具有共形广义径向场的球对称 Finsler 流形

富宇¹, 陈成², 莫小欢^{2*}

1. 东北财经大学数学学院, 大连 116025;

2. 北京大学数学科学学院, 北京 100871

E-mail: yufu@dufe.edu.cn, chch@pku.edu.cn, moxh@pku.edu.cn

收稿日期: 2019-09-10; 接受日期: 2020-05-12; 网络出版日期: 2020-06-05; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11601068 和 11771020) 资助项目

摘要 共形向量场在 Finsler 几何的研究特别是共形航海问题中起着重要的作用. 本文通过建立和求解相应的偏微分方程, 完全确定以广义径向场为共形向量场的所有球对称 Finsler 度量. 这些度量包含常截面曲率的 Riemann 度量.

关键词 Finsler 度量 共形向量场 球对称度量 广义径向场

MSC (2010) 主题分类 58E20, 53B40

1 引言

单位球上的 Funk 度量是一种极其重要的 Finsler 度量. Cheng 等^[1] 证明了既是射影平坦又是对偶平坦的 Finsler 度量只能是单位球上的 Funk 度量. Huang 和 Mo^[2] 受 Funk 度量的启发, 构造了无限多个新的对偶平坦的球对称 Finsler 度量. 从构造上来看, 单位球上的 Funk 度量是从 Euclid 空间的范数和径向场通过航海问题产生的. 径向场是 Euclid 范数具有常伸缩系数为 $\frac{1}{2}$ 的共形向量场. 一般地, 考虑常截面曲率为 μ 的 Riemann 度量

$$h_\mu = \frac{\sqrt{|y|^2 w^2 - \mu \langle x, y \rangle^2}}{w^2}, \quad w := \sqrt{1 + \mu \langle x, x \rangle}. \quad (1.1)$$

事实上, 一切常截面曲率的 Riemann 度量局部地均可表示为 (1.1). 那么相应的共形向量场为

$$\sqrt{1 + \mu |x|^2} x. \quad (1.2)$$

度量 (1.1) 也可表示为以下球对称 Finsler 度量的形式:

$$h_\mu(x, y) = |y| \phi_\mu(r, s),$$

英文引用格式: Fu Y, Chen C, Mo X H. On spherically symmetric Finsler manifolds with conformal generalized radial fields (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 999–1006, doi: 10.1360/SSM-2019-0217

其中 $r = |x|$, $s = \frac{\langle x, y \rangle}{|y|}$, $\phi_\mu = \frac{\sqrt{1+\mu r^2 - \mu s^2}}{1+\mu r^2}$.

最近, Shen 和 Yuan^[3] 通过找出刻画一类具有 $a_1 \neq 0$ 的广义 (α, β) 流形上的共形向量场的方程, 得到了两类特殊的球对称 Finsler 度量共形向量场的解析表达式. 后来, Chen 和 Mo^[4] 通过考察 $a_1 = 0$ 的情形, 得到了一类单色球对称 Finsler 度量共形向量场的解析表达式. 因此, 球对称度量的共形向量场是值得进一步探索的.

$\mathbb{R}^n$ 中的开球 $\mathbb{B}^n(\nu)$ 上的 Finsler 度量 F 称为球对称度量是指满足等式 $F(Ax, Ay) = F(x, y)$ 的 Finsler 度量, 其中 $x \in \mathbb{B}^n(\nu)$, $y \in T_x \mathbb{B}^n(\nu)$, $A \in O(n)$. 这类度量既有极其丰富的例子, 又具有一系列深刻的结果 (参见文献 [5]). 例如, 常旗曲率射影平坦的球对称 Finsler 度量已被完全分类^[6-8], 赋予这种度量的流形也称为 Finsler 空间形式^[9]. 无穷多个非平凡的 Weyl 二次 Finsler 度量已被解析构造^[10].

一个自然的问题是确定以向量场 (1.2) (称之为广义径向场) 为共形向量场的所有球对称 Finsler 度量. 这些 Finsler 度量自然地包括具有常截面曲率的 Riemann 度量 (1.1).

