差基的下界

杨仕椿^{1,2}, 廖群英^{3*}

1. 阿坝师范学院数学学院, 汶川 623002;

2. 阿坝师范学院应用数学研究所, 汶川 623002;

3. 四川师范大学数学科学学院, 成都 610068

E-mail: ysc1020@sina.com, qunyingliao@sicnu.edu.cn

收稿日期: 2020-11-17; 接受日期: 2021-12-24; 网络出版日期: 2022-02-16; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11861001 和 12071321)、四川省应用基础研究重点项目 (批准号: 2018JY0458) 和四川高校科研创新团队项目 (批准号: 18TD0047) 资助项目

摘要 若集合 $A \subseteq \mathbb{Z}$ 满足 $A - A \supseteq \{1, 2, \dots, n\}$, 则 A 称为关于 n 的差基. 差基应用于图的优美标记、集合的对称相交族和信号处理, 与密码和编码理论有密切而深刻的联系. 本文利用 Fourier 分析的方法, 讨论一些参数的更高阶的 Fourier 系数的性质, 进一步改进了差基的下界, 从而改进了 Rédei 和 Rényi (1949)、Leech (1956) 以及 Bernshteyn 和 Tait (2019) 的结果.

关键词 差基 Fourier 分析 估计 下界

MSC (2020) 主题分类 11B13, 11B75, 05D05

1 引言与主要结果

令 $\mathbb{N}^+$ 和 $\mathbb{Z}$ 分别表示全体正整数和全体整数的集合. 对 $n \in \mathbb{N}^+$, 设 $[n] := \{1, \dots, n\}$, $[-n] := \{-n, \dots, -1\}$. 给定集合 $A \subseteq \mathbb{Z}$, 令

$$A - A := \{a - b : a, b \in A\}.$$

若非空集合 $A \subseteq \mathbb{Z}$ 满足 $A - A \supseteq [n]$, 则 A 称为关于 n 的差基 (difference basis with respect to n). 1949 年, Rédei 和 Rényi^[1] 首先提出了如下问题:

问题 1.1 对于给定的正整数 n , 关于 n 的差基 A 的元素个数的最小值为多少?

问题 1.1 本身是一个组合数论问题, 也广泛应用于图的优美标号的研究^[2,3]、集合的对称相交族^[4]和信号处理的研究^[5-7], 其他应用还可参见文献 [8-10].

设 $D(n)$ 表示关于 n 的差基 A 的大小 $|A|$ 的最小值, 且

$$d^* := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D(n)^2}{n}.$$

英文引用格式: Yang S C, Liao Q Y. The lower bound for difference bases (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 1237–1254, doi: 10.1360/SSM-2020-0323

Rédei 和 Rényi^[1] 首先证明了 d^* 的存在性, 并得到了如下的界:

$$2.4244\cdots = 2 + \frac{4}{3\pi} \leq d^* \leq \frac{8}{3} = 2.6666\cdots. \quad (1.1)$$

1956 年, Leech^[9] 发现, 利用 Rédei 和 Rényi 的方法, 如上的下界可以进一步改进一些 (文献 [1] 中的 θ 取值 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 可以变为 $\theta = 4.4934\cdots$, 使得下界更大一些), 即如下的定理:

定理 1.1^[9] (Leech-Rédei-Rényi) 对于 d^* 的值, 有

$$d^* \geq 2 - 2 \inf_{\theta \neq 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 2.4344\cdots. \quad (1.2)$$

同时, Leech^[9] 还证明了 $d^* \leq 2.6646\cdots$. 1972 年, Golay^[10] 将其上界进一步改进为 $d^* \leq 2.6458\cdots$.

差基 A 的 d^* 的上下界问题, 与密码、编码理论的相关问题有密切而深刻的联系, 而且已经被许多学者在更广泛的数域里进行深入研究 (参见文献 [11–13]). 特别地, d^* 的下界估计问题, 是组合数论中的一个基本问题, 近 60 年来, 其结果未能有所改进. 直到最近, Bernshteyn 和 Tait^[14] 利用 Fourier 分析的方法, 证明了 (1.2) 中 d^* 的下界估计不是最佳的. 实际上, Bernshteyn 和 Tait 证明了如下的定理:

定理 1.2^[14] 存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$d^* \geq \varepsilon + 2 - 2 \inf_{\theta \neq 0} \frac{\sin \theta}{\theta}. \quad (1.3)$$

文献 [14] 指出, (1.3) 中的 ε 大约可取值 10^{-3} , 即 $\varepsilon \approx 0.001$; 并指出该文献并没有努力优化 ε 的估计, 因为目前尚不清楚利用该文献中的方法, 是否可以给出 d^* 的最佳下界.

本文利用文献 [1, 14] 的思想, 运用 Fourier 分析的一些结果, 讨论一些参数的更高阶的 Fourier 系数的性质, 对差基的 d^* 的下界作了更加精确的估计, 改进了文献 [1, 9, 14] 的结果, 证明了 $\varepsilon > 0.0077$, 即得到如下的定理:

定理 1.3 关于 n 的差基 A , 有

$$d^* > 2.4421. \quad (1.4)$$

本文余下内容的安排如下: 第 2 节介绍 Fourier 分析的相关结论. 第 3 节讨论满足

$$d^* \leq \varepsilon + 2 - 2 \inf_{\theta \neq 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$$

的差基 A 的性质, 其中 $\varepsilon = 0.0077$. 第 4 节运用 Fourier 分析的结论, 讨论一些参数的更高阶的 Fourier 系数的性质, 并利用反证法来得出矛盾, 从而证明了 (1.4).

2 预备知识

本节首先介绍一些 Fourier 分析的结论, 内容取自于文献 [15, 16] 和 [14, 第 2 小节].

对于一个非空的有限集合 A , 用 $\text{uni}(A)$ 表示 A 上的均匀概率测度. 对函数 $\varphi: X \rightarrow Y$ 以及 X 上的测度 μ , μ 对于 φ 的推前 (pushforward) 测度定义为 $\varphi_*(\mu)$. 设 X 是紧致度量空间, $\text{Prob}(X)$ 表示 X 上的所有概率 Borel 度量的空间, 它具有通常的弱拓扑性质 (参见文献 [15] 第 17 章中 E 部分). 熟知, 空间 $\text{Prob}(X)$ 是紧致的和可度量的 (参见文献 [15, 定理 17. 22]).

设 $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 表示复平面上的单位圆, 也可视为一个紧致的 Abel 群. 给定测度 $\mu \in \text{Prob}(\mathbb{T})$, 令 $\bar{\mu}$ 表示 μ 的共轭变换 $\mathbb{T} \mapsto \mathbb{T}$. 测度 $\mu \in \text{Prob}(\mathbb{T})$ 的 Fourier 变换, 是指函数 $\hat{\mu} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, 满足

$$\hat{\mu}(k) := \int_{\mathbb{T}} z^k d\mu(z),$$

其中 $\hat{\mu}(k)$ 为 μ 的 Fourier 系数.

