流中的力链长度和体积分数分布都有较大影响, 从而导致流量明显降低. 周英等人^[75]对于二维斜面颗粒流的实验研究发现, 当通道两侧为粗糙边界时, 颗粒在通道内呈对称马鞍形分布, 如图16所示, 侧壁处的颗粒数分布最少, 约为最大值的四分之一, 并在边界附近出现两个对称的极值, 表明粗糙边界对于颗粒的流动状态有明显的影, 这与Tsai等人^[76]的实验观测相一致.

水平传送带运输颗粒物质的过程中, 保持颗粒静止于带面而不发生相对运动是保证传送效率的前提条件. Cordero等人^[49]用DEM方法计算了水平传送带运输颗粒过程中颗粒与传送带面之间的摩擦系数对于流量的影响. 他们发现, 当传送带速度较低 $V < V_c$ 时流量与摩擦系数无关, 而当速度较高 $V \geq V_c$ 时, 流量与摩擦系数的关系为

$$Q = C\sqrt{g\mu}(A - kD)^{3/2}, \quad (18)$$

式中 C 和 k 的取值与方程(8)一致. Zhu等人^[77]通过实验定量研究了底边壁的粗糙程度对颗粒流的影响, 发现存在一个摩擦系数阈值 μ_c , 当摩擦系数 $\mu < \mu_c$ 时流量随

图 16 粗糙边界通道内颗粒数的横向分布^[75]. 图片来源文献^[75], 已获得授权

Figure 16 The transverse distribution of particle number in the rough boundary channel ^[75]. Reproduced from ref. ^[75] with permission.

摩擦系数近似线性增长, 流量最大增加了 17.7%, 如图 17 所示. 但当 $\mu > \mu_c$ 时, 流量趋于常数. 此外, 通过观测出口两侧颗粒的横向运动与颗粒间的相互挤压力, 还发现摩擦系数越大, 颗粒的横向运动和相互挤压力就越小, 这正是流量增大的物理机制. 该项研究结论对于设计传送带面以提高传送效率具有重要参考价值.

2.2.2 颗粒形状

不同形状的颗粒在堆积时的力链结构都不相同. 随着颗粒长宽比的增加, 应力的传播受到很大影响^[78], 当颗粒从筒仓流出时细长颗粒更容易在出口上方形成力拱而发生阻塞^[79], 从而使流量减小. 颗粒的形状种类较多, 对颗粒流的模式和流量的影响也各不相同. 随着研究的深入, 人们发现 Beverloo 公式已不适用于非球形颗粒, 然而在实验上定量研究颗粒的形状对颗粒流的影响却有很大挑战, 这是因为材料制备和表征方法都比较困难. 所以迄今为止, 颗粒形状对于颗粒流影响的研究还是以模拟居多.

Kohring 等人^[80]用 MD 方法研究了方形颗粒在准直漏斗中的流动情况, 发现非球形因素导致了颗粒流即使进料稳定, 颗粒的流出也非常不稳定, 在出口处随时会发生阻塞现象. Kanzaki 等人^[81]从理论和实验两个方面系统研究了非球形颗粒从筒仓中排出后颗粒堆结构和力学特性, 同样发现颗粒形状和长宽比与筒仓内的应力分布关系密切, 从而很大程度上影响了筒仓的卸料过程. Liu 等人^[82]用离散元方法结合实验技术研究了平底漏斗中椭球体颗粒的流动特性和排放流量,

图 17 流量 Q 与底边摩擦系数 μ 的关系, 每个数据点是 6 次平均的结果. 插图为 Q/Q_0 与底边摩擦系数 μ 的关系, Q_0 为主图中最小流量. 图中出口宽 $A=6D=6.6$ cm, 传送带速度 $V=15.1$ cm/s^[77]. 图片来源文献^[77], 已获得授权

Figure 17 Flow rate Q as a function of the coefficient of friction of the bottom wall μ . Every point is averaged from six measurements. Inset: normalized flow rate is plotted as a function of the coefficient of friction. Q_0 corresponds to the lowest flow rate in the main panel. The aperture width $A = 6D = 6.6$ cm, and the conveyor belt velocity $V = 15.1$ cm/s ^[77]. Reproduced from ref. ^[77] with permission.

发现长宽比相等的球体流量最大, 长宽比越高流量越小. 他们通过修正 Beverloo 式(1)给出了适用于椭球颗粒的流量方程

$$Q = C\rho_B g^{1/2} (A - kd_p)^{5/2}, \quad (19)$$

式中 d_p 是等效直径, 其定义为与椭球体积相等球体的直径.

Börzsönyi 等人^[83,84]用不同长宽比的颗粒, 研究了 3D 竖直漏斗中颗粒流的流出过程, 分析了尺寸和长宽比对堵塞状态和平均流量的作用. 他们发现相等体积的颗粒中, 细长颗粒更容易形成堵塞而使流量减小, 如图 18 所示.

最近, 季顺迎和余艾冰等课题组^[82,85,86]采用离散单元法实现了超椭球在漏斗内的流动的计算机模拟, 如图 19 所示为不同长宽比的超二次曲面单元. 结果发现, 类似球型颗粒情况, 出口角度增大有利于提高出口流量. 但是, 随着椭球长宽比的增加, 出口流量相对减小.

2.2.3 混合颗粒

事实上, 在自然界和生产过程中, 由混合颗粒构成的颗粒流体并不鲜见. 混合颗粒在流道内的流动以及通过出口的过程比起单组分的颗粒流体来说更为复

图 18 (网络版彩图) 不同流量的平均雪崩尺寸 $\log_{10}(S)$ 与出口半径 R/r_{eq} 的实验结果, 图中 Q 表示长宽比^[84]. 图片来源文献[84], 已获得授权

Figure 18 (Color online) Experimental result of mean avalanche size $\log_{10}(S)$ vs. orifice radius R/r_{eq} for particles with different aspect ratios Q [84]. Reproduced from ref. [84] with permission.

