中国科学: 数学 2020 年 第 50 卷 第 12 期: 1773～1782
SCIENTIA SINICA Mathematica

论 文

套代数的可逆元群连通性及相关问题

献给吴从炘教授 85 华诞

纪友清*, 张远航

吉林大学数学学院, 长春 130012
E-mail: jiyq@jlu.edu.cn, zhangyuanhang@jlu.edu.cn

收稿日期: 2020-05-30; 接受日期: 2020-09-04; 网络出版日期: 2020-12-08; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12031002 和 12071174) 资助项目

摘要 本文综述套代数的可逆元群连通性问题进展并列出几个可考虑的相关问题. 在回顾套代数的概念及基本例子的基础上, 阐述迄今为止人们已知的连通性问题已得到解决的套的种类; 同时以 Pitts 的例子为着眼点, 阐述上三角代数的连通性问题的进展; 最后谈到套代数稳定秩方面的结果并讨论其与连通性问题的密切联系.

关键词 套代数 连通性问题 稳定秩

MSC (2010) 主题分类 47L35, 46J15

1 引言

本文中 $\mathbb{C}$、$\mathbb{R}$、$\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{N}$ 分别表示复数集、实数集、有理数集和自然数集, Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 总是指复可分 Hilbert 空间, $B(\mathcal{H})$ 代表 $\mathcal{H}$ 上的全体有界线性算子构成的集合, 特别地, 若 $e, f \in \mathcal{H}$, 定义

$$(e \otimes f^*)(x) = (x, f)e, \quad x \in \mathcal{H}.$$

设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 是两个复可分 Hilbert 空间, 记 $\mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K}$ 为 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{K}$ 的代数张量积, 对

$$\sum_{i=1}^{m} h_i \otimes k_i, \sum_{j=1}^{n} h'_j \otimes k'_j \in \mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K},$$

定义 $\mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K}$ 上的内积

$$\left(\sum_{i=1}^{m} h_i \otimes k_i, \sum_{j=1}^{n} h'_j \otimes k'_j\right) \doteq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(h_i, h'_j)(k_i, k'_j),$$

英文引用格式: Ji Y Q, Zhang Y H. On the connectedness of the invertibles in nest algebras and related problems (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1773–1782, doi: 10.1360/SSM-2020-0167

则 $\mathcal{H}\otimes_a\mathcal{K}$ 在此内积的完备化空间记为 $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$, 它也是一个 Hilbert 空间. Banach 代数 $\mathfrak{A}$ 总是指有单位元的复 Banach 代数. $M_n(\mathfrak{A})$ 表示每个位置均取在 $\mathfrak{A}$ 中的全体 n 阶方阵构成的 Banach 代数, $\mathfrak{A}^n$ 代表 $\mathfrak{A}$ 的 n 次直和. 记 $Rg_n(\mathfrak{A})$ 为 $\mathfrak{A}^n$ 中全体右幺模元素构成的集合, 即

$$Rg_n(\mathfrak{A})=\left\{(a_1,\dots,a_n)\in\mathfrak{A}^n: \text{存在 } (b_1,\dots,b_n)\in\mathfrak{A}^n,\ \text{使得 } \sum_{i=1}^n a_ib_i=1\right\}.$$

类似地, 用 $Lg_n(\mathfrak{A})$ 表示 $\mathfrak{A}^n$ 中所有左幺模元素构成的集合. 若 $\mathfrak{A}$ 是一个 Banach 代数, 我们总以 $GL_n(\mathfrak{A})$ 表示 $M_n(\mathfrak{A})$ 中所有可逆元素构成的群, 用 $GL_n^0(\mathfrak{A})$ 表示 $GL_n(\mathfrak{A})$ 中所有与单位元在同一连通分支的元素构成的集合, 易知 $GL_n^0(\mathfrak{A})$ 是 $GL_n(\mathfrak{A})$ 的正规子群. 当 $n=1$ 时, 分别将 $GL_1(\mathfrak{A})$ 和 $GL_0(\mathfrak{A})$ 简记为 $G(\mathfrak{A})$ 和 $G_0(\mathfrak{A})$, 将商群 $\Lambda_{\mathfrak{A}}\doteq G(\mathfrak{A})/G_0(\mathfrak{A})$ 称为 $\mathfrak{A}$ 的抽象指标群 [1]. 一个很自然的问题是, $G(\mathfrak{A})$ 的拓扑结构是什么样? 当然, 我们首先关心, 什么样的 $\mathfrak{A}$, 满足

$$G(\mathfrak{A})=G_0(\mathfrak{A})?$$

(1) Kuiper [2] 证明了 $G(B(\mathcal{H}))$ 是可缩的;

(2) 由谱表示定理可知, $G(A)$ 是道路连通的, A 是 von Neumann 代数 [1];

(3) $G(H^\infty(\mathbb{T}))$ 不是道路连通的, 这里 $H^\infty(\mathbb{T})$ 是单位圆盘上的全体有界解析函数, 事实上, $\Lambda_{H^\infty(\mathbb{T})}$ 是一个很大的群 (参见文献 [3]).

本文主要综述套代数的可逆元群连通性问题 (以下简记为 "连通性问题") 的进展.

问题 1 设 $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ 是套代数, $G(\mathcal{T}(\mathcal{N}))$ 是否是连通的, 即 $G(\mathcal{T}(\mathcal{N}))=G_0(\mathcal{T}(\mathcal{N}))$?