先给出以下的引理 (参见文献 [14, 引理 2.1]).

引理 2.1 ^[14] 设 μ 是 $\mathbb{T}$ 上的概率测度, $B = (B(i, j))$ 是 $n \times n$ 矩阵, 满足

$$B(i, j) := \hat{\mu}(j - i), \quad (2.1)$$

则 B 是 Hermite 半正定矩阵.

如同文献 [14], 为完整起见, 在这里引用引理 2.1 的逆命题, 即如下的引理 2.2 (可参见文献 [16, 第 1.4.3 节] 的结论, 以及文献 [14, 定理 2.2]).

引理 2.2 (Bochner-Herglotz 定理) 设函数 $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ 满足下列 3 个条件:

- (i) $f(0) = 1$;
- (ii) 对所有的 $k \in \mathbb{Z}$, 有 $f(-k) = \overline{f(k)}$;
- (iii) 对任意整数 $n \in \mathbb{N}^+$, $n \times n$ 矩阵 $A = (A(i, j))$ 是 Hermite 半正定矩阵, 其中

$$A(i, j) := \hat{\mu}(j - i),$$

则存在唯一的概率度量 $\mu \in \text{Prob}(\mathbb{T})$, 使得 $f = \hat{\mu}$.

接下来, 给出卷积的定义. 两个概率测度 $\mu, \nu \in \text{Prob}(\mathbb{T})$ 在 $\mathbb{T}$ 上的卷积 $\mu * \nu$ 定义为

$$\int_{\mathbb{T}} f(z) d(\mu * \nu)(z) := \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} f(xy) d(\mu \times \nu)(x, y) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} f(xy) d\mu(x) d\nu(y).$$

注意到 Fourier 变换的卷积是可乘的, 因此

$$\widehat{\mu * \nu}(k) = \hat{\mu}(k) \hat{\nu}(k) \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (2.2)$$

3 一些引理

本节利用文献 [14] 的方法来研究满足

$$d^* \leq \varepsilon + 2 - 2 \inf_{\theta \neq 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \quad (3.1)$$

的差基 A_n 的性质, 其中 $\varepsilon = 0.0077$.

直接计算可知, 当 $\theta = 4.4934094 \cdots$ 时, 函数 $f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$ 取得最小值, 其最小值为

$$\frac{\sin \theta}{\theta} = -0.217233628 \cdots.$$

假设存在无限的整数集合 $B \in \mathbb{N}^+$, 使得对每一个 $n \in B$, 均可构造出关于 n 的差基 $A_n \subseteq \mathbb{Z}$, 满足

$$|A_n|^2 \leq \left(2 - \frac{2 \sin \theta}{\theta} + \varepsilon + o(1) \right) n. \quad (3.2)$$

则对 $n \in B$, 令 $\alpha_n := \frac{|A_n|^2}{n} - 2 - \varepsilon$, 有

$$|A_n|^2 = (2 + \alpha_n + \varepsilon)n. \quad (3.3)$$

设函数 $\varphi_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{T}$ 满足 $\varphi_n(k) := \exp(\frac{\theta i k}{n})$. 定义 $\mathbb{T}$ 上的两个测度

$$\mu_n := (\varphi_n) * (\mathbf{uni}(A_n)), \quad \nu_n := (\varphi_n) * (\mathbf{uni}([-n] \cup [n])).$$

首先, 采用文献 [14, 引理 3.2] 中的方法, 证明如下引理:

引理 3.1 对任意 $n \in B$, 存在概率测度 $\zeta_n \in \text{Prob}(\mathbb{T})$, 使得

$$\mu_n * \overline{\mu_n} = \frac{2}{2 + \alpha_n + \varepsilon} \nu_n + \frac{\alpha_n + \varepsilon}{2 + \alpha_n + \varepsilon} \zeta_n. \quad (3.4)$$

证明 设 ξ_n 是集合 $A_n - A_n$ 上的概率测度, 满足

$$\xi_n(\{r\}) := \frac{1}{|A_n|^2} |\{(a, b) \in A_n \times A_n : a - b = r\}|.$$

由 $A_n - A_n \supseteq [-n] \cup [n]$ 可知, 对于任意 $s \in [-n] \cup [n]$, 由 (3.3) 可得

$$\xi_n(\{s\}) \geq \frac{1}{|A_n|^2} = \frac{1}{(2 + \alpha_n + \varepsilon)n} = \frac{2}{2 + \alpha_n + \varepsilon} (\mathbf{uni}([-n] \cup [n]))(\{s\}). \quad (3.5)$$

又因为

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} f(z) d(\mu_n * \overline{\mu_n})(z) &= \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} f(xy) d(\mu_n * \overline{\mu_n})(x, y) \\ &= \frac{1}{|A_n|^2} \sum_{(a, b) \in A_n \times A_n} f(\varphi_n(a) \overline{\varphi_n(b)}) \\ &= \frac{1}{|A_n|^2} \sum_{(a, b) \in A_n \times A_n} f(\varphi_n(a - b)) \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(z) d((\varphi_n)_*(\xi_n))(z), \end{aligned}$$

所以

$$\mu_n * \overline{\mu_n} = (\varphi_n)_*(\xi_n). \quad (3.6)$$

注意到

$$\left| \frac{2}{2 + \alpha_n + \varepsilon} \nu_n + \frac{\alpha_n + \varepsilon}{2 + \alpha_n + \varepsilon} \right| \leq \frac{2}{2 + \alpha_n + \varepsilon} + \frac{\alpha_n + \varepsilon}{2 + \alpha_n + \varepsilon} = 1,$$

因此, 由 (3.5) 和 (3.6) 可知, 存在一个概率测度 $\zeta_n \in \text{Prob}(\mathbb{T})$, 使得 (3.4) 成立. 引理 3.1 得证. $\square$

下面考虑 n 取无穷大时的情形. 设函数 $\varphi : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{T}$ 满足 $\varphi(a) := \exp(\theta i a)$. 若 $\nu := \varphi_*(\lambda)$, 这里 λ 是 $[-1; 1]$ 上的均匀概率测度, 则

$$\nu = \lim_{n \in B} \nu_n.$$

同时, 可假设下列极限值存在:

$$\alpha = \lim_{n \in B} \alpha_n, \quad \mu = \lim_{n \in B} \mu_n, \quad \zeta = \lim_{n \in B} \zeta_n.$$

由 (3.2) 可得

$$\alpha \leqslant -\frac{2 \sin \theta}{\theta}, \quad (3.7)$$

再由引理 3.1 可得

$$\mu * \bar{\mu} = \frac{2}{2 + \alpha + \varepsilon} \nu + \frac{\alpha + \varepsilon}{2 + \alpha + \varepsilon} \zeta. \quad (3.8)$$

下面来讨论 μ 、 ν 和 ζ 的各阶 Fourier 系数的值. 首先给出 ν 的 Fourier 系数 (参见文献 [14, 引理 3.5]).

