第 52 卷　增刊Ⅰ
2022 年 7 月

中 国 海 洋 大 学 学 报
PERIODICAL OF OCEAN UNIVERSITY OF CHINA

52(Sup.Ⅰ):130～136
July,2022

研究简报

狄拉克算子的谱与从属解※

王晓辉
(中国海洋大学数学科学学院，山东 青岛 266100)

摘　要： 本文利用解的 L^2 范数，定义了狄拉克方程组 $Lu=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\begin{pmatrix}p(t) & 0\\ 0 & r(t)\end{pmatrix}u=xu$，$t\geqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$ 的从属解，并给出了 Weyl-Titchmarsh 函数与从属解的关系，然后利用此关系和谱测度的最小支集得到了从属解的同谱分解。

关键词： 狄拉克算子；Weyl-Titchmarsh 函数；最小支集；L^2 范数；从属理论

中图法分类号： O175.3　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1672-5174(2022)07Ⅱ-130-07

DOI： 10.16441/j.cnki.hdxb.20220111

引用格式： 王晓辉. 狄拉克算子的谱与从属解[J]. 中国海洋大学学报(自然科学版)，2022，52(增Ⅰ)：130-136.
Wang Xiaohui. On subordinate solutions and the spectrum of Dirac operators[J]. Periodical of Ocean University of China，2022，52(Sup.Ⅰ)：130-136.

本文主要研究狄拉克方程组

$$Lu=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\begin{pmatrix}p(t) & 0\\ 0 & r(t)\end{pmatrix}u=xu \tag{1}$$

的从属理论(Subordinacy theory)，其中 $t\geqslant 0$，$x\in\mathbf{R}$，$p(t)$ 和 $r(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上的任意有限区间内可积。

从属理论最早是由 Gilbert 和 Pearson[1] 针对半直线 $[0,\infty)$ 上的一维连续薛定谔算子

$$D=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+V(r) \tag{2}$$

提出的，其中 $V(r)$ 是局部可积的。他们给出了从属解的概念，即在奇异端点处比其它线性无关解更小的解，并证明，在 $r=0$ 是正则端点，$r=\infty$ 是极限点的情况下，连续薛定谔算子的谱分解可以由对应的薛定谔方程

$$-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+V(r)\,u=xu \tag{3}$$

的解的渐近行为进行表示。随后 Gilbert[2] 又将薛定谔算子的这一结论推广到整条实直线上。后来，许多学者开始对从属理论展开研究，Jitomirskaya 和 Last[3-4] 将这一理论推广到了半直线上的离散薛定谔算子和直线上的拟周期离散薛定谔算子，Jitomirskaya 和Mavi[5] 以及 Bazao 等[6] 利用从属理论的方法和结果，对离散薛定谔算子的谱测度进行了研究。Hassi、Remling 和 De Snoo[7] 则研究了狄拉克方程组的迹典范形式

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-lH(x)y \tag{4}$$

的从属理论，其中 $\mathrm{tr}\,H(x)=1$，$l\in\mathbf{C}$。此外，从属理论及相关结论也推广到了其它系统[8-12]。但据我们所知，关于方程组(1)的从属理论尚未完全建立。

本文的主要目的就是将文献[1]的有关薛定谔算子的部分结果推广到狄拉克算子 L，揭示在半直线 $[0,\infty)$ 上一维狄拉克方程组(1)的解和算子的绝对连续谱、奇异谱之间的关系。

1　预备知识和主要结果

本文的工作在区间 $[0,\infty)$ 上展开，且 $p(t)$ 和 $r(t)$ 在其中的任意有限区间内可积。由文献[13]中狄拉克算子的性质可知，在点 ∞ 处，可分为极限圆和极限点两种情况。若方程组

$$Lu=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\begin{pmatrix}p(t) & 0\\ 0 & r(t)\end{pmatrix}u=\lambda_0 u \tag{5}$$

的任意复值解 $\varphi(t,\lambda_0)$ 满足

$$\int_0^{\infty}|\varphi(t,\lambda_0)|^2\mathrm{d}t\equiv\int_0^{\infty}(|\varphi_1(t,\lambda_0)|^2+|\varphi_2(t,\lambda_0)|^2)\mathrm{d}t<\infty,$$

即 $\varphi(t,\lambda_0)\in L^2[0,\infty)$，其中 λ_0 为一复数，φ_1 和 φ_2 是 φ 的分量，$|\quad|$表示取模，则算子 L 在 ∞ 处是极限圆情形，否则是处于极限点情形。由文献[14-15]知，当

※　基金项目：国家自然科学基金项目(11971059)资助
Supported by the National Natural Science Foundation of China(11971059)
收稿日期：2022-02-25；修订日期：2022-04-07
作者简介：王晓辉(1996—)，女，硕士生。E-mail：wangxiaohui9607@163.com

$p(t)$ 和 $r(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上的任意有限区间内可积时，狄拉克算子是极限点情形。因此，本文只需要考虑极限点情形即可。

由文献[13]可知，对于狄拉克算子 L，存在单调递增的谱函数 $\rho(\lambda)$（实变量实值函数），且算子 L 的谱是 $\rho(\lambda)$ 在其某一邻域内取得常数值的点的集合的补集，因此，对于算子的谱的研究可以借助谱函数 $\rho(\lambda)$ 来进行。进一步地，我们也可以利用与谱函数 $\rho(\lambda)$ 密切相关的 Weyl-Titchmarsh 函数（也称 m 函数）$m(z,\alpha)$ 进行研究。下面先给出 m 函数的一些性质（参见文献[13]）：

(1) 设 $\vartheta(t,z,\alpha)=(\vartheta_1(t,z,\alpha),\vartheta_2(t,z,\alpha))^{\mathrm{T}}$（T 表示转置）和 $\varphi(t,z,\alpha)=(\varphi_1(t,z,\alpha),\varphi_2(t,z,\alpha))^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $Lu=zu$ 的满足边界条件

$$\varphi_1(0,z,\alpha)=\cos\alpha,\varphi_2(0,z,\alpha)=-\sin\alpha;$$

$$\vartheta_1(0,z,\alpha)=\sin\alpha,\vartheta_2(0,z,\alpha)=\cos\alpha$$

的解。令 $\psi_m(t,z,\alpha)=\vartheta(t,z,\alpha)+m(z,\alpha)\varphi(t,z,\alpha)$，则 $\psi_m(t,z,\alpha)$ 是 $Lu=zu$ 的一个 $L^2[0,\infty)$ 解且满足

$$\|\psi_m(t,z,\alpha)\|^2=\frac{\mathrm{Im}m(z,\alpha)}{\mathrm{Im}z},\mathrm{Im}z\neq 0,\tag{6}$$

其中 $\|\psi_m(t,z,\alpha)\|=\left(\int_0^\infty|\psi_m(t,z,\alpha)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$ 是 $\psi_m(t,z,\alpha)$ 的 $L^2[0,\infty)$ 范数，Im 表示虚部。

