文章编号: 1009-6744(2020)-03-0125-05 **中图分类号:** U491 **文献标志码:** A
DOI:10.16097/j.cnki.1009-6744.2020.03.019

ATIS作用下弹性需求混合交通均衡的效率损失

余孝军*,刘作志,舒亚东
(贵州财经大学 数统学院,贵阳 550025)

摘 要: 在ATIS用户和利己用户组成的交通网络中,利己用户遵循用户均衡原则选择出行路径,其目的是最小化自身出行成本;先进出行者信息系统(ATIS)用户遵循系统最优原则选择出行路径,其目的是最小化系统总出行成本.本文基于ATIS用户和利己用户路径选择原则的异质性,对弹性需求下该类混合交通均衡分配的效率损失进行探讨.构建弹性需求下该类混合交通均衡分配的变分不等式模型,界定其效率损失上界.结果表明,效率损失上界与用户均衡时社会总收益与社会总剩余之比相关,还与用户均衡时路段上ATIS用户的流量与总流量之比有关.

关键词: 城市交通;效率损失;变分不等式;混合交通均衡分配;ATIS;弹性需求

Inefficiency of Mixed Traffic Equilibrium with Elastic Demand under ATIS

YU Xiao-jun, LIU Zuo-zhi, SHU Ya-dong
(School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China)

Abstract: A transportation network is associated with the selfish users and the users with Advanced Traveler Information Systems (ATIS). The selfish users select their routes comply with user equilibrium principle and try to minimize their own travel cost. The users with ATIS select their routes comply with system optimum principle and advice to minimize the total travel cost in the system. This paper investigates the inefficiency of the mixed traffic equilibrium assignment with elastic demand under ATIS and based on the user's heterogeneities on different route choice principles. A variational inequality model for the mixed traffic equilibrium assignment is proposed and the upper bound of the inefficiency derived. The results show that the upper bound of the inefficiency depends on the ratio of user benefit and the total social surplus at traffic equilibrium assignment state. It also depends on the ratio of link flow by users with ATIS and the total link flow at traffic equilibrium assignment state.

Keywords: urban traffic; inefficiency; variational inequality; mixed traffic equilibrium assignment; Advanced Traveler Information Systems (ATIS); elastic demand

0 引 言

学者们从不同方面对先进出行者信息系统(Advanced Traveler Information Systems, ATIS)进行研究.Huang等[1]评估了存在排队现象的多用户类一般交通网络中ATIS的作用.Lo等[2]提出动态交通分配问题的元胞变分不等式模型,并评估了ATIS的作用.Huang等[3]得到ATIS作用下的多用户类多准则Logit型交通均衡分配模型.郭仁拥等[4]提出ATIS作用下的多用户类多准则随机交通均衡分配演化模型,并利用不动点定理分析了模型不动点的存在性.学者还对ATIS作用下,固定需求交通均衡行为的效率损失问题进行了研究.刘天亮等[5]探讨利己用户和ATIS用户组成的混合交通均衡效率损失上界.Huang等[6]研究ATIS作用下随机

收稿日期: 2020-02-14 **修回日期:** 2020-04-01 **录用日期:** 2020-04-04
基金项目: 国家自然科学基金/National Natural Science Foundation of China(71761005).
作者简介: 余孝军(1974-),男,湖南新邵人,教授,博士. *通信作者:xjyu-myu@163.com

用户均衡行为的效率损失问题.张俊婷等[7-8]分别考虑ATIS和道路收费共同作用下多用户类多准则混合随机均衡行为相对系统最优和随机系统最优的效率损失问题.

智能的交通个体在进行出行决策前,会根据交通现状选择是否出行,但交通网络中的出行需求并不是一个常量,而是关于出行成本的变量,常用需求函数刻画出行成本与出行需求间的关系.本文探讨ATIS作用下弹性需求混合交通均衡的效率损失问题.构建ATIS作用下弹性需求混合交通均衡分配的等价变分不等式模型,定义此均衡行为的效率损失;得到该类混合交通均衡行为的效率损失上界表达式,并给出一个简单算例.

