

颗粒的比重、形态与其任意堆积*

董 麒 叶大年

(中国科学院地质研究所, 北京 100029)

关键词 任意堆积、堆积密度、等当量球径

1 引言

颗粒的堆积问题在近百年来一直十分引人瞩目,无论是数学家、物理学家、化学家、矿物学家还是材料科学家,研究这一问题的不乏其人,因为这个问题在晶体结构、液体结构、材料科学和工程技术中都有极为重要的意义。颗粒的任意堆积(haphazard packing)存在三种基本形式,即最松堆积、无附加机械作用时的最密堆积和在附加机械作用下的最密堆积,这三种堆积形式可分别称为最松(loosest)、中等(media)和最密(densest)任意堆积。同一种颗粒的堆积可以再现(reproducible)。球体的堆积是颗粒堆积的简化形式,叶大年等提出的球体任意堆积的布拉维格子模型和包裹球模型说明球体堆积时会出现一系列的堆积密度常数,如第一常数(HPI)、第二常数(HPII)和第三常数(HPIII)^[1,2]。本文将通过各种颗粒的任意堆积实验来讨论颗粒的比重、形态、表面性质对其任意堆积密度的影响,以及不同比重、不同形态的颗粒之间混合任意堆积的特点。

2 实验方法、结果和讨论

实验的材料是轴承滚珠、莫来石珠、石英砂、绿豆、分子筛球、塑料球等,以及各种不同比重的圆柱体、三方柱、立方体、四面体和八面体。所用容器是容量瓶、锥型瓶、量筒和烧杯。首先测量出各种颗粒的真实比重,然后对各种颗粒都进行最松、中等和最密三种形式的任意堆积。称得颗粒堆积体的重量可求出颗粒的实有体积,当堆积体积(容器容积)已知时便可得出颗粒堆积的堆积密度(HP)。堆积实验都是由不同的人分别独立重复多次进行的,同一种堆积实验,各人的实验结果都非常相近。实验的结果列在表1中。

从表1中可以看出,轴承滚珠在堆积最密时堆积密度达到0.6392,即第一堆积常数(HPI),要达到这个堆积密度,必需是滚珠注入容器的同时伴之以振动;如果滚珠注入后才整体振动,则只能达到第二堆积常数(HPII),堆积密度是0.5977;当堆积缓慢整体移动后,重新堆积,堆积密度是第三堆积常数(HPIII)0.5531。分子筛球也有三种任意堆积常数:0.6038, 0.5593, 0.5072。是不是每种颗粒堆积时都应有三种情况,即最密、中等和松堆积呢?表1的资料大体说明实际情况就是如此。