引理 3.2 ^[14] 我们有

$$\widehat{\nu}(0) = 1, \quad \widehat{\nu}(k) = \frac{\sin(k\theta)}{k\theta} \quad (k \neq 0). \quad (3.9)$$

其次, 给出参数 α 以及 $\widehat{\zeta}(1)$ 的大小估计, 即如下引理:

引理 3.3 我们有

$$\alpha \geqslant -\frac{2 \sin \theta}{\theta} - \varepsilon, \quad 0.9822 < \widehat{\zeta}(1) \leqslant 1. \quad (3.10)$$

证明 由 (3.8) 和 (3.9) 可得

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |\widehat{\mu}(1)|^2 &= \widehat{\mu * \bar{\mu}}(1) = \frac{2}{2 + \alpha + \varepsilon} \widehat{\nu}(1) + \frac{\alpha + \varepsilon}{2 + \alpha + \varepsilon} \widehat{\zeta}(1) \\ &\leqslant \frac{2}{2 + \alpha + \varepsilon} \frac{\sin \theta}{\theta} + \frac{\alpha + \varepsilon}{2 + \alpha + \varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

再由 (3.11) 可知, $\alpha + \varepsilon + \frac{2 \sin \theta}{\theta} \geqslant 0$, 从而

$$\alpha \geqslant -\frac{2 \sin \theta}{\theta} - \varepsilon.$$

进而由 (3.7) 以及 (3.11) 的第一式可得

$$1 \geqslant \widehat{\zeta}(1) \geqslant -\frac{2 \widehat{\nu}(1)}{\alpha + \varepsilon} \geqslant \frac{-\frac{2 \sin \theta}{\theta}}{-\frac{2 \sin \theta}{\theta} + \varepsilon} > 0.9822.$$

于是, 引理 3.3 得证. □

下面利用引理 2.1 来估计 ζ 的一些 Fourier 系数大小的范围.

引理 3.4 若 $k = 2, 3$, 则

$$0.9297 < \widehat{\zeta}(2) \leqslant 1, \quad 0.8441 < \widehat{\zeta}(3) \leqslant 1. \quad (3.12)$$

证明 设 $\widehat{\zeta}(1) = \gamma_1$, $\widehat{\zeta}(2) = \gamma_2$, $\widehat{\zeta}(3) = \gamma_3$, 则由 $\zeta \in \text{Prob}(\mathbb{T})$ 以及引理 2.1 可知

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & 1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1 \end{bmatrix}$$

是半正定的, 因此

$$\det(A_1) = (\gamma_2 - 1)(-\gamma_2 + 2\gamma_1^2 - 1) \geq 0.$$

由引理 3.3 可知 $0.9822 < \gamma_1 \leq 1$, 于是

$$1 \geq \gamma_2 \geq 2\gamma_1^2 - 1 > 0.9297,$$

即 (3.12) 的第一个式子成立.

又由引理 2.1 可知,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & 1 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1 & \gamma_1 \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 & 1 \end{bmatrix}$$

是半正定的, 故

$$\begin{aligned} \det(A_2) &= ((-\gamma_1 - 1)\gamma_3 + \gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1^2 - \gamma_1 - 1) \\ &\quad \times ((-\gamma_1 + 1)\gamma_3 + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1^2 + \gamma_1 - 1) \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

若 $\gamma_1 = 1$, 令 δ_1 为 $1 \in \mathbb{T}$ 时的 Dirac 概率测度, 由文献 [14, 推论 3.6] 的证明可知, δ_1 是 $\mathbb{T}$ 上的满足第一个系数为 1 的概率测度, 因此必有 $\zeta = \delta_1 = \widehat{\zeta}(1) = 1$, 即 (3.12) 成立.

若 $\gamma_1 < 1$, 取

$$\gamma'_3 = \frac{\gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1^2 - \gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}, \quad \gamma''_3 = \frac{\gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1^2 + \gamma_1 - 1}{\gamma_1 - 1},$$

则 γ_3 应介于 γ'_3 与 γ''_3 之间. 又因 $0.9822 < \gamma_1 < 1$ 和 $0.9297 < \gamma_2 \leq 1$, 故

$$\gamma'_3 = \frac{(\gamma_2 + \gamma_1)^2}{\gamma_1 + 1} - 1 > \frac{(0.9297 + \gamma_1)^2}{\gamma_1 + 1} - 1 > 0.8441.$$

当 $\gamma_2 \geq \gamma_1$ 时,

$$\gamma''_3 = 1 - \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)^2}{1 - \gamma_1} \geq 1 - \frac{(1 - \gamma_1)^2}{1 - \gamma_1} = \gamma_1 > 0.9822;$$

当 $\gamma_2 < \gamma_1$ 时, 由 $\gamma_2 \geq 2\gamma_1^2 - 1$ 可得

$$\gamma''_3 = 1 - \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2}{1 - \gamma_1} \geq 1 - \frac{(\gamma_1 - 2\gamma_1^2 + 1)^2}{1 - \gamma_1} = 1 - (2\gamma_1 + 1)^2(1 - \gamma_1) > 0.8441,$$

即 (3.12) 的第二个式子也成立. 从而引理 3.4 得证. $\square$

4 主要结论的证明

本节利用引理 2.1 的结论, 从 (3.1) 和 (3.2) 出发, 推导出矛盾, 从而证明定理 1.3.

4.1 概率测度 μ 的性质

首先给出概率测度 μ 的基本性质. 由 (3.7) 和引理 3.3 可得

$$0.426768 < \alpha < 0.434468. \quad (4.1)$$

若记

$$\beta := \sqrt{\frac{\alpha + \varepsilon}{2 + \alpha + \varepsilon}},$$

则由 (4.1) 可得

$$0.422451 < \beta < 0.425506, \quad (4.2)$$

又由 (3.8) 变形可得

$$\mu * \bar{\mu} = (1 - \beta^2)\nu + \beta^2\zeta. \quad (4.3)$$

注意到 $\nu, \zeta \in \text{Prob}(\mathbb{T})$, 而且由 (3.5) 和 (3.8) 可知 $0 \leq \zeta \leq 1$, 故不妨设

$$\mu = (1 - \beta)\eta + \beta\zeta^{\frac{1}{2}}, \quad (4.4)$$

其中 $\eta \in \text{Prob}(\mathbb{T})$. 于是由 (4.4) 可得

$$\mu * \bar{\mu} = (1 - \beta)^2(\eta * \bar{\eta}) + \beta(1 - \beta)\zeta^{\frac{1}{2}}(\eta + \bar{\eta}) + \beta^2\zeta. \quad (4.5)$$

再由 (4.3) 和 (4.5) 可得

$$(1 - \beta)|\eta|^2 + 2\beta\zeta^{\frac{1}{2}}\text{Re}(\eta) - (1 + \beta)\nu = 0, \quad (4.6)$$

这里 $\text{Re}(\eta)$ 表示 η 的实部.