1 ATIS作用下弹性需求混合交通均衡分配模型

1.1 符号定义

在城市交通网络 $G=(N,A)$ 中, N 为顶点集, A 为有向路段集, W 为所有OD对集合, R_w 为OD对 $w\in W$ 间的所有路径集.交通网络中的每个OD对 $w\in W$ 间存在着完全理性的利己用户 u 和配置先进出行者信息系统的ATIS用户atis.利己用户 u 追求自身效用的最大化,即最小化自身出行成本;ATIS用户atis根据接收到的信息,判断是否选择出行,一旦确定出行,则遵从系统最优原则出行. $q_w^{(\mathrm{u})}$ 为OD对 $w\in W$ 间利己用户 u 的弹性出行需求; $q_w^{(\mathrm{atis})}$ 为OD对 $w\in W$ 间ATIS用户atis的弹性出行需求; $f_{rw}^{(\mathrm{u})}$ 为利己用户 u 在路径 $r\in R_w,w\in W$ 上的流量; $f_{rw}^{(\mathrm{atis})}$ 为ATIS用户atis在路径 $r\in R_w,w\in W$ 上的流量;若路段 $a\in A$ 在路径 $r\in R_w$ 上,则 $\delta_{ar}^{(w)}=1$,否则 $\delta_{ar}^{(w)}=0$; $v_a^{(\mathrm{u})}$ 为利己用户 u 在路段 a 上的流量; $v_a^{(\mathrm{atis})}$ 为ATIS用户atis在路段 a 上的流量; v_a 为路段 a 上的总流量, $v_a=v_a^{(\mathrm{u})}+v_a^{(\mathrm{atis})}$; $\boldsymbol{v}_a$ 为路段 a 上的流量向量, $\boldsymbol{v}_a\equiv\left(v_a^{(\mathrm{u})},v_a^{(\mathrm{atis})}\right)$; $\boldsymbol{v}^{(\mathrm{u})}$ 为利己用户 u 的路段流量向量, $\boldsymbol{v}^{(\mathrm{u})}\equiv\left(v_1^{(\mathrm{u})},\cdots,v_{|A|}^{(\mathrm{u})}\right)$,其中, $|A|$ 表示网络中有向路段的数量; $\boldsymbol{v}^{(\mathrm{atis})}$ 为ATIS用户atis的路段流量向量, $\boldsymbol{v}^{(\mathrm{atis})}\equiv\left(v_1^{(\mathrm{atis})},\cdots,v_{|A|}^{(\mathrm{atis})}\right)$; $\boldsymbol{v}$ 为路段流量向量, $\boldsymbol{v}\equiv\left(v_1,\cdots,v_{|A|}\right)$; $\boldsymbol{f}$ 为路径流量向量, $\boldsymbol{f}\equiv\left(f_{1w_1},\cdots,f_{\left|R_{w_{|W|}}\right|w_{|W|}}\right)$,其中, $|W|$ 表示网络中OD对的数量, $\left|R_{w_{|W|}}\right|$ 表示OD对 $w_{|W|}$ 间的路径数量; $\boldsymbol{q}$ 为需求向量; $B_w^{(\mathrm{u})},B_w^{(\mathrm{atis})}$ 分别为利己用户 u 和ATIS用户atis在OD对 $w\in W$ 上的逆需求函数;假设路段出行成本函数 $t_a(v_a)$ 是可分离函数,且为路段流量 v_a 的连续可微严格递增凸函数,且对 $\forall c\in[0,1]$ 满足 $t_a(cx)\geqslant ct_a(x)$.

显然,交通网络中的流量守恒和非约束条件为

$$\sum_{r\in R_w}f_{rw}^{(\mathrm{u})}=q_w^{(\mathrm{u})}\ ,\ \forall w\in W \tag{1}$$

$$v_a^{(\mathrm{u})}=\sum_{w\in W}\sum_{r\in R_w}f_{rw}^{(\mathrm{u})}\delta_{ar}^{(w)},\ \forall a\in A \tag{2}$$

$$f_{rw}^{(\mathrm{u})}\geqslant 0,\ \forall r\in R_w;\ w\in W \tag{3}$$

$$\sum_{r\in R_w}f_{rw}^{(\mathrm{atis})}=q_w^{(\mathrm{atis})},\ \forall w\in W \tag{4}$$

$$v_a^{(\mathrm{atis})}=\sum_{w\in W}\sum_{r\in R_w}f_{rw}^{(\mathrm{atis})}\delta_{ar}^{(w)},\ \forall a\in A \tag{5}$$

$$f_{rw}^{(\mathrm{atis})}\geqslant 0,\ \forall r\in R_w;\ w\in W \tag{6}$$

式(1)~式(6)可写成矩阵形式,即 $\Omega=\left\{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\,\middle|\,\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Delta f},\boldsymbol{\Lambda f}=\boldsymbol{q},\boldsymbol{f}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{q}\geqslant\boldsymbol{0}\right\}$,其中, $\boldsymbol{\Delta}=\left[\delta_{ar}^{(w)}\right]$ 是路段/路径关联矩阵, $\boldsymbol{\Lambda}=\left[\Lambda_{rw}\right]$ 是OD对/路径关联矩阵,如果 $r\in R_w$,则 $\Lambda_{rw}=1$,否则 $\Lambda_{rw}=0$.显然 Ω 是闭凸集.