注意套代数 $T(\mathcal{N})$ 是特殊的 Banach 代数, 所以 $G(\mathcal{T}(\mathcal{N}))$ 是开集且是局部道路连通的, 继而, $G(\mathcal{T}(\mathcal{N}))$ 的连通性与道路连通性是等价的.

连通性问题由来已久, 20 世纪 70 年代, Sakes 和 Knowles [4] 在研究 Hilbert 预解空间框架下系统的类 Nyquist 稳定性准则过程中, 提出了连通性问题. 或许由于来源于应用学科, 或许由于叙述简洁, 此问题一经提出随即受到数学家 Arveson、Davidson、Lance、Larson、Power 等的关注 (参见文献 [5–12]). 1983 年, Lance [8] 在他的报告 *Some problems and results on reflexive algebras* 中将其列为第 4 个问题, 并做了初步的探讨, 他认为这个问题其实是困难的, 即使是对于原子均是一维的 ω 型套的情形 (事实上, 这种情形是最困难的, 具体讨论见第 3 节); 1987 年, Davidson [6] 在算子理论大会上将其列为自反代数十个公开问题之首, 同时在其专著中列出文献 [13].

本文余下内容的安排如下: 第 2 节回顾套代数的概念及基本例子; 第 3 节阐述迄今为止人们已知的连通性问题已得到解决的套的种类; 第 4 节以 Pitts 的例子为着眼点, 阐述上三角代数的连通性问题的进展; 第 5 节阐述套代数稳定秩方面的结果并讨论其与连通性问题的联系.

2 套代数的定义和例子

首先回顾套及套代数的定义和一些基本的例子. 关于套代数更多的背景知识及其他的结论可以参见 Davidson 的专著 [13].

定义 1 套 $\mathcal{N}$ 是满足如下条件的 $\mathcal{H}$ 上的闭子空间构成的集合:

(1) $\{0\},\mathcal{H}\in\mathcal{N}$;

(2) 对于 $M,N\in\mathcal{N}$, 或者 $M\subseteq N$ 或者 $N\subseteq M$;

(3) $\mathcal{N}$ 中元素做任意交及闭张开运算后仍在 $\mathcal{N}$ 中.

套代数 $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ 指的是集合 $\{T : T \in B(\mathcal{H}), TN \subseteq N, \forall N \in \mathcal{N}\}$, 易验证它是一个弱算子拓扑闭的代数. 若 $\mathcal{N}$ 是一个套, 则 $\mathcal{N}^{\perp} \doteq \{N^{\perp} : N \in \mathcal{N}\}$ 也是一个套, 且 $\mathcal{T}(\mathcal{N}^{\perp}) = \mathcal{T}(\mathcal{N})^* \doteq \{T^* : T \in \mathcal{T}(\mathcal{N})\}$. 任取 $M < N \in \mathcal{N}$, 则称 $N \ominus M$ 为套 $\mathcal{N}$ 的一个区间; 如果一个区间是极小的, 那么称其为 (套 $\mathcal{N}$ 的) 一个原子. 特别地, 若套 $\mathcal{N}$ 恰好没有原子, 则称 $\mathcal{N}$ 为连续套; 相应地, 称 $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ 为连续套代数.

对 $N \in \mathcal{N}$, 记 $P(N)$ 为 $\mathcal{H}$ 到 N 上的正交射影, 则 $P(\mathcal{N}) \doteq \{P(N) : N \in \mathcal{N}\}$ 是 $B(\mathcal{H})$ 中全体正算子构成的集合的子集, 故可赋予强算子拓扑为一个拓扑空间, 记为 $(P(\mathcal{N}), \mathrm{SOT})$. 而套 $\mathcal{N}$ 中元素按照集合的包含关系有一个自然的序, 故 $(\mathcal{N}, <)$ 在此序诱导的拓扑下也构成一个拓扑空间. 可以证明自然映射 $N \mapsto P(N)$ 是 $(\mathcal{N}, <) \to (P(\mathcal{N}), \mathrm{SOT})$ 的同胚映射. 设 $E = M \ominus N$ 是一个原子, $N, M \in \mathcal{N}$, 若 $P(N)$ 和 $P(M)$ 二者之一在 $(P(\mathcal{N}), \mathrm{SOT})$ 中是孤立点, 则称 E 是孤立原子.

接下来介绍 4 个非常重要且典型的套.

例 1 (ω 型套) 若套 $\mathcal{N} = \{N_k, \mathcal{H} : k \geqslant 0\}$, 这里 $N_0 = \{0\}$, $N_{k-1} < N_k$, $E_k = N_k \ominus N_{k-1}$ 为原子, $k \in \mathbb{N}$, 则称其是序型为 ω 或 ω 型套. 记 $\mathcal{D}(\mathcal{N}) = \bigoplus_{k\geqslant 1} B(E_k)$ 为 $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ 的对角代数, 易知, $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ 是一个 von Neumann 代数. 定义 Δ 为 $B(\mathcal{H})$ 到 $\mathcal{D}(\mathcal{N})$ 的期望, 即

$$\Delta(A) = \sum_{k\geqslant 1} P_{E_k} A P_{E_k},$$

这里 $A \in B(\mathcal{H})$, P_{E_k} 是值域为 E_k 的射影, $k \in \mathbb{N}$. 注意到, Δ 限制在 $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ 上是可乘映射. 若 $\dim E_k < \infty, \forall k \in \mathbb{N}$, 则称 $\mathcal{N}$ 为每个原子均为有限维 (秩) 的 ω 型套.