4.2 η 的估计

本小节利用引理 2.1 估计 η 的各级 Fourier 系数的大小.

首先考虑 $\eta(1)$. 由 (4.4) 可得

$$\hat{\mu}(1) = (1 - \beta)\hat{\eta}(1) + \beta\hat{\zeta}(1)^{\frac{1}{2}}.$$

又由引理 3.3 可知 $0.9822 < \hat{\zeta}(1) \leq 1$. 注意到 $\hat{\nu}(1) = \frac{\sin \theta}{\theta} < 0$, 故由引理 3.2、(3.11) 和 (4.2) 可得

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(1) &= \frac{\hat{\mu}(1) - \beta\hat{\zeta}(1)^{\frac{1}{2}}}{1 - \beta} \\ &= \frac{\sqrt{(1 - \beta^2)\hat{\nu}(1) + \beta^2\hat{\zeta}(1) - \beta\hat{\zeta}(1)^{\frac{1}{2}}}}{1 - \beta} \\ &= \frac{(1 + \beta)\hat{\nu}(1)}{\sqrt{(1 - \beta^2)\hat{\nu}(1) + \beta^2\hat{\zeta}(1) + \beta\hat{\zeta}(1)^{\frac{1}{2}}}} \\ &< \frac{(1 + \beta)\hat{\nu}(1)}{\sqrt{(1 - \beta^2)\hat{\nu}(1) + \beta^2 + \beta}} \end{aligned}$$

$$< -0.6429,$$

以及

$$\begin{aligned}\widehat{\eta}(1) &> \frac{(1+\beta)\widehat{\nu}(1)}{\sqrt{(1-\beta^2)\widehat{\nu}(1)+0.9822\beta^2+0.9822^{\frac{1}{2}}\beta}} \\ &= \frac{\widehat{\mu}(1)-0.9822^{\frac{1}{2}}\beta}{1-\beta} \\ &= \frac{\widehat{\mu}(1)-0.9822^{\frac{1}{2}}}{1-\beta} + 0.9822^{\frac{1}{2}} \\ &> -0.7341.\end{aligned}$$

从而

$$-0.7341 < \widehat{\eta}(1) < -0.6429. \quad (4.7)$$

令 $\widehat{\eta}(1) = \delta$, 以及

$$\operatorname{Re}(\widehat{\eta}(2)) = x, \quad \operatorname{Re}(\widehat{\eta}(3)) = y, \quad \operatorname{Re}(\widehat{\eta}(4)) = z, \quad \operatorname{Re}(\widehat{\eta}(5)) = w.$$

下面利用引理 2.1, 考虑矩阵

$$M(i, j) := \operatorname{Re}(\widehat{\eta}(j-i))$$

的半正定性, 以此来估计 $\operatorname{Re}(\widehat{\eta}(2))$ 、 $\operatorname{Re}(\widehat{\eta}(3))$ 、 $\operatorname{Re}(\widehat{\eta}(4))$ 和 $\operatorname{Re}(\widehat{\eta}(5))$ 的大小.

4.2.1 $\operatorname{Re}(\widehat{\eta}(2))$ 的估计

由引理 2.1 可知

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & \delta & x \\ \delta & 1 & \delta \\ x & \delta & 1 \end{bmatrix}$$

是半正定的, 因此

$$\det(M_1) = (x-1)(-x+2\delta^2-1) \geq 0.$$

故由 (4.7) 可得

$$-0.1734 < 2\delta^2 - 1 \leq x \leq 1. \quad (4.8)$$

又由 (4.6) 可得

$$(1-\beta)|\eta(2)|^2 + 2\beta\widehat{\zeta}(2)^{\frac{1}{2}}\operatorname{Re}(\eta(2)) - (1+\beta)\widehat{\nu}(2) = 0,$$

则

$$(1-\beta)x^2 + 2\beta\gamma_2^{\frac{1}{2}}x - (1+\beta)\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \leq 0. \quad (4.9)$$

因此, x 应介于 x_1 与 x_2 之间, 其中

$$x_1 = \frac{-\beta \gamma_2^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\beta^2 \gamma_2 + (1 - \beta^2) \frac{\sin 2\theta}{2\theta}}}{1 - \beta},$$

$$x_2 = \frac{-\beta \gamma_2^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\beta^2 \gamma_2 + (1 - \beta^2) \frac{\sin 2\theta}{2\theta}}}{1 - \beta},$$

且 $x_1 < x_2$. 故由 $\frac{\sin 2\theta}{2\theta} = 0.0471904 \cdots > 0$ 以及引理 3.4 和 (4.2) 可得

$$\begin{aligned} x &\leq x_2 \\ &= \frac{(1 + \beta) \frac{\sin 2\theta}{2\theta}}{\beta \gamma_2^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\beta^2 \gamma_2 + (1 - \beta^2) \frac{\sin 2\theta}{2\theta}}} \\ &< \frac{(1 + \beta) \frac{\sin 2\theta}{2\theta}}{0.9297^{\frac{1}{2}} \beta + \sqrt{0.9297 \beta^2 + (1 - \beta^2) \frac{\sin 2\theta}{2\theta}}} \\ &< 0.07808. \end{aligned} \quad (4.10)$$

再由 (4.8) 和 (4.10) 可得

$$-0.1734 < 2\delta^2 - 1 \leq x < 0.07808. \quad (4.11)$$

4.2.2 $\operatorname{Re}(\hat{\eta}(3))$ 的估计

因

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & \delta & x & y \\ \delta & 1 & \delta & x \\ x & \delta & 1 & \delta \\ y & x & \delta & 1 \end{bmatrix}$$

是半正定的, 故

$$\begin{aligned} \det(M_2) &= ((-\delta - 1)y + x^2 + 2\delta x + \delta^2 - \delta - 1) \\ &\quad \times ((-\delta + 1)y + x^2 - 2\delta x + \delta^2 + \delta - 1) \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

注意到 $-\delta - 1 < 0$, $-\delta + 1 > 0$, 故可设

$$Y_1 = \frac{x^2 + 2\delta x + \delta^2 - \delta - 1}{\delta + 1}, \quad Y_2 = \frac{x^2 - 2\delta x + \delta^2 + \delta - 1}{\delta - 1},$$

从而由 (4.12) 可知, y 应介于 Y_1 与 Y_2 之间. 又 $-0.7341 < \delta < -0.6429$, 故

$$Y_1 = \frac{(x + \delta)^2}{\delta + 1} - 1 > \frac{(0.07808 + \delta)^2}{\delta + 1} - 1 > \frac{(0.07808 - 0.6429)^2}{-0.6429 + 1} - 1 > -0.1078.$$