1.2 模型构建

Nagurney等[9]给出如下多用户类弹性需求交通均衡分配结论:

引理1 在 M 类用户组成的弹性需求多用户类交通网络中, $(\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\boldsymbol{q}})$ 是弹性需求下多用户类交通均衡分配解的充要条件是下面变分不等式(VI)成立.

$$\begin{aligned}&\sum_{a\in A}\sum_{m=1}^{M}\left[c_a^{(m)}(\bar{\boldsymbol{v}})\left(v_a^{(m)}-\bar{v}_a^{(m)}\right)\right]-\\&\sum_{w\in W}\sum_{m=1}^{M}\left[B_w^{(m)}(\bar{\boldsymbol{q}})\left(q_w^{(m)}-\bar{q}_w^{(m)}\right)\right]\geqslant 0\end{aligned} \tag{7}$$

式中: $c_a^{(m)},v_a^{(m)}$ 分别是第 m 类用户在路段 a 上的出行成本和流量; $q_w^{(m)}$ 是第 m 类用户在OD对 $w\in W$ 间的弹性出行需求; $\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\boldsymbol{q}}$ 分别是弹性需求多用户类

交通网络在均衡时的路段流量向量和需求向量；$\bar{v}_a^{(m)}$ 是均衡时第 m 类用户在路段 a 上的流量；$\bar{q}_w^{(m)}$ 是均衡时第 m 类用户在OD对 $w\in W$ 间的弹性出行需求.

本文考虑两类不同用户，即利己用户 u 和 ATIS用户 atis，记 $c_a^{(\mathrm{u})}(v_a)$ 为利己用户 u 在路段 a 上的出行成本，$c_a^{(\mathrm{atis})}(v_a)$ 为ATIS用户 atis 在路段 a 上的出行成本，则有

$$c_a^{(\mathrm{u})}(v_a)=t_a(v_a) \tag{8}$$

$$c_a^{(\mathrm{atis})}(v_a)=t_a(v_a)+v_a t_a'(v_a) \tag{9}$$

式中：$t_a'(v_a)$ 是路段出行成本函数 $t_a(v_a)$ 的一阶导函数.将式(8)和式(9)代入式(7)，可得ATIS作用下弹性需求混合均衡交通分配模型.

引理 2 在ATIS作用下弹性需求混合交通网络中，$(\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\boldsymbol{q}})\in\Omega$ 是该类混合交通均衡分配解的充要条件是对任意的 $(\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\boldsymbol{q}})\in\Omega$，下面的VI成立.

$$\begin{aligned}&\sum_{a\in A}t_a(\bar{v}_a)\left(v_a^{(\mathrm{u})}-\bar{v}_a^{(\mathrm{u})}\right)+\sum_{a\in A}\left[t_a(\bar{v}_a)+\bar{v}_a t_a'(\bar{v}_a)\right]\left(v_a^{(\mathrm{atis})}-\bar{v}_a^{(\mathrm{atis})}\right)-\\&\sum_{w\in W}B_w^{(\mathrm{u})}(\bar{\boldsymbol{q}})\left(q_w^{(\mathrm{u})}-\bar{q}_w^{(\mathrm{u})}\right)-\sum_{w\in W}B_w^{(\mathrm{atis})}(\bar{\boldsymbol{q}})\left(q_w^{(\mathrm{atis})}-\bar{q}_w^{(\mathrm{atis})}\right)\geqslant 0\end{aligned} \tag{10}$$

式中：$\bar{v}_a$ 表示均衡时路段 a 上的总流量.

定义系统在 $(\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\boldsymbol{q}})\in\Omega$ 时的社会总收益 $U(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})=\sum_{w\in W}\int_0^{q_w^{(\mathrm{u})}}B_w^{(\mathrm{u})}(x)\mathrm{d}x+\sum_{w\in W}\int_0^{q_w^{(\mathrm{atis})}}B_w^{(\mathrm{atis})}(x)\mathrm{d}x$，系统的总出行时间成本 $T(\boldsymbol{v})=\sum_{a\in A}t_a(v_a)v_a$，则此时系统的社会总剩余为

$$S(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})=\sum_{w\in W}\int_0^{q_w^{(\mathrm{u})}}B_w^{(\mathrm{u})}(x)\mathrm{d}x+\sum_{w\in W}\int_0^{q_w^{(\mathrm{atis})}}B_w^{(\mathrm{atis})}(x)\mathrm{d}x-\sum_{a\in A}t_a(v_a)v_a \tag{11}$$

系统最优下的解 $(\hat{\boldsymbol{v}},\hat{\boldsymbol{q}})\in\Omega$，即求解最优化问题为

$$(\hat{\boldsymbol{v}},\hat{\boldsymbol{q}})=\arg\max_{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q})\in\Omega}S(\boldsymbol{v},\boldsymbol{q}) \tag{12}$$

定义ATIS作用下弹性需求混合均衡交通分配的效率损失为

$$\rho=\frac{S(\hat{\boldsymbol{v}},\hat{\boldsymbol{q}})}{S(\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\boldsymbol{q}})} \tag{13}$$

即社会总剩余最大值与均衡时的社会总剩余之比，显然，$\rho\geqslant 1$.