图 19 (网络版彩图) 三维超二次曲面单元模型^[86]. 图片来源文献[86], 已获得授权

Figure 19 (Color online) (a) Super-quadratic elements in three dimensions [86]. Reproduced from ref. [86] with permission.

杂, 其中混合颗粒的尺寸比和组分比都对颗粒流有重要影响. Artega 等人^[87,88]研究了两种混合颗粒在圆柱形和锥形筒仓中的流动. 他们提出了一种考虑“流动密度”的混合密度半经验模型, 认为混合颗粒的流动行为取决于大尺度颗粒(d_c)和小尺度颗粒(d_f)的质量分数(X)和他们的尺寸比($r = d_c/d_f$). 他们对 Beverloo 方程进行了修正

$$Q = C \rho_m g^{\frac{1}{2}} (A - k_m d_m)^{\frac{5}{2}}, \quad (20)$$

式中, ρ_m 是混合颗粒的密度, C , k_m 是拟合参数, d_m 为混合颗粒的等效直径, 其表达式为

$$d_m = X_f d_f + (1 - X_m) d_c, \quad (21)$$

其中 X_f 为小颗粒的质量分数 (小颗粒的质量与总质量的比值), d_f 为小颗粒的直径, d_c 为大颗粒的直径.

Benyamine 等人^[89,90]提出了一个简单的物理模型来描述双组分混合物的流动, 这个模型认为无论粒子直径多大, 在出口处的粒子速度都相同. 在此基础上他们分别用实验和离散元模拟的方法研究了颗粒在三维和二维筒仓的排放过程, 并给出了二元混合颗粒流量的经验公式

$$Q = CK(X_f) \left[X_f G\left(\frac{d_f}{A}\right) + (1 - X_f) G\left(\frac{d_c}{A}\right) \right] \phi_b \sqrt{gD^3}. \quad (22)$$

显然, 流量与小颗粒的质量分数密切相关, 模拟结果如图 20 所示, 实线则为利用方程 (22) 的拟合结果, 可以看出两者吻合得较好.

Madrid 等人^[91]对双组分混合颗粒在三维筒仓中的流量进行了数值模拟和实验研究, 发现混合物的组成对仓内的体积分分布造成很大影响. 基于实验与模拟结果提出的双组分混合颗粒的流量方程为

$$Q = C' \left[1 - e^{-\left(\frac{R}{r_c}\right)^\alpha} \right] \left[\frac{R}{r_c} \right]^{\frac{5}{2}}, \quad (23)$$

其中 C' 是与颗粒速度、体积分和等效直径相关的参数, α 为拟合参数, R 为出口半径, r_c 为等效半径. 流量与出口半径及混合颗粒参数的关系如图 21 所示, 实线为利用方程 (23) 拟合实验数据的结果, 它的意义在于给定出口尺寸和颗粒参数即可预测颗粒流的流量.

2.3 外部因素的影响

2.3.1 外部激励

颗粒的力拱效应是颗粒物质的固有属性, 也是颗粒流出现堵塞的物理机制之一. 为了消除因堵塞导致的颗粒流受阻, 人们有时会采用振动等外部激励的方式来促使颗粒流的连续流动. Wassgren 等人^[92]用实验和离散元方法研究了垂直正弦振动作用下颗粒物质从二维竖直漏斗中的排出情况, 实验结果如图 22 所示. 振动频率低于 50 Hz 时, 流量随振动加速度增加而减小, 振动频率在 60–80 Hz 时, 流量略有增大. 作者认为流量减小的原因是振动作用导致系统内颗粒的堆积密度降低.

Chen 等人^[93]扩大了外部激励的参数范围, 并通过定义一个峰值速 $v_{\max} = A\omega = \Gamma/\omega$ 来表达流量与振动参量

图 20 双组份混合颗粒中, 无量纲流量与精细质量分数 X_f 的关系, 实线用方程(22)拟合所得^[90]. 图片来源文献[90], 已获得授权

Figure 20 Flow rate Q made dimensionless by $Q/\phi_0\sqrt{gA^3}$ versus the fine mass fraction X_f in the bidisperse case [90]. The fitting solid line is obtained by eq. (22). Reproduced from ref. [90] with permission.

图 21 (网络版彩图)流量与参数 R/r_c 的关系, 不同符号点表示小颗粒质量分数^[91]. 所有实验和模拟数据都坐落在方程(23)的曲线上. 为比较方便, 所有数据都被半径 r_c 标度. 图片来源文献[91], 已获得授权

Figure 21 (Color online) The flow rate as a function of R/r_c for different mass fractions. Collapsed data corresponding to the simulated and experimental mass flow rates. For the sake of convenience, values of Q and R have been normalized by the radius r_c to compare all the results [91]. Reproduced from ref. [91] with permission.

的依赖关系, 如图23所示. 实验结果表明, 流量随峰值速度 $v_{\max}$ 的增加而增大, 但如果给定 $v_{\max}$, 则流量不随振动频率 $f=\omega/2\pi$ 和振动加速度 Γ 而变化. 依据实验数据给出了振动条件下的流量经验公式

$$Q = Q_0 \left(1 + \frac{v_{\max}^2}{agd} \right)^{-3}, \quad (24)$$

其中 α 为拟合参数, D 为颗粒的直径, Q_0 为无振动情况下的流量. 图23中红色实线为利用方程(24)拟合实验数据的结果, 它的价值在于给定振动频率和振动加速度即可预测颗粒流的流量.

考虑到出口处的外部激励有可能对出口处的堵塞产生更直接的影响, To等人^[94]在出口处施加横向振动, 观测并比较了大、小尺寸出口的流量. 他们发现较大尺寸的出口情况下不易发生力拱现象, 振动对流量没有正向贡献, 相反振动会引起颗粒的随机运动, 从而增加流动的阻力. 在出口较小且不施加振动时容易发生力拱现象, 致使颗粒流速度减慢, 甚至形成阻塞而

图 22 不同振动频率下, 流量与振动加速度的依赖关系^[92]. 图片来源文献[92], 已获得授权

Figure 22 Flow rate as a function of vibration acceleration Γ for different vibration frequency f [92]. Reproduced from ref. [92] with permission.