颗粒任意堆积的堆积密度与其比重、形态和表面光洁度密切相关。根据表1可得到各种颗粒的比重与其任意堆积密度的关系(图1、图2)。

1992-04-07 收稿, 1992-08-18 收修改稿。

* 国家自然科学基金资助项目。

表 1 各种颗粒的任意堆积密度

颗 粒	比重 (g/cm^3)	最密堆积密度	中等堆积密度	松堆积密度	表面性质
铅弹 ^{a)}	11.30	0.641	0.601	0.553	
轴承滚珠	7.78	0.639 ± 0.003 , 24 ^{b)}	0.598 ± 0.006 , 16	0.553 ± 0.004 , 14	非常光滑
莫来石珠球	3.185	0.638 ± 0.005 , 11	0.598 ± 0.004 , 8	0.581 ± 0.005 , 10	非常光滑
Al_2O_3 三方柱	3.042	0.602 ± 0.003 , 12	0.548 ± 0.006 , 12	0.499 ± 0.005 , 12	
石英砂	2.655	0.600 ± 0.004 , 10	0.550 ± 0.004 , 12	0.502 ± 0.003 , 12	
玻璃球	2.500	0.600 ± 0.002 , 10	0.551 ± 0.002 , 12	0.506 ± 0.003 , 12	不规律
分子筛球	1.86	0.604 ± 0.003 , 14	0.559 ± 0.002 , 14	0.507 ± 0.002 , 12	非常光滑
绿豆(椭球)	1.47	0.600 ± 0.002 , 10	0.559 ± 0.002 , 10	0.507 ± 0.003 , 10	光滑
塑料圆柱体	1.40	0.602 ± 0.002 , 10	0.554 ± 0.003 , 10	0.501 ± 0.002 , 10	
橡皮三方柱	1.35	0.639 ± 0.003 , 14	0.595 ± 0.004 , 10	0.499 ± 0.001 , 10	表面摩擦较
橡皮立方体	1.35	0.740 ± 0.005^c , 12	0.599 ± 0.003 , 12	0.553 ± 0.003 , 10	大,粗糙
		0.646 ± 0.006 , 14		0.494 ± 0.002 , 10	
塑料小球	1.032	0.641 ± 0.002 , 12	0.599 ± 0.004 , 12	0.581 ± 0.002 , 10	非常光滑
塑料球	0.912	0.640 ± 0.001 , 10	0.600 ± 0.001 , 10	0.550 ± 0.001 , 10	光滑
木质立方体	0.763	0.640 ± 0.003 , 8	0.602 ± 0.003 , 8	0.550 ± 0.004 , 8	
八面体	0.47	0.550 ± 0.003 , 8			
四面体	3.782	0.494 ± 0.004 , 37	0.472 ± 0.004 , 36	0.387 ± 0.003 , 38	
四面体	2.625	0.478 ± 0.009 , 35	0.456 ± 0.006 , 29	0.388 ± 0.001 , 24	
四面体	1.680	0.461 ± 0.006 , 38	0.446 ± 0.005 , 26	0.385 ± 0.007 , 14	
四面体	0.945	0.500 ± 0.001 , 40	0.478 ± 0.005 , 25	0.372 ± 0.005 , 24	
四面体	0.659	0.489 ± 0.006 , 32	0.467 ± 0.003 , 33	0.364 ± 0.005 , 33	
四面体	0.389	0.478 ± 0.004 , 36	0.459 ± 0.002 , 63	0.357 ± 0.004 , 35	

a) 引自文献[3],[4], b) 堆积次数, c) 平坦底面边界上的堆积。

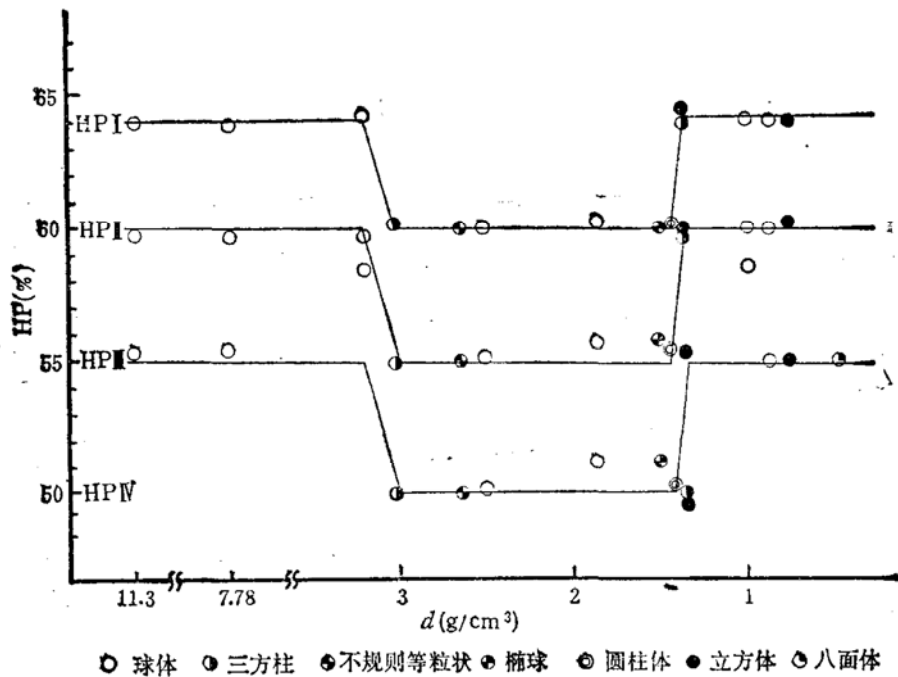
图 1 颗粒的任意堆积密度 $HP(\%)$ 与其比重 $d(\text{g}/\text{cm}^3)$ 的关系

图 1 进一步证明了一系列任意堆积常数,如第一常数 ($HPI = 0.64$)、第二常数 ($HPII = 0.60$)、第三常数 ($HPIII = 0.55$) 和第四常数 ($HPIV = 0.50$) 的客观存在,同时说明,椭球