2 界定效率损失的上界

在界定ATIS作用下弹性需求混合交通均衡分配的效率损失之前，由Chau等[10]的引理4.2，可得如下定理：

定理 1 如果对任意非负的 $q_w^{(\mathrm{u})}$，$B_w^{(\mathrm{u})}\left(q_w^{(\mathrm{u})}\right)$ 是 $q_w^{(\mathrm{u})}$ 的非增函数，则

$$\sum_{w\in W}\int_0^{q_w^{(\mathrm{u})}}B_w^{(\mathrm{u})}(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{w\in W}\int_0^{\bar{q}_w^{(\mathrm{u})}}B_w^{(\mathrm{u})}(x)\mathrm{d}x+\sum_{w\in W}B_w^{(\mathrm{u})}\left(\bar{q}_w^{(\mathrm{u})}\right)\left(q_w^{(\mathrm{u})}-\bar{q}_w^{(\mathrm{u})}\right) \tag{14}$$

证明 因为 $B_w^{(\mathrm{u})}(q_w^{(\mathrm{u})})$ 是非增函数，则有

$$\int_{\bar{q}_w^{(\mathrm{u})}}^{q_w^{(\mathrm{u})}}B_w^{(\mathrm{u})}(x)\mathrm{d}x\leqslant B_w^{(\mathrm{u})}\left(\bar{q}_w^{(\mathrm{u})}\right)\left(q_w^{(\mathrm{u})}-\bar{q}_w^{(\mathrm{u})}\right),\ w\in W \tag{15}$$

即

$$\int_0^{q_w^{(\mathrm{u})}}B_w^{(\mathrm{u})}(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\bar{q}_w^{(\mathrm{u})}}B_w^{(\mathrm{u})}(x)\mathrm{d}x+B_w^{(\mathrm{u})}\left(\bar{q}_w^{(\mathrm{u})}\right)\left(q_w^{(\mathrm{u})}-\bar{q}_w^{(\mathrm{u})}\right),\ w\in W \tag{16}$$

对所有的OD对 $w\in W$ 求和，则可得式(14)成立.

同理可得

$$\begin{aligned}&\sum_{w\in W}\int_0^{q_w^{(\mathrm{atis})}}B_w^{(\mathrm{atis})}(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{w\in W}\int_0^{\bar{q}_w^{(\mathrm{atis})}}B_w^{(\mathrm{atis})}(x)\mathrm{d}x+\\&\sum_{w\in W}B_w^{(\mathrm{atis})}\left(\bar{q}_w^{(\mathrm{atis})}\right)\left(q_w^{(\mathrm{atis})}-\bar{q}_w^{(\mathrm{atis})}\right)\end{aligned} \tag{17}$$

定理 2 假设可分离路段出行成本函数 $t_a(v_a)$ 是路段总流量 v_a 的连续可微、严格递增凸函数，且对 $\forall c\in[0,1]$ 满足 $t_a(cx)\geqslant ct_a(x)$. 则 $\forall v_a\geqslant 0$ 时，$v_a t_a'(v_a)\leqslant t_a(v_a)$ 成立.

证明 由Karakostas等[11]中的式(7)，可知对任意的 $v_a\geqslant 0$，有

$$v_a t_a'(v_a/2)\leqslant\int_0^{v_a}t_a'(x)\mathrm{d}x=t_a(v_a)-t_{a0}\leqslant t_a(v_a) \tag{18}$$

式(18)中第2个不等式成立原因为 $t_{a0}=t_a(0)\geqslant 0$；又因 $\forall c\in[0,1]$，不等式 $t_a(cx)\geqslant ct_a(x)$ 成立.所以有

$$t_a(v_a)\leqslant 2t_a(v_a/2) \tag{19}$$

由式(18)和式(19)，可得 $v_a t_a'(v_a/2)\leqslant 2t_a(v_a/2)$. 用 v_a 取代 $v_a t_a'(v_a/2)\leqslant 2t_a(v_a/2)$ 中的 $v_a/2$，可得 $v_a t_a'(v_a)\leqslant t_a(v_a)$ 成立.