本文首先找出了刻画广义径向场为共形向量场的球对称 Finsler 度量的偏微分方程. 确切地, 得到了下述定理:

定理 1.1 广义径向向量场 (1.2) 是球对称 Finsler 度量 $F(x, y) = |y|\phi(|x|, \frac{\langle x, y \rangle}{|y|})$ 以 $c(x)$ 为伸缩系数的共形向量场当且仅当 ϕ 满足

$$\left(2w - \frac{1 + \mu s^2}{w}\right)s\phi_s + wr\phi_r = \left(2c(x) - w - \frac{\mu s^2}{w}\right)\phi. \quad (1.3)$$

共形向量场在 Finsler 几何中扮演着重要的角色^[11-14]. Shen 和 Xing^[15] 及 Cheng 和 Shen^[16] 研究了常截面曲率 Riemann 流形上的共形航海问题, 从而分类了具有标量旗曲率和迷向 S 曲率的 Randers 度量. Shen 和 Xia^[17] 通过探讨 Randers 流形上的共形航海问题, 完全确定了具有弱迷向旗曲率的 Randers 流形上的共形向量场. 后来, Huang 和 Mo^[18] 发现了任意 Finsler 流形上的共形航海问题的旗曲率变化公式, 发展了 Cheng 和 Shen^[16] 的 Riemann 流形上共形航海问题的公式. 最近, Huang 等^[12] 找到了任意 Finsler 流形上的共形航海问题 Landsberg 曲率的变化公式, 该公式是强凸域上的 Funk 度量和 Randers 度量的 Landsberg 曲率的变化公式的自然发展.

通过解一阶拟线性偏微分方程 (1.3), 我们得到了下述结果:

定理 1.2 设 $F(x, y) = |y|\phi(|x|, \frac{\langle x, y \rangle}{|y|})$ 是 $\mathbb{B}^n(\nu)$ 上的球对称 Finsler 度量, 且 $U_x := \sqrt{1 + \mu|x|^2}x$ 是 $\mathbb{B}^n(\nu)$ 上的广义径向场, 则 U 是 F 的具有伸缩系数 $c(x)$ 的共形向量场当且仅当 $\phi = \phi(r, s)$ 满足

$$\phi(r, s) = \sqrt{s^2}\xi(r)f\left(\frac{s}{w\sqrt{r^2 - s^2}}\right), \quad (1.4)$$

其中 $c = c(|x|)$, f 是非负可微的函数, 且

$$\xi(r) = \frac{1}{r^2 w} e^{\int_{r_0}^{r^2} \frac{c(\sqrt{t})}{t\sqrt{1+\mu t}} dt}.$$

此时, U 具有伸缩系数

$$c(x) = \frac{1}{2} \left[3w + \frac{\mu r^2}{w} + rw(\ln \xi)' \right]. \quad (1.5)$$

定理 1.2 中 $\mu = 0$ 情形已由李影和莫小欢^[19] 得到. 此外, (1.4) 所对应的球对称 Finsler 度量的共形向量场其实还有很多. 第 4 节解析构造这些球对称度量更一般形式的共形向量场, 参见推论 4.1. 关于球对称度量的一些新结果, 参见文献 [5, 7, 20-22].

2 准备工作

本节给出一些准备工作. 首先回顾 Finsler 流形上共形向量场的定义 (参见文献 [23]):

定义 2.1 Finsler 流形 (M, F) 上的向量场 V 称为以 $c(x)$ 为伸缩系数的共形向量场, 如果其生成的单参数变换群 ϕ_t 满足

$$F(\phi_t(x), \phi_{t*}(y)) = e^{2\sigma_t(x)} F(x, y), \quad \forall x \in M, \quad y \in T_x M,$$

其中 $c(x) = [\frac{d\sigma_t(x)}{dt}]|_{t=0}$. 特别地, 如果 c 为常数, 则称 V 为相似向量场. 如果 $c = 0$, 则称 V 为 Killing 向量场 [11, 23].