(2) 对于 $z=x+\mathrm{i}y$，$\rho(\lambda)$ 和 $m(z)$ 的关系可由 Titchmarsh-Kodaira 公式表示：

$$\rho(b)-\rho(a)=\frac{1}{\pi}\lim_{y\to 0}\int_a^b \mathrm{Im}m(x+\mathrm{i}y)\mathrm{d}x,\tag{7}$$

其中 $a,b\in\mathbf{R}$ 是 $\rho(\lambda)$ 的连续点，$\lambda\in\mathbf{R}$。

(3) 对于 $z\neq z_0$，$z=x+\mathrm{i}y$，$z_0=x+\mathrm{i}y_0$，有

$$m(z)-m(z_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{1}{\lambda-z_0}\right)\mathrm{d}\rho(\lambda)。\tag{8}$$

由此可知，对于 $m(z)$ 有

$$\mathrm{Im}m(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(\lambda-x)^2+y^2}\mathrm{d}\rho(\lambda)。\tag{9}$$

另外，利用文献[16-17]的方法，可以推得：

(4) 若 $\alpha_1,\alpha_2\in[0,\pi)$ 是两个不同的边界条件，则对应的 m 函数 $m(z,\alpha_1)$ 和 $m(z,\alpha_2)$ 有如下关系

$$m(z,\alpha_2)=\frac{m(z,\alpha_1)\cot(\alpha_1-\alpha_2)+1}{\cot(\alpha_1-\alpha_2)-m(z,\alpha_1)}。\tag{10}$$

在下文中，用 μ 表示谱函数 $\rho(\lambda)$ 产生的 Borel-Stieltjes 测度，ι 表示 Lebesgue 测度。下面给出一般的 Borel 测度 κ 的最小支集的定义。

定义 1[1]　称 A 为 $\mathbf{R}$ 上的测度 κ 的最小支集，如果它满足 $\kappa(\mathbf{R}\backslash A)=0$，且若 $\kappa(A_0)=0$，则 $\iota(A_0)=0$，其中 $A_0\subset A\subset\mathbf{R}$。

由文献[1]可知，测度 κ 的最小支集在 Lebesgue 测度和 Borel 测度意义下是唯一的。事实上，如文献[1]中所述，可以证明测度 κ 的所有最小支集在关系 $\sim$ 下构成一个等价类。关系 $\sim$ 的定义如下：令 $A\Delta A'$ 表示对称差 $(A\backslash A')\cup(A'\backslash A)$，$A,A'\subset\mathbf{R}$，则

$$A\sim A'\Leftrightarrow\iota(A\Delta A')=\kappa(A\Delta A')=0。$$

假设向量函数 $\psi(t)=(\psi_1(t),\psi_2(t))^{\mathrm{T}}$ 在 $[0,T]$ 上可积，$T\in\mathbf{R}^+$，定义其 $L^2[0,T]$ 范数如下：

$$\|\psi(t)\|_{[0,T]}=\left(\int_0^T|\psi(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^T(|\psi_1(t)|^2+|\psi_2(t)|^2)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}。$$

下面叙述从属解的定义。

定义 2　若 $t=0$ 是正则端点，$t=\infty$ 是极限点，向量函数 $u_s(t,z)$ 是方程组 $Lu=zu$ 的一个解（$z\in\mathbf{C}$），且对任意与 $u_s(t,z)$ 线性无关的解 $u(t,z)$，都有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\|u_s(t,z)\|_{[0,T]}}{\|u(t,z)\|_{[0,T]}}=0,$$

则称 $u_s(t,z)$ 为方程组 $Lu=zu$ 的一个从属解。

现在我们叙述本文的主要结果。

定理 1　当且仅当 $y\to 0$，$m(z)$ 收敛到一个有限实极限或 $|m(z)|\to\infty$ 时，$Lu=xu$ 在实点 x 处存在从属解，其中 $z=x+\mathrm{i}y$。

进一步地，我们有如下结果：

定理 2　当且仅当 $y\to 0$，存在边界条件 α，使得 $m(z,\alpha)$ 收敛到一个有限实极限 $m(x,\alpha)$ 时，$Lu=xu$ 在实点 x 处存在从属解，即

$$\psi_m(t,x,\alpha)=\vartheta(t,x,\alpha)+m(x,\alpha)\varphi(t,x,\alpha),$$

式中 $z=x+\mathrm{i}y$。

令 μ、$\mu_{\mathrm{s.}}$、$\mu_{\mathrm{a.c.}}$、$\mu_{\mathrm{p.}}$ 和 $\mu_{\mathrm{s.c.}}$ 分别表示算子谱测度、奇异谱测度、绝对连续谱测度、纯点谱测度和奇异连续谱测度，S、$S_{\mathrm{s.}}$、$S_{\mathrm{a.c.}}$、$S_{\mathrm{p.}}$ 和 $S_{\mathrm{s.c.}}$ 分别为其最小支集，则我们有如下结论。

定理 3　测度 μ 各部分的最小支集 S、$S_{\mathrm{s.}}$、$S_{\mathrm{a.c.}}$、$S_{\mathrm{p.}}$ 和 $S_{\mathrm{s.c.}}$ 可分别有如下表示：

(1) $S=\mathbf{R}\backslash\{x\in\mathbf{R}:Lu=xu$ 的从属解存在，但不满足在 0 处的边界条件$\}$；

(2) $S_{\mathrm{s.}}=\{x\in\mathbf{R}:Lu=xu$ 的从属解存在，且满足在 0 处的边界条件$\}$；

(3) $S_{\mathrm{a.c.}}=\{x\in\mathbf{R}:Lu=xu$ 的从属解不存在$\}$；

(4) $S_{\mathrm{p.}}=\{x\in\mathbf{R}:Lu=xu$ 的从属解是 $L^2[0,\infty)$ 解，且满足在 0 处的边界条件$\}$；

(5) $S_{\mathrm{s.c.}}=\{x\in\mathbf{R}:Lu=xu$ 的从属解存在且满足在 0 处的边界条件，但不是 $L^2[0,\infty)$ 解$\}$。

下面给出主要结果的证明。

2　主要结果的证明

接下来的定义和几个引理中暂时先不考虑 α 对于

$\rho(\lambda)$、$m(z)$ 及方程组 $Lu=zu$ 解的影响。

下面先给出 Radon-Nikodym 导数的定义(参见文献[1,18])。

定义 3 $\frac{d\mu}{d\iota}(x)=\lim\limits_{\iota(Q_x)\to 0}\left\{\frac{\mu(Q_x)}{\iota(Q_x)}:Q_x\right.$ 是一个以 x 为中心的区间$\}$ 关于 ι 对 $x\in\mathbf{R}$ 几乎处处成立。