图 23 (网络版彩图)流量与峰值速的依赖关系^[93]. 图片来源文献[93], 已获得授权

Figure 23 (Color online) A comparison of the peak velocity dependence of the flow rate [93]. Reproduced from ref. [93] with permission.

中断颗粒的流动, 而若施加振动, 则可完全阻止拱的形成, 从而实现颗粒的连续流动. 实验结果如图24所示, 可见流量随振动强度(振幅 A)的增大而增大.

外部激励条件下的颗粒运动往往是高速运动. Wen等人^[95]利用高速摄像机研究了颗粒在垂直振动作用下通过多孔筛板的流量. 他们将流动过程分为自由飞行阶段和接触阶段, 且两个阶段交替发生. 在自由飞行阶段, 颗粒与筛板分离, 没有颗粒从筛孔流出; 在接触阶段, 颗粒与筛板接触并流出筛孔. 数据分析表明, 通过筛孔的流量随振动强度增加而增加, 且对流量起决定作用的是振动加速度. 这个结果与文献[94]所研究小尺寸出口的结论相一致.

不同于振动激励的方式, Hilton等人^[96]利用筒仓的旋转运动研究了旋转剪切对于三维竖直颗粒流的影响, 发现流量随着施加的剪切力增加而增大. 他们认为流量增加的原因是剪切力破坏了出口附近静止区的颗粒分布, 导致颗粒柱下部区域的总堆积密度变高, 而出口处堆积密度与流量成正相关关系. 他们还认为剪切作用下的流量与颗粒的直径、颗粒的摩擦特性和系统几何结构无关.

改变颗粒流的流向角度显然是一个经济有效的外部激励方式. Gago等人^[97]针对一个斜面准二维颗粒流,

图 24 (网络版彩图) 不同振幅下, 流量与振动频率的变化关系^[94]. 图片来源文献[94], 已获得授权

Figure 24 (Color online) The relationship between flow rate and vibration frequency with different vibration amplitude [94]. Reproduced from ref. [94] with permission.

通过调节斜面的角度以及出口宽度, 可以找到系统的两种不同状态(间歇流和连续流)并能测得其流量. 事实上, 间歇流即为拥堵出现的状况, 而连续流则为无拥堵的状况. 因此, 斜面颗粒流可以模拟不同匆忙程度的交通流和行人流, 改变斜面的角度类似于改变社会力量模型中的驱动力. 出口较小时颗粒的流动易呈现间歇流状态, 此时若给颗粒施加更大的力(增大斜面倾角), 颗粒的排放效率反而降低(“Faster is Slower”效应). 出口较大时颗粒流易呈现连续流状态, 此时若给颗粒施加更大的力(倾角增大), 则颗粒的排放效率增加(“Faster is Faster”效应). 显然, 斜面流的研究对于解决交通堵塞和人群疏散等问题有重要的现实意义.

2.3.2 障碍物

为了减小颗粒流出口处的阻塞概率并增加流量, 在出口上方放置障碍物的效果已成为颗粒流研究的课题之一. 目前人们关注的重点是障碍物尺寸、位置、形状和障碍物群的排列方式对颗粒流的影响. Zuriguel等人^[98]在二维竖直平底漏斗出口的上方放置障碍物(圆盘), 发现出口附近会有两种力拱模式: (1) 若障碍物距离出口太近, 则障碍物和底边界之间会形成如图25(a)所示的拱; (2) 若障碍物距离出口太远, 则颗粒会在出口上方形成图25(b)所示的拱. 通过调整障碍物的位置发现, 障碍物距离出口为4 mm(颗粒直径的4倍)处阻塞概率最小, 如图25(c)所示. 他们结合分子动力学模拟解释了障碍物的存在会减小阻塞概率的原因, 即障碍物使得出口上方的颗粒分布变的稀疏从而所受压力减小.

Lozano等人^[99]继续研究了障碍物对颗粒流流量的影响. 实验发现障碍物距离出口太近($h < 4$ mm)时流量受到抑制, 只有把障碍物放置到合适的位置才会对流量有促进作用. 从实验结果图26(a)可以看出, 对于出口宽度较大($R = 4.55$ mm)的二维漏斗, 无论将障碍物放置到什么位置都不能促使流量增加, 这是因为当出口较大时颗粒流是连续流, 颗粒不能在出口上方形成力拱而阻塞. 对于出口宽度较小的漏斗流量增加明显. 通过分别观测无障碍物放置和有障碍物放置两种情况下的瞬时流量, 发现前者有瞬时堵塞现象($q = 0$)发生(图26(b)), 后者则不发生瞬时堵塞现象(图26(c)). 作者认为障碍物使得出口上端颗粒之间的压力减小, 破坏

图 25 (网络版彩图) (a), (b) 两种力拱阻塞模式. (a) 拱形成于障碍物与底边界之间; (b) 拱形成在出口上方; (c) 阻塞概率($1-p$)与障碍物距出口距离(h)之间的关系, 水平虚线为障碍物距出口距离无穷远时, 也就是没有障碍物时的阻塞概率^[98]. 图片来源文献^[98], 已获得授权

Figure 25 (Color online) (a), (b) Photographs of the two different kinds of blocking arches found in this experiment: arches formed between the obstacle and the bottom (a) and arches formed just above the outlet (b). (c) Probability that a particle clogs the outlet ($1-p$) for different insert heights (h). The horizontal dashed line indicates the value of $1-p$ when $h \rightarrow \infty$ (silo without obstacle) ^[98]. Reproduced from ref. ^[98] with permission.

了拱的形成, 减小了出口处瞬时流量的涨落, 从而促进了流量的增大. Alonso-Marroquin 等人^[67]数值模拟了开口附近放置圆盘障碍物对流量影响, 结果表明调整障碍物的位置, 可使出口流量的增量达到16%.