Huang 和 Mo [11] 给出了下述共形向量场:

例 2.1 设 a 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个常向量, 满足 $|a| < 1$. 定义 $F = \alpha + \beta$ 为

$$F(x, y) = e^{|x|^2}(|y| + \langle a, y \rangle),$$

则 F 是 Randers 度量. 另外, 再定义 $\mathbb{R}^n$ 的向量场 V 为

$$V_x = -xQ - b, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

其中 b 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个常向量, 且 Q 是一个满足 $Qa^T = 0$ 的反对称矩阵. 那么 V 是关于 F 的共形向量场, 其伸缩系数为 $-\langle b, x \rangle$, 而且, V 是相似场当且仅当 $b = 0$.

定义 2.2 $\mathbb{B}^n(\nu) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| < \nu\}$ 上的 Finsler 度量 F 被称为球对称的, 如果它对任意 $x \in \mathbb{B}^n(\nu)$, $y \in T_x \mathbb{B}^n(\nu)$ 且 $A \in O(n)$ 满足 $F(Ax, Ay) = F(x, y)$ (参见文献 [5, 19]).

Huang 和 Mo [24] 给出了 Finsler 度量 F 是球对称的充要条件:

引理 2.1 $\mathbb{B}^n(\nu)$ 上的一个 Finsler 度量 F 是球对称的当且仅当存在一个函数 $\phi: [0, \nu) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $F(x, y) = |y|\phi(|x|, \frac{\sqrt{\langle x, y \rangle}}{|y|})$, 其中 $(x, y) \in \mathcal{T}\mathbb{B}^n(\nu) := T\mathbb{B}^n(\nu) \setminus \{0\}$.

球对称 Finsler 度量包含了 $\mathbb{B}^n(1)$ 上的 Funk 度量; 常截面曲率 Riemann 度量 (1.1) 和 Finsler 空间形式 [9], 也就是常旗曲率射影平坦的球对称 Finsler 度量 [6–8].

定义 2.3 设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, μ 是常数. 称 $U_x := \sqrt{1 + \mu|x|^2}x$ 为 $\mathcal{U}$ 上的广义径向场.

容易看出, $\mathcal{U}$ 上广义径向场 U_x 是径向场 $V_x := x$ 的自然推广. 它的重要性是它们是常截面曲率 Riemann 度量的共形向量场 [17]. 容易证明下面的引理:

引理 2.2 设 (M, F) 是一个 Finsler 流形, 则

(i) V 是 (M, F) 的具有伸缩系数 $c(x)$ 的共形向量场当且仅当 $X_V = c(x)F$, 其中 X_V 是 V 的完全提升;

(ii) 对于任意常数 a 和 b , 如果 $X_U(F) = c_U(x)F$, $X_V(F) = c_V(x)F$, 则 $X_{aU+bV}(F) = [ac_U(x) + bc_V(x)]F$.

3 共形的广义径向向量场

为了证明推论 4.1 (见第 4 节), 给出如下命题:

命题 3.1 [11] 设 $V := Qx$, 其中 $Q^T = -Q$, 那么 V 是球对称度量 $F(x, y) = |y|\phi(|x|, \frac{\langle x, y \rangle}{|y|})$ 的 Killing 场.

证明 记 $Q = (q_{ij})$, 则 $q_{ij} + q_{ji} = 0$. 记 $V = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \approx (v^1, \dots, v^n)$, $x = x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \approx (x^1, \dots, x^n)$, 则 $v^i = q_{ij}x^j$, $\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}(q_{ik}x^k) = q_{ik}\delta_j^k = q_{ij}$.

由文献 [19], 有

$$F_{x^i} = \frac{|y|}{r} \phi_r x^i + \phi_s y^i. \quad (3.1)$$

由文献 [20], 有

$$F_{y^i} = \frac{y^i}{|y|} \phi + x^i \phi_s - \frac{s}{|y|} y^i \phi_s. \quad (3.2)$$

