



一类基于 Robin 边界条件变化的反传输特征值问题

徐小川^{1,2,3*}, 马利杰¹

1. 南京信息工程大学数学与统计学院, 南京 210044;

2. 南京信息工程大学江苏省应用数学中心, 南京 210044;

3. 南京信息工程大学江苏省系统建模与数据分析国际合作联合实验室, 南京 210044

E-mail: xcxu@nuist.edu.cn, lijie@nuist.edu.cn

收稿日期: 2022-07-07; 接受日期: 2023-01-26; 网络出版日期: 2023-04-06; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11901304) 和江苏省研究生科研与实践创新计划 (批准号: KYCX22_1126) 资助项目

摘要 本文研究具有 Robin 边界条件的 Schrödinger 算子反传输特征值问题, 旨在由传输特征值数据还原势函数. 通过改变其中一个边界条件参数, 可以获得有无穷多个能量有限的传输特征值. 本文证明这样的传输特征值集合可以唯一地确定 Schrödinger 算子的势函数及另一个边界条件参数.

关键词 传输特征值 Schrödinger 算子 反谱问题

MSC (2020) 主题分类 34A55, 34L40, 34L25

1 引言

本文研究如下的传输特征值问题 $L(q, h, H)$:

$$-y'' + q(x)y = k^2y, \quad 0 < x < 1, \quad (1.1)$$

$$-y_0'' = k^2y_0, \quad 0 < x < 1, \quad (1.2)$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad (1.3)$$

$$y_0'(0) - Hy_0(0) = 0, \quad (1.4)$$

$$y(1) = y_0(1), \quad y'(1) = y_0'(1), \quad (1.5)$$

其中, k^2 为谱参数, 复值函数 $q(x)$ 为势函数, 边界条件参数 $h, H \in \mathbb{C}$. 若对于某个 k , 上述系统存在一组非平凡的解 $\{y, y_0\}$, 则称 $\lambda = k^2$ 为传输特征值. 传输特征值问题来源于声波散射和量子散射问题, 传输特征值的物理解释为具有紧支撑势扰动的散射系统与无势扰动的散射系统相一致的能量^[3]. 传输特征值与一个指数型整函数零点的平方一致, 这样的整函数称为边值问题 $L(q, h, H)$ 的示性函数^[3, 12].

英文引用格式: Xu X C, Ma L J. A class of inverse transmission eigenvalue problems based on the variation of the Robin boundary conditions (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 729–736, doi: 10.1360/SSM-2022-0126

具有 Robin 边界条件的传输特征值问题最早由 Aktosun 和 Papanicolaou^[3] 研究. 假设边界条件 (1.3) 中的参数 h 与 (1.4) 中的参数 H 相同, 他们研究了实系数条件下的相关正、反谱问题. 所谓正谱问题, 即是已知势函数和边界条件参数, 刻画特征值的性质和分布情形. 所谓反谱问题, 即是由传输特征值数据还原势函数 $q(x)$ 和边界条件参数 h . 对于正谱问题, Aktosun 和 Papanicolaou^[3] 给出了传输特征值问题示性函数的相关性质, 从而获得了特征值的对称分布的性质. 由于边值问题 $L(q, h, H)$ 是非自伴的, 所以可能存在非实特征值. 2020 年, Xu^[21] 给出了非实特征值的存在性条件, 并且刻画了实和非实传输特征值的渐近分布. 近期, Ma 和 Xu^[11] 进一步弱化了传输特征值的存在性条件, 刻画了传输特征值密度的充要条件, 同时将上述边值问题 $L(q, h, H)$ 等价地转化为边界条件带有谱参数的 Sturm-Liouville 问题

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = k^2y, & 0 < x < 1, \\ y'(0) - hy(0) = 0, & y(1)\varphi'_0(k, x) - y'(1)\varphi_0(k, 1) = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

其中

$$\varphi_0(k, x) = \cos kx + H \frac{\sin kx}{k}, \quad \varphi'_0(k, x) = \frac{\partial \varphi_0(k, x)}{\partial x}. \quad (1.7)$$