不同形状的障碍物对于颗粒流的影响亦不同. Endo 等人^[100]用实验结合数值模拟研究了二维竖直漏斗流中障碍物的形状效应(圆盘、等边三角形盘和水平杆), 实验发现三角形障碍物或水平杆可以更好地防止堵塞. 其物理机制也是由于障碍物的存在使得颗粒在出口处的堆积密度降低而防止了堵塞. 文献^[100]的结论与Zhao 等人^[101]模拟研究行人紧急疏散的结果极其相似, 即分别将圆柱形和平板状障碍物放置在出口前方的最佳位置时, 出口区域的平均流量分别提高了3.70%和29.63%.

水平颗粒流出口处放置障碍物的效应在最近几年受到关注. Areán 等人^[102]在水平传送带上研究了障碍物对颗粒流的影响, 装置如图27所示. 实验发现出口处的颗粒流动模式因障碍物的存在发生了变化, 平均

堆积密度随障碍物与出口距离的减小而减小, 并认为障碍物的存在减小了出口两侧的静止区, 使更多的颗粒向出口运动, 从而导致出口堆积密度增加.

Zhu 等人^[103]在水平传送带上研究了在底边出口处放置障碍物(圆盘)对颗粒流的影响. 障碍物圆盘的直径为 d , 颗粒圆盘的直径为 D , 出口宽度为 $6D$. 首先将 $d=D$ 的两个障碍物对称地放置于出口两侧(见图28(a)插图), 通过改变障碍物与出口的距离 L 来观测流量 Q 的变化情况. 实验结果如图28(a)所示, 可见 Q 随 L 的增大而减小, 并在 $L=0$ 时流量最大. 图28(b)是把障碍物固定在 $L=0$ 处而改变颗粒圆盘直径 d 时的测量结果, 可见 Q 随 d 的增大而增大, 流量增幅可达21%. 至于流量增加的机理则是障碍物的存在影响了出口处颗粒的堆积密度和流动速度.

3 结论与展望

本文介绍了近年来漏斗中物理因素对颗粒流影响

图 26 (网络版彩图) (a) 平均流量与障碍物距出口距离 h 的关系, $Q_{h \rightarrow \infty}$ 为没有障碍物时的流量; (b), (c) 出口尺寸为 4.2 mm 且障碍物直径为 10 mm 时, 瞬时流量 q 与时间的关系, 其中 (b) 为无障碍物情况, (c) 为障碍物放置在出口上方 4.2 mm 处^[99]. 图片来源文献^[99], 已获得授权

Figure 26 (Color online) (a) Average flow rate vs. the distance between the obstacle and orifice h , $Q_{h \rightarrow \infty}$ indicates the flow rate without an obstacle. (b), (c) Temporal evolution of the instantaneous flow rate q for an orifice size $R = 4.2$ mm and an obstacle of 10 mm diameter placed at (b) $h \rightarrow \infty$, namely without an obstacle and (c) an obstacle with $h = 4.20$ mm^[99]. Reproduced from ref. [99] with permission.

图 27 (网络版彩图) 传送带实验系统示意图, 蓝色颗粒为障碍物^[102], 箭头表示颗粒流动方向. 图片来源文献^[102], 已获得授权

Figure 27 (Color online) Sketch of the experimental system. The blue particle is the obstacle. The arrow indicates the direction of the flow^[102]. Reproduced from ref. [102] with permission.

图 28 (网络版彩图) (a) 障碍物直径为 $1D$ 时, Q 随 L 的变化关系; (b) 障碍物在出口边界处时, Q 与 d 的关系. 插图分别为障碍物在底边的位置^[103]. 图片来源文献^[103], 已获得授权

Figure 28 (Color online) (a) Flow rate Q as a function of the obstacle position L for $d=1D$; (b) flow rate Q as a function of the diameter d of the obstacle for $L=0$. The illustration shows the position of the obstacle at the bottom^[103]. Reproduced from ref. [103] with permission.

的研究进展. 研究重点是物理因素通过影响颗粒流动模式、出口处堆积密度、速度和力场等物理量, 从而改变颗粒流量. 文中实验或者模拟所得到的颗粒堆积密度分布、流动速度分布以及流动速度涨落分布等相关物理量, 对法国颗粒物质研究小组(MIDI)提出的局部本构理论以及Midi等人^[104,105]所研究的非局部本构理论有着直接帮助, 可为无量纲惯性数、有效摩擦系数与颗粒流动性(Granular Fluidity)之间的关系建立与验证提供思路. 当然, 对颗粒流有影响的物理因素远不止前文所述, 其他物理因素(如填充高度、漏斗直径、颗粒物质的休止角和重力大小等)也对颗粒流有重要影响. 只是部分因素的影响在一定范围内可以消除, 比

如在竖直漏斗中, 当颗粒的填充高度大于漏斗直径的2倍以后, 由于“粮仓效应”, 漏斗底部受到的压力保持不变, 此时流量与填充高度无关; 当漏斗直径大于出口直径2.5倍以后, 边界效应可忽略不计, 此时漏斗直径对流量几乎没有影响. 部分因素自身受到其他因素的影响而很难独立存在, 比如颗粒的休止角受到颗粒材料自身物理性质的影响(如密度、摩擦系数等).

总体上说, 对于重力场驱动的竖直流, 其流量与内外影响因素之间的关系已经得到充分研究, 大量理论公式被提出来理解流动特性. 其中Beverloo等人提出的模型是迄今为止最受欢迎并且是使用最广泛的. 但是其参数 C 与 k 的物理意义尚不清楚, 自由落体拱假设的可靠性与合理性一直受到争议, 其严格的物理解释仍然需要进一步探索.