再由 $x > \delta$ 可得

$$Y_2 = 1 - \frac{(x - \delta)^2}{1 - \delta} > 1 - \frac{(0.07808 - \delta)^2}{1 - \delta} > 1 - \frac{(0.07808 + 0.7341)^2}{1 + 0.7341} > 0.6196.$$

于是

$$y \geq \min \left\{ \frac{(x + \delta)^2}{\delta + 1} - 1, 0.6196 \right\} > -0.1078. \quad (4.13)$$

又由 (4.6) 可得

$$(1 - \beta)y^2 + 2\beta\gamma_3^{\frac{1}{2}}y - (1 + \beta)\frac{\sin 3\theta}{3\theta} \leq 0, \quad (4.14)$$

故 y 应介于 y_1 与 y_2 之间, 其中

$$y_1 = \frac{-\beta\gamma_3^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\beta^2\gamma_3 + (1 - \beta^2)\frac{\sin 3\theta}{3\theta}}}{1 - \beta},$$

$$y_2 = \frac{-\beta\gamma_3^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\beta^2\gamma_3 + (1 - \beta^2)\frac{\sin 3\theta}{3\theta}}}{1 - \beta},$$

且 $y_1 < y_2$. 注意到 $\frac{\sin 3\theta}{3\theta} = 0.0587427 \dots > 0$, 故由引理 3.4 和 (4.2) 可得

$$\begin{aligned} y &\leq y_2 \\ &= \frac{(1 + \beta)\frac{\sin 3\theta}{3\theta}}{\beta\gamma_3^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\beta^2\gamma_3 + (1 - \beta^2)\frac{\sin 3\theta}{3\theta}}} \\ &< \frac{(1 + \beta)\frac{\sin 3\theta}{3\theta}}{0.8441^{\frac{1}{2}}\beta + \sqrt{0.8441\beta^2 + (1 - \beta^2)\frac{\sin 3\theta}{3\theta}}} \\ &< 0.1002. \end{aligned} \quad (4.15)$$

于是由 (4.13) 和 (4.15) 可得

$$-0.1078 < \frac{(x + \delta)^2}{\delta + 1} - 1 \leq y < 0.1002. \quad (4.16)$$

4.2.3 $\text{Re}(\hat{\eta}(4))$ 的估计

由

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & \delta & x & y & z \\ \delta & 1 & \delta & x & y \\ x & \delta & 1 & \delta & x \\ y & x & \delta & 1 & \delta \\ z & y & x & \delta & 1 \end{bmatrix}$$

是半正定的可知

$$\det(M_3) = -((1 - x)z + y^2 + 2\delta y + \delta^2 + x - 1)$$

$$\begin{aligned} & \times ((x - 2\delta^2 + 1)z + 4\delta^2x + 4\delta xy - 2x^3 - 3\delta^2 - 2\delta y - 2x^2 - y^2 + x + 1) \\ & \geq 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

由 (4.11) 可知 $x \geq 2\delta^2 - 1$, 下面分两种情形讨论. 若 $x = 2\delta^2 - 1$, 则由 (4.17) 可得

$$\det(M_3) = ((1 - x)z + y^2 + 2\delta y + \delta^2 + x - 1)(4\delta^3 - 3\delta - y)^2 \geq 0.$$

又因 $1 - x > 0$, 故

$$z \geq \frac{y^2 + 2\delta y + \delta^2 + x - 1}{x - 1} = \frac{(y + \delta)^2}{2\delta^2 - 2} + 1 > \frac{(-0.1078 - 0.7341)^2}{2 \times 0.7341^2 - 2} + 1 > 0.2314.$$

若 $x > 2\delta^2 - 1$, 由于 $x - 1 < 0$, 可令

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{y^2 + 2\delta y + \delta^2 + x - 1}{x - 1}, \\ Z_2 &= \frac{4\delta^2x + 4\delta xy - 2x^3 - 3\delta^2 - 2\delta y - 2x^2 - y^2 + x + 1}{-x + 2\delta^2 - 1}, \end{aligned}$$

则由 (4.17) 可得 z 应介于 Z_1 与 Z_2 之间. 对于 Z_1 , 有

$$Z_1 = \frac{(y + \delta)^2}{x - 1} + 1 > \frac{(-0.1078 - 0.7341)^2}{0.07808 - 1} + 1 > 0.2311.$$

对于 Z_2 , 可令 $x = 2\delta^2 - 1 + \epsilon$, 则由 (4.7) 和 (4.11) 可得

$$0 < \epsilon = x - 2\delta^2 + 1 < 0.07808 - 2 \times (-0.6429)^2 + 1 < 0.2520,$$

以及

$$Z_2 := Z_2(\delta, \epsilon, y) = \frac{(4\delta^3 - 3\delta - y)^2}{\epsilon} + \epsilon(2\epsilon + 12\delta^2 - 4) + 24\delta^4 - 20\delta^2 - 4\delta y + 1.$$

从而

$$\begin{aligned} Z_2(\delta, \epsilon, y)'_{\delta} &= \frac{1}{\epsilon}(96\delta^5 + 96\epsilon\delta^3 + 24\epsilon^2\delta - 96\delta^3 - 24\delta^2y - 40\epsilon\delta - 4\epsilon y + 18\delta + 6y) \\ &= \frac{1}{\epsilon}Z(\delta, \epsilon, y). \end{aligned}$$

故由 (4.7) 可知 $Z(\delta, \epsilon, y)$ 是关于 y 的单调递减函数, 从而由 (4.7)、(4.11) 和 (4.16) 可得

$$\begin{aligned} Z(\delta, \epsilon, y) &> Z(\delta, \epsilon, 0.1002) \\ &= 96\delta^5 + 96\epsilon\delta^3 + 24\epsilon^2\delta - 96\delta^3 - 2.4048\delta^2 - 40\epsilon\delta - 0.4008\epsilon + 18\delta + 0.6012 \\ &= (24(2\delta^2 + \epsilon - 1)^2 + 8\epsilon - 6 - 2.4048\delta)\delta - 0.4008\epsilon + 0.6012 \\ &> (24 \times (2 \times 0.7341^2 + 0.2520 - 1)^2 + 8 \times 0.2520 - 6 - 2.4048 \times (-0.7341)) \times (-0.7341) \\ &\quad - 0.4008 \times 0.2520 + 0.6012 \\ &> 0.2125 \\ &> 0. \end{aligned}$$

又 $\epsilon > 0$, 故

$$Z_2(\delta, \epsilon, y)'_{\delta} = \frac{1}{\epsilon} Z(\delta, \epsilon, y) > 0,$$

且

$$\begin{aligned} Z_2(\delta, \epsilon, y)'_{\epsilon} &= -\frac{(4\delta^3 - 3\delta - y)^2}{\epsilon^2} + 4\epsilon + 12\delta^2 - 4 < -\frac{0.27}{0.2520^2} + 3.4869 < 0, \\ Z_2(\delta, \epsilon, y)'_y &= -\frac{1}{\epsilon}(8\delta^3 + 4\delta\epsilon - 6\delta - 2y) < -\frac{1}{\epsilon}(8\delta^3 - 4.9\delta - 0.21) < -\frac{1}{\epsilon} \cdot 0.2222 < 0. \end{aligned}$$

因此, $Z_2 = Z_2(\delta, \epsilon, y)$ 是关于 δ 的单调递增函数, 是关于 ϵ 和 y 的单调递减函数.