在反谱问题的研究中, 我们主要关注唯一性、稳定性和重构算法. Aktosun 和 Papanicolaou^[3] 首先给出了边值问题 $L(q, h, h)$ 的反谱唯一性结果: 若 h 已知, 则所有的传输特征值外加一个特定的常数 γ 可以唯一确定势函数. 同时, 他们提出了一个公开问题: 常数 γ 和边界条件参数 h 是否可以包含在传输特征值信息中? 2019 年, Xu 和 Yang^[24] 证明了, 如果常数 γ 缺失, 则反谱唯一性定理将不成立. 由于常数 γ 没有实际的物理意义, 我们找寻了一些替代常数 γ 的物理量^[21]. 最近, 我们通过对传输特征值问题的本源进行充分考虑, 认为边界条件 (1.3) 中的 h 不应该必须与 (1.4) 中的参数 H 相同, 原因如下: 传输特征值代表的是两个具有 Robin 边界条件的 Schrödinger 算子所对应的散射函数相等的能量, 其中一个 Schrödinger 算子作为已知算子 (其势函数为 0), 另一个为未知算子 (其势函数具有紧支集), 因为 Schrödinger 算子由势函数和边界条件参数所确定, 所以很自然应该考虑已知算子和未知算子中的 Robin 边界条件参数可能不同的情形, 即 h 可能与 H 不同. 这一点也与人们通常所研究的反散射问题一致: 所谓反散射是指利用散射数据 (包括散射函数和束缚态数据) 去重构势函数和 Robin 边界条件中的参数 h , 而一般不会假设边界条件中的参数 h 已知. 当然, H 作为已知 Schrödinger 算子中的参数, 应该假设其已知. 对于这类边值问题 $L(q, h, H)$, Ma 和 Xu^[12] 证明了所有的传输特征值外加一个特定的常数 γ 可以唯一地确定 q 和 h , 同时也给出了代替常数 γ 的其他物理量, 还给出了具有无穷多实特征值情形下的反谱局部可解性和稳定性.

对于具有 Dirichlet 边界条件的传输特征值问题, 很多学者给出了许多有趣的结果. McLaughlin 和 Polyakov^[15] 及 McLaughlin 等^[16] 给出了实特征值的渐近估计, 并证明了由实特征值和部分势函数信息确定未知部分势函数的唯一性定理和重构算法. Aktosun 等^[1] 及 Aktosun 和 Papanicolaou^[2] 推广了 McLaughlin 等的结果, 给出了仅由所有传输特征值 (包括实的和非实的) 确定势函数的唯一性定理和理论上的重构算法. Wei 和 Xu^[19]、Wei 和 Wei^[20] 及 Buterin 等^[5,6] 补充了文献 [1,15] 中没有讨论的情形, 并解决了其中的公开问题. Bondarenko 和 Buterin^[4] 讨论了反谱问题的局部可解性和稳定性. 最近, 运用变换算子理论, Xu 等^[22] 及 Xu 和 Yang^[25] 证明了具有有限谱数据的反谱稳定性.

与具有 Dirichlet 边界条件的传输特征值问题有所不同, 边值问题 $L(q, h, H)$ 的传输特征值代表的是散射系统的能量, 其非实特征值与散射系统的共振类似, 是一种不稳定的状态, 能量值与特征值的实部成正比, 存在的时间与特征值的虚部成反比^[14]. 所以, 人们一般情形下只能测出实特征值或者虚

部有界的非实特征值. 然而, 文献 [21] 已经证明, 一般情形下, 若存在无穷多非实传输特征值 $\{\lambda_n\}$, 则其虚部 $\text{Im}\lambda_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). 此外, 人们只能测出有限能量值的谱数据, 然而传输特征值作为超越整函数的零点, 一般有无穷多个, 而且实部趋于无穷 [21]. 因此, 一个自然的问题产生了: 是否可以寻求有限能量值且虚部有界的传输特征值来重构势函数呢? 为了解决这个问题, 假设边界条件 h (或 H) 已知, 通过选取不同的 h (或 H) 来获得有限能量值的传输特征值. 然后由这些特征值来还原势函数和 H (或 h). 本文将证明两个反谱唯一性定理, 并给出理论上的重构算法.

2 示性函数与传输特征值

本节给出一维 Schrödinger 方程 (1.1) 初值解的相关性质, 并由此刻画示性函数的性质, 从而获得不同边界条件下传输特征值集的不交性. 同时证明传输特征值关于势函数 q 、边界条件参数 h 和 H 的连续依赖性.