对于速度场驱动下的水平颗粒流研究虽已有所进展但仍处于初始阶段, 一个重要原因就是颗粒流的流动性质对水平驱动物理参量的响应更加复杂. 例如, 在传送带速度与流量的关系中, 二者并非单调的线性关系, 而是存在一个阈值速度 V_c . 当传送带速度 $V < V_c$ 时, 流量与速度呈线性关系, 当传送带速度 $V > V_c$ 以后, 流量达到饱和, 并且阈值速度又与传送带底面摩擦系数相关^[49]. 在速度场驱动的水平颗粒流中, 依据实验总结的流量方程依然满足Beverloo定律, 但是与竖直流相比, 其物理因素的影响机制却有所不同, 比如, 在

水平漏斗中并不满足“粮仓效应”(底部压力与颗粒填充高度呈正比^[106]), 而颗粒可以稳定的从出口流出, 这说明水平流中流量与底部压力无关^[16]. 此外, 其他物理因素与水平颗粒流关系的研究还比较少, 颗粒在出口处流动的微观机制尚不明确. 这些问题中一部分可依靠实验研究, 而另一部分很难用实验手段解决, 需依靠模拟方法来进一步探索.

在过去的几十年中, 颗粒流动性质的研究取得了巨大的进展. 对颗粒流动物理性质的任何一个方面的认识, 或者是对其流动行为控制的微小改进, 都可以带来巨大的经济效益. 颗粒之间的相互作用复杂多样导致颗粒流建立统一模型或理论绝非易事. 但是, 类比经典流体力学和固体力学的发展过程, 颗粒流动力学的发展同样是需要进一步认识颗粒流体系局域区域内的结构、速度和等关键因素之间的定量关系. 而这些普适关系或本构方程的建立, 需要对诸如不同颗粒形状对颗粒流的影响、局域颗粒之间的作用、颗粒与环境的耦合作用等做更多的实验研究. 同时, 利用计算机模拟的优势, 发展新的算法, 开发高效可靠的计算机模拟程序, 从多尺度的角度出发, 来认识和理解颗粒流在不同时间和空间尺度内的颗粒流的动力学行为, 如工业界关心的颗粒流与气体或液体之间的二相流甚至是多相流. 对这些实际工业应用问题的研究和理解, 反过来又会促进颗粒流理论研究的发展.

参考文献

- Seife C. Can the laws of physics be unified? *Science*, 2005, 309: 82
- Li J C, China's Discipline Development Strategy: Fluid Dynamics (in Chinese). Beijing: Science Press, 2014 [李家春. 中国学科发展战略: 流体动力学. 北京: 科学出版社, 2014]
- Dorbolo S, Maquet L, Brandenbourger M, et al. Influence of the gravity on the discharge of a silo. *Granular Matter*, 2013, 15: 263–273
- Leturia M, Benali M, Lagarde S, et al. Characterization of flow properties of cohesive powders: A comparative study of traditional and new testing methods. *Powder Tech*, 2014, 253: 406–423
- Guariguata A, Pascall M A, Gilmer M W, et al. Jamming of particles in a two-dimensional fluid-driven flow. *Phys Rev E*, 2012, 86: 061311
- Zhu H P, Zhou Z Y, Yang R Y, et al. Discrete particle simulation of particulate systems: Theoretical developments. *Chem Eng Sci*, 2007, 62: 3378–3396
- Conesa C, Saleh K, Thomas A, et al. Characterization of flow properties of powder coatings used in the automotive industry. *Kona Powder Part J*, 2004, 22: 94–106
- Helbing D. Traffic and related self-driven many-particle systems. *Rev Mod Phys*, 2001, 73: 1067–1141, arXiv: [cond-mat/0012229](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0012229)
- Kerner B S. Experimental features of self-organization in traffic flow. *Phys Rev Lett*, 1998, 81: 3797–3800
- Peng Z H, Sun G, Zhu J Y. Traffic flow states in a freeway with bottleneck. *Commun Theor Phys*, 2009, 51: 145–148
- Campbell C S. Rapid granular flows. *Annu Rev Fluid Mech*, 1990, 22: 57–90