故得

$$\begin{aligned} X_V(F) &= \left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + y^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i} \right) F \\ &= q_{ij}x^j \left(\frac{|y|}{r} \phi_r x^i + \phi_s y^i \right) + y^j q_{ij} \left(\frac{y^i}{|y|} \phi + x^i \phi_s - \frac{s}{|y|} y^i \phi_s \right) \\ &= q_{ij}x^j y^i \phi_s + q_{ij}x^i y^j \phi_s \\ &= (q_{ij} + q_{ji})x^j y^i \phi_s \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中 X_V 是 V 的完全提升. 因而, V 是 F 的 Killing 场. 证毕. $\square$

广义径向场是常截曲率 Riemann 度量 (1.1) 的共形向量场, 而 (1.1) 是球对称 Finsler 度量. 一个自然问题是, 广义径向场是哪些球对称 Finsler 度量的共形向量场? 为此首先证明定理 1.1.

定理 1.1 的证明 记 $U = \sqrt{1 + \mu|x|^2}x = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 则 $u^i = wx^i$, 因而,

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}(wx^i) = \frac{\mu x^i x^j}{w} + w\delta_j^i, \quad (3.3)$$

其中我们已用 $w_{x^j} = \frac{\mu x^j}{w}$. 因为 F 关于 y 是一阶正齐性的, 故

$$y^j F_{y^j} = F. \quad (3.4)$$

分别利用 (3.2)–(3.4), 有

$$\begin{aligned} y^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \frac{\partial F}{\partial y^i} &= y^j \left(\frac{\mu x^i x^j}{w} + w\delta_j^i \right) F_{y^i} \\ &= \frac{\mu \langle x, y \rangle}{w} x^i \left(\frac{y^i}{|y|} \phi + x^i \phi_s - \frac{s}{|y|} y^i \phi_s \right) + y^j F_{y^j} w \\ &= \frac{\mu \langle x, y \rangle}{w} \left(\frac{\langle x, y \rangle}{|y|} \phi + r^2 \phi_s - \frac{\langle x, y \rangle}{|y|} s \phi_s \right) + wF \\ &= \mu \frac{|y|s}{w} (s\phi + r^2 \phi_s - s^2 \phi_s) + |y|w\phi. \end{aligned} \quad (3.5)$$

由 (3.1), 有

$$u^i \frac{\partial F}{\partial x^i} = wx^i \left(\frac{|y|}{r} \phi_r x^i + \phi_s y^i \right) = |y|w(r\phi_r + s\phi_s). \quad (3.6)$$

利用 (3.5) 和 (3.6), 得到

$$\begin{aligned} X_U(F) &= \left(u^i \frac{\partial}{\partial x^i} + y^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i} \right) F \\ &= |y| \left[w(r\phi_r + s\phi_s) + \frac{\mu s}{w} (s\phi + r^2\phi_s - s^2\phi_s) + w\phi \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

注意到 $\mu r^2 = w^2 - 1$, 因此,

$$\frac{\mu s^2}{w} r^2 \phi_s = \frac{s}{w} \phi_s (w^2 - 1) = s\phi_s w - \frac{s}{w} \phi_s.$$

上式代入 (3.7) 得

$$X_U(F) = |y| \left[\left(w + \frac{\mu s^2}{w} \right) \phi + s \left(2w - \frac{1}{w} - \frac{\mu s^2}{w} \right) \phi_s + wr\phi_r \right]. \quad (3.8)$$

由引理 2.2, U 是 F 的具有伸缩系数为 $c(x)$ 的共形向量场当且仅当下式成立^[10]:

$$X_U(F) = 2c(x)F.$$

结合 (3.8), 便得到了定理 1.1. 证毕. $\square$

注 3.1 当 $\mu = 0$ 时, 定理 1.1 中的方程归结为 $s\phi_s + r\phi_r = (2c - 1)\phi$, 它正是文献 [19, (4.2)] 上方的式子.