特别地, 固定 $\mathcal{H}$ 的一组正规正交基 $\mathcal{E} = \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$, 设

$$P_k = \mathrm{span}\{e_i : 1 \leqslant i \leqslant k\}, \quad k \in \mathbb{N}; \quad P_0 = \{0\}, \quad P_\infty = \mathcal{H},$$

则 $\mathcal{P}_{\mathcal{E}} \doteq \{P_0, P_\infty, P_k : k \in \mathbb{N}\}$ 是一个 ω 型套, 且每个原子均为 1 维. 而且, $\mathcal{T}(\mathcal{P}_{\mathcal{E}})$ 就是 $B(\mathcal{H})$ 中在 $\mathcal{E} = \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ 下可表为上三角矩阵的有界线性算子构成的集合, 即

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}_{\mathcal{E}}) = \left\{ T \in B(\mathcal{H}) : T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & \cdots \\ & a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots \\ & & a_{3,1} & \cdots & \cdots \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\}.$$

自然地, $\mathcal{T}(\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\perp})$ 就是 $B(\mathcal{H})$ 中在 $\mathcal{E} = \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ 下可表为下三角矩阵的有界线性算子构成的集合. 当我们不特指固定基底时, $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ 代表在 $\mathcal{H}$ 某个正规正交基底下的全体可表为上三角矩阵的有界线性算子构成的集合, 称为上三角代数.

例 2 (Cantor 套) 设 μ 为 $\mathbb{Q}$ 上的计数测度, $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{Q}) = L^2(\mu)$. 对于 $t \in \mathbb{R}$, 定义子空间

$$Q_t^+ = \{f \in l^2(\mathbb{Q}) : f(q) = 0, \forall q > t\}$$

和

$$Q_t^- = \{f \in l^2(\mathbb{Q}) : f(q) = 0, \forall q \geqslant t\}.$$

注意当 $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 时, $Q_t^+ = Q_t^-$; 而当 $t \in \mathbb{Q}$ 时, $Q_t^+ \ominus Q_t^- = \mathrm{span}\{\delta_t\}$, 这里 δ_t 代表 t 点的示性函数. 易验证 $\{\delta_t : t \in \mathbb{Q}\}$ 是 $\mathcal{H}$ 的一组正规正交基. 定义

$$Q_{-\infty} = \{0\}, \quad Q_{+\infty} = \mathcal{H},$$

则 $\mathcal{Q} \doteq \{Q_t^+, Q_t^-, Q_{-\infty}, Q_{+\infty} : t \in \mathbb{R}\}$ 是一个原子套 (即它的全体原子的线性张开在 $\mathcal{H}$ 中稠密). 称 $\mathcal{Q}$ 为 Cantor 套. 将 $\mathbb{Q}$ 排成一列 $\{t_i : i \in \mathbb{N}\}$. 定义

$$T = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2, t_m < t_n} \frac{1}{2^{m+n}} \delta_{t_m} \otimes \delta_{t_n}^*,$$

则可验证 $T \in \mathcal{T}(\mathcal{Q})$.

例 3 (Volterra 套) 设 $\mathcal{H} = L^2[0,1]$. 对 $t \in [0,1]$, 记

$$N_t = \{f : f(x) = 0 \text{ a.e. 于 } [t,1], f \in L^2[0,1]\},$$

则

$$\mathcal{N} = \{N_t : t \in [0,1]\}$$

是一个连续套. 容易验证 $\mathcal{T}(\mathcal{N}) \cap \mathcal{T}(\mathcal{N})^*$ 是一个交换的 von Neumann 代数. 考虑 $V \in B(L^2[0,1])$,

$$Vf(t) = \int_{[t,1]} f(x)dx, \quad t \in [0,1], \quad f \in L^2[0,1],$$

则称 V 是 Volterra 算子, 易验证 $V \in \mathcal{T}(\mathcal{N})$. 事实上, $\mathcal{N}$ 恰好为 V 的不变子空间格 [14] (或参见文献 [13]). 故可验证 V 在 $\mathcal{H}$ 的任何正规正交基下都无上三角或下三角的矩阵表示. 基于此, 称 $\mathcal{N}$ 为 Volterra 套.

例 4 设 $\mathcal{H} = L^2[0,1] \otimes L^2[0,1]$, $\mathcal{N}$ 是 Volterra 套. 对 $t \in [0,1]$, 定义

$$M_t = N_t \otimes L^2[0,1],$$

则

$$\mathcal{M} = \{M_t : t \in [0,1]\}$$

也是一个连续套. 此时, 可验证 $\mathcal{T}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{T}(\mathcal{M})^*$ 是一个非交换的 von Neumann 代数. 因此, 尽管 $\mathcal{M}$ 和 Volterra 套 $\mathcal{N}$ 均为连续套, 但是它们有本质区别. 事实上, $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M}$ 不是酉等价的 (参见文献 [13, 第 7 章]).

3 已完全解决的情形

尽管连通性问题得到了很多数学家的关注, 但是 1993 年之前, 由于不知切入点在哪里, 对此问题并没有成型的结果. 而与此同时, 20 世纪 80 年代, 套代数理论发展到了一个相对成熟的阶段, 代表性的成果为套的相似定理. 两个套 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 称为相似的, 若存在可逆算子 S, 使得 $S\mathcal{M} = \mathcal{N}$. 1984 年, Davidson 证明了套的相似定理.