- 12 Haff P K. Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon. *J Fluid Mech*, 1983, 134: 401–430
- 13 Kumaran V. Dynamics of a dilute sheared inelastic fluid. I. Hydrodynamic modes and velocity correlation functions. *Phys Rev E*, 2009, 79: 011301
- 14 Tüzün U, Houlsby G T, Nedderman R M, et al. The flow of granular materials-II: Velocity distributions in slow flow. *Chem Eng Sci*, 1982, 37: 1691–1709
- 15 Hou M, Chen W, Zhang T, et al. Global nature of dilute-to-dense transition of granular flows in a 2D channel. *Phys Rev Lett*, 2003, 91: 204301
- 16 Huang D, Sun G, Lu K. Relationship between the flow rate and the packing fraction in the choke area of the two-dimensional granular flow. *Phys Rev E*, 2006, 74: 61306
- 17 Huang D, Sun G, Lu K. Influence of granule velocity on gravity-driven granular flow. *Phys Lett A*, 2011, 375: 3375–3381
- 18 To K, Lai P Y, Pak H K. Jamming of granular flow in a two-dimensional hopper. *Phys Rev Lett*, 2001, 86: 71–74
- 19 Helbing D, Hermann H J, Schreckenberg M, et al. Granular and traffic flow '99: Social, traffic, and granular dynamics. Springer, 1999. <https://www.research-collection.ethz.ch/handle/20.500.11850/123997>
- 20 Sperl M. Experiments on corn pressure in silo cells-translation and comment of Janssen's paper from 1895. *Granular Matter*, 2006, 8: 59–65
- 21 Vanel L, Claudin P, Bouchaud J P, et al. Stresses in silos: Comparison between theoretical models and new experiments. *Phys Rev Lett*, 2000, 84: 1439–1442, arXiv: [cond-mat/9904094](https://arxiv.org/abs/cond-mat/9904094)
- 22 Kou B, Cao Y, Li J, et al. Granular materials flow like complex fluids. *Nature*, 2017, 551: 360–363, arXiv: [1711.03725](https://arxiv.org/abs/1711.03725)
- 23 Cao Y, Li J, Kou B, et al. Structural and topological nature of plasticity in sheared granular materials. *Nat Commun*, 2018, 9: 2911, arXiv: [1806.09416](https://arxiv.org/abs/1806.09416)
- 24 Lu K Q, Liu J X. Static and dynamic properties of granular matter (I) (in Chinese). *Physics*, 2004, 33: 629–635 [陆坤权, 刘寄星. 颗粒物质(上). 物理, 2004, 33: 629–635]; Lu K Q, Liu J X. Static and dynamic properties of granular matter (II) (in Chinese). *Physics*, 2004, 33: 713–721 [陆坤权, 刘寄星. 颗粒物质(下). 物理, 2004, 33: 713–721]
- 25 Aranson I S, Tsimring L S. Patterns and collective behavior in granular media: Theoretical concepts. *Rev Mod Phys*, 2006, 78: 641–692, arXiv: [cond-mat/0507419](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0507419)
- 26 Lu K Q, Liu J X. Introduction to Soft Matter Physics (in Chinese). Beijing: Peking University Press, 2006 [陆坤权, 刘寄星. 软物质物理学导论. 北京: 北京大学出版社, 2006]
- 27 Seiden G, Thomas P J. Complexity, segregation, and pattern formation in rotating-drum flows. *Rev Mod Phys*, 2011, 83: 1323–1365
- 28 Beverloo W A, Leniger H A, van de Velde J. The flow of granular solids through orifices. *Chem Eng Sci*, 1961, 15: 260–269
- 29 Li J H, Ouyang J, Gao S Q, et al. Multiscale Simulation of Complex Granular Fluid System (in Chinese). Beijing: Science Press, 2005 [李静海, 欧阳洁, 高士秋, 等. 颗粒流体复杂系统的多尺度模拟. 北京: 科学出版社, 2005]
- 30 Jiang Y, Liu M. Granular elasticity without the coulomb condition. *Phys Rev Lett*, 2003, 91: 144301, arXiv: [cond-mat/0210557](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0210557)
- 31 Yang L, Zhan W L. New concept for ADS spallation target: Gravity-driven dense granular flow target. *Sci China Tech Sci*, 2015, 58: 1705–1711
- 32 Ji S, Wang S, Peng Z. Influence of external pressure on granular flow in a cylindrical silo based on discrete element method. *Powder Tech*, 2019, 356: 702–714
- 33 Sun Q C. Physics and Mechanics of Granular Matter (in Chinese). Beijing: Science Press, 2011 [孙其诚. 颗粒物质物理与力学. 北京: 科学出版社, 2011]
- 34 Ji S Y. Computational Granular Mechanics and Its Engineering Application (in Chinese). Beijing: Science Press, 2018 [季顺迎. 计算颗粒力学及工程应用. 北京: 科学出版社, 2018]
- 35 Guo H. Simulation of Mechanical Characteristics in Complex Granular Flow (in Chinese). Beijing: Science Press, 2020 [郭鸿. 复杂颗粒流体力学特征仿真模拟. 北京: 科学出版社, 2020]
- 36 Lu H L. Kinetics of Dense Two-Phase Granular Flow (in Chinese). Beijing: Science Press, 2019 [陆慧林. 稠密颗粒流体两相流的颗粒动力学. 北京: 科学出版社, 2019]
- 37 Brown C L, Richards J C. Principles of Powder Mechanics: Essays on the Packing and Flow of Powders and Bulk Solids. Oxford: Pergamon Press, 1970
- 38 Mankoc C, Janda A, Arévalo R, et al. The flow rate of granular materials through an orifice. *Granular Matter*, 2007, 9: 407–414
- 39 Ahn H, Başaranoğlu Z, Yılmaz M, et al. Experimental investigation of granular flow through an orifice. *Powder Tech*, 2008, 186: 65–71
- 40 Rubio-Largo S M, Janda A, Maza D, et al. Disentangling the free-fall arch paradox in silo discharge. *Phys Rev Lett*, 2015, 114: 238002