由上面的 Radon-Nikodym 导数的定义,Gilbert 和 Pearson 得到了下面的引理。

引理 1[1] 令 $E=\left\{x\in\mathbf{R}:\frac{d\mu}{d\iota}(x)\text{不存在}\right\}$,则 $\iota(E)=\mu(E)=0$。

对于 $x\in\mathbf{R}$,令

$$m_+(x)=\lim_{y\to 0}m(x+\mathrm{i}y),$$
$$\mathrm{Im}m_+(x)=\lim_{y\to 0}\mathrm{Im}m(x+\mathrm{i}y)。$$

由文献[1]可知,Radon-Nikodym 导数与 $m(z)$ 的关系可以通过对 $m(z)$ 的虚部进行分部积分得到。根据文献[1]给出的 $m(z)$ 的公式

$$m(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda-z}d\rho(\lambda)+\cot\alpha,$$

可以推得对于 $z=x+\mathrm{i}y$,

$$\mathrm{Im}m(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(\lambda-x)^2+y^2}d\rho(\lambda),$$

与公式(9)相同,故在薛定谔方程中成立的关系,同样适用于狄拉克方程组,即下面的引理 2。

引理 2[1] 若 $\frac{d\mu}{d\iota}(x)$ 存在,则 $\mathrm{Im}m_+(x)$ 也存在,且 $\frac{d\mu}{d\iota}(x)=\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}m_+(x)$。

根据上述基本结论,可以得到测度的最小支集对于算子谱的描述(见文献[1])。

通过引理 2 和最小支集的等价关系,就可以利用 m 函数的边界行为对谱进行描述:

引理 3[1] 记 $G'=\{x\in\mathbf{R}:\mathrm{Im}m_+(x)\text{存在}\}$,则

(1) $S'=\{x\in G':0<\mathrm{Im}m_+(x)\leqslant\infty\}$;

(2) $S'_{\mathrm{s.}}=\{x\in G':\mathrm{Im}m_+(x)=\infty\}$;

(3) $S'_{\mathrm{a.c.}}=\{x\in G':0<\mathrm{Im}m_+(x)<\infty\}$;

(4) $S'_{\mathrm{p.}}=\{x\in G':\mathrm{Im}m_+(x)=\infty,\mu(x)>0\}$;

(5) $S'_{\mathrm{s.c.}}=\{x\in G':\mathrm{Im}m_+(x)=\infty,\mu(x)=0\}$。

根据文献[1],可以推得 $\overline{S'}=\sigma(L)$,其中 S' 是测度 μ 的最小支集,$\sigma(L)$ 是狄拉克算子的谱,μ 是由谱函数产生的测度,$S'_{\mathrm{p.}}=\sigma_{\mathrm{p.}}(L)$,$\overline{S'}^{\mathrm{ess}}_{\mathrm{a.c.}}=\sigma_{\mathrm{a.c.}}(L)$,见文献[1,19]。

下面先考察从属解和 m 函数之间的关系。

m 函数和从属解均与解的范数相关,因此,接下来的部分,参考文献[1]的方法,我们先给出解的基本设定,进而研究解的范数。

(1) 对任意的 $z\in\mathbf{C}$,$z=x+\mathrm{i}y$,设 $\vartheta(t,z)$ 和 $\varphi(t,z)$ 是 $Lu=zu$ 的两个线性无关解,其分量满足如下条件:

$$\varphi_1(0,z)=\cos\alpha,\varphi_2(0,z)=-\sin\alpha;$$
$$\vartheta_1(0,z)=\sin\alpha,\vartheta_2(0,z)=\cos\alpha。$$

设 $g\in\mathbf{C}$,定义 $\psi_g(t,z)=\vartheta(t,z)+g\varphi(t,z)$。

设 $z\in\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$,定义 $\psi_m(t,z)=\vartheta(t,z)+m(z)\varphi(t,z)$。

对于 $x\in\mathbf{R}$,若 $m_+(x)$ 存在且有限,定义

$$\psi_{m_+}(t,x)=\vartheta(t,x)+m_+(x)\varphi(t,x)。$$

对于 $x\in\mathbf{R}$,若 $m_+(x)$ 有限存在且是实的,令 $m_+(x)=m(x)$,定义 $\psi_m(t,x)=\vartheta(t,x)+m(x)\cdot\varphi(t,x)$。

(2) 假设向量函数 $\phi(t,z_1)$,$\psi(t,z_1)$ 是方程组 $Lu=z_1u$ 的两个线性无关解,$\theta(t,z_1)$ 是该方程组满足 $\theta_1(0,z_1)=\xi_1$,$\theta_2(0,z_1)=\xi_2$ 的解,$\theta(t,z_2)$ 是方程组 $Lu=z_2u$ 的满足 $\theta_1(0,z_2)=\xi_1$,$\theta_2(0,z_2)=\xi_2$ 的解,则利用常数变易公式,$\theta(t,z_2)$ 可以由 $\theta(t,z_1)$ 如下表示。

$$\theta(t,z_2)=\begin{pmatrix}\phi_1(t,z_1) & \psi_1(t,z_1)\\ \phi_2(t,z_1) & \psi_2(t,z_1)\end{pmatrix}\cdot$$
$$\int_0^t\frac{\begin{pmatrix}\psi_1(s,z_1) & \psi_2(s,z_1)\\ -\phi_1(s,z_1) & -\phi_2(s,z_1)\end{pmatrix}}{W\{\varphi(s,z_1),\psi(s,z_1)\}}(z_1-z_2)\cdot$$
$$\begin{pmatrix}\theta_1(s,z_2)\\ \theta_2(s,z_2)\end{pmatrix}ds+\theta(t,z_1),\tag{11}$$

式中:$\theta(t,z_1)=\begin{pmatrix}\theta_1(t,z_1)\\ \theta_2(t,z_1)\end{pmatrix}$;$\theta(t,z_2)=\begin{pmatrix}\theta_1(t,z_2)\\ \theta_2(t,z_2)\end{pmatrix}$;

$\phi(t,z_1)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t,z_1)\\ \varphi_2(t,z_1)\end{pmatrix}$;$\psi(t,z_1)=\begin{pmatrix}\psi_1(t,z_1)\\ \psi_2(t,z_1)\end{pmatrix}$。

公式(11)可利用文献[20]中的方法推得,此处省略。

接下来的引理 4 揭示了上述各解的 $L^2[0,T]$ 范数之间的关系。

引理 4 令 $x\in\mathbf{R}$,$T\in\mathbf{R}^+$,若

$$\omega_1=3|y_2-y_1|\,\|\varphi(t,z_1)\|_{[0,T]}\|\psi_m(t,z_1)\|_{[0,T]},$$
$$\omega_2=\frac{6y\|\psi_g(t,z)\|_{[0,T]}\|\psi_m(t,z)\|_{[0,T]}}{|g-m_+(x)|},$$