定理 1 [15] 设 $\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的两个套, 则 $\mathcal{N}$ 与 $\mathcal{M}$ 相似当且仅当存在一个从 $\mathcal{N}$ 到 $\mathcal{M}$ 的保持维数的序同构 θ, 即 θ 是双射, 并对于 $\mathcal{N}$ 中任意一对元素 $N_1 < N_2$, 恒有

$$\theta(N_1) < \theta(N_2),$$

且

$$\dim(N_2 \ominus N_1) = \dim(\theta(N_2) \ominus \theta(N_1)).$$

利用相似定理可知, Volterra 套与例 4 中套 $\mathcal{M}$ 是相似的; 一般地, 若 $\mathcal{N}$ 是一个连续套, 则 $\mathcal{N}$ 与 $\mathcal{N}\otimes\mathcal{H}\doteq\{N\otimes\mathcal{H}:N\in\mathcal{N}\}$ 相似, 故 $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ 与

$$\mathcal{T}(\mathcal{N}\otimes\mathcal{H})=\mathcal{T}(\mathcal{N})\otimes B(\mathcal{H})$$

同构, 故连续套具有无穷重数的性质.

20 世纪 90 年代初, Orr 证明了连续套的插值定理, 为了方便但不失一般性, 我们只介绍 Volterra 套的版本.

定理 2 [16] 设 $\mathcal{N}$ 是 Volterra 套, 若 $T\in\mathcal{T}(\mathcal{N})$, 满足 $\|i_t(T)\|>1, \forall\, t\in(0,1]$, 则 T 是一个插值算子, 即存在 $A,B\in\mathcal{T}(\mathcal{N})$, 使得

$$ATB=I,$$

这里

$$i_t(T)=\lim_{h\downarrow 0}\|(P(N_t)-P(N_{t-h}))TP((N_t)-P(N_{t-h}))\|,\quad t\in(0,1].$$

1993 年, Davidson 和 Orr [5] 取得了连通性问题的第一个突破, 他们利用 Orr 插值定理证明了连续套代数中的插值算子构成的集合是稠密的, 而后巧妙应用连续套具有无穷重数的性质证明了如下定理:

定理 3 [5] 设 $\mathcal{N}$ 是一个套, 假设 $\mathcal{N}$ 的每个原子 (若存在) 均是无穷维的, 则 $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ 的可逆元群是连通的.

特别地, 例 3 与 4 中对应的套代数的连通性问题的答案是肯定的. 值得一提的是, 相比于 ω 型套, 由于连续套代数没有好的矩阵表示, 许多人原来认为此情形可能为连通性问题中比较棘手的情形. 但恰恰是连续套代数具有无穷重数的这一性质为可逆元群中元素之间的道路的构造提供了更大的操作空间.

1994 年, Davidson、Orr 和 Pitts 巧妙应用套的相似定理和矩阵分解的技巧, 对定理 3 做了进一步的推广, 证明了如下两个定理:

定理 4 [17] 设 $\mathcal{N}$ 是一个套, 且 $\mathcal{N}$ 没有有限维的孤立原子, 则 $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ 的可逆元群是连通的.

由上述定理可知, Cantor 套 (例 2) 的连通性问题的答案是肯定的.

定理 5 [17] 设 $\mathcal{N}$ 是一个套, 且 $\mathcal{N}$ 中每一段连贯出现的有限维原子的个数有一个公共的有限上界, 则 $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ 的可逆元群是连通的.

通过上述两个定理, Davidson、Orr 和 Pitts 将一般的连通性问题约化为序型为 ω、每个原子均为有限维的套代数 (例 1) 的连通性问题. 特别地, 由于有限维空间上的矩阵均可以通过 Schur 定理上三角化, 故若序型为 w、每个原子均为一维的套代数连通性问题的答案是肯定的, 则任意序型为 ω、每个原子均为有限维的套代数连通性问题的答案也是肯定的.

前面 3 个定理的证明均依赖套是连续的或者有足够大 "比重" 的连续部分 (为了可读性, 我们只给出描述性的解释而不给出准确定义, 感兴趣的读者可参见文献 [15]) 这一性质, 但是序型为 ω、每个原子为有限维的套并没有连续部分. 2012 年, 我们发现, 每个原子均是有限维的 ω 型套 $\mathcal{N}$ 的原子维数的增长速度如果是指数增长, 则套 $\mathcal{N}$ 具有某种 "半无穷重" 性质, 继而证明了下面定理:

定理 6 [18] 设 $\mathcal{N}$ 是序型为 ω、每个原子均是有限维的套, 且其原子 $E_k=N_k\ominus N_{k-1}$ 的维数 t_k 满足 $t_k\geqslant k\sum_{i<k}t_i$, 则套代数 $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ 的可逆元群是连通的.

截至本文提交, 上述定理是序型为 ω、每个原子均是有限维的套代数连通性问题的唯一重要进展. 此外, 我们证明了此类套代数的 K_1 群是平凡的. 最后以如下问题结束本节的讨论:

问题 2 设 $\mathcal{N}$ 是 Volterra 套, 则 $G(\mathcal{T}(\mathcal{N}))$ 是否是可缩的?

注 1 对 Volterra 套而言, 由文献 [19] 可知, $K_0(\mathcal{T}(\mathcal{N}))=0$; 而由定理 3 易知, $K_1(\mathcal{T}(\mathcal{N}))=0$. 这些都支撑着上述问题的答案可能是肯定的.

4 上三角代数的连通性问题进展

本节主要介绍上三角代数连通性问题的相关进展. 历史上, 基于 $H^\infty(\mathbb{T})$ 与上三角代数 $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ 的密切联系, 很多人猜测 $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ 的可逆元群是不连通的. 具体原因如下.