4 主要定理的证明

定理 1.2 的证明 拟线性方程 (1.3) 的特征方程为

$$\frac{dr}{rw} = \frac{ds}{s(2w - \frac{1+\mu s^2}{w})} = \frac{-d\psi}{w + \frac{\mu s^2}{w} - 2c(r)}, \quad (4.1)$$

其中 $\psi := \ln \phi$. 注意到 $\mu r^2 = w^2 - 1$, 由 (4.1) 得

$$\begin{aligned} d \left[w^2 \left(1 - \frac{r^2}{s^2} \right) \right] &= 2r[\mu(s^2 - r^2) - w^2] \frac{dr}{s^2} + 2r^2 w^2 \frac{ds}{s^3} \\ &= -\frac{2r^2 w^2}{s^2} \left(2w - \frac{1 + \mu s^2}{w} \right) \left[\frac{dr}{rw} - \frac{ds}{s(2w - \frac{1 + \mu s^2}{w})} \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

那么,

$$w^2 \left(1 - \frac{r^2}{s^2} \right) = C \quad (4.3)$$

是一个初积分, 其中 C 是积分常数. 注意到 $r^2 - s^2 \geq 0$. 上式等价于

$$w^2 + \frac{1}{C_1^2} = \frac{rw^2}{s^2},$$

其中 $C_1 = \sqrt{-\frac{1}{C}}$, 即 $\frac{s}{w\sqrt{r^2-s^2}} = C_1$ 是 (4.2) 的一个初积分. 进一步, (4.3) 等价于

$$\frac{r^2 w^2}{s} = w^2 - C = w^2 + \frac{1}{C_1^2}, \quad (4.4)$$

或者 $s^2 = \frac{r^2}{1-\frac{C}{w^2}}$. 代入 (4.1), 得

$$\frac{dr}{rw} = \frac{-d\psi}{w + \frac{\mu}{w} \cdot \frac{r^2}{1-\frac{C}{w^2}} - 2c(r)}.$$

故得

$$-d\psi = \frac{1}{rw} \left[w + \frac{\mu}{w} \cdot \frac{r^2}{1-\frac{C}{w^2}} - 2c(r) \right] dr = \left[\frac{1}{2r^2} + \frac{\mu}{2(w^2 - C)} - \frac{c(r)}{r^2 w} \right] dr^2.$$

进而,

$$d \ln \phi^{-2} = -2d \ln \phi = -2d\psi = \left[\frac{1}{t} + \frac{\mu}{1 + \mu t - C} - \frac{2c(\sqrt{t})}{t\sqrt{1 + \mu t}} \right] dt,$$

其中 $t := r^2$. 对上式积分, 可得

$$\ln \phi^{-2} = \ln t + \ln(1 + \mu t - C) - \int_{r_0^2}^{r^2} \frac{2c(\sqrt{t})}{t\sqrt{1 + \mu t}} dt - \ln C_2,$$

其中 C_2 为常数. 上式也可写成

$$\left(w^2 + \frac{1}{C_1^2} \right) \eta^{-1}(r) \phi^2 = C_2, \quad (4.5)$$

其中 $\eta(r) := r^{-2} e^{\int_{r_0^2}^{r^2} \frac{2c(\sqrt{t})}{t\sqrt{1+\mu t}} dt}$. 注意到 (4.5) 是 (4.3) 的第二个初积分, 因此, (1.3) 的通解为

$$\left(w^2 + \frac{1}{C_1^2} \right) \eta^{-1}(r) \phi^2 = g\left(\frac{s}{w\sqrt{r^2 - s^2}} \right).$$

将 (4.4) 代入上式, 有 $\frac{r^2 w^2}{s^2} \eta^{-1}(r) \phi^2 = g\left(\frac{s}{w\sqrt{r^2 - s^2}} \right)$. 于是,

$$\phi = \phi(r, s) = \sqrt{s^2} \xi(r) f\left(\frac{s}{w\sqrt{r^2 - s^2}} \right), \quad (4.6)$$

其中 $f = \sqrt{g}$,

$$\xi(r) = \frac{\sqrt{\eta(r)}}{rw} = \frac{1}{r^2 w} e^{\int_{r_0^2}^{r^2} \frac{c(\sqrt{t})}{t\sqrt{1+\mu t}} dt}. \quad (4.7)$$

下面可以验证 (4.6) 满足方程 (1.3), 确定向量场 U 的伸缩系数 (见 (1.5)), 它是 (4.7) 的逆变换. 记

$$u := \frac{s}{w\sqrt{r^2 - s^2}}, \quad v := w^2 \left(1 - \frac{r^2}{s^2} \right),$$