下面讨论 $Z_2 = Z_2(\delta, \epsilon, y)$ 的下界. 容易证明, 若 $-0.7341 < \delta \leq -0.68$, 则 $0 < \epsilon = x - 2\delta^2 + 1 \leq 0.15328$, 从而

$$Z_2 = Z_2(\delta, \epsilon, y) > Z_2(-0.7341, 0.15328, 0.1002) > -0.3269.$$

若 $-0.68 < \delta \leq -0.653$, 则 $0 < \epsilon \leq 0.225262$, 从而

$$Z_2 = Z_2(\delta, \epsilon, y) > Z_2(-0.68, 0.225262, 0.1002) > -0.3283.$$

若 $-0.653 < \delta \leq -0.6427$, 则 $0 < \epsilon < 0.25196$, 从而

$$Z_2 = Z_2(\delta, \epsilon, y) > Z_2(-0.653, 0.25196, 0.1002) > -0.2913.$$

于是, 总有

$$Z_2 > -0.3283.$$

因此,

$$z \geq \min\{0.2311, Z_1, Z_2\} > -0.3283. \quad (4.18)$$

另一方面, 由 (4.6) 可得

$$(1 - \beta)z^2 + 2\beta\gamma_4^{\frac{1}{2}}z - (1 + \beta)\frac{\sin 4\theta}{4\theta} \leq 0, \quad (4.19)$$

即 z 应介于 z_1 与 z_2 之间, 其中

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-\beta\gamma_4^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\beta^2\gamma_4 + (1 - \beta^2)\frac{\sin 4\theta}{4\theta}}}{1 - \beta}, \\ z_2 &= \frac{-\beta\gamma_4^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\beta^2\gamma_4 + (1 - \beta^2)\frac{\sin 4\theta}{4\theta}}}{1 - \beta}, \end{aligned}$$

且 $z_1 < z_2$. 由于 $\gamma_4 \leq 1$, $\frac{\sin 4\theta}{4\theta} = -0.0427365 \dots < 0$, 故由 (4.2) 可得

$$z \leq z_2 = \frac{(1 + \beta)\frac{\sin 4\theta}{4\theta}}{\beta\gamma_4^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\beta^2\gamma_4 + (1 - \beta^2)\frac{\sin 4\theta}{4\theta}}} \leq \frac{(1 + \beta)\frac{\sin 4\theta}{4\theta}}{\beta + \sqrt{\beta^2 + (1 - \beta^2)\frac{\sin 4\theta}{4\theta}}} < -0.07542. \quad (4.20)$$

从而由 (4.18) 和 (4.20) 可得

$$-0.3283 < z < -0.07542. \quad (4.21)$$

4.2.4 $\operatorname{Re}(\hat{\eta}(5))$ 的估计

由引理 2.1 可知

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & \delta & x & y & z & w \\ \delta & 1 & \delta & x & y & z \\ x & \delta & 1 & \delta & x & y \\ y & x & \delta & 1 & \delta & x \\ z & y & x & \delta & 1 & \delta \\ w & z & y & x & \delta & 1 \end{bmatrix}$$

是半正定的, 因此

$$\begin{aligned} \det(M_4) &= -((\delta^2 - 2\delta x - \delta y + x^2 + \delta + y - 1)w + \delta^3 + 2\delta^2 x - 2\delta^2 y - 2\delta^2 z \\ &\quad - 2\delta x^2 + 2\delta xy - 2\delta xz + 2\delta yz + \delta z^2 + x^2 y + 2x^2 z - 2xy^2 - 2xyz + y^3 \\ &\quad - 2\delta^2 + 2\delta x + \delta y + 2\delta z - 2x^2 + 2xy - y^2 - z^2 - \delta - y + 1) \\ &\quad \times ((\delta^2 + 2\delta x - \delta y + x^2 - \delta - y - 1)w + \delta^3 - 2\delta^2 x - 2\delta^2 y + 2\delta^2 z \\ &\quad - 2\delta x^2 - 2\delta xy - 2\delta xz - 2\delta yz + \delta z^2 + x^2 y - 2x^2 z + 2xy^2 - 2xyz + y^3 \\ &\quad + 2\delta^2 + 2\delta x - \delta y + 2\delta z + 2x^2 + 2xy + y^2 + z^2 - \delta - y - 1) \\ &=: -((\delta^2 - 2\delta x - \delta y + x^2 + \delta + y - 1)w + A) \\ &\quad \times ((\delta^2 + 2\delta x - \delta y + x^2 - \delta - y - 1)w + B) \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

现设

$$\begin{aligned} S_1 &:= S_1(\delta, x, y) = \delta^2 - 2\delta x - \delta y + x^2 + \delta + y - 1 = (\delta - x)^2 - (1 - \delta)(1 - y), \\ S_2 &:= S_2(\delta, x, y) = \delta^2 + 2\delta x - \delta y + x^2 - \delta - y - 1 = (\delta + x)^2 - (1 + \delta)(1 + y). \end{aligned}$$

对于 S_1 , 注意到 $x \geq 2\delta^2 - 1$, 且 $S_1(\delta, x, y)$ 是 x 和 y 的增函数, 故由 (4.11) 和 (4.16) 可得

$$S_1 > S_1(\delta, 2\delta^2 - 1, -0.1078) = 4\delta^4 - 4\delta^3 - 3\delta^2 + 3.1078\delta - 0.1078 > -1.6$$

以及

$$S_1 < S_1(\delta, 0.07808, 0.1002) = (\delta + 0.37182)^2 - 1.031953626 < -0.9,$$

即

$$-1.6 < S_1 < -0.9. \tag{4.23}$$

对于 S_2 , 如果 $S_2 = \delta^2 + 2\delta x - \delta y + x^2 - \delta - y - 1 = 0$, 即

$$y = \frac{\delta^2 + 2\delta x + x^2 - \delta - 1}{\delta + 1},$$

则由 (4.22) 可得

$$\begin{aligned}\det(M_4) &= -((\delta^2 - 2\delta x - \delta y + x^2 + \delta + y - 1)w + A) \cdot B \\ &= -(S_1 w + A) \cdot \frac{(4\delta^2 x - \delta^2 z + 4\delta x^2 + x^3 - 3\delta^2 - 2\delta z + x^2 - 2\delta - x - z)^2}{(\delta + 1)^3} \\ &\geq 0.\end{aligned}\quad (4.24)$$