设 $C_j(k, x)$ 和 $S_j(k, x)$ 为方程 (1.1) 的解, 分别满足如下初值:

$$C_j(k, j) = 1 = S'_j(k, j), \quad C'_j(k, j) = 0 = S_j(k, j) = 0, \quad j = 0, 1.$$

记

$$\varphi(k, x) = C_0(k, x) + hS_0(k, x), \quad \psi(k, x) = \varphi'_0(k, 1)S_1(k, x) + \varphi_0(k, 1)C_1(k, x). \quad (2.1)$$

显然, φ 满足 (1.1) 及 (1.6) 中 $x = 0$ 处的边界条件, ψ 满足 (1.1) 及 (1.6) 中 $x = 1$ 处的边界条件. 记 $W(y, z) := y(x)z'(x) - y'(x)z(x)$. 易知, 若 y 和 z 为方程 (1.1) 的解, 则 $W(y, z)$ 与 x 无关. 记

$$D(k) = W(\varphi, \psi). \quad (2.2)$$

易知, $D(k)$ 为 k 的偶的指数型整函数. 因此, 令 $\lambda = k^2$, 则 $\Delta(\lambda) := D(k)$ 为 λ 的 $1/2$ 阶整函数, 其零点与边值问题 $L(q, h, H)$ 的传输特征值一致. 称 $\Delta(\lambda)$ (或 $D(k)$) 为边值问题 $L(q, h, H)$ 的示性函数. 在 (2.2) 中分别取 $x = 0$ 和 $x = 1$, 可得

$$\Delta(\lambda) = \psi'(k, 0) - h\psi(k, 0) = \varphi(k, 1)\varphi'_0(k, 1) - \varphi'(k, 1)\varphi_0(k, 1). \quad (2.3)$$

由此可得如下结论.

引理 2.1 设 $\sigma(q, h, H)$ 为边值问题 $L(q, h, H)$ 的所有传输特征值所构成的集合. (1) 若 $h_1 \neq h_2$, 则 $\sigma(q, h_1, H) \cap \sigma(q, h_2, H) = \emptyset$; (2) 若 $H_1 \neq H_2$, 则 $\sigma(q, h, H_1) \cap \sigma(q, h, H_2) = \emptyset$.

证明 (1) 若存在某个 $k_0^2 \in \sigma(q, h_1, H) \cap \sigma(q, h_2, H)$, 则由 (2.3) 中的第 1 个等式知

$$\begin{aligned} \psi'(k_0, 0) - h_1\psi(k_0, 0) &= 0, \\ \psi'(k_0, 0) - h_2\psi(k_0, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

这两式相减得 $(h_2 - h_1)\psi(k_0, 0) = 0$. 因为 $h_1 \neq h_2$, 所以 $\psi(k_0, 0) = 0$, 代入 (2.4) 得 $\psi'(k_0, 0) = 0$. 由线性常微分方程解的存在唯一性定理得 $\psi(k_0, x) \equiv 0$, 这与 (2.1) 中第 2 个等式矛盾.

(2) 为了方便表述, 记 $\varphi_0(k, x) := \varphi_0(k, x; H)$. 若存在某个 $k_0 \in \sigma(q, h, H_1) \cap \sigma(q, h, H_2)$, 则由 (2.3) 中的第 2 个等式知

$$\begin{cases} \varphi(k_0, 1)\varphi'_0(k_0, 1; H_1) - \varphi'(k_0, 1)\varphi_0(k_0, 1; H_1) = 0, \\ \varphi(k_0, 1)\varphi'_0(k_0, 1; H_2) - \varphi'(k_0, 1)\varphi_0(k_0, 1; H_2) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

首先说明 $\varphi_0(k_0, 1; H_1) \neq 0$ 且 $\varphi_0(k_0, 1; H_2) \neq 0$. 事实上, 若 $\varphi_0(k_0, 1; H_1) = 0$, 则 $\varphi'_0(k_0, x; H_1) \neq 0$, 将这两个式子代入 (2.5) 知, $\varphi(k_0, 1) = 0$, 从而, $\varphi_0(k_0, 1; H_2) = 0$. 因此,

$$\begin{cases} \cos k_0 + H_1 \frac{\sin k_0}{k_0} = 0, \\ \cos k_0 + H_2 \frac{\sin k_0}{k_0} = 0. \end{cases}$$

这两式相减即得出矛盾.