设 μ 为单位圆周 $\mathbb{T}$ 上的正规化 Lebesgue 测度. 设 $H^2(\mathbb{T})$ 和 $H^\infty(\mathbb{T})$ 为在此测度下的经典的 Hardy 空间. 令 $e_n(z)=z^{n-1}$, $z\in\mathbb{T}$, $n\in\mathbb{N}$, 则 $\mathcal{E}\doteq\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $H^2(\mathbb{T})$ 的一组正规正交基, 记 P 为 $L^2(\mathbb{T})$ 到 $H^2(\mathbb{T})$ 的正交射影. 对 $\varphi\in H^\infty(\mathbb{T})$, 定义以 φ 为符号的解析 Toeplitz 算子 T_φ, 这里

$$T_\varphi(f)=P(\varphi f),\quad \forall\, f\in H^2(\mathbb{T}),$$

则 T_φ 在基底 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 下的矩阵表示是一个形如

$$\begin{array}{cc}\begin{bmatrix} c_0 & & & & \\ c_1 & c_0 & & & \\ c_2 & c_1 & c_0 & & \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ \vdots \end{matrix}\end{array}$$

的下三角 Toeplitz 矩阵 (即在每条对角线上取常值).

称

$$T(H^\infty(\mathbb{T}))\doteq\{T_\varphi:\varphi\in H^\infty(\mathbb{T})\}$$

为 Toeplitz 代数. 易验证, 将函数 φ 映射成 T_φ 的自然同态是 $H^\infty(\mathbb{T})$ 到 $T(H^\infty(\mathbb{T}))$ 的等距同构. 注意到套代数 $\mathcal{T}(\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^\perp)$ 是恰由在基底 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 下可表为下三角矩阵的全体有界线性算子构成的集合, 故 $\mathcal{T}(\mathcal{P}^\perp)$ 常被称为非交换的 $H^\infty(\mathbb{T})$. 由于 $H^\infty(\mathbb{T})$ 是一个交换的 Banach 代数, 故

$$G_0(H^\infty(\mathbb{T}))=\{\mathrm{e}^h:h\in H^\infty(\mathbb{T})\},$$

从而令

$$h(z)=\frac{2\mathrm{i}}{\pi}\log\frac{1+z}{1-z},$$

则 $h(z)$ 是一个开单位圆盘到 $\{z:z\in\mathbb{C},|\mathrm{Re}z|<1\}$ 的 (无界的) 共形映射, 故

$$f\doteq\mathrm{e}^h\in G(H^\infty(\mathbb{T}))\setminus G_0(H^\infty(\mathbb{T})).$$

历史上, 人们猜测或许 T_f 可以用来证明 $\mathcal{T}(\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^\perp)$ 的可逆元群不是连通的 (参见文献 [13, 第 377 页]).

但是, 有趣的是, 1992 年 Pitts [20] 证明了 T_f 是 $\mathcal{T}(\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^\perp)$ 中两个可逆对合算子的乘积, 故 $T_f\in G_0(\mathcal{T}(\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^\perp))$.

最近, 我们利用有限 Blaschke 乘积构造了 $H^2(\mathbb{T})$ 正规正交基的一组新的方法.

定理 7 [21] 设 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1)$, 且在 $[0,1)$ 中有聚点 r. 定义

$$g_1(z) \equiv 1, \quad g_{n+1}(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{z-r_i}{1-r_i z}, \quad f_n(z) = g_n(z) \frac{\sqrt{1-{r_n}^2}}{1-r_n z}, \quad \phi_n(z) = \frac{z-r_n}{1-r_n z}, \quad n \in \mathbb{N},$$

则 $\mathcal{F}_\gamma \doteq \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 $H^2(\mathbb{T})$ 的正规正交基.

此外, 对 $T_\varphi \in T(H^\infty(\mathbb{T}))$, T_φ 在 $\mathcal{F}$ 下的矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} \phi(r_1) & & & & \\ * & \phi(r_2) & & & \\ * & * & \phi(r_3) & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

通过适当选取上述定理中的参数列 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, 并利用定理 6 及一些矩阵分解的技巧, 我们证明了下面的定理:

定理 8 $H^2(\mathbb{T})$ 中存在一组正规正交基 $\mathcal{F}$, 使得对任意 $f \in G(H^\infty(\mathbb{T}))$, 有 $T_f \in G_0(\mathcal{T}(\mathcal{P}_{\mathcal{F}}^{\perp}))$.

特别地, 从上述定理可知, $\mathcal{T}(\mathcal{P}^{\perp})$ 有一个同构于 $H^\infty(\mathbb{T})$ 的子代数, 且此子代数的可逆元群完全包含在 $G_0(T(\mathcal{P}^{\perp}))$ 中. 当然, 我们关心标准嵌入下, Toeplitz 代数可逆元群不连通的障碍是否可在 $G(T(\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\perp}))$ 中消除, 即下面的问题:

问题 3 设 $\mathcal{E} = \{z^{n-1} : n \in \mathbb{N}\} \subset H^2(\mathbb{T})$, 则是否对于任意 $f \in H^\infty(\mathbb{T})$, 有 $T_f \in G_0(\mathcal{T}(\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\perp}))$?

5 套代数的稳定秩理论

本节回顾套代数的稳定秩理论方面已取得的进展并探讨其与连通性问题的关联.