接下来，用非线性规划法探讨ATIS作用下弹性需求混合交通均衡分配的效率损失上界.对任意给定的 $a\in A,\ \bar{\boldsymbol{v}}_a=\left(\bar{v}_a^{(\mathrm{u})},\bar{v}_a^{(\mathrm{atis})}\right)$，讨论非线性规划问

题，即

$$\max_{v_a \geqslant \mathbf{0}} \left[t_a(\bar{v}_a) - t_a(v_a) \right] v_a + \bar{v}_a t_a'(\bar{v}_a) \left(v_a^{(\text{atis})} - \bar{v}_a^{(\text{atis})} \right) \tag{20}$$

设

$$F(\boldsymbol{v}_a) = \left[t_a(\bar{v}_a) - t_a(v_a) \right] v_a + \bar{v}_a t_a'(\bar{v}_a) \left(v_a^{(\text{atis})} - \bar{v}_a^{(\text{atis})} \right), \boldsymbol{v}_a \geqslant \mathbf{0} \tag{21}$$

由于函数 $F(\boldsymbol{v}_a)$ 的 Hessian 矩阵是半负定矩阵，故 $F(\boldsymbol{v}_a)$ 是变量 $v_a^{(\text{u})} \geqslant 0, v_a^{(\text{atis})} \geqslant 0$ 的凹函数，从而 $F(\boldsymbol{v}_a)$ 有全局最大值. 令 $\lambda_a^{(\text{u})}, \lambda_a^{(\text{atis})}, a \in A$ 分别为变量 $v_a^{(\text{u})} \geqslant 0, v_a^{(\text{atis})} \geqslant 0$ 的 Lagrange 乘子，式(20)的一阶最优性条件为

$$t_a(\bar{v}_a) - t_a(v_a) - t_a'(v_a) v_a + \lambda_a^{(\text{u})} = 0 \tag{22}$$

$$\lambda_a^{(\text{u})} \geqslant 0,\ v_a^{(\text{u})} \geqslant 0,\ \lambda_a^{(\text{u})} v_a^{(\text{u})} = 0 \tag{23}$$

$$t_a(\bar{v}_a) - t_a(v_a) - t_a'(v_a) v_a + \bar{v}_a t_a'(\bar{v}_a) + \lambda_a^{(\text{atis})} = 0 \tag{24}$$

$$\lambda_a^{(\text{atis})} \geqslant 0,\ v_a^{(\text{atis})} \geqslant 0,\ \lambda_a^{(\text{atis})} v_a^{(\text{atis})} = 0 \tag{25}$$

由式(22)和式(23)可知，对任意的路段 $a \in A$，非线性规划问题式(20)在极值点时，$\lambda_a^{(\text{u})} = 0$ 和 $\lambda_a^{(\text{u})} > 0$ 有且只有一个成立. 当 $\lambda_a^{(\text{u})} = 0$ 时，由式(22)可知

$$t_a(\bar{v}_a) = t_a(v_a) + t_a'(v_a) v_a \tag{26}$$

由路段出行成本函数 $t_a(v_a)$ 的假设可知，式(26)有唯一最优解，设其为 $\mu_a \bar{v}_a, \mu_a \in [0, 1]$. 代入式(24)可得

$$\bar{v}_a t_a'(\bar{v}_a) + \lambda_a^{(\text{atis})} = 0 \tag{27}$$

这意味着 $\bar{v}_a = 0, \lambda_a^{(\text{atis})} = 0$ 或者 $t_a(v_a) = t_a(0)$，$\lambda_a^{(\text{atis})} = 0$，故 $F(\boldsymbol{v}_a) = 0$.

如果 $\lambda_a^{(\text{u})} > 0$ 成立，由式(23)可得，$v_a^{(\text{u})} = 0$，故 $v_a = v_a^{(\text{atis})}$. 不妨设 $\bar{v}_a^{(\text{atis})} = \xi_a \bar{v}_a, 0 \leqslant \xi_a \leqslant 1$，其中，$\xi_a$ 是均衡时路段 a 上 ATIS 用户的流量占该路段总流量的比例，并定义若 $\bar{v}_a^{(\text{atis})} = \bar{v}_a = 0$，则 $\xi_a = 1$. 考虑式(24)和式(25)，可知 $\lambda_a^{(\text{atis})} > 0$ 或 $\lambda_a^{(\text{atis})} = 0$. 显然，若 $\lambda_a^{(\text{atis})} > 0$，则由式(25)可知 $v_a^{(\text{atis})} = 0$，进而由 $v_a = v_a^{(\text{atis})}$，可得 $v_a = v_a^{(\text{atis})} = 0$，则 $F(\boldsymbol{v}_a) = -\bar{v}_a t_a'(\bar{v}_a) \bar{v}_a^{(\text{atis})} \leqslant 0$. 若 $\lambda_a^{(\text{atis})} = 0$，则由式(24)可知

$$t_a(\bar{v}_a) + \bar{v}_a t_a'(\bar{v}_a) = t_a(v_a) + t_a'(v_a) v_a \tag{28}$$