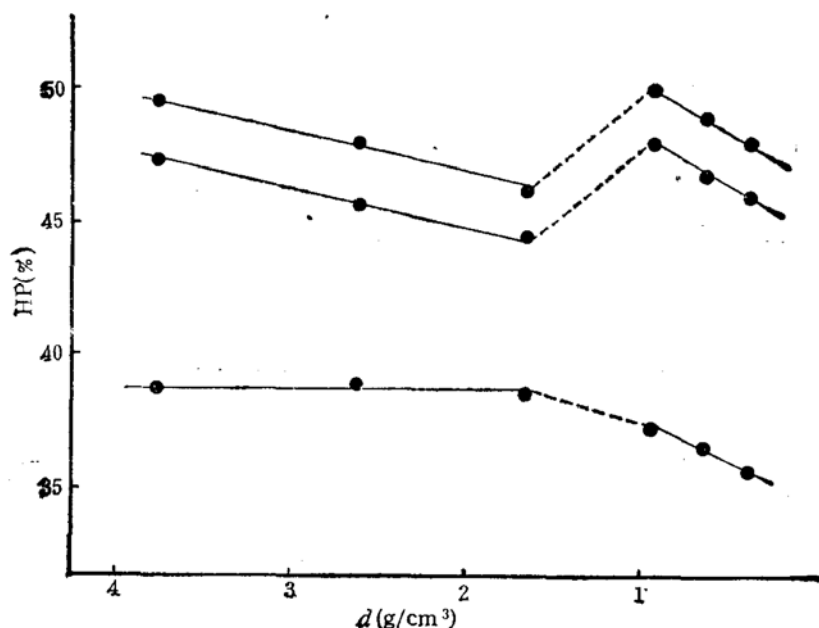


图2 四面体的任意堆积密度 $HP(\%)$ 与其比重 $d(g/cm^3)$ 的关系

体、圆柱体、三方柱、立方体和近似于球体的等粒状不规则颗粒(如石英砂)等的任意堆积完全可视为等当量球径的球体的任意堆积。这些颗粒任意堆积密度常数的出现则与其比重密切相关,发现颗粒的比重在 $3.04-3.185g/cm^3$ 处和 $1.35-1.47g/cm^3$ 处,颗粒的堆积密度存在两个拐点,使颗粒的三种堆积密度常数呈台阶式地跳跃。

四面体的任意堆积则完全不同于球体的堆积(图2)。四面体的堆积密度最大只能达到第四堆积常数 0.50,四面体的三种任意堆积密度其基本上都与其比重呈正相关,但四面体的比重在 $1.0g/cm^3$ 附近处,其堆积密度也出现一个明显的拐点。

球体、椭球体、圆柱体、三方柱、立方体以及等粒状不规则颗粒等等均可视作配位数大于六的配位多面体,四面体为配位数是四的配位多面体,八面体为配位数是六的配位多面体。在二元非等大球堆积时,两球径比有个阈值, $r_1:r_2$ 约大于 0.70 时,堆积密度不因球径而变动,与等大球时一样^[2,5],此时,堆积中所出现的全部是配位数大于六(或等于六)的配位多面体,即可认为是由这些配位多面体所进行的堆积,其堆积就相当于等当量球径的球的堆积。本文的实验资料也恰好证明了这点。初步的研究表明,八面体的任意堆积即不同于球体的堆积,也不同于四面体的堆积,而是介于两者之间,因此,作者认为二元非等大球堆积时的球径比的阈值实际上是 0.732。

颗粒的表面性质,如表面光洁度,也会影响其任意堆积的密度。颗粒的表面光洁度只会改变其松堆积的堆积密度:当颗粒表面非常光滑时,如莫来石珠球、塑料珠球等,其松堆积密度只相当于中等堆积时的堆积密度,即此种颗粒最松只能达到中等堆积,而不会出现松堆积;当颗粒表面粗糙,摩擦较大时,如橡皮立方体、橡皮三方柱,所有的各种不同比重的颗粒(四面体除外)的最松堆积密度都是第四堆积常数 0.50。

有些形态的颗粒任意堆积时会受到边界效应的影响,边界效应只会改变立方体形颗粒的最密堆积密度。当底面存在边界效应时,即堆积是在平坦的底面上进行,立方体的最密堆积密度能达到常数 0.74;当消除所有的边界效应,如采用球形的容器,则立方体的任意堆积完全相当于等当量球径的球的堆积;当所有的边界都产生边界效应,且边界长为立方体边长的整周期