则 $v = -u^{-2}$. 因而, $u_r = \frac{1}{2}u^3 v_r$, $u_s = \frac{1}{2}u^3 v_s$, 而且

$$v_r = 2\mu r \left(1 - \frac{r^2}{s^2} \right) - \frac{2rw^2}{s^2}, \quad v_s = \frac{2rw^2}{s^3},$$

则

$$\phi_r = \operatorname{sgn}(s) \cdot s \left\{ \xi' f + \xi f \cdot u^3 r \left[\mu \left(1 - \frac{r^2}{s^2} \right) - \frac{w^2}{s^2} \right] \right\}, \quad \phi_s = \operatorname{sgn}(s) \cdot s \left(f + f' u^3 \frac{r^2 w^2}{s^2} \right).$$

上式等价于

$$(\ln \phi)_r = (\ln \xi)' + r u^3 (\ln f)' \left[\mu \left(1 - \frac{r^2}{s^2} \right) - \frac{w^2}{s^2} \right], \quad (4.8)$$

$$(\ln \phi)_s = \frac{1}{s} + u^3 \frac{r^2 w^2}{s^3} (\ln f)'. \quad (4.9)$$

利用 (4.7) 和 $w = \sqrt{1 + \mu r^2}$, 有 $(\ln \xi)' = -\frac{1}{r^2 w} (2rw + \frac{\mu r^3}{w}) + \frac{2c(r)}{rw}$. 结合 (4.8) 和 (4.9), 有

$$\begin{aligned} & w^2 + \mu s^2 + w^2 r (\ln \phi)_r + s(2w^2 - 1 - \mu s^2) (\ln \phi)_s \\ &= w^2 + \mu s^2 + w^2 r \left\{ (\ln \xi)' + r (\ln f)' u^3 \left[\mu \left(1 - \frac{r^2}{s^2} \right) - \frac{w^2}{s^2} \right] \right\} \\ & \quad + s(2w^2 - 1 - \mu s^2) \left\{ \frac{1}{s} + u^3 \frac{r^2 w^2}{s^3} (\ln f)' \right\} \\ &= 3w^2 - 1 + r w^2 (\ln \xi)' \\ &= 2c(x)w, \end{aligned}$$

其中 $c(x)$ 满足 (1.5). 对照定理 1.1 可知, 广义径向场 U_x 是 F 的具有伸缩系数为 (1.5) 的共形向量场, 其中 ϕ 由 (1.4) 给出. 证毕. $\square$

注 4.1 值得指出的是, 共形向量场 U 的伸缩系数 (1.5) 与 (1.4) 中的可微函数 f 是无关的.

定理 1.2 有如下两个特例:

(1) 取 $\mu = 0$, 那么 $\phi = e^{\rho(r)} h(\frac{s}{r})$. 正好是文献 [19] 中的情形.

(2) 当 $\xi(r) = \frac{1}{r w^2}$, $f(t) = \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}$, 则 $\phi = \phi_\mu$.

结合定理 1.2 和引理 2.2, 有下面的推论:

推论 4.1 $[\lambda \sqrt{1 + \mu |x|^2} + Q]x$ 是球对称度量 $F(x, y) = |y| \phi(|x|, \frac{\langle x, y \rangle}{|y|})$ 的共形向量场, 其中

$$\phi(r, s) = \sqrt{s^2} \xi(r) f \left(\frac{s}{w \sqrt{r^2 - s^2}} \right),$$

f 是任意的可微函数, λ 和 μ 是常数, Q 是反对称矩阵. 进一步, 其伸缩系数为 $\frac{\lambda}{2} [3w - \frac{1}{w} + r w (\ln \xi)']$.