其中 $z=x+\mathrm{i}y$,$z_1=x+\mathrm{i}y_1$,$z_2=x+\mathrm{i}y_2$,则

(1) 对于 $y_1>0$,有

$$\big|\|\varphi(t,z_2)\|_{[0,T]}-\|\varphi(t,z_1)\|_{[0,T]}\big|\leqslant\omega_1\|\varphi(t,z_2)\|_{[0,T]}。$$

若 $m_+(x)$ 存在且有限,令

$$\omega'_1=3|y_2|\,\|\varphi(t,x)\|_{[0,T]}\|\psi_{m+}(t,x)\|_{[0,T]}。$$

则对于 $y_1=0$(即 $z_1=x$),该关系式也成立。

(2) 对于 $y_1,y_2>0$,有

$$\big|\|\psi_m(t,z_2)\|_{[0,T]}-\|\psi_m(t,z_1)\|_{[0,T]}\big|\leqslant$$
$$\omega_1\|\psi_m(t,z_2)\|_{[0,T]}+|m(z_2)-m(z_1)|\,\|\varphi(t,z_1)\|_{[0,T]}。$$

若 $m_+(x)$ 存在且有限，对 ω_1 稍作调整，则对于 $y_1=0$ 或 $y_2=0$，该关系式也成立。

(3) 若 $m_+(x)$存在且有限，$g\in\mathbf{C}$ 且 $g\neq m_+(x)$，则 $|\|\psi_g(t,x)\|_{[0,T]}-\|\psi_g(t,z)\|_{[0,T]}|\leqslant\omega_2\|\psi_g(t,x)\|_{[0,T]}$。

(4) 若 $m_+(x)$ 存在且有限，$g\in\mathbf{C}$，$g\neq m_+(x)$，且 $y>0$ 足够小，则有

$$|\|\psi_m(t,z)\|_{[0,T]}-\|\psi_{m+}(t,x)\|_{[0,T]}|\leqslant \frac{2|m(z)-m_+(x)|}{|g-m_+(x)|}(\|\psi_m(t,z)\|_{[0,T]}+\|\psi_g(t,z)\|_{[0,T]})+ \omega_2\|\psi_{m+}(t,x)\|_{[0,T]}。$$

证明　(1) 令 $\theta(t,z_2)=\varphi(t,z_2)$，$\psi(t,z_1)=\psi_m(t,z_1)$，$\phi(t,z_1)=\theta(t,z_1)=\varphi(t,z_1)$，则对于 $y_1>0$，$\varphi(t,z_2)$ 和 $\varphi(t,z_1)$ 在 $t=0$ 处满足相同的边界条件，且由文献[13]可知，Wronskian 行列式与 t 的取值无关，即 $W\{\varphi(t,z_1),\psi_m(t,z_1)\}=W\{\varphi(t,z_1),\psi_m(t,z_1)\}_{t=0}=1$，故由公式(11)，有

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(t,z_2)\\ \varphi_2(t,z_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_1(t,z_1) & \psi_{m1}(t,z_1)\\ \varphi_2(t,z_1) & \psi_{m2}(t,z_1)\end{pmatrix}\cdot \int_0^t\begin{pmatrix}\psi_{m1}(s,z_1) & \psi_{m2}(s,z_1)\\ -\varphi_1(s,z_1) & -\varphi_2(s,z_1)\end{pmatrix}(z_1-z_2)\begin{pmatrix}\varphi_1(s,z_2)\\ \varphi_2(s,z_2)\end{pmatrix}\mathrm{d}s+\begin{pmatrix}\varphi_1(t,z_1)\\ \varphi_2(t,z_1)\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(t,z_2)\\ \varphi_2(t,z_2)\end{pmatrix}=\left\{\int_0^t\begin{pmatrix}\varphi_1(t,z_1)\psi_{m1}(s,z_1)\varphi_1(s,z_2)\\ \varphi_2(t,z_1)\psi_{m1}(s,z_1)\varphi_1(s,z_2)\end{pmatrix}\mathrm{d}s-\int_0^t\begin{pmatrix}\psi_{m1}(t,z_1)\varphi_1(s,z_1)\varphi_1(s,z_2)\\ \psi_{m2}(t,z_1)\varphi_1(s,z_1)\varphi_1(s,z_2)\end{pmatrix}\mathrm{d}s+\int_0^t\begin{pmatrix}\varphi_1(t,z_1)\psi_{m2}(s,z_1)\varphi_2(s,z_2)\\ \varphi_2(t,z_1)\psi_{m2}(s,z_1)\varphi_2(s,z_2)\end{pmatrix}\mathrm{d}s-\int_0^t\begin{pmatrix}\psi_{m1}(t,z_1)\varphi_2(s,z_1)\varphi_2(s,z_2)\\ \psi_{m2}(t,z_1)\varphi_2(s,z_1)\varphi_2(s,z_2)\end{pmatrix}\mathrm{d}s\right\}\cdot \mathrm{i}(y_1-y_2)+\begin{pmatrix}\varphi_1(t,z_1)\\ \varphi_2(t,z_1)\end{pmatrix}。$$

则有

$$|\varphi_1(t,z_2)-\varphi_1(t,z_1)|^2\leqslant \left\{|\varphi_1(t,z_1)|\left|\int_0^t|\psi_{m1}(s,z_1)\varphi_1(s,z_2)|\mathrm{d}s\right.+|\psi_{m1}(t,z_1)|\left|\int_0^t|\varphi_1(s,z_1)\varphi_1(s,z_2)|\mathrm{d}s\right.+|\varphi_1(t,z_1)|\left|\int_0^t|\psi_{m2}(s,z_1)\varphi_2(s,z_2)|\mathrm{d}s\right.+|\psi_{m1}(t,z_1)|\left|\int_0^t|\varphi_2(s,z_1)\varphi_2(s,z_2)|\mathrm{d}s\right\}^2|y_2-y_1|^2。$$

对上式两端分别取 $L^2[0,T]$ 范数并应用 Minkowski 不等式，则对于 $t\leqslant T$ 有

$$\left(\int_0^T|\varphi_1(t,z_2)-\varphi_1(t,z_1)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=\|\varphi_1(t,z_2)-\varphi_1(t,z_1)\|_{[0,T]}\leqslant$$
$$2|y_2-y_1|\left(\int_0^T|\varphi_1(t,z_1)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T|\psi_{m1}(t,z_1)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_0^T|\varphi_1(t,z_2)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}+|y_2-y_1|\left(\int_0^T|\varphi_2(t,z_2)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\cdot$$
$$\left\{\left(\int_0^T|\varphi_1(t,z_1)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T|\psi_{m2}(t,z_1)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_0^T|\psi_{m1}(t,z_1)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T|\varphi_2(t,z_1)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\right\}。$$