时,如采用方形的容器,则立方体的最密堆积密度几乎能达到 1.00。立方体颗粒堆积时所能形成的稳定的最松堆积形式只能是 ABAB……(图 3)。立方体逐渐堆紧,可以出现一系列的堆积密度:

$\frac{9}{18}, \frac{10}{18}, \frac{11}{18}, \dots, \frac{17}{18}, \frac{18}{18}$ 。立方体所能形成的最松

堆积密度是 $\frac{9}{18}$, 即 0.50 (HPIV); 当立方体作次松堆积时,

可能出现的堆积密度是 $\frac{9}{18}, \frac{10}{18}, \frac{11}{18}$ 或 $\frac{10}{18}$ 或 $\frac{9}{18}, \frac{10}{18}$, 平均

堆积密度为 0.5463, 即 HPIII; 当作中等堆积时, 可能出现

的堆积密度是 $\frac{9}{18}, \frac{10}{18}, \frac{11}{18}, \frac{12}{18}, \frac{13}{18}$ 或 $\frac{9}{18}, \frac{10}{18}, \frac{11}{18}, \frac{12}{18}$ 或

$\frac{10}{18}, \frac{11}{18}, \frac{12}{18}$ 或 $\frac{11}{18}$ 或 $\frac{11}{18}, \frac{12}{18}$, 整体堆积密度为 0.5999, 即 HPII; 无边界效应时, 立方体最

密堆积可能出现的堆积密度有 $\frac{10}{18}, \frac{11}{18}, \frac{12}{18}, \frac{13}{18}$ 或 $\frac{11}{18}, \frac{12}{18}, \frac{13}{18}$ 或 $\frac{11}{18}, \frac{12}{18}$, 整体的堆积密

度是 0.6456, 即 HPI; 当底面产生边界效应, 最密堆积时可能出现的堆积密度是 $\frac{10}{18}, \frac{11}{18}, \dots$

$\dots, \frac{17}{18}$ 或 $\frac{11}{18}, \frac{12}{18}, \dots, \frac{16}{18}$ 等等, 平均堆积密度为 0.745; 当所有的边界都产生边界效应, 且

边长为立方体边长的整周期时, 最密堆积密度可能达到 $\frac{17}{18} = 0.944$; 甚至是 $\frac{18}{18}$ 。

通过三方柱与轴承滚珠、分子筛球与轴承滚珠, 木质立方体与莫来石球等一系列不同组合形式的混合堆积实验发现, 不同比重、不同形态的颗粒之相混合堆积的堆积密度为各种颗粒各自堆积密度的加权平均。

颗粒的堆积问题有着重要的理论意义, 对于许多工程技术问题也有重要应用价值。在大坝截流时, 大多用四面体形的混凝土, 而非立方体或其它形状的混凝土, 本文的研究表明, 四面体除了对迎面水的分流效果好, 稳定性高外, 其最密堆积密度(46—47%)大约只相当于立方体最密堆积密度(74—76%)的 60%, 说明用四面体截流比用立方体要节省大约一半的材料。在做泥砂淤积的模拟实验时, 一般是降低水的流速, 用一些比重 1.40—1.05g/cm³ 的塑料球来模拟石英砂(比重 2.6—2.7g/cm³) 的堆积。泥砂和塑料球在流水中的沉积都相当于球体作最密堆积, 本文的实验研究表明两者的堆积密度是不同的, 彼此相差近 10%, 这种差别在泥砂淤积的模拟实验中应予以考虑。

致谢 赫伟同志给予了热情的帮助, 并蒙欧阳自远、沈步明、施倪承、马喆生等教授审阅文稿, 提出宝贵意见, 在此一并致谢。

参 考 文 献

- [1] 叶大年、韩成、曾荣树, 科学通报, 1986, 31(12): 920—924.
- [2] 叶大年, 地质科学, 1990, (4): 321—337.
- [3] Smith, W.O., Foote, P.D., Busang, R.F., *Phys. Rev.*, 1929, 34:1271—1274.
- [4] Levine, M.M., Chernik, J., *Nature*, 1965, 208:68—69.
- [5] 叶大年、张金民, 地质科学, 1990, (2): 127—136.

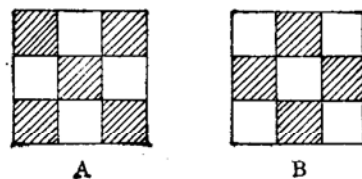


图 3 立方体最松堆积的单元层(阴影表示立方体) A、B