5.1 Banach 代数的稳定秩四重奏

定义 2 设 $\mathfrak{A}$ 是 Banach 代数, 则

(1) $\mathfrak{A}$ 的 Bass 稳定秩, 记为 $\mathrm{bsr}(\mathfrak{A})$, 为满足下述条件的最小的正整数 n: 对于 $Lg_{n+1}(\mathfrak{A})$ 中每一个元素 (a_i), 都存在 $\mathfrak{A}^n$ 中的元素 (b_i), 使得 $(a_i + b_i a_{n+1})$ 在 $Lg_n(\mathfrak{A})$ 中;

(2) $\mathfrak{A}$ 的左拓扑稳定秩, 记为 $\mathrm{ltsr}(\mathfrak{A})$, 为使得 $Lg_n(\mathfrak{A})$ 在 $\mathfrak{A}^n$ 中是稠密的最小的正整数 n;

(3) $\mathfrak{A}$ 的连通稳定秩, 记为 $\mathrm{csr}(\mathfrak{A})$, 为满足下述条件的最小的正整数 n: 对于正整数 $m \geqslant n$, $GL_m^0(\mathfrak{A})$ 在 $Lg_m(\mathfrak{A})$ 上是传递的, 即 $\alpha : GL_m^0(\mathfrak{A}) \to Lg_m(\mathfrak{A})$, $T \mapsto Te_1$ 是满射, 这里 $T \in GL_m^0(\mathfrak{A})$, $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, 等价地,

$$\mathrm{csr}(\mathfrak{A}) = \min\{n : Lg_m(\mathfrak{A}) \text{ 是连通的}, \forall\, m \geqslant n\};$$

(4) $\mathfrak{A}$ 的一般稳定秩, 记为 $\mathrm{gsr}(\mathfrak{A})$, 为满足下述条件的最小的正整数 n: 对于正整数 $m \geqslant n$, $GL_m(\mathfrak{A})$ 在 $Lg_m(\mathfrak{A})$ 上是传递的.

注 2 (1) Bass 稳定秩是由 Bass 在研究 Serre 问题 [22] 的过程中引入的 (参见文献 [23]); 其他 3 种稳定秩是 Rieffel 受 Bass 稳定秩的启发, 在研究 Banach 代数的 K- 理论的稳定性时引入的 (参见文献 [24]).

(2) 在上述 4 种稳定秩各自的定义中, 如果没有正整数 n 满足条件, 则称相应的稳定秩为 ∞.

(3) 事实上, 定义 2 中的 4 种稳定秩均为 "左" 的版本, 我们也可以利用 $Rg_n(\mathfrak{A})$ 定义相应 "右" 的版本, 记 $\mathrm{rtsr}(\mathfrak{A})$ 为 $\mathfrak{A}$ 的右拓扑稳定秩. 对于 Banach 代数而言, Vaserstein 在文献 [25, 定理 2] 中证明了左 Bass 秩、右 Bass 秩二者相等; 对于连通稳定秩及一般稳定秩, Corach 和 Larotonda[26] 也证明了左右对称性. 但是, Banach 代数的左右拓扑稳定秩可能不相等 (参见文献 [27]). 当 $\mathfrak{A}$ 的左、右拓扑稳定秩相等时, 我们将此公共的值记为 $\mathrm{tsr}(\mathfrak{A})$, 易知交换 Banach 代数及 C^*- 代数的左、右拓扑稳定秩必相等.

(4) 若 $\mathfrak{A}$ 是一个 C^*- 代数, Herman 和 Vaserstein[28] 证明了 $\mathrm{bsr}(\mathfrak{A}) = \mathrm{tsr}(\mathfrak{A})$.

下面是 Banach 代数的这 4 种稳定秩之间的比较关系.

定理 9[24]　设 $\mathfrak{A}$ 是一个 Banach 代数, 则

$$\mathrm{gsr}(\mathfrak{A}) \leqslant \mathrm{csr}(\mathfrak{A}) \leqslant \mathrm{bsr}(\mathfrak{A}) + 1 \leqslant \min\{\mathrm{ltsr}(\mathfrak{A}), \mathrm{rtsr}(\mathfrak{A})\} + 1.$$

注 3[24]　对 Banach 代数 $\mathfrak{A}$ 而言,

$$\mathrm{ltsr}(\mathfrak{A}) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{rtsr}(\mathfrak{A}) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{tsr}(\mathfrak{A}) = 1 \Rightarrow \mathrm{bsr}(\mathfrak{A}) = 1 \Rightarrow \mathrm{gsr}(\mathfrak{A}) = 1.$$

若设 $GL(\mathfrak{A})$ 是连通的, 则

$$\mathrm{bsr}(\mathfrak{A}) = 1 \Rightarrow \mathrm{csr}(\mathfrak{A}) = 1.$$

由于 $H^\infty(\mathbb{T})$ 与套代数的关系密切, 首先回顾关于 $H^\infty(\mathbb{T})$ 稳定秩的结果. 1992 年, Treil[29] 证明了 $\mathrm{bsr}(H^\infty(\mathbb{T})) = 1$; 1996 年, Suárez[30] 证明了 $\mathrm{tsr}(H^\infty(\mathbb{T})) = 2$. 注意到 $G(H^\infty(\mathbb{T}))$ 是不连通的, 并应用定理 9 和注 3 可知, $\mathrm{csr}(H^\infty(\mathbb{T})) = 2$, $\mathrm{gsr}(H^\infty(\mathbb{T})) = 1$.