类似地，有

$$\left(\int_0^T|\varphi_2(t,z_2)-\varphi_2(t,z_1)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=\|\varphi_2(t,z_2)-\varphi_2(t,z_1)\|_{[0,T]}\leqslant$$
$$2|y_2-y_1|\left(\int_0^T|\varphi_2(t,z_1)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T|\psi_{m2}(t,z_1)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_0^T|\varphi_2(t,z_2)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}+|y_2-y_1|\left(\int_0^T|\varphi_1(t,z_2)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\cdot$$
$$\left\{\left(\int_0^T|\varphi_2(t,z_1)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T|\psi_{m1}(t,z_1)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_0^T|\psi_{m2}(t,z_1)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T|\varphi_1(t,z_1)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\right\}。$$

此外，由向量范数的定义可知

$$\|\varphi(t,z_2)-\varphi(t,z_1)\|_{[0,T]}^2=\int_0^T|\varphi_1(t,z_2)-\varphi_1(t,z_1)|^2\mathrm{d}t+\int_0^T|\varphi_2(t,z_2)-\varphi_2(t,z_1)|^2\mathrm{d}t,$$

故由 Cauchy-Schwarz 不等式可以得到

$$\|\varphi(t,z_2)-\varphi(t,z_1)\|_{[0,T]}^2\leqslant 9|y_2-y_1|^2\|\varphi(t,z_1)\|_{[0,T]}^2\|\psi_m(t,z_1)\|_{[0,T]}^2\|\varphi(t,z_2)\|_{[0,T]}^2,$$

则

$$|\|\varphi(t,z_2)\|_{[0,T]}-\|\varphi(t,z_1)\|_{[0,T]}|\leqslant \|\varphi(t,z_2)-\varphi(t,z_1)\|_{[0,T]}\leqslant\omega_1\|\varphi(t,z_2)\|_{[0,T]}。$$

若存在有限极限 $m_+(x)$，令 $z_1=x$，$\psi_{m+}(t,x)=\vartheta(t,x)+m_+(x)\varphi(t,x)$，对 ω_1 做适当调整，记为 ω'_1，令 $\omega'_1=3|y_2|\|\varphi(t,x)\|_{[0,T]}\|\psi_{m+}(t,x)\|_{[0,T]}$。利用上述方法，令 $\theta(t,z_2)=\varphi(t,z_2)$，$\psi(t,z_1)=\psi_{m+}(t,x)$，$\phi(t,z_1)=\theta(t,z_1)=\varphi(t,x)$，也可以推得该结论成立。

(2) 定义 $u_m(t,z_1)=\vartheta(t,z_1)+m(z_2)\varphi(t,z_1)$。同理，利用 Minkowski 不等式，有

$$|\|\psi_m(t,z_2)\|_{[0,T]}-\|\psi_m(t,z_1)\|_{[0,T]}|\leqslant \|\psi_m(t,z_2)-\psi_m(t,z_1)\|_{[0,T]}\leqslant$$
$$\|\psi_m(t,z_2)-u_m(t,z_1)\|_{[0,T]}+\|u_m(t,z_1)-\psi_m(t,z_1)\|_{[0,T]}\leqslant$$
$$\|\psi_m(t,z_2)-u_m(t,z_1)\|_{[0,T]}+|m(z_2)-m(z_1)|\|\varphi(t,z_1)\|_{[0,T]}。$$

令 $\phi(t,z_1)=\varphi(t,z_1)$，$\theta(t,z_1)=u_m(t,z_1)$，$\theta(t,z_2)=\psi_m(t,z_2)$，$\psi(t,z_1)=\psi_m(t,z_1)$，由 $\psi_m(t,z_2)$ 和 $u_m(t,z_1)$ 的定义可知，对于 $y_1,y_2>0$，

$\psi_m(t,z_2)$ 和 $u_m(t,z_1)$ 在 $t=0$ 处满足相同的边界条件,且 $W\{\varphi(t,z_1),\psi_m(t,z_1)\}=1$。因此,应用常数变易公式(11),有

$$
\psi_m(t,z_2)=
\Big\{\int_0^t\begin{pmatrix}\varphi_1(t,z_1)\psi_{m1}(s,z_1)\psi_{m1}(s,z_2)\\ \varphi_2(t,z_1)\psi_{m1}(s,z_1)\psi_{m1}(s,z_2)\end{pmatrix}\mathrm{d}s-
\int_0^t\begin{pmatrix}\psi_{m1}(t,z_1)\varphi_1(s,z_1)\psi_{m1}(s,z_2)\\ \psi_{m2}(t,z_1)\varphi_1(s,z_1)\psi_{m1}(s,z_2)\end{pmatrix}\mathrm{d}s+
\int_0^t\begin{pmatrix}\varphi_1(t,z_1)\psi_{m2}(s,z_1)\psi_{m2}(s,z_2)\\ \varphi_2(t,z_1)\psi_{m2}(s,z_1)\psi_{m2}(s,z_2)\end{pmatrix}\mathrm{d}s-
\int_0^t\begin{pmatrix}\psi_{m1}(t,z_1)\varphi_2(s,z_1)\psi_{m2}(s,z_2)\\ \psi_{m2}(t,z_1)\varphi_2(s,z_1)\psi_{m2}(s,z_2)\end{pmatrix}\mathrm{d}s\Big\}\cdot
\mathrm{i}(y_1-y_2)+u_m(t,z_1)。
$$

与(1)的证明步骤类似,可以推得

$$
\|\psi_m(t,z_2)-u_m(t,z_1)\|_{[0,T]}\leqslant \omega_1\|\psi_m(t,z_2)\|_{[0,T]},
$$

故

$$
\big|\|\psi_m(t,z_2)\|_{[0,T]}-\|\psi_m(t,z_1)\|_{[0,T]}\big|\leqslant
\omega_1\|\psi_m(t,z_2)\|_{[0,T]}+\|u_m(t,z_1)-\psi_m(t,z_1)\|_{[0,T]}\leqslant
\omega_1\|\psi_m(t,z_2)\|_{[0,T]}+|m(z_2)-m(z_1)|\,\|\varphi(t,z_1)\|_{[0,T]}。
$$

类似地,若 $m_+(x)$ 存在有限极限,对于 $y_1=0$ 和 $y_2=0$,对 ω_1 做适当调整,分别记为 ω'_1 和 ω''_1,令

$$
\omega'_1=3|y_2|\,\|\varphi(t,x)\|_{[0,T]}\|\psi_{m+}(t,x)\|_{[0,T]},
$$

$$
\omega''_1=3|y_1|\,\|\varphi(t,z_1)\|_{[0,T]}\|\psi_m(t,z_1)\|_{[0,T]},
$$

则上述结论也成立。

(3) 由 $\psi_g(t,z)$ 和 $\psi_m(t,z)$ 的定义,可以得到它们的 Wronskian 行列式

$$
W\{\psi_g(t,z),\psi_m(t,z)\}=
\begin{vmatrix}\vartheta_1(t,z)+g\varphi_1(t,z) & \vartheta_1(t,z)+m(z)\varphi_1(t,z)\\ \vartheta_2(t,z)+g\varphi_2(t,z) & \vartheta_2(t,z)+m(z)\varphi_2(t,z)\end{vmatrix}=
\begin{vmatrix}\sin\alpha+g\cos\alpha & \sin\alpha+m(z)\cos\alpha\\ \cos\alpha-g\sin\alpha & \cos\alpha-m(z)\sin\alpha\end{vmatrix}=
g-m(z)。
$$