- 41 Myers M E, Sellers M. Rate of Discharge from Wedge-Shaped Hoppers. Dissertation for Master Degree. Cambridge: University of Cambridge, 1978
- 42 Janda A, Harich R, Zuriguel I, et al. Flow-rate fluctuations in the outpouring of grains from a two-dimensional silo. *Phys Rev E*, 2009, 79: 031302
- 43 Janda A, Zuriguel I, Maza D. Flow rate of particles through apertures obtained from self-similar density and velocity profiles. *Phys Rev Lett*, 2012, 108: 248001
- 44 Wan J, Wang F, Yang G, et al. The influence of orifice shape on the flow rate: A DEM and experimental research in 3D hopper granular flows. *Powder Tech*, 2018, 335: 147–155
- 45 Hou M Y, Chen W, Zhang T, et al. Global property of the dilute-to-dense transition of granular flows in a 2D channel (in Chinese). *Physics*, 2004, 33: 437–476 [厚美瑛, 陈唯, 张彤, 等. 颗粒物质从稀疏流到密集流转变的普适规律. *物理*, 2004, 33: 437–476]
- 46 Hilton J E, Cleary P W. Granular flow during hopper discharge. *Phys Rev E*, 2011, 84: 011307
- 47 Bao D S, Zhang X S, Xu G L, et al. Critical phenomenon of granular flow on a conveyor belt. *Phys Rev E*, 2003, 67: 062301
- 48 Aguirre M A, De Schant R, Géminard J C. Granular flow through an aperture: Influence of the packing fraction. *Phys Rev E*, 2014, 90: 012203, arXiv: [1407.0883](#)
- 49 Cordero M J, Pugnaloni L A. Dynamic transition in conveyor belt driven granular flow. *Powder Tech*, 2015, 272: 290–294
- 50 Aguirre M A, Grande J G, Calvo A, et al. Pressure independence of granular flow through an aperture. *Phys Rev Lett*, 2010, 104: 238002, arXiv: [1005.2884](#)
- 51 Aguirre M A, Grande J G, Calvo A, et al. Granular flow through an aperture: Pressure and flow rate are independent. *Phys Rev E*, 2011, 83: 061305
- 52 Mondal S, Sharma M M. Role of flying buttresses in the jamming of granular matter through multiple rectangular outlets. *Granular Matter*, 2014, 16: 125–132
- 53 Kunte A, Doshi P, Orpe A V. Spontaneous jamming and unjamming in a hopper with multiple exit orifices. *Phys Rev E*, 2014, 90: 020201, arXiv: [1408.0359](#)
- 54 Maiti R, Das G, Das P K. Granular drainage from a quasi-2D rectangular silo through two orifices symmetrically and asymmetrically placed at the bottom. *Phys Fluids*, 2017, 29: 103303
- 55 Xu C, Wang F L, Wang L P, et al. Inter-orifice distance dependence of flow rate in a quasi-two-dimensional hopper with dual outlets. *Powder Tech*, 2018, 328: 7–12
- 56 Fullard L A, Breard E C P, Davies C E, et al. The dynamics of granular flow from a silo with two symmetric openings. *Proc R Soc A*, 2019, 475: 20180462
- 57 Zhang X, Zhang S, Yang G, et al. Investigation of flow rate in a quasi-2D hopper with two symmetric outlets. *Phys Lett A*, 2016, 380: 1301–1305
- 58 Kamath S, Kunte A, Doshi P, et al. Flow of granular matter in a silo with multiple exit orifices: Jamming to mixing. *Phys Rev E*, 2014, 90: 062206
- 59 Sticco I M, Frank G A, Cerrotta S, et al. Room evacuation through two contiguous exits. *Phys A-Stat Mech Its Appl*, 2017, 474: 172–185, arXiv: [1607.07379](#)
- 60 Medina A, Cabrera D, López-Villa A, et al. Discharge rates of dry granular material from bins with lateral exit holes. *Powder Tech*, 2014, 253: 270–275
- 61 Zhou Y, Lagrée P Y, Popinet S, et al. Experiments on, and discrete and continuum simulations of, the discharge of granular media from silos with a lateral orifice. *J Fluid Mech*, 2017, 829: 459–485
- 62 Wang T, Li X, Wu Q, et al. Numerical simulations of dense granular flow in a two-dimensional channel: The role of exit position. *Chin Phys B*, 2018, 27: 124704
- 63 Sheldon H G, Durian D J. Granular discharge and clogging for tilted hoppers. *Granular Matter*, 2010, 12: 579–585
- 64 Serrano D A, Medina A, Ruiz Chavarria G, et al. Mass flow rate of granular material flowing from tilted bins. *Powder Tech*, 2015, 286: 438–443
- 65 Thomas C C, Durian D J. Geometry dependence of the clogging transition in tilted hoppers. *Phys Rev E*, 2013, 87: 052201, arXiv: [1206.7052](#)
- 66 Ristow G H, Herrmann H J. Forces on the walls and stagnation zones in a hopper filled with granular material. *Phys A-Stat Mech Appl*, 1995, 213: 474–481

- 67 Alonso-Marroquin F, Azeezullah S I, Galindo-Torres S A, et al. Bottlenecks in granular flow: When does an obstacle increase the flow rate in an hourglass? *Phys Rev E*, 2012, 85: 020301, arXiv: [1109.6108](#)
- 68 Huang D C, Hu F L, Deng K M, et al. Effect of opening angle on dilute-dense flow transition in two-dimensional granular flow (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2010, 59: 8249–8254 [黄德财, 胡凤兰, 邓开明, 等. 开口角度对二维颗粒流稀疏流-密集流转变的影响. *物理学报*, 2010, 59: 8249–8254]
- 69 Benyamine M, Aussillous P, Dalloz-Dubrujeaud B. Discharge flow of a granular media from a silo: Effect of the packing fraction and of the hopper angle. *EPJ Web Conf*, 2017, 140: 03043
- 70 Wang X, Zhu H W, Shi Q F, et al. Discharge flow of granular particles through an orifice on a horizontal hopper: Effect of the hopper angle. *Chin Phys B*, 2020, 29: 044502
- 71 Ristow G H. Outflow rate and wall stress for two-dimensional hoppers. *Phys A-Stat Mech its Appl*, 1997, 235: 319–326
- 72 Koivisto J, Korhonen M, Alava M, et al. Friction controls even submerged granular flows. *Soft Matter*, 2017, 13: 7657–7664, arXiv: [1703.09584](#)
- 73 Yu Y, Saxén H. Discrete element method simulation of properties of a 3D conical hopper with mono-sized spheres. *Adv Powder Tech*, 2011, 22: 324–331
- 74 Zhang S, Lin P, Wang C L, et al. Investigating the influence of wall frictions on hopper flows. *Granular Matter*, 2014, 16: 857–866
- 75 Zhou Y, Bao D S, Zhang X S, et al. Effect of boundary on the two-dimensional inclined channel for a dilute granular flow distribution (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2004, 53: 3389–3393 [周英, 鲍德松, 张训生, 等. 边界条件对二维斜面颗粒流颗粒分布的影响. *物理学报*, 2004, 53: 3389–3393]
- 76 Tsai J C, Losert W, Voth G A, et al. Two-dimensional granular Poiseuille flow on an incline: Multiple dynamical regimes. *Phys Rev E*, 2001, 65: 011306
- 77 Zhu H W, Shi Q F, Li L S, et al. Frictional effect of bottom wall on granular flow through an aperture on a conveyor belt. *Powder Tech*, 2020, 367: 421–426
- 78 Hidalgo R C, Zuriguel I, Maza D, et al. Role of particle shape on the stress propagation in granular packings. *Phys Rev Lett*, 2009, 103: 118001
- 79 Tang J, Behringer R P. Orientation, flow, and clogging in a two-dimensional hopper: Ellipses vs. disks. *EPL*, 2016, 114: 34002, arXiv: [1510.07940](#)
- 80 Kohring G A, Melin S, Puhl H, et al. Computer simulations of critical, non-stationary granular flow through a hopper. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1995, 124: 273–281
- 81 Kanzaki T, Acevedo M, Zuriguel I, et al. Stress distribution of faceted particles in a silo after its partial discharge. *Eur Phys J E*, 2011, 34: 133
- 82 Liu S D, Zhou Z Y, Zou R P, et al. Flow characteristics and discharge rate of ellipsoidal particles in a flat bottom hopper. *Powder Tech*, 2014, 253: 70–79
- 83 Börzsönyi T, Somfai E, Szabó B, et al. Packing, alignment and flow of shape-anisotropic grains in a 3D silo experiment. *New J Phys*, 2016, 18: 093017, arXiv: [1609.02752](#)
- 84 Ashour A, Wegner S, Trittel T, et al. Outflow and clogging of shape-anisotropic grains in hoppers with small apertures. *Soft Matter*, 2017, 13: 402–414
- 85 Wang S, Fan Y, Ji S. Interaction between super-quadric particles and triangular elements and its application to hopper discharge. *Powder Tech*, 2018, 339: 534–549
- 86 Wang S Q, Ji S Y. Discrete element analysis of buffering capacity of non-spherical granular materials based on super-quadric method (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2018, 67: 094501 [王嗣强, 季顺迎. 基于超二次曲面的颗粒材料缓冲性能离散元分析. *物理学报*, 2018, 67: 094501]
- 87 Artega P, Tüzün U. Flow of binary mixtures of equal-density granules in hoppers—size segregation, flowing density and discharge rates. *Chem Eng Sci*, 1990, 45: 205–223
- 88 Humby S, Tüzün U, Yu A B. Prediction of hopper discharge rates of binary granular mixtures. *Chem Eng Sci*, 1998, 53: 483–494
- 89 Benyamine M, Djermane M, Dalloz-Dubrujeaud B, et al. Discharge flow of a bidisperse granular media from a silo. *Phys Rev E*, 2014, 90: 032201
- 90 Zhou Y, Ruyer P, Aussillous P. Discharge flow of a bidisperse granular media from a silo: Discrete particle simulations. *Phys Rev E*, 2015, 92: 062204
- 91 Madrid M, Asencio K, Maza D. Silo discharge of binary granular mixtures. *Phys Rev E*, 2017, 96: 022904