然后将 (2.5) 中第一个等式两边同除以 $\varphi_0(k_0, 1; H_1)$, 第二个等式两边同除以 $\varphi_0(k_0, 1; H_2)$, 两式相减得

$$\varphi(k_0, 1) \left[\frac{\varphi'_0(k_0, 1; H_1)}{\varphi_0(k_0, 1; H_1)} - \frac{\varphi'_0(k_0, 1; H_2)}{\varphi_0(k_0, 1; H_2)} \right] = 0. \quad (2.6)$$

直接计算可得

$$\frac{\varphi'_0(k_0, 1; H_1)}{\varphi_0(k_0, 1; H_1)} - \frac{\varphi'_0(k_0, 1; H_2)}{\varphi_0(k_0, 1; H_2)} = \frac{H_1 - H_2}{\varphi_0(k_0, 1; H_1)\varphi_0(k_0, 1; H_2)},$$

代入 (2.6), 并结合 $H_1 \neq H_2$ 得 $\varphi(k_0, 1) = 0$. 再将其代入 (2.5) 中得 $\varphi'(k_0, 1) = 0$, 矛盾. 证毕. $\square$

记 $n(r)$ 为示性函数 $D(k)$ 在圆盘 $\{k : |k| \leq r\}$ 上的零点个数. 由文献 [11] 知, 若存在 $b \in (0, 1]$ 使得势函数 $q(x)$ 在 $(b, 1)$ 上几乎处处为 0 且在 $x = b$ 的左邻域内几乎处处不为 0, 则

$$n(r) = \frac{4br}{\pi} [1 + o(1)], \quad r \rightarrow \infty.$$

若势函数在 $[0, 1]$ 上几乎处处为 0, 则 $\Delta(\lambda) \equiv H - h$. 此时, 若 $H = h$, 则复平面上的每一点都是传输特征值; 若 $H \neq h$, 则复平面上的每一点都不是传输特征值. 这是一种平凡的情形. 本文假设势函数不恒为 0. 易知, 在此假设下, 传输特征值 (作为整函数的零点) 是孤立的. 记

$$\Omega := \{\omega = (q, h, H) : q \in L^2(0, 1), q \not\equiv 0, h, H \in \mathbb{C}\}.$$

设 $\lambda(\omega)$ 为边值问题 $L(q, h, H)$ 的一个传输特征值. 下面的命题说明, 传输特征值 $\lambda(\omega)$ 作为 ω 的函数是连续的.

命题 2.1 对于任意的 $\omega_0 = (q_0, h_0, H_0) \in \Omega$, 传输特征值 $\lambda(\omega)$ 在 ω_0 处连续, 即对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得, 若 $\omega = (q, h, H) \in \Omega$ 满足

$$\int_0^1 |q(x) - q_0(x)| dx + |h - h_0| + |H - H_0| < \delta,$$

则 $|\lambda(\omega) - \lambda(\omega_0)| < \varepsilon$ 成立.

证明 特征值关于系统参量的连续依赖性可参见文献 [8, 10, 27] 及其他文献, 我们运用这些文献中的类似方法来证明命题 2.1. 首先说明示性函数 (记为 $\Delta(\lambda; \omega)$) 作为 ω 的函数是连续的. 事实上, 由文献 [17] 知, 初值解 $C_0(k, x)$ 和 $S_0(k, x)$ 及其关于 x 的导函数 $C'_0(k, x)$ 和 $S'_0(k, x)$ 关于 q 连续. 所以, $\varphi(k, 1)$ 和 $\varphi'(k, 1)$ 关于 q 连续. 再结合 (2.3)、(1.7) 和 (2.1) 知, 示性函数 $\Delta(\lambda; \omega)$ 关于 $\omega = (q, h, H)$ 连续. 记 $\mu = \lambda(\omega_0)$. 由定理条件知, $\Delta(\mu, \omega_0) = 0$. 由于 $q_0 \in \Omega$, 所以 $\Delta(\lambda, \omega_0)$ 不恒为常数, 即 μ 为 $\Delta(\lambda, \omega_0)$ 的孤立零点. 由此知, 存在 $\rho > 0$ 使得 $\Delta(\lambda, \omega_0) \neq 0, \forall \lambda \in \{\lambda : |\lambda - \mu| = \rho\}$. 再由解析函数零点的连续性定理 (参见文献 [26, 引理 3.5.1]) 得命题 2.1 成立. 证毕. $\square$

3 唯一性定理

本节给出两个唯一性定理, 为此, 约定: 若 δ 表示边值问题 $L(q, h, H)$ 的物理量, 则 $\tilde{\delta}$ 表示边值问题 $L(\tilde{q}, \tilde{h}, \tilde{H})$ 类似的物理量. 先介绍一个引理.

引理 3.1 ^[23] 对于任意的 $Q(\cdot) \in L^2(0, 1)$ 和 $c \in \mathbb{C}$, 若

$$\int_0^1 Q(x) \tilde{\varphi}(k, x) \varphi(k, x) dx + c = 0, \quad \forall k \in \mathbb{C},$$

则 $Q(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} 0$ 且 $c = 0$.