又因为 $g\neq m_+(x)$,$m(z)$ 是 y 的连续函数,故对于足够小的 y,有

$$
|g-m(z)|>\frac{|g-m_+(x)|}{2}>0。\tag{12}
$$

由此可以知 Wronskian 行列式非零,即 $\psi_g(t,z)$ 和 $\psi_m(t,z)$ 是 $Lu=zu$ 的线性无关解。

令 $z_1=z,z_2=x,\theta(t,z_1)=\phi(t,z_1)=\psi_g(t,z)$,$\theta(t,z_2)=\psi_g(t,x)$,$\psi(t,z_1)=\psi_m(t,z)$,则对于 $y>0$,$\psi_g(t,x)$ 和 $\psi_g(t,z)$ 在 $t=0$ 处满足相同的边界条件。同理,利用常数变易公式(11),有

$$
\psi_g(t,x)=\Big\{\int_0^t\begin{pmatrix}\psi_{g1}(t,z)\psi_{m1}(s,z)\psi_{g1}(s,x)\\ \psi_{g2}(t,z)\psi_{m1}(s,z)\psi_{g1}(s,x)\end{pmatrix}\mathrm{d}s-
\int_0^t\begin{pmatrix}\psi_{m1}(t,z)\psi_{g1}(s,z)\psi_{g1}(s,x)\\ \psi_{m2}(t,z)\psi_{g1}(s,z)\psi_{g1}(s,x)\end{pmatrix}\mathrm{d}s+
\int_0^t\begin{pmatrix}\psi_{g1}(t,z)\psi_{m2}(s,z)\psi_{g2}(s,x)\\ \psi_{g2}(t,z)\psi_{m2}(s,z)\psi_{g2}(s,x)\end{pmatrix}\mathrm{d}s-
\int_0^t\begin{pmatrix}\psi_{m1}(t,z)\psi_{g2}(s,z)\psi_{g2}(s,x)\\ \psi_{m2}(t,z)\psi_{g2}(s,z)\psi_{g2}(s,x)\end{pmatrix}\mathrm{d}s\Big\}\cdot
\frac{\mathrm{i}y}{g-m(z)}+\psi_g(t,z)。
$$

同理,利用该引理的(1)的证明方法,结合式(12),就可以得到(3)的结论。

(4) 定义 $\psi_x(t,z)=\vartheta(t,z)+m_+(x)\varphi(t,z)$,则由 Minkowski 不等式,有

$$
\big|\|\psi_m(t,z)\|_{[0,T]}-\|\psi_{m+}(t,x)\|_{[0,T]}\big|\leqslant
\|\psi_m(t,z)-\psi_x(t,z)+\psi_x(t,z)-\psi_{m+}(t,x)\|_{[0,T]}\leqslant
\|\psi_x(t,z)-\psi_{m+}(t,x)\|_{[0,T]}+
|m(z)-m_+(x)|\,\|\varphi(t,z)\|_{[0,T]}。
$$

由 $\psi_m(t,z)$ 和 $\psi_g(t,z)$ 的定义知

$$
\varphi(t,z)=\frac{\psi_m(t,z)-\psi_g(t,z)}{m(z)-g}。
$$

由 Minkowski 不等式和关系式(12),有

$$
\|\varphi(t,z)\|_{[0,T]}\leqslant
\frac{2}{|g-m_+(x)|}(\|\psi_m(t,z)\|_{[0,T]}+\|\psi_g(t,z)\|_{[0,T]})。
$$

令 $z_1=z,z_2=x,\theta(t,z_1)=\psi_x(t,z),\theta(t,z_2)=\psi_{m+}(t,x),\phi(t,z_1)=\psi_g(t,z),\psi(t,z_1)=\psi_m(t,z)$,则对于 $y>0$,$\psi_{m+}(t,x)$ 和 $\psi_x(t,z)$ 在 $t=0$ 处满足相同的边界条件。因此,应用常数变易公式(11),有

$$
\psi_{m+}(t,x)=\Big\{\int_0^t\begin{pmatrix}\psi_{g1}(t,z)\psi_{m1}(s,z)\psi_{m+1}(s,x)\\ \psi_{g2}(t,z)\psi_{m1}(s,z)\psi_{m+1}(s,x)\end{pmatrix}\mathrm{d}s-
\int_0^t\begin{pmatrix}\psi_{m1}(t,z)\psi_{g1}(s,z)\psi_{m+1}(s,x)\\ \psi_{m2}(t,z)\psi_{g1}(s,z)\psi_{m+1}(s,x)\end{pmatrix}\mathrm{d}s+
\int_0^t\begin{pmatrix}\psi_{g1}(t,z)\psi_{m2}(s,z)\psi_{m+2}(s,x)\\ \psi_{g2}(t,z)\psi_{m2}(s,z)\psi_{m+2}(s,x)\end{pmatrix}\mathrm{d}s-
\int_0^t\begin{pmatrix}\psi_{m1}(t,z)\psi_{g2}(s,z)\psi_{m+2}(s,x)\\ \psi_{m2}(t,z)\psi_{g2}(s,z)\psi_{m+2}(s,x)\end{pmatrix}\mathrm{d}s\Big\}\cdot
\frac{\mathrm{i}y}{g-m(z)}+\psi_x(t,z)。
$$

利用与该引理的(1)类似的证明方法,可以推得(4)的结果。综上,引理4证毕。

注 若 $\omega_3=3|y_2-y_1|\,\|\varphi(t,z_1)\|_{[0,T]}\|\vartheta(t,z_1)\|_{[0,T]}$,设 $\theta(t,z_1)=\phi(t,z_1)=\varphi(t,z_1),\theta(t,z_2)=\varphi(t,z_2)$,$\psi(t,z_1)=\vartheta(t,z_1),z_1=x+\mathrm{i}y_1,z_2=x+\mathrm{i}y_2,y_1,y_2\in\mathbf{R}$,则有

$$
\big|\|\varphi(t,z_2)\|_{[0,T]}-\|\varphi(t,z_1)\|_{[0,T]}\big|\leqslant
\omega_3\|\varphi(t,z_2)\|_{[0,T]}。
$$