参考文献

- Cheng X, Shen Z, Zhou Y. On locally dually flat Finsler metrics. *Internat J Math*, 2010, 21: 1531–1543
- Huang L, Mo X. On some explicit constructions of dually flat Finsler metrics. *J Math Anal Appl*, 2013, 405: 565–573
- Shen Z M, Yuan M G. Conformal vector fields on some Finsler manifolds. *Sci China Math*, 2016, 59: 107–114
- Chen C, Mo X. On conformal fields of a class of orthogonally invariant Finsler metrics. *Results Math*, 2017, 72: 2253–2270
- Guo E, Mo X. *The Geometry of Spherically Symmetric Finsler Manifolds*. Springer Briefs in Mathematics. Singapore: Springer, 2018
- Mo X, Zhu H. On a class of projectively flat Finsler metrics of negative constant flag curvature. *Internat J Math*, 2012, 23: 1250084

- 7 Zhou L. Projective spherically symmetric Finsler metrics with constant flag curvature in $\mathbb{R}^n$. *Geom Dedicata*, 2012, 158: 353–364
- 8 Li B. On the classification of projectively flat Finsler metrics with constant flag curvature. *Adv Math*, 2014, 257: 266–284
- 9 Zhou L. The isoperimetric problem in the 2-dimensional Finsler space forms with $k = 0$. *Internat J Math*, 2019, 30: 1950005
- 10 Liu H, Mo X. Examples of Finsler metrics with special curvature properties. *Math Nachr*, 2015, 288: 1527–1537
- 11 Huang L, Mo X. On conformal fields of a Randers metric with isotropic S -curvature. *Illinois J Math*, 2013, 57: 685–696
- 12 Huang L, Liu H, Mo X. On the Landsberg curvature of a class of Finsler metrics generated from the navigation problem. *Pacific J Math*, 2019, 302: 77–96
- 13 Joharinad P, Bidabad B. Conformal vector fields on Finsler spaces. *Differential Geom Appl*, 2013, 31: 33–40
- 14 Xia Q. On the flag curvature of a class of Randers metric generated from the navigation problem. *J Math Anal Appl*, 2013, 397: 415–427
- 15 Shen Z, Xing H. On Randers metrics with isotropic S -curvature. *Acta Math Sin Engl Ser*, 2008, 24: 789–796
- 16 Cheng X, Shen Z. Randers metrics of scalar flag curvature. *J Aust Math Soc*, 2009, 87: 359–370
- 17 Shen Z M, Xia Q L. On conformal vector fields on Randers manifolds. *Sci China Math*, 2012, 55: 1869–1882
- 18 Huang L, Mo X. On the flag curvature of a class of Finsler metrics produced by the navigation problem. *Pacific J Math*, 2015, 277: 149–168
- 19 李影, 莫小欢. 一类具有共形径向向量场的 Finsler 度量. *中国科学: 数学*, 2017, 47: 605–610
- 20 Mo X, Solórzano N M, Tenenblat K. On spherically symmetric Finsler metrics with vanishing Douglas curvature. *Differential Geom Appl*, 2013, 31: 746–758
- 21 Sevim E S, Shen Z, Ulgen S. Spherically symmetric Finsler metrics with constant Ricci and flag curvature. *Publ Math Debrecen*, 2015, 87: 463–472
- 22 Zhou L. The spherically symmetric Finsler metrics with isotropic S -curvature. *J Math Anal Appl*, 2015, 431: 1008–1021
- 23 Shen Z, Xia Q. Conformal vector fields on a locally projectively flat Randers manifold. *Publ Math Debrecen*, 2014, 84: 463–474
- 24 Huang L, Mo X. Projectively flat Finsler metrics with orthogonal invariance. *Ann Polon Math*, 2013, 107: 259–270

On spherically symmetric Finsler manifolds with conformal generalized radial fields

Yu Fu, Cheng Chen & Xiaohuan Mo

Abstract Conformal vector fields play an important role in the study of Finsler geometry, especially in the conformal navigation problem. In this paper, by establishing and solving the corresponding partial differential equations, we determine all spherically symmetric Finsler metrics with generalized radial fields as conformal vector fields completely. These Finsler metrics include Riemannian metrics of constant sectional curvature.

Keywords Finsler metrics, conformal vector fields, spherically symmetric metrics, generalized radial fields

MSC(2010) 58E20, 53B40

doi: 10.1360/SSM-2019-0217