由路段出行成本函数 $t_a(v_a)$ 的假设可知式(28)的解为 $v_a = \bar{v}_a$，故

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{v}_a) &= \left[t_a(\bar{v}_a) - t_a(v_a) \right] v_a + \bar{v}_a t_a'(\bar{v}_a) \left(v_a^{(\text{atis})} - \bar{v}_a^{(\text{atis})} \right) = \\ &\bar{v}_a t_a'(\bar{v}_a)(\bar{v}_a - \xi_a \bar{v}_a) \leqslant (1 - \xi_a) \bar{v}_a t_a(\bar{v}_a) \end{aligned} \tag{29}$$

式(29)中不等式成立的原因是定理2成立. 令

$$\zeta = \max_{a \in A} (1 - \xi_a) \tag{30}$$

式中：ζ 表示均衡时交通网络中各路段上利己用户的流量占该路段总流量比例的最大值.

定理 3 假设可分离路段出行成本函数 $t_a(v_a)$ 是路段总流量 v_a 的连续可微、严格递增凸函数，同时对 $\forall c \in [0,1]$ 满足 $t_a(cx) \geqslant c t_a(x)$. 设 $(\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{q}}) \in \Omega$ 是 VI 问题式(10)的解并且 $(\hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{q}}) \in \Omega$ 是最优化问题式(12)的解. 则 ATIS 作用下弹性需求混合交通均衡分配的效率损失存在上界，即

$$\rho \leqslant 1 + \zeta \left[\omega(\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{q}}) - 1 \right] \tag{31}$$

式中：$\omega(\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{q}})$ 表示系统在均衡的社会总收益与社会总剩余之比，即

$$\omega(\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{q}}) = \frac{U(\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{q}})}{S(\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{q}})} = \frac{\sum\limits_{w \in W} \int_0^{\bar{q}_w^{(\text{u})}} B_w^{(\text{u})}(x) \mathrm{d}x + \sum\limits_{w \in W} \int_0^{\bar{q}_w^{(\text{atis})}} B_w^{(\text{atis})}(x) \mathrm{d}x}{\sum\limits_{w \in W} \int_0^{\bar{q}_w^{(\text{u})}} B_w^{(\text{u})}(x) \mathrm{d}x + \sum\limits_{w \in W} \int_0^{\bar{q}_w^{(\text{atis})}} B_w^{(\text{atis})}(x) \mathrm{d}x - \sum\limits_{a \in A} t_a(\bar{v}_a) \bar{v}_a} \tag{32}$$

证明 设 $(\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{q}}) \in \Omega$ 是 VI 问题式(10)的解，即有

$$\begin{aligned} &\sum_{a \in A} t_a(\bar{v}_a) \left(v_a^{(\text{u})} - \bar{v}_a^{(\text{u})} \right) + \sum_{a \in A} \left[t_a(\bar{v}_a) + \bar{v}_a t_a'(\bar{v}_a) \right] \left(v_a^{(\text{atis})} - \bar{v}_a^{(\text{atis})} \right) - \\ &\sum_{w \in W} B_w^{(\text{u})}(\bar{\boldsymbol{q}}) \left(q_w^{(\text{u})} - \bar{q}_w^{(\text{u})} \right) - \sum_{w \in W} B_w^{(\text{atis})}(\bar{\boldsymbol{q}}) \left(q_w^{(\text{atis})} - \bar{q}_w^{(\text{atis})} \right) \geqslant 0 \end{aligned} \tag{33}$$

将式(14)和式(17)代入式(33)，可得

$$\begin{aligned} &\sum_{w \in W} \int_0^{q_w^{(\text{u})}} B_w^{(\text{u})}(x) \mathrm{d}x + \sum_{w \in W} \int_0^{q_w^{(\text{atis})}} B_w^{(\text{atis})}(x) \mathrm{d}x - \sum_{a \in A} t_a(v_a) v_a \leqslant \\ &\sum_{w \in W} \int_0^{\bar{q}_w^{(\text{u})}} B_w^{(\text{u})}(x) \mathrm{d}x + \sum_{w \in W} \int_0^{\bar{q}_w^{(\text{atis})}} B_w^{(\text{atis})}(x) \mathrm{d}x - \sum_{a \in A} t_a(\bar{v}_a) \bar{v}_a + \\ &\sum_{a \in A} \left[t_a(\bar{v}_a) - t_a(v_a) \right] v_a + \sum_{a \in A} \bar{v}_a t_a'(\bar{v}_a) \left(v_a^{(\text{atis})} - \bar{v}_a^{(\text{atis})} \right) \end{aligned} \tag{34}$$