设 $\{\lambda_j(q, h, H)\}_{j \geq 0}$ 为边值问题 $L(q, h, H)$ 的传输特征值集合 (记重数), 满足如下排序:

$$0 \leq |\lambda_0(q, h, H)| \leq |\lambda_1(q, h, H)| \leq \cdots \leq |\lambda_j(q, h, H)| \leq |\lambda_{j+1}(q, h, H)| \leq \cdots.$$

取序列 $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ 和 $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ 分别满足

$$-\infty < c_0 < \cdots < h_{n+1} < h_n < \cdots < h_2 < h_1 < +\infty, \quad (3.1)$$

$$-\infty < c_1 < \cdots < H_{n+1} < H_n < \cdots < H_2 < H_1 < +\infty, \quad (3.2)$$

其中 c_0 和 c_1 为有限常数. 对于每一个 n , 分别在集合 $\{\lambda_{j_n}(q, h, H_n)\}_{j=1}^J$ 和 $\{\lambda_{j_n}(q, h_n, H)\}_{j=1}^J$ 中任取一个特征值, 其中 $0 \leq J < +\infty$. 记

$$\kappa_n := \sqrt{\lambda_{j_n}(q, h, H_n)}, \quad \mu_n := \sqrt{\lambda_{j_n}(q, h_n, H)}, \quad 0 \leq j \leq J < +\infty.$$

定理 3.1 若 $H_n = \tilde{H}_n$ 且 $\kappa_n = \tilde{\kappa}_n$, $n \in \mathbb{N}$, 则 $q(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} \tilde{q}(x)$ 且 $h = \tilde{h}$.

证明 记

$$F(k) = \int_0^1 (\tilde{q}(x) - q(x)) \tilde{\varphi}(k, x) \varphi(k, x) dx + \tilde{h} - h. \quad (3.3)$$

显然, $F(k)$ 为整函数. 为了表述方便突出变量, 记 $D(k; H) = D(k)$ 和 $\varphi_0(k, x; H) = \varphi_0(k, x)$. 利用 (1.1) 及 (2.3) 中第 2 个等式, 同时考虑到 $H = \tilde{H}$, 有

$$\begin{aligned} F(k) &= \tilde{\varphi}'(k, 1) \varphi(k, 1) - \varphi'(k, 1) \tilde{\varphi}(k, 1) \\ &= \frac{1}{\varphi'_0(k, 1; H)} [D(k; H) \tilde{\varphi}'(k, 1) - \tilde{D}(k; H) \varphi'(k, 1)]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

由定理条件知, $D(\kappa_n; H_n) = \tilde{D}(\kappa_n; H_n) = 0$. 此时, 若 $\varphi'_0(\kappa_n, 1; H_n) = 0$, 则 $\varphi_0(\kappa_n, 1; H_n) \neq 0$. 由 (2.3) 中第 2 个等式知 $\varphi'(\kappa_n, 1) = 0$, $\tilde{\varphi}'(\kappa_n, 1) = 0$. 由此知 $F(\kappa_n) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$). 由 (3.2) 及引理 2.1 和命题 2.1 知, 序列 $\{\kappa_n\}_{n \geq 1}$ 为有界无限点集, 所以一定有聚点. 因此, $F(k) \equiv 0$. 由引理 3.1 得 $q(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} \tilde{q}(x)$ 且 $h = \tilde{h}$. 证毕. $\square$

注 3.1 上述定理也可以采用如下的证明方法, 其蕴涵了一种理论上的重构算法. 由 $D(\kappa_n; H_n) = \tilde{D}(\kappa_n; H_n) = 0$ 及 (2.3) 中第 2 个等式知

$$\frac{\varphi'(\kappa_n, 1)}{\varphi(\kappa_n, 1)} = \frac{\tilde{\varphi}'(\kappa_n, 1)}{\tilde{\varphi}(\kappa_n, 1)} = \frac{\varphi'_0(\kappa_n, 1; H_n)}{\varphi_0(\kappa_n, 1; H_n)}, \quad (3.5)$$