因此,当 $T\leqslant\infty,x\in\mathbf{R}$ 时,$\|\varphi(t,z)\|_{[0,T]}$ 是 y 的连

续函数，$y \in \mathbf{R}$。类似地，若

$$\omega_4 = \frac{3|y_2 - y_1|}{g} \| \psi_g(t,z_1) \|_{[0,T]} \| \vartheta(t,z_1) \|_{[0,T]},$$

设 $\theta(t,z_1) = \phi(t,z_1) = \psi_g(t,z_1)$，$\psi(t,z_1) = \vartheta(t,z_1)$，$\theta(t,z_2) = \psi_g(t,z_2)$，$y_1, y_2 \in \mathbf{R}$，则有

$$\left| \| \psi_g(t,z_2) \|_{[0,T]} - \| \psi_g(t,z_1) \|_{[0,T]} \right| \leqslant \omega_4 \| \psi_g(t,z_2) \|_{[0,T]},$$

故 $\| \psi_g(t,z) \|_{[0,T]}$ 也是 y 的连续函数。因此，可以得到下面的结论。

引理 5　若 $T \leqslant \infty$，$x, y \in \mathbf{R}$，$z = x + \mathrm{i}y$，则方程组 $Lu = zu$ 的解 $\varphi(t,z)$ 和 $\psi_g(t,z)$ 的范数 $\| \varphi(t,z) \|_{[0,T]}$，$\| \psi_g(t,z) \|_{[0,T]}$ 是 y 的连续函数。

利用上述解的范数的性质，接下来考察 m 函数与狄拉克方程组的从属解的关系。

设 $x \in \mathbf{R}$，$\varepsilon, y' > 0$，

$$\frac{\varepsilon^2}{9} = \sup_{0<y\leqslant y'} |m(z) - m_+(x)| + y', \tag{13}$$

$$|y'|^{\frac{1}{2}} \| \varphi(t,z') \|_{[0,T_{y'}]} = 1, \tag{14}$$

其中 $z = x + \mathrm{i}y$，$z' = x + \mathrm{i}y'$。显然，y' 是关于 ε 的连续单调函数，且当 $\varepsilon \to 0$ 时，$y' \to 0$。

由上述内容及文献[1]，可以得到当 $\varepsilon \to 0$，$m(z)$ 收敛到一个有限实极限 $m(x)$ 时，$T_{y'}$ 与 ε 之间的关系，即如下引理。

引理 6[1]　令 $x \in \mathbf{R}$，$T_{y'}$ 满足关系式(14)，设当 $y' \to 0$ 时，$m(z')$ 收敛到一个有限实极限 $m(x)$，则

(1) $\dfrac{\| \psi_m(t,x) \|_{[0,T_{y'}]}}{\| \varphi(t,x) \|_{[0,T_{y'}]}} < \varepsilon$，其中 ε 充分小。

(2) $T_{y'}$ 关于 ε 连续，且当 $\varepsilon \to 0$ 时，$T_{y'} \to \infty$。

该引理的证明与文献[1]中引理 9 的证明类似，此处省略。

利用引理 6，可以得到从属解与 m 函数之间的关系，即下面的命题。

命题 1　令 $x \in \mathbf{R}$，$z = x + \mathrm{i}y$，则有

(1) 当 $y \to 0$，$m(z)$ 收敛到一个有限实极限 $m(x)$ 时，$\psi_m(t,x)$ 是 $Lu = xu$ 的一个从属解。

(2) 当 $y \to 0$，$|m(z)| \to \infty$ 时，$\varphi(t,x)$ 是 $Lu = xu$ 的一个从属解。

证明　(1) 由引理 6 及文献[1]中推论 2 可推得该结论成立。

(2) 该结论的证明可借助文献[1]中的方法，利用边界条件 α 进行证明。由已知条件，当 $y \to 0$ 时，$|m(z)| \to \infty$。不妨设对于边界条件 $\alpha_1 \in [0,\pi)$，有 $|m(z,\alpha_1)| \to \infty$，则由关系式(10)知，此时对任意不同的边界条件 $\alpha_2 \in [0,\pi)$，有

$$\lim_{y\to 0} |m(z,\alpha_2)| = -\cot(\alpha_1 - \alpha_2),$$

显然这是一个有限极限，则由命题 1 的(1)可知，

$$\psi_m(t,x,\alpha_2) = \vartheta(t,x,\alpha_2) + m(x,\alpha_2)\varphi(t,x,\alpha_2)$$

是方程组 $Lu = xu$ 的从属解。又由 0 处的边界条件可以得到

$$\sin\alpha_1 \psi_{m1}(0,x,\alpha_2) + \cos\alpha_1 \psi_{m2}(0,x,\alpha_2) = 0,$$

进一步地，可以将其转化为

$$-\varphi_2(0,x,\alpha_1)\psi_{m1}(0,x,\alpha_2) + \varphi_1(0,x,\alpha_1)\psi_{m2}(0,x,\alpha_2) = 0,$$

即 $W\{\varphi(t,x,\alpha_1), \psi_m(t,x,\alpha_2)\} = 0$，故 $\varphi(t,x,\alpha_1)$ 和 $\psi_m(t,x,\alpha_2)$ 线性相关，即 $\psi_m(t,x,\alpha_2)$ 是 $\varphi(t,x,\alpha_1)$ 的常数倍，于是 $\varphi(t,x,\alpha_1)$ 是方程组 $Lu = xu$ 的一个从属解。证毕。

命题 2　若 $Lu = xu$ 的从属解存在，$x \in \mathbf{R}$，则当 $y \to 0$ 时，$m(z)$ 只可能收敛到一个有限实极限或 $|m(z)| \to \infty$，其中 $z = x + \mathrm{i}y$。

该命题的证明与文献[1]中推论 2 的证明类似，故此处省略。

定理 1 的证明　由命题 1 可知，当 z 趋近 x 时，若函数 $m(z)$ 收敛到一个有限实极限或 $|m(z)| \to \infty$，则方程组 $Lu = xu$ 存在从属解。反之，若 $Lu = xu$ 存在从属解，则由命题 2 可知，当 z 趋近 x 时，$m(z)$ 只可能收敛到一个有限实极限或 $|m(z)| \to \infty$。定理证毕。

定理 2 的证明　充分性：由命题 1 知，若对于边界条件 α_1，有 $\lim\limits_{y\to 0} |m(z,\alpha_1)| = \infty$ 成立，其中 $z = x + \mathrm{i}y$，则由关系式(10)可知，对任意的边界条件 α_2，$\alpha_2 \neq \alpha_1$，有 $\lim\limits_{y\to 0} |m(z,\alpha_2)| = -\cot(\alpha_1 - \alpha_2)$，即 $m(z,\alpha_2)$ 收敛到一个有限实极限，此时 $Lu = xu$ 存在从属解 $\psi_m(t,x,\alpha_2)$，即 $\psi_m(t,z,\alpha_2) = K\varphi(t,z,\alpha_1)$，$K$ 是一个常数。