5.2　套代数的稳定秩

从连通稳定秩的定义可见, 连通稳定秩与此代数的可逆元群的连通性密切相关. 事实上, 对于上三角代数 $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ 而言, $\mathrm{csr}(\mathcal{T}(P)) = 1 \Leftrightarrow G(\mathcal{T}(\mathcal{P})) = G_0(\mathcal{T}(\mathcal{P}))$ (参见文献 [31]). 注意到如定理 9 所示, Banach 代数的这 4 种稳定秩关系密切, 其中任何一个稳定秩的研究进展都将推动其他 3 种稳定秩的相应研究.

2004 年, Feintuch 发现 Hilbert 空间框架下线性时不变系统强稳定化问题等价于研究相应的套代数的 Bass 稳定秩是否为 1 (参见文献 [32, 问题 6.2] 和 [33]). 2008 年, 利用套的相似定理, Feintuch[34] 证明了连续套代数的 Bass 稳定秩为无穷.

2008 年, Davidson 等[27] 得到了一个奇妙的结果, 即构造了一类特殊的每个原子为有限维的 ω 型套代数, 证明了其左拓扑稳定秩为无穷, 右拓扑稳定秩为 2, 从而解决了 Rieffel 的一个公开问题 (参见文献 [24, 问题 1.5]).

在此基础上, 2009 年, Davidson 和 Ji[35] 计算了所有套代数的拓扑稳定秩.

定义 3　设 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{H}$ 一个套, 定义

$$\beta(\mathcal{N}) = \sup\{q : q \in \mathbb{N}, \text{存在 } N_0 < N_1 < \cdots < N_q, \text{使得 } \dim(N_j \ominus N_{j-1}) \geqslant \dim(N_{j+1} \ominus N_j), 1 \leqslant j \leqslant q\}.$$

定理 10[35]　设 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的一个套, 则下述结论等价:

(1) $\mathrm{rtsr}(\mathcal{T}(\mathcal{N})) = 2$;

(2) $\mathrm{rtsr}(\mathcal{T}(\mathcal{N})) < \infty$;

(3) $\beta(\mathcal{N}) < \infty$, 且 $\mathcal{N}$ 没有无穷秩原子.

注意, 根据上述定理可知, 满足定理 6 条件的套代数 $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ 的右拓扑稳定秩为 2, 此时由定理 9 可知, $\mathrm{csr}(\mathcal{T}(\mathcal{N}))\leqslant 3$, 在这种意义下, $\mathrm{csr}(\mathcal{T}(\mathcal{N}))$ 或许更有可能是 1. 因此, 我们很自然地会将具有右稳定秩为 2 的套代数看成具有好的正则性, 考虑如下情形的连通性问题:

问题 4 设 $\mathcal{N}$ 为每个原子均是有限维的 ω 型套, 且 $\mathrm{rtsr}(\mathcal{T}(\mathcal{N}))=2$, 则是否有

$$G(\mathcal{T}(\mathcal{N}))=G_0(\mathcal{T}(\mathcal{N}))?$$

2009 年, Davidson 和 Ji (本质上) 得到了对套代数一般稳定秩的完整刻画.

定理 11 [31,35] 设 $\mathcal{N}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上一个套, 则

(i) 若 $\mathcal{N}$ 是只含有有限维原子的可数套, 则 $\mathrm{gsr}(\mathcal{T}(\mathcal{N}))=1$;

(ii) 若 $\mathcal{N}$ 是不可数的, $\mathcal{N}$ 的每一个原子均是有限维的且 $\mathcal{N}$ 的每一个非空区间均包含原子, 则 $\mathrm{gsr}(\mathcal{T}(\mathcal{N}))=2$;

(iii) 否则, $\mathrm{gsr}(\mathcal{T}(\mathcal{N}))=\infty$.

由上述定理可知连续套代数的一般稳定秩是无穷, 当然, 由定理 9 得它的每一个稳定秩均是无穷. 至于 Cantor 套代数 $\mathcal{T}(\mathcal{Q})$, 应用上述定理可知, $\mathrm{gsr}(\mathcal{T}(\mathcal{Q}))=2$. 继而, 应用定理 9 可得 $\mathrm{bsr}(\mathcal{T}(\mathcal{Q}))\geqslant 2$ 且 $\mathrm{csr}(\mathcal{T}(\mathcal{Q}))\geqslant 2$. 应用定理 3 可得对于每一个正整数 n, $GL(\mathcal{T}(\mathcal{Q}^n))$, 即 $GL_n(\mathcal{T}(\mathcal{Q}))$, 是连通的. 从而, $\mathrm{csr}(\mathcal{T}(\mathcal{Q}))=\mathrm{gsr}(\mathcal{T}(\mathcal{Q}))=2$.

问题 5 $\mathrm{bsr}(\mathcal{T}(\mathcal{Q}))$ 是多少?

由定理 9 和 10 可知, 有许多原子均是有限维的 ω 型套代数的 Bass 稳定秩不大于 2. 最近, 我们发现套代数的连通性问题与套代数的 Bass 稳定秩有着密切的联系. 具体而言, 如果存在某个原子均是有限维的 ω 型套 Ł, 使得 $\mathcal{T}$(Ł) 的 Bass 稳定秩为 1, 则上三角代数 $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ 连通性问题的答案是肯定的.