这里不失一般性假设 $\varphi_0(\kappa_n, 1; H_n) \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}$). 事实上, 若有有限个 $\varphi_0(\kappa_n, 1; H_n) = 0$, 则将这些项去掉即可. 若有无穷多个 $\varphi_0(\kappa_n, 1; H_n) = 0$, 则对应的 $\varphi'_0(\kappa_n, 1; H_n) \neq 0$. 此时可以调换 (3.5) 中的分子分母. 等式 (3.5) 表明两个亚纯函数 $\frac{\varphi'(k, 1; h)}{\varphi(k, 1; h)}$ 和 $\frac{\tilde{\varphi}'(k, 1)}{\tilde{\varphi}(k, 1)}$ 在有聚点的集合上相等, 所以这两个亚纯函数恒等. 注意到, $\frac{\varphi'(k, 1)}{\varphi(k, 1)}$ 是著名的 Weyl 函数, 其唯一确定 q 和 h (参见文献 [7, 第 30 页]). 运用解析函数的幂级数延拓法可以从数据 $\{\kappa_n, H_n\}_{n \geq 1}$ 中重构 Weyl 函数 $\frac{\varphi'(k, 1)}{\varphi(k, 1)}$, 然后再用文献 [7] 中的谱映射方法重构 q 和 h .

定理 3.2 若 $H = \tilde{H}$, $h_n = \tilde{h}_n$ 且 $\mu_n = \tilde{\mu}_n$ ($n \in \mathbb{N}$), 则 $q(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} \tilde{q}(x)$.

证明 为了表述方便突出变量, 记 $D(k; h, H) = D(k)$ 和 $\psi(k, x; H) = \psi(k, x)$. 由定理条件知 $D(\mu_n; h_n, H) = \tilde{D}(\mu_n; h_n, \tilde{H}) = 0$. 结合 (2.3) 中第 1 个等式有

$$\frac{\psi'(\mu_n, 0; H)}{\psi(\mu_n, 0; H)} = h_n = \frac{\tilde{\psi}'(\mu_n, 0; \tilde{H})}{\tilde{\psi}(\mu_n, 0; \tilde{H})}.$$

由 (3.1) 及引理 2.1 和命题 2.1 知, 序列 $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ 为有界无限点集, 所以一定有聚点. 结合上式知, 两个亚纯函数 $\frac{\psi'(k, 0; H)}{\psi(k, 0; H)}$ 和 $\frac{\tilde{\psi}'(k, 0; \tilde{H})}{\tilde{\psi}(k, 0; \tilde{H})}$ 在有聚点的集合上相等, 所以

$$\frac{\psi'(k, 0; H)}{\psi(k, 0; H)} = \frac{\tilde{\psi}'(k, 0; \tilde{H})}{\tilde{\psi}(k, 0; \tilde{H})}, \quad \forall k \in \mathbb{C}. \quad (3.6)$$

注意到

$$\psi(k, 0; H) = W(\psi, S_0) = S'_0(k, 1)\varphi_0(k, 1; H) - S_0(k, 1)\varphi'_0(k, 1; H), \quad (3.7)$$

由变换算子理论知, 初值解 $S_0(k, x)$ 有如下表达式 (参见文献 [13, 第 9 页]):

$$S_0(k, x) = \frac{\sin kx}{k} + \int_0^x T(x, t) \frac{\sin kt}{k} dt, \quad (3.8)$$

其中 $T(x, t)$ 为二元连续函数, 具有一阶偏导数且满足

$$T(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt, \quad T(x, 0) = 0. \quad (3.9)$$

将 (3.8) 和 (1.7) 代入 (3.7), 并运用分部积分及 (3.9) 得

$$\begin{aligned} \psi(k, 0; H) &= 1 + \int_0^1 T_x(1, t) \frac{\sin kt \cos k}{k} dt + \int_0^1 T_t(1, t) \frac{\cos kt \sin k}{k} dt \\ &\quad + \frac{H}{k^2} \left[T(1, 1) + \int_0^1 T_x(1, t) \sin kt \sin k dt + \int_0^1 T_t(1, t) \cos kt \cos k dt \right] \\ &= 1 + O\left(\frac{e^{2|\operatorname{Im} k|}}{k}\right), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

因为 $\psi(k, 0; H)$ 为偶的指数型整函数, 所以由 Hadamard 分解定理 (参见文献 [9, 第 26 页]) 有

$$\psi(k, 0; H) = CE(k), \quad E(k) := k^{2s} \prod_{\kappa_n \neq 0} \left(1 - \frac{k^2}{\kappa_n^2}\right),$$

其中, C 为常数, $\{\pm \kappa_n\}$ 为 $\psi(k, 0; H)$ 的所有非零零点 (记重数), $s \geq 0$. 利用渐近估计 (3.10) 有

$$C = \left[\lim_{k \rightarrow +\infty, k \in \mathbb{R}} E(k) \right]^{-1}.$$

由此得 $\psi(k, 0; H)$ 由其所有零点 (记重数) 唯一确定. 结合 (3.6) 得 $\tilde{\psi}(k, 0; \tilde{H}) = \psi(k, 0; H)$. 又因为 $H = \tilde{H}$, 所以 $\tilde{\psi}(k, 0; H) = \psi(k, 0; H) = \psi(k, 0)$.