又因 $\delta + 1 > 0.26 > 0$, 故由 (4.24) 可得 $S_1 w + A \leq 0$. 再由于 $S_1 < 0$, 故

$$w \geq -\frac{A}{S_1}.\quad (4.25)$$

现讨论 A 的单调性. 注意到 $A(\delta, x, y, z)$ 对 δ 的导函数

$$\begin{aligned}A'_\delta &:= A_1(\delta, x, y, z) \\ &= 3\delta^2 + 4\delta x - 4\delta y - 4\delta z - 2x^2 + 2xy - 2xz + 2yz + z^2 - 4\delta + 2x + y + 2z - 1.\end{aligned}$$

故由 (4.7)、(4.11)、(4.16) 和 (4.21) 可得

$$\begin{aligned}A_1(\delta, x, y, z)'_\delta &= 6\delta + 4x - 4y - 4z - 4 < 0, \\ A_1(\delta, x, y, z)'_y &= -4\delta + 2x + 2z + 1 > 0, \\ A_1(\delta, x, y, z)'_z &= -4\delta - 2x + 2y + 2z + 2 > 0,\end{aligned}$$

从而 $A_1(\delta, x, y, z)$ 是关于 δ 的减函数, 是关于 y 的增函数, 是关于 z 的增函数, 因此

$$\begin{aligned}A'_\delta &> A_1(-0.64, x, -0.11, -0.33) \\ &= -2x^2 - 0.12x + 1.0739 \\ &= -2(x + 0.03)^2 + 1.0757 \\ &> 1.0345 \\ &> 0.\end{aligned}\quad (4.26)$$

类似地, 由 $A(\delta, x, y, z)$ 对 x 的导函数

$$A'_x := A_2(\delta, x, y, z) = 2\delta^2 - 4\delta x + 2\delta y - 2\delta z + 2xy + 4xz - 2y^2 - 2yz + 2\delta - 4x + 2y,$$

以及

$$A_2(\delta, x, y, z)'_x = -4\delta + 2y + 4z - 4 < 0, \quad A_2(\delta, x, y, z)'_z = -2\delta + 4x - 2y > 0,$$

可知 $A_2(\delta, x, y, z)$ 是关于 x 的减函数, 是关于 z 的增函数, 从而

$$A'_x < A_2(\delta, -0.18, y, -0.07) = 2\delta(\delta + y + 1.49) - 2(y - 0.445)^2 + 1.6645 < -0.21 < 0.\quad (4.27)$$

又因为

$$A'_y := A_3(\delta, x, y, z) = -2\delta^2 + 2\delta x + 2\delta z + x^2 - 4xy - 2xz + 3y^2 + \delta + 2x - 2y - 1,$$

以及

$$\begin{aligned} A_3(\delta, x, y, z)'_{\delta} &= -4\delta + 2x + 2z + 1 > 0, \\ A_3(\delta, x, y, z)'_y &= -4x + 6y - 2 < 0, \\ A_3(\delta, x, y, z)'_z &= 2\delta - 2x < 0, \end{aligned}$$

故 $A_3(\delta, x, y, z)$ 是关于 δ 的增函数, 是关于 y 和 z 的减函数, 从而

$$A'_y < A_3(-0.64, x, -0.11, -0.33) = x^2 + 1.82x - 1.7805 = (x + 0.91)^2 - 2.6086 < 0. \quad (4.28)$$

再由

$$A'_z := A_4(r, x, y, z) = -2\delta^2 - 2rx + 2ry + 2rz + 2x^2 - 2xy + 2\delta - 2z,$$

以及

$$\begin{aligned} A_4(\delta, x, y, z)'_{\delta} &= -4\delta - 2x + 2y + 2z + 2 > 0, \\ A_4(\delta, x, y, z)'_x &= -2\delta + 4x - 2y > 0, \\ A_4(\delta, x, y, z)'_y &= 2\delta - 2x < 0, \\ A_4(\delta, x, y, z)'_z &= 2\delta - 2 < 0, \end{aligned}$$

可知 $A_4(\delta, x, y, z)$ 是关于 δ 和 x 的增函数, 是关于 y 和 z 的减函数, 从而

$$A'_z < A_4(-0.64, 0.08, -0.11, -0.33) = -0.7432 < 0. \quad (4.29)$$

于是由 (4.26)–(4.29) 可知 A 是关于 δ 的增函数, 是关于 x 、 y 和 z 的减函数. 从而由 (4.7)、(4.11)、(4.16) 和 (4.21) 可得

$$A = A(\delta, x, y, z) > A(-0.7341, 0.07808, 0.1002, -0.07542) > 0.124. \quad (4.30)$$

因此由 (4.23)、(4.25) 和 (4.30) 可得

$$w \geq -\frac{A}{S_1} > -\frac{0.124}{-1.6} > 0.07. \quad (4.31)$$

若 $S_2 = \delta^2 + 2\delta x - \delta y + x^2 - \delta - y - 1 \neq 0$, 则由 (4.16) 可得 $y > \frac{(x+\delta)^2}{\delta+1} - 1$, 从而

$$S_2 = -(\delta + 1)y + \delta^2 + 2\delta x + x^2 - \delta - 1 < 0. \quad (4.32)$$

注意到 $S_1 \neq 0$, 因此可设

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{-A}{\delta^2 - 2\delta x - \delta y + x^2 + \delta + y - 1} = -\frac{A}{S_1}, \\ W_2 &= \frac{-B}{\delta^2 + 2\delta x - \delta y + x^2 - \delta - y - 1} = -\frac{B}{S_2}. \end{aligned}$$

因而由 (4.22) 可知 w 应介于 W_1 与 W_2 之间.

下面估计 W_1 和 W_2 的范围.

先讨论 W_1 的大小, 由 (4.26)–(4.29) 可得, $A = A(\delta, x, y, z)$ 是关于 δ 的增函数, 是关于 x 、 y 和 z 的减函数, 因此由 (4.30) 可得 $A > 0.124$, 故由 $S_1 < -1.6$, 类似可得

$$W_1 = -\frac{A}{S_1} > -\frac{0.124}{-1.6} > 0.07. \quad (4.33)$$

接着来计算 W_2 的范围. 与 $A = A(\delta, x, y, z)$ 的关于 δ 、 x 、 y 和 z 的单调性的讨论类似, 基于 (4.7)、(4.11)、(4.16) 和 (4.21), 直接计算 $B := B(\delta, x, y, z)$ 关于 δ 、 x 、 y 和 z 的导函数分别满足

$$\begin{aligned} B'_\delta &:= B_1(\delta, x, y, z) < B_1(\delta, 0.079, 0.11, z) \\ &= \delta(3\delta + 4z + 3.244) + (z + 0.811)^2 - 1.639583 < 0, \\ B'_x &:= B_2(\delta, x, y, z) < B_2(-0.64, 0.079, 0.11, -0.075) < 0, \\ B'_y &:= B_3(\delta, x, y, z) < B_3(-0.64, 0.079, 0.11, -0.075) < 0, \\ B'_z &:= B_4(\delta, x, y, z) < B_4(\delta, 0.079, 0.11, -0.075) = 2(\delta + 0.368)^2 - 0.45071 < 0. \end{aligned}$$