即

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{q}) \leqslant\ & \mathrm{S}(\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{q}}) + \sum_{a \in A} \left[t_a(\bar{v}_a) - t_a(v_a) \right] v_a + \\ & \sum_{a \in A} \bar{v}_a t_a'(\bar{v}_a) \left(v_a^{(\text{atis})} - \bar{v}_a^{(\text{atis})} \right) \end{aligned} \tag{35}$$

故

$$\begin{aligned} S(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{q}) \leqslant\ & \mathrm{S}(\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{q}}) + \max_{\boldsymbol{v} \in \Omega} \sum_{a \in A} \Big\{ \left[t_a(\bar{v}_a) - t_a(v_a) \right] v_a + \\ & \bar{v}_a t_a'(\bar{v}_a) \left(v_a^{(\text{atis})} - \bar{v}_a^{(\text{atis})} \right) \Big\} \leqslant \mathrm{S}(\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{q}}) + \max_{\boldsymbol{v} \geqslant \mathbf{0}} \sum_{a \in A} \Big\{ \left[t_a(\bar{v}_a) - \right. \\ & \left. t_a(v_a) \right] v_a + \bar{v}_a t_a'(\bar{v}_a) \left(v_a^{(\text{atis})} - \bar{v}_a^{(\text{atis})} \right) \Big\} \leqslant \mathrm{S}(\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\boldsymbol{q}}) + \zeta T(\bar{\boldsymbol{v}}) \end{aligned} \tag{36}$$

考虑 $T(\bar{v})=U(\bar{v},\bar{q})-S(\bar{v},\bar{q})$，在式(36)中令 $(v,q)=(\hat{v},\hat{q})$，则有

$$S(\hat{v},\hat{q})\leqslant S(\bar{v},\bar{q})+\zeta T(\bar{v})=S(\bar{v},\bar{q})+\zeta\left[U(\bar{v},\bar{q})-S(\bar{v},\bar{q})\right] \tag{37}$$

因此，可得式(31)成立.

3　算例计算

本文算法都是基于传统和经典的方法，网络规模可能对效率损失上界值产生影响，但在表达形式上不影响本文结论.为说明算法的有效性，用2个顶点1条有向路段的简单交通网络来说明，如图1所示.路段出行成本函数为 $t_a(v_a)=v_a$，利己用户和ATIS用户对应的逆需求函数分别为：$B_w^{(\mathrm{u})}=30-q_w^{(\mathrm{u})},\ B_w^{(\mathrm{atis})}=40-q_w^{(\mathrm{atis})}$.

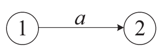

图1　算例所用简单网络

Fig. 1　Simple network used in example

通过求解VI问题式(10)，可得

$$\bar{f}_w^{(\mathrm{u})}=12.5,\ \bar{f}_w^{(\mathrm{atis})}=5,\ \bar{q}_w^{(\mathrm{u})}=12.5,$$
$$\bar{q}_w^{(\mathrm{atis})}=5,\ \bar{v}_a=\bar{f}_w^{(\mathrm{u})}+\bar{f}_w^{(\mathrm{atis})}=17.5$$

计算可得

$$S(\bar{v},\bar{q})=178.125,\ U(\bar{v},\bar{q})=484.375,$$
$$\omega(\bar{v},\bar{q})=2.719\,3$$

求解式(12)可得社会总剩余最大时的最优解为

$$\hat{f}_w^{(\mathrm{u})}=2,\ \hat{f}_w^{(\mathrm{atis})}=12,\ \hat{q}_w^{(\mathrm{u})}=2,\ \hat{q}_w^{(\mathrm{atis})}=12,$$
$$\hat{v}_a=14,\ S(\hat{v},\hat{q})=270$$

根据 ξ_a,ζ 的定义可得，$\xi_a=0.286,\zeta=0.714$，所以 $\rho=1.516\leqslant 1+\zeta\left[\omega(\bar{v},\bar{q})-1\right]=2.005$，定理3显然成立.

4　结　论

现有关于ATIS作用下效率损失研究的文献大都是考虑固定需求情形下混合交通均衡行为的效率损失，未对ATIS作用下弹性需求混合交通均衡行为的效率损失进行探讨.本文在ATIS作用下的弹性需求异质性交通网络中，针对利己用户和ATIS用户的择路原则的异质性，探讨了该类混合交通均衡分配的效率损失问题.构建ATIS作用下弹性需求混合交通均衡分配的变分不等式模型，运用非线性规划方法得到该类混合交通均衡分配的效率损失上界表达式.研究表明，ATIS作用下的效率损失上界和均衡时的社会总收益与社会总剩余之比，以及均衡时路段上ATIS用户流量与总流量之比有关.下一步的研究将探讨更紧的上界及随机交通网络的情形.