由文献 [18] 知 Cauchy 数据 $\{T(1, t), T_x(1, t)\}$ 唯一地确定势函数 $q(x)$, 即若 $T(1, t) = \tilde{T}(1, t)$ 且 $T_x(1, t) = \tilde{T}_x(1, t)$, 则 $q(x) \stackrel{\text{a.e.}}{=} \tilde{q}(x)$. 下面证明 $\psi(k, 0)$ 唯一地确定 Cauchy 数据. 取函数 $\varphi_0(k, 1)$ 和 $\varphi'_0(k, 1)$ 的零点序列, 分别记为 $\{\pm\theta_n\}_{n \geq 0}$ 和 $\{\pm\nu_n\}_{n \geq 0}$. 众所周知,

$$\theta_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \nu_n = n\pi + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

且 $\{\sin \theta_n x\}_{n \geq 0}$ 和 $\{\cos \nu_n x\}_{n \geq 0}$ 都在 $L^2(0, 1)$ 上完备 (参见文献 [7, 18]). 在 (3.7) 中取 $k = \theta_n$, 并利用 (3.8) 得

$$\int_0^1 T(1, t) \sin \theta_n t dt = -\frac{\theta_n \psi(\theta_n, 0)}{\varphi'_0(\theta_n, 0)} - \sin \theta_n. \quad (3.11)$$

由此知 $T(1, t)$ 被唯一确定. 在 (3.7) 中取 $k = \nu_n$, 并利用 (3.8) 得

$$\int_0^1 T_x(1, t) \cos \nu_n t dt = \frac{\psi(\nu_n, 0)}{\varphi_0(\nu_n, 0)} - \cos \nu_n - T(1, 1) \frac{\sin \nu_n}{\nu_n}. \quad (3.12)$$

由此知 $T_x(1, t)$ 被唯一确定. 证毕. $\square$

注 3.2 上述证明过程表明, 可以用幂级数解析延拓法从数据 $\{\mu_n, h_n\}_{n \geq 1}$ 和 H 中重构函数 $\psi(k, 0)$. 然后由 (3.11) 和 (3.12) 重构 Cauchy 数据 $\{T(1, t), T_x(1, t)\}$. 最后用文献 [18] 中的方法重构势函数 q .

注 3.3 定理 3.2 中的条件 $H = \tilde{H}$ 可以由 $\int_0^1 q(x) dx = \int_0^1 \tilde{q}(x) dx$ 代替. 事实上, 将 $\tilde{\psi}(k, 0; \tilde{H}) = \psi(k, 0; H)$ 代入 (3.6) 得 $\tilde{\psi}'(k, 0; \tilde{H}) = \psi'(k, 0; H)$. 由文献 [12] 知

$$\psi'(k, 0; H) = W(C_0, \psi) = H - \frac{1}{2} \int_0^1 q(x) dx + O\left(\frac{e^{2|\operatorname{Im} k|}}{k}\right), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{C}.$$

由此知, 若 $\int_0^1 q(x) dx = \int_0^1 \tilde{q}(x) dx$, 则 $H = \tilde{H}$.

致谢 作者感谢审稿人提出的宝贵的修改意见.

参考文献

- 1 Aktosun T, Gintides D, Papanicolaou V G. The uniqueness in the inverse problem for transmission eigenvalues for the spherically symmetric variable-speed wave equation. *Inverse Problems*, 2011, 27: 115004
- 2 Aktosun T, Papanicolaou V G. Reconstruction of the wave speed from transmission eigenvalues for the spherically symmetric variable-speed wave equation. *Inverse Problems*, 2013, 29: 065007
- 3 Aktosun T, Papanicolaou V G. Transmission eigenvalues for the self-adjoint Schrödinger operator on the half line. *Inverse Problems*, 2014, 30: 075001
- 4 Bondarenko N P, Buterin S A. On a local solvability and stability of the inverse transmission eigenvalue problem. *Inverse Problems*, 2017, 33: 115010
- 5 Buterin S A, Choque-Rivero A E, Kuznetsova M A. On a regularization approach to the inverse transmission eigenvalue problem. *Inverse Problems*, 2020, 36: 105002
- 6 Buterin S A, Yang C F, Yurko V A. On an open question in the inverse transmission eigenvalue problem. *Inverse Problems*, 2015, 31: 045003
- 7 Freiling G, Yurko V A. *Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications*. New York: NOVA Science Publishers, 2001
- 8 Kong Q, Zettl A. Eigenvalues of regular Sturm-Liouville problems. *J Differential Equations*, 1996, 131: 1–19