参考文献

1 Douglas R G. Banach Algebra Techniques in Operator Theory, 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics, vol. 179. New York: Springer-Verlag, 1998

2 Kuiper N H. The homotopy type of the unitary group of Hilbert space. Topology, 1965, 3: 19–30

3 Gamelin Theodore W. Uniform Algebras. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1969

4 Saeks R, Knowles G. The Arveson frequency response and systems theory. Internat J Control, 1985, 42: 639–650

5 Davidson K R, Orr J L. The invertibles are connected in infinite multiplicity nest algebras. Bull Lond Math Soc, 1995, 27: 155–161

6 Davidson K R. A survey of nest algebras. In: Analysis at Urbana, vol. II (Urbana, IL, 1986–1987). London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 138. Cambridge: Cambridge University Press, 1989, 221–242

7 Davidson K. Problems about reflexive algebras. Rocky Mountain J Math, 1990, 20: 317–330

8 Lance E C. Some problems and results on reflexive algebras. In: Operator Algebras and Their Connections with Topology and Ergodic Theory (Buşteni, 1983). Lecture Notes in Mathematics, vol. 1132. Berlin: Springer, 1985, 324–330

9 Larson D R, Pitts D R. Some questions concerning nest algebras. In: Selfadjoint and Nonselfadjoint Operator Algebras and Operator Theory (Fort Worth, TX, 1990). Contemp Math, vol. 120. Providence: Amer Math Soc, 1991, 89–96

10 Larson D R, Pitts D R. Idempotents in nest algebras. J Funct Anal, 1991, 97: 162–193

11 Power S C. On ideals of nest subalgebras of C^*-algebras. Proc Lond Math Soc (3), 1985, 50: 314–332

12 Knowles G, Saeks R. On the structure of invertible operators in a nest-subalgebra of a von Neumann algebra. In: Topics in Operator Theory Systems and Networks (Rehovot, 1983). Operator Theory: Advances and Applications, vol 12. Basel: Birkhäuser, 1984, 303–317

13 Davidson K R. Nest algebras. Triangular forms for operator algebras on Hilbert space. Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 191. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1988

14 Kalisch G K. A functional analysis proof of Titchmarsh's theorem on convolution. J Math Anal Appl, 1962, 5: 176–183

15 Davidson K R. Similarity and compact perturbations of nest algebras. J Reine Angew Math, 1984, 1984: 72–87
16 Orr J L. Triangular Algebras and Ideals of Nest Algebras. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 117. Providence: Amer Math Soc, 1995
17 Davidson K R, Orr J L, Pitts D R. Connectedness of the invertibles in certain nest algebras. Canad Math Bull, 1995, 38: 412–420
18 Ji Y Q, Zhang Y H. Connectedness of the invertibles in certain nest algebras of order type ω. J Funct Anal, 2012, 263: 2584–2592
19 Pitts D R. On the K_0 groups of nest algebras. K-Theory, 1989, 2: 737–752
20 Pitts D R. A note on the connectedness problem for nest algebras. Proc Amer Math Soc, 1992, 114: 181–183
21 Ji Y Q, Liu L, Zhang Y H. Connecting invertible analytic Toeplitz operators in $G(\mathcal{T}(\mathcal{P}^{\perp}))$. J Funct Anal, 2019, 277: 3051–3061
22 Serre J P. Faisceaux algébriques cohérents. Ann of Math (2), 1955, 61: 197–278
23 Bass H. K-theory and stable algebra. Inst Hautes Études Sci Publ Math, 1964, 22: 5–60
24 Rieffel M A. Dimension and stable rank in the K-theory of C^*-algebras. Proc Lond Math Soc (3), 1983, 46: 301–333
25 Vaserstein L N. The stable range of rings and the dimension of topological spaces. Funkcional Anal i Priložen, 1971, 5: 17–27
26 Corach G, Larotonda A R. Unimodular matrices in Banach algebra theory. Proc Amer Math Soc, 1986, 96: 473–477
27 Davidson K R, Levene R H, Marcoux L W, et al. On the topological stable rank of non-selfadjoint operator algebras. Math Ann, 2008, 341: 239–253, 963–964
28 Herman R H, Vaserstein L N. The stable range of C^*-algebras. Invent Math, 1984, 77: 553–555
29 Treil S. The stable rank of the algebra H^∞ equals 1. J Funct Anal, 1992, 109: 130–154
30 Suárez D. Trivial Gleason parts and the topological stable rank of H^∞. Amer J Math, 1996, 118: 879–904
31 Ji Y Q, Zhang Y H. Stable ranks of split extensions of Banach algebras. Linear Algebra Appl, 2011, 434: 2149–2157
32 Blondel V D, Megretski A. Unsolved Problems in Mathematical Systems and Control Theory. Princeton: Princeton University Press, 2004
33 Feintuch A. On strong stabilization for linear time-varying systems. Systems Control Lett, 2005, 54: 1091–1095
34 Feintuch A. On strong stabilization for linear continuous time time-varying systems. Systems Control Lett, 2008, 57: 691–695
35 Davidson K R, Ji Y Q. Topological stable rank of nest algebras. Proc Lond Math Soc (3), 2009, 98: 652–678

On the connectedness of the invertibles in nest algebras and related problems

Youqing Ji & Yuanhang Zhang

Abstract In this paper, we summarize the progress of the connectedness problem of the group of invertibles in nest algebras and list some related open problems that could be further considered. After reviewing the concepts and basic examples of nest algebras, the solved cases of the connectedness problem for nest algebras are presented. Taking Pitts' example as the starting point, we also review the progress of the connectedness problem for the upper triangular algebra. Finally, the relationships between stable ranks and the connectedness problem of nest algebras are also discussed.

Keywords nest algebra, connectedness problem, stable rank

MSC(2010) 47L35, 46J15

doi: 10.1360/SSM-2020-0167