参考文献：

[1]　HUANG H J, LAM W H K. A multi-class dynamic user equilibrium model for queuing networks with advanced traveler information systems[J]. Journal of Mathematical Modelling and Algorithms, 2003, 2(4): 349-377.

[2]　LO H K, SZETO W Y. Modeling advanced traveler information services: Static versus dynamic paradigms [J]. Transportation Research Part B, 2004, 38(6): 495-515.

[3]　HUANG H J, LI Z C. A multiclass, multicriteria logit-based traffic equilibrium assignment model under ATIS [J]. European Journal of Operational Research, 2007, 176(3): 1464-1477.

[4]　郭仁拥, 黄海军. 基于ATIS的多用户多准则随机均衡交通配流演化模型[J]. 中国公路学报, 2008, 21(5): 87-90. [GUO R Y, HUANG H J. Evolution model of multiclass and multicriteria stochastic equilibrium traffic assignment based on ATIS[J]. China Journal of Highway and Transport, 2008, 21(5): 87-90.]

[5]　刘天亮, 欧阳恋群, 黄海军. ATIS作用下的混合交通行为网络与效率损失上界[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(4): 154-159. [LIU T L, OUYANG L Q, HUANG H J. Mixed travel behavior in networks with ATIS and upper bound of efficiency loss[J]. Systems Engineering Theory & Practice, 2007, 27(4): 154-159.]

[6]　HUANG H J, LIU T L, GUO X L, et al. Inefficiency of logit- based stochastic user equilibria in a traffic network under ATIS[J]. Networks and Spatial Economics, 2011, 11(2): 255-269.

[7]　张俊婷, 周晶, 陈星光, 等. ATIS和道路收费下的混合随机用户均衡的效率损失[J]. 运筹与管理, 2017, 26(5): 137-141. [ZHANG J T, ZHOU J, CHEN X G, et al. Bounding the inefficiency of stochastic user equilibrium under ATIS and road pricing[J]. Operations Research and Management Science, 2017, 26(5): 137-141.]

下转第155页

traffic network equilibrium and systems optimum problem[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 2004(38): 1-15.

上接第 129 页

[8] 张俊婷, 周晶, 徐薇. ATIS下多用户混合均衡相对于随机社会最优的效率损失[J]. 系统科学与数学, 2017, 37(3): 713-724. [ZHANG J T, ZHOU J, XU W. Efficiency loss of the multi-class mixed equilibrium against the SSO under ATIS[J]. Systems Science and Mathematical Sciences, 2017, 37(3): 713-724.]

[9] NAGURNEY A, DONG J. A multiclass, multicriteria traffic network equilibrium model with elastic demand [J]. Transportation Research Part B, 2002, 36(5): 445-469.

[10] CHAU C K, SIM K M. The price of anarchy for non-atomic congestion games with symmetric cost maps and elastic demands[J]. Operations Research Letter, 2003, 31(5): 327-334.

[11] KARAKOSTAS G, KOLLIOPOULOS S G. The efficiency of optimal taxes[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2005, 34(5): 3-12.

《交通运输系统工程与信息》期刊
"变革中的交通系统"专栏
征文通知

现代交通系统已与现代社会经济融为一体,在不断催生经济社会飞速发展的同时,也带来了社会运行与发展模式的显著变化.回望过去的二十年,我国社会与经济经历了一个快速发展的过程,但也在不断地经受着新技术革命和全球化竞争环境的挑战,以及各种自然灾害和莫名其妙的疫情的冲击.在复杂多变的社会与经济环境下,人类赖以生存的交通运输系统维持健康稳定的可持续运行尤为重要.鉴于此,本刊拟组织出版"变革中的交通系统"专栏,研究各类变革与交通系统之间的互动机理、作用效果、发展趋势及应对策略,探讨新时期我国交通系统科学发展之路.

专栏的重点领域包括但不限于:

(1) 新技术革命对交通行业的影响;

(2) 全球供应链与产业链重构对未来交通运输资源配置的影响;

(3) 非预期事件环境下交通运输需求时空特性变化的机理分析;

(4) 突发事件下交通运输系统运行组织模式与方法;

(5) 兼顾非常态运行环境要求的交通资源优化配置方法;

(6) 未来互联网生活模式对交通系统运行与发展的影响.

欢迎有积累的团队及作者踊跃投稿.来稿要求学术上有深度,方法上有创新,逻辑及行文严谨,观点明确独到且有依据、有支撑;具体撰写要求参见本刊(www.tseit.org.cn,ISSN:1009-6744)的"投稿须知".来稿请直接从本刊网站投稿,栏目请注明"变革中的交通系统"或在稿件首页左上角标明.本专栏投稿截止日期为2020年9月5日,编委会将组织专门的力量加快审稿,早到早审,争取在今年第6期刊出.