- 9 Levin B Y. Lectures on Entire Functions. Translations of American Mathematical Society, vol. 150. Providence: Amer Math Soc, 1996
- 10 Li K, Sun J, Hao X. Dependence of eigenvalues of $2n$ th order boundary value transmission problems. Bound Value Probl, 2017, 2017: 143
- 11 Ma L J, Xu X C. On the density of transmission eigenvalue for the Schrödinger operator with the Robin boundary condition (in Chinese). Acta Math Sinica (Chin Ser), 2022, 65: 959–966 [马利杰, 徐小川. 具有 Robin 边界条件的 Schrödinger 算子传输特征值密度. 数学学报, 2022, 65: 959–966]
- 12 Ma L J, Xu X C. Inverse transmission eigenvalue problems for the Schrödinger operator with the Robin boundary condition. Lett Math Phys, 2022, 112: 11
- 13 Marchenko V. Sturm-Liouville Operators and Applications. Boston: Birkhäuser, 1986
- 14 Marletta M, Shterenberg R, Weikard R. On the inverse resonance problem for Schrödinger operators. Comm Math Phys, 2010, 295: 465–484
- 15 McLaughlin J R, Polyakov P L. On the uniqueness of a spherically symmetric speed of sound from transmission eigenvalues. J Differential Equations, 1994, 107: 351–382
- 16 McLaughlin J R, Polyakov P L, Sacks P E. Reconstruction of a spherically symmetric speed of sound. SIAM J Appl Math, 1994, 54: 1203–1223
- 17 Pöschel J, Trubowitz E. Inverse Spectral Theory. London: Academic Press, 1987
- 18 Rundell W, Sacks P E. Reconstruction techniques for classical inverse Sturm-Liouville problems. Math Comp, 1992, 58: 161–183
- 19 Wei G, Xu H K. Inverse spectral analysis for the transmission eigenvalue problem. Inverse Problems, 2013, 29: 115012
- 20 Wei Z, Wei G. Unique reconstruction of the potential for the interior transmission eigenvalue problem for spherically stratified media. Inverse Problems, 2020, 36: 035017
- 21 Xu X C. On the direct and inverse transmission eigenvalue problems for the Schrödinger operator on the half line. Math Methods Appl Sci, 2020, 43: 8434–8448
- 22 Xu X C, Ma L J, Yang C F. On the stability of the inverse transmission eigenvalue problem from the data of McLaughlin and Polyakov. J Differential Equations, 2022, 316: 222–248
- 23 Xu X C, Yang C F. Inverse spectral problems for the Sturm-Liouville operator with discontinuity. J Differential Equations, 2017, 262: 3093–3106
- 24 Xu X C, Yang C F. On a non-uniqueness theorem of the inverse transmission eigenvalues problem for the Schrödinger operator on the half line. Results Math, 2019, 74: 103
- 25 Xu X C, Yang C F. On the inverse spectral stability for the transmission eigenvalue problem with finite data. Inverse Problems, 2020, 36: 085006
- 26 Zettl A. Sturm-Liouville Theory. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 121. Providence: Amer Math Soc, 2005
- 27 Zhang Y, Shi G. Continuous dependence of the transmission eigenvalues in one dimension. Inverse Probl Imaging, 2015, 9: 273–287

A class of inverse transmission eigenvalue problems based on the variation of the Robin boundary conditions

Xiaochuan Xu & Lijie Ma

Abstract In this paper, we study the inverse transmission eigenvalue problem for the Schrödinger operator with the Robin boundary conditions, which consists in recovering the potential function from the transmission eigenvalues. By changing the value of the parameter in one of the Robin boundary conditions, we obtain infinitely many transmission eigenvalues, whose corresponding energies are finite. We prove that the set of these transmission eigenvalues uniquely determines the potential of the Schrödinger operator and one parameter in the other boundary condition.

Keywords transmission eigenvalue, Schrödinger operator, inverse spectral problem

MSC(2020) 34A55, 34L40, 34L25

doi: 10.1360/SSM-2022-0126