必要性：由命题 2，若方程组 $Lu = xu$ 存在从属解，则函数 $m(z)$ 要么收敛到一个有限实极限，要么 $|m(z)| \to \infty$。若是第一种情况，则由命题 1，$\psi_m(t,x)$ 是方程组 $Lu = xu$ 的一个从属解。若是第二种情况，也可以由式(10)推得，此时存在边界条件 α，使 $m(z,\alpha)$ 收敛到一个有限实极限，$\psi_m(t,x,\alpha)$ 是方程组 $Lu = xu$ 的从属解。定理 2 证毕。

定理 3 的证明　因为(4)显然成立，由(2)和(3)成立可推得(1)成立，由(2)和(4)成立可以推得(5)成立，故只需要证明(2)和(3)成立即可。

先证明(2)。只需证明 $S_s \sim S'_s$。事实上，我们可以证明 $S_s = S'_s$。若 $x \in S'_s$，则 $\mathrm{Im} m_+(x) = \infty$，由命题 1 的(2)知，$x \in S_s$，故 $S'_s \subset S_s$。下面证 $S_s \subset S'_s$。若 $x \in S_s$，此时 $\varphi(t,x)$ 是 $Lu = xu$ 的从属解，则由定理 1 及命题 1 知，$x \in S'_s$，故 $S_s \subset S'_s$。综上，$S'_s = S_s$，更有 $S_s \sim S'_s$，即(2)成立。

现证明(3)。由文献[1]可知，集合

$$M = \{x \in \mathbf{R}: 不存在\ \alpha\ 使\ \mathrm{Im} m_+(x)\ 存在且为零\}$$

是测度 $\mu_{a.c.}$ 的一个最小支集。由最小支集的等价性可知，$M\sim S'_{\mathrm{a.c.}}$，故可以转化为证明 $S_{\mathrm{a.c.}}\sim M$。由定理2，若方程组 $Lu=xu$ 不存在从属解，则使得 $m_{+}(x,\alpha)$ 存在且为实值的 α 不存在，即 $S_{\mathrm{a.c.}}\subset M$。同理，由定理2也可推得，若 $\mathrm{Im}m_{+}(x,\alpha)\neq 0$，即 $m(z,\alpha)$ 收敛到一个有限非实极限，则方程组没有从属解，即 $M\subset S_{\mathrm{a.c.}}$，故 $S_{\mathrm{a.c.}}=M$。因此，$S_{\mathrm{a.c.}}$ 也是测度 $\mu_{\mathrm{a.c.}}$ 的最小支集，即(3)成立。定理3证毕。

参考文献：

[1] Gilbert D J, Pearson D B. On subordinacy and analysis of the spectrum of one-dimensional Schrödinger operators[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1987, 128(1): 30-56.

[2] Gilbert D J, Pearson D B. On subordinacy and analysis of the spectrum of Schrödinger operators with two singular endpoints[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 1989, 112(3-4): 213-229.

[3] Jitomirskaya S, Last Y. Power-law subordinacy and singular spectra I Half-line operators[J]. Acta Mathematica, 1999, 183(2): 171-189.

[4] Jitomirskaya S, Last Y. Power-law subordinacy and singular spectra II Line operators[J]. Communications in Mathematical Physics, 2000, 211(3): 643-658.

[5] Jitomirskaya S, Mavi R. Continuity of the measure of the spectrum for quasiperiodic Schrödinger operators with rough potentials[J]. Communications in Mathematical Physics, 2014, 325(2): 585-601.

[6] Bazao V R, Carvalho S L, De Oliveira C R. Packing subordinacy with application to spectral continuity[J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 2020, 108(2): 226-244.

[7] Hassi S, Remling C, De Snoo H. Subordinate solutions and spectral measures of canonical systems[J]. Integral Equations and Operator Theory, 2000, 37(1): 48-63.

[8] Khan S, Pearson D B. Subordinacy and spectral theory for infinite matrices[J]. Helvetica Physica Acta, 1992, 65(4): 505-527.

[9] Killip R, Kiselev A, Last Y. Dynamical upper bounds on wave-packet spreading[J]. American Journal of Mathematics, 2003, 125(5): 1165-1198.

[10] Damanik D, Killip R, Lenz D. Uniform spectral properties of one-dimensional quasicrystals Ⅲ, α-continuity[J]. Communications in Mathematical Physics, 2000, 212(1): 191-204.

[11] Remling C. Relationships between the m-function and subordinate solutions of second order differential operators[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1997, 206(2): 352-363.

[12] Guo S Z, Damanik D, Ong D C. Subordinacy theory for extended CMV matrices[J]. Science China Mathematics, 2021, 65(3): 539-558.

[13] Levitan B M, Sargsjan I S. Sturm-Liouville and Dirac Operators[M]. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991: 217-218.

[14] Schmidt K M. A remark on the essential spectra of Dirac systems[J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 2000, 32: 63-70.

[15] Weidmann J. Oszillationsmethoden für Systeme gewöhnlicher Differential gleichungen[J]. Mathematische Zeitschrift, 1971, 119: 349-373.

[16] Titchmarsh E C. Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Part I[M]. Oxford: Oxford University Press, 1962: 68-69.

[17] Danielyan A A, Levitan B M. On the asymptotic behavior of the Weyl-Titchmarsh m-function[J]. Mathematics of the USSR-Izvestiya, 1991, 36(3): 487-496.

[18] 《数学辞海》总编辑委员会. 数学辞海第3卷[M]. 南京：东南大学出版社，2002.
Editorial Board of the Dictionary of Mathematics. Volume 3 of the Dictionary of Mathematics[M]. Nanjing: Southeast University Press, 2002.

[19] Brunnhuber R, Eckhardt J, Kostenko A, et al. Singular Weyl-Titchmarsh-Kodaira theory for one-dimensional Dirac operators[J]. Monatshefte für Mathematik, 2014, 174(4): 515-547.

[20] Coddington E A, Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations[M]. New York: Tata McGraw-Hill Education, 1955: 74-75.

On Subordinate Solutions and the Spectrum of Dirac Operators

Wang Xiaohui

(School of Mathematical Sciences, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

Abstract: In this article, the subordinate solution of the Dirac equations

$$Lu=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\begin{pmatrix}p(t) & 0\\ 0 & r(t)\end{pmatrix}u=xu,\ t\geqslant 0,\ x\in\mathbf{R}$$

is defined by using the L^2 norms, the relation between the subordinate solutions and Weyl-Titchmarsh function is given. Then, the decomposition of the spectrum is obtained by using the relation and the minimum support of spectrum measure.

Key words: Dirac operators; Weyl-Titchmarsh function; minimum support; L^2 norms; subordinacy theory

AMS Subject Classifications: 34L05; 37B02

责任编辑 朱宝象