- 92 Wassgren C R, Hunt M L, Freese P J, et al. Effects of vertical vibration on hopper flows of granular material. *Phys Fluids*, 2002, 14: 3439–3448
- 93 Chen K, Stone M B, Barry R, et al. Flux through a hole from a shaken granular medium. *Phys Rev E*, 2006, 74: 011306, arXiv: [cond-mat/0608125](#)
- 94 To K, Tai H T. Flow and clog in a silo with oscillating exit. *Phys Rev E*, 2017, 96: 032906
- 95 Wen P, Zheng N, Nian J, et al. Flux of granular particles through a shaken sieve plate. *Sci Rep*, 2015, 5: 9880
- 96 Hilton J E, Cleary P W. The effect of rotational shear on granular discharge rates. *Phys Fluids*, 2010, 22: 071701
- 97 Gago P A, Parisi D R, Pugnaloni L A. “Faster Is Slower” Effect in Granular Flows. In: *Traffic and Granular Flow’11*. Berlin: Springer, Heidelberg, 2013. 317–324
- 98 Zuriguel I, Janda A, Garcimartín A, et al. Silo clogging reduction by the presence of an obstacle. *Phys Rev Lett*, 2011, 107: 278001
- 99 Lozano C, Janda A, Garcimartín A, et al. Flow and clogging in a silo with an obstacle above the orifice. *Phys Rev E*, 2012, 86: 031306, arXiv: [1209.3911](#)
- 100 Endo K, Reddy K A, Katsuragi H. Obstacle-shape effect in a two-dimensional granular silo flow field. *Phys Rev Fluids*, 2017, 2: 094302, arXiv: [1706.04791](#)
- 101 Zhao Y, Li M, Lu X, et al. Optimal layout design of obstacles for panic evacuation using differential evolution. *Phys A-Stat Mech Appl*, 2017, 465: 175–194
- 102 Areán M G, Boschan A, Cachile M A, et al. Granular flow through an aperture: Influence of obstacles near the outlet. *Phys Rev E*, 2020, 101: 022901
- 103 Zhu H W, Wang L P, Shi Q F, et al. Improvement in flow rate through an aperture on a conveyor belt: Effects of bottom wall and packing configurations. *Powder Tech*, 2019, 345: 676–681
- 104 Midi G. On dense granular flows. *Eur Phys J E*, 2004, 14: 341–365, arXiv: [cond-mat/0312502](#)
- 105 Kamrin K, Koval G. Nonlocal constitutive relation for steady granular flow. *Phys Rev Lett*, 2012, 108: 178301
- 106 Karim M Y, Corwin E I. Eliminating friction with friction: 2D Janssen effect in a friction-driven system. *Phys Rev Lett*, 2014, 112: 188001

The effects of physical factors on the granular hopper flow

ZHENG Ning¹, ZHU HongWei¹, HUANG DeCai^{2*} & SHI QingFan^{1*}

¹ School of Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

² College of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China

The flowing behavior of granular materials is known as granular flow, which is ubiquitous in nature, industry and daily life. The behavior is not only related to flowing particles' properties such as size, shape, density, and coarseness, but also to the external environments such as the flow channel and outlet. Therefore, the granular flow exhibits abundant non-linear phenomena. By now, great achievements have been made in the engineering field, but a unified theoretical framework is still absent. Consequently, it is very necessary to systemically investigate the effects of different parameters on the granular flow. This will be beneficial to deepen the understanding of flowing behavior, uncover the flowing mechanism, as well as potentially open a new avenue of establishment of the constitutive equations. This paper mainly focuses on the hopper flow including gravity-driven hopper, inclined hopper and velocity-driven horizontal hopper, and presents the dependence of the flow rate, flow pattern, particle velocity and packing fraction on various physical factors. These factors involve the outlet size, outlet position, outlet shape, coefficient of friction of inter-particles, particle shape, outlet number, external stimulus, obstacles, and hopper angle. The results can provide significant reference for tuning the flow rate and transportation efficiency, as well as serve as the basis for the future research.

granular flow, flow rate, funnel flow, jam, friction coefficient

PACS: 64.70.ps, 45.70.Mg, 47.57.Gc, 64.70.qj

doi: [10.1360/SSPMA-2020-0161](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2020-0161)