因此, $B = B(\delta, x, y, z)$ 是关于 δ 、 x 、 y 和 z 的减函数. 于是, 由 (4.11)、(4.16) 和 (4.22) 可得

$$B = B(\delta, x, y, z) > B(-0.6427, 0.07808, 0.1002, -0.07542) > 0.0003485 > 0,$$

从而由 (4.32) 可知

$$W_2 = -\frac{B}{S_2} > 0. \quad (4.34)$$

于是, 由 (4.33) 和 (4.34) 可得

$$w > 0. \quad (4.35)$$

另一方面, 由 (4.6) 可得

$$(1 - \beta)w^2 + 2\beta\gamma_5^{\frac{1}{2}}w - (1 + \beta)\frac{\sin 5\theta}{5\theta} \leq 0. \quad (4.36)$$

故 w 应介于 w_1 与 w_2 之间, 其中

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{-\beta\gamma_5^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\beta^2\gamma_5 + (1 - \beta^2)\frac{\sin 5\theta}{5\theta}}}{1 - \beta}, \\ w_2 &= \frac{-\beta\gamma_5^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\beta^2\gamma_5 + (1 - \beta^2)\frac{\sin 5\theta}{5\theta}}}{1 - \beta}, \end{aligned}$$

且 $w_1 < w_2$. 因为 $\gamma_5 \leq 1$ 和 $\frac{\sin 5\theta}{5\theta} = -0.0203915 \cdots < 0$, 故由 (4.2) 可得

$$w \leq w_2 = \frac{(1 + \beta)\frac{\sin 5\theta}{5\theta}}{\beta\gamma_5^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\beta^2\gamma_5 + (1 - \beta^2)\frac{\sin 5\theta}{5\theta}}} \leq \frac{(1 + \beta)\frac{\sin 5\theta}{5\theta}}{\beta + \sqrt{\beta^2 + (1 - \beta^2)\frac{\sin 5\theta}{5\theta}}} < -0.03498. \quad (4.37)$$

此与 (4.35) 矛盾.

因此, 定理 1.3 得证.

5 结论与展望

基于定理 1.3 的证明, 我们认为通过进一步研究 η 的更多的 Fourier 系数的性质, 可能会进一步改进 d^* 的下界.

1948 年, Erdős 和 Gál^[17] 研究了类似的问题, 这属于 Brauer 型差基问题^[17,18]. 若集合 $A_0 \subseteq \mathbb{Z}$ 中的元素限定为 $0 \leq a \leq n$, 且 $A_0 - A_0 \supseteq [n]$, 则 A_0 称为关于 n 的限制差基 (restricted difference basis with respect to n). 同样, 设 $|A_0|$ 的最小值为 $D_0(n)$, 且

$$d_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_0^2}{n}.$$

Erdős 和 Gál^[17] 证明了 d_0 的存在性, 并给出了 d_0 的上下界, 以及证明了

$$d_0 \geq d^*. \quad (5.1)$$

因此由 (5.1) 和定理 1.3 可得

$$d_0 > 2.4421. \quad (5.2)$$

需要进一步研究的问题是:

问题 5.1 d_0 的值是多少?

致谢 作者衷心感谢审稿专家的宝贵意见和良好建议.

参考文献

- 1 Rédei L, Rényi A. On the representation of the numbers $1, 2, \dots, n$ by means of differences. Mat Sb, 1949, 24(66): 385–389
- 2 Golomb S W. How to number a graph. In: Graph Theory and Computing. New York: Academic Press, 1972, 23–37
- 3 Graham R L, Sloane N J A. On additive bases and harmonious graphs. SIAM J Algebraic Discrete Methods, 1980, 1: 382–404
- 4 Ellis D, Kalai G, Narayanan B. On symmetric intersecting families. European J Combin, 2020, 86: 103094
- 5 Haykin S, Reilly J P, Kezys V, et al. Some aspects of array signal processing. IEE Proc-F, 1992, 139: 1–26
- 6 Linebarger D A, Sudborough I H, Tollis I G. Difference bases and sparse sensor arrays. IEEE Trans Inform Theory, 1993, 39: 716–721
- 7 Moffet A. Minimum-redundancy linear arrays. IEEE Trans Antennas and Propagation, 1968, 16: 172–175
- 8 Garciano A D, Hiramane Y, Yokonuma T. On relative difference sets in dihedral groups. Des Codes Cryptogr, 2006, 39: 51–63
- 9 Leech J. On the representation of $1, 2, \dots, n$ by differences. J Lond Math Soc (2), 1956, 31: 160–169
- 10 Golay M J E. Notes on the representation of $1, 2, \dots, n$ by differences. J Lond Math Soc (2), 1972, 4: 729–734
- 11 Wichmann B. A note on restricted difference bases. J Lond Math Soc (2), 1963, 38: 465–466
- 12 Wild P. Difference basis systems. Discrete Math, 1987, 63: 81–90
- 13 Banakh T, Gavrylkiv V. Difference bases in dihedral groups. Int J Group Theory, 2019, 8: 43–50
- 14 Bernshteyn A, Tait M. Improved lower bound for difference bases. J Number Theory, 2019, 205: 50–58
- 15 Kechris A S. Classical Descriptive Set Theory. New York: Springer-Verlag, 1995
- 16 Rudin W. Fourier Analysis on Groups. New York: John Wiley & Sons, 1990
- 17 Erdős P, Gál I S. On the representation of $1, 2, \dots, N$ by differences. Nederl Akad Wetensch Proc, 1948, 51: 1155–1158
- 18 Brauer A. A problem of additive number theory and its application in electrical engineering. J Elisha Mitchell Sci Soc, 1945, 61: 55–66

The lower bound for difference bases

Shichun Yang & Qunying Liao

Abstract A set $A \subseteq \mathbb{Z}$ is called a difference basis with respect to n if $A - A \supseteq \{1, 2, \dots, n\}$. Finding the minimum size of a difference basis, while it is a natural question in combinatorial number theory in its own right, also has applications to graceful labelings of graphs, to symmetric intersecting families of sets, and to signal processing. It is closely and deeply related to the theory of cryptography and coding theory. Applying the method of Fourier analysis, we discuss the properties of higher order Fourier coefficients of some parameters, further improve the lower bound of the difference basis, and therefore improve the related results of Rédei and Rényi (1949), Leech (1956), and Bernshteyn and Tait (2019).

Keywords difference basis, Fourier analysis, estimate, lower bound

MSC(2020) 11B13, 11B75, 05D05

doi: 10.1360/SSM-2020-0323