第 59 卷 第 4 期 厦门大学学报(自然科学版) Vol. 59 No. 4
2020 年 7 月 Journal of Xiamen University (Natural Science) Jul. 2020
doi:10.6043/j.issn.0438-0479.201907024

关于不定方程组 $x^2-14y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=16$ 的公解

瞿云云[1,2],曾吉文[1*]
(1.厦门大学数学科学学院,福建 厦门 361005;2.贵州师范大学数学科学学院,贵州 贵阳 550001)

摘要:设 $p_1,p_2,\cdots,p_s(1\leqslant s\leqslant 4)$是互异的奇素数,利用递归数列、Pell 方程解的性质证明了当 $D=2p_1p_2\cdots p_s(1\leqslant s\leqslant 4)$时,不定方程组 $x^2-14y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=16$ 的整数解如下:当 $D=2\times 449$ 时,方程组仅有解$(x,y,z)=(\pm 13\ 455,\pm 3\ 596,\pm 120)$以及解$(x,y,z)=(\pm 15,\pm 4,0)$;当 $D\neq 2\times 449$ 时,方程组仅有解$(x,y,z)=(\pm 15,\pm 4,0)$.

关键词:不定方程组;递归数列;整数解;Pell 方程
中图分类号:O 156 **文献标志码**:A **文章编号**:0438-0479(2020)04-0512-04

1 主要结论

关于不定方程组 $x^2-D_1y^2=n$ 与 $y^2-Dz^2=m(D_1,D\in\mathbf{Z}^+,n,m\in\mathbf{Z})$的公解问题是数论研究中的一个热点.当 $n=1,m=4$ 时:陈建华[1]研究了 $D_1=2$,$D=p$ 和 pq(p,q 是不同的素数)的情形;陈永高[2]研究了 $D_1=2$,当 $D\not\equiv-1\pmod{12}$且 D 为不超过 6 个不同的奇素数之积,$D\equiv-1\pmod{12}$且 D 为不超过 3 个不同的奇素数之积两种情形时方程组的解数;杜先存等[3]研究了 $D_1=6$,D 为 2 与最多 4 个不同奇素数的乘积的情形.当 $n=1,m=16$ 时,万飞等[4]研究了 $D_1=5$,D 为 $2^t(t\in\mathbf{Z}^+$,且 $t\neq 2,4)$与最多 4 个不同奇素数的乘积的情形.本文讨论了当 $n=1,m=16$ 时,$D_1=14$,D 为 2 与最多 4 个不同奇素数的乘积的情形,得到了如下结论:

定理 1 若 $p_1,p_2,\cdots,p_s(1\leqslant s\leqslant 4)$是互异的奇素数,则当 $D=2p_1p_2\cdots p_s(1\leqslant s\leqslant 4)$时,

$$\begin{cases}x^2-14y^2=1,\\ y^2-Dz^2=16,\end{cases}\tag{1}$$

(i) 当 $D=2\times 449$ 时,方程组(1)有非平凡解$(x,y,z)=(\pm 13\ 455,\pm 3\ 596,\pm 120)$和平凡解$(x,y,z)=(\pm 15,\pm 4,0)$;

(ii) 当 $D\neq 2\times 449$ 时,方程组(1)只有平凡解$(x,y,z)=(\pm 15,\pm 4,0)$.

2 若干引理

引理 1[5] 设 $D=2p$,p 是一个奇素数,则不定方程 $x^4-Dy^2=1$ 除了 $D=6,x=7,y=20$ 外,无其他正整数解.

引理 2[6] 设 $b,d>1$ 都是非平方的整数,方程 $b^2x^4-dy^2=1$ 至多有一组正整数解(x,y).

引理 3[7] 设 $k>1$ 是一个整数且 $k\neq 169$,除了 $k=2v^2,v\in\mathbf{Z}$ 的情形,方程 $x^2-(k^2-1)y^4=1$ 有另一正整数解 $(x,y)=(8v^4-1,2v)$ 之外,此方程仅有正整数解 $(x,y)=(k,1)$.

引理 4 (i) 不定方程 $x^4-14y^2=1$ 无正整数解;

(ii) 不定方程 $225x^4-14y^2=1$ 仅有正整数解 $(x,y)=(1,4)$;

(iii) 不定方程 $x^2-224y^4=1$ 仅有正整数解 $(x,y)=(15,1)$;

证明:(i) 由引理 1 可知,方程 $x^4-14y^2=1$ 无正整数解.

(ii) 由引理 2 可知,方程 $225x^4-14y^2=1$ 至多有一组正整数解,而(1,4)为方程 $225x^4-14y^2=1$ 的正整数解,因此方程 $225x^4-14y^2=1$ 仅有正整数解 $(x,y)=(1,4)$.

收稿日期:2019-07-20 录用时期:2020-05-07
基金项目:国家自然科学基金(61562012);贵州省科学技术基金(黔科合基础[2019]1221 号)
* **通信作者**:jwzeng@xmu.edu.cn
引文格式:瞿云云,曾吉文.关于不定方程组 $x^2-14y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=16$ 的公解[J].厦门大学学报(自然科学版),2020,59(4):512-515.
Citation:QU Y Y,ZENG J W.On the solutions of the simultaneous Diophantine equations $x^2-14y^2=1$ and $y^2-Dz^2=16$[J].J Xiamen Univ Nat Sci,2020,59(4):512-515.(in Chinese)

(iii) 由于 $224=15^2-1$,由引理 3 可知,命题成立.

引理 5　设 Pell 方程 $x^2-14y^2=1$ 的全部非负整数解为 (x_n,y_n),$n\in\mathbf{N}$,则对任意 $n\in\mathbf{N}$,(x_n,y_n) 有如下性质:

(i) $x_{n+2}=30x_{n+1}-x_n,x_1=15,x_0=1$;
$y_{n+2}=30y_{n+1}-y_n,y_1=4,y_0=0;y_{2n}=2x_ny_n$.

(ii) $x_{n-1}=15x_n-56y_n;x_{n+1}=15x_n+56y_n$;
$y_{n-1}=15y_n-4x_n;y_{n+1}=15y_n+4x_n$.

(iii) $y_n^2-16=y_{n-1}y_{n+1}$.

(iv) $x_n\equiv1(\bmod 2),y_{2n}\equiv0(\bmod 8)$,
$y_{2n+1}\equiv4(\bmod 8)$.

(v) $\gcd(x_n,y_n)=1,\gcd(x_n,x_{n+1})=1$,
$\gcd(y_n,y_{n+1})=4$.

(vi) $\gcd(x_{2n},y_{2n+1})=\gcd(x_{2n+2},y_{2n+1})=1$,
$\gcd(x_{2n+1},y_{2n})=\gcd(x_{2n+1},y_{2n+2})=15$.

(vii) x_n 为平方数当且仅当 $n=0$;$\dfrac{x_n}{15}$ 为平方数当且仅当 $n=1$.

(viii) $\dfrac{y_n}{4}$ 为平方数当且仅当 $n=0,1$.

证明　Pell 方程 $x^2-14y^2=1$ 的全部非负整数解为 (x_n,y_n),$n\in\mathbf{N}$,其基本解为 $\alpha=15+4\sqrt{14}$,则 $x_n+y_n\sqrt{14}=\alpha^n$,$n\in\mathbf{N}$,由此结论可得到(i),(ii).

(iii) 由(ii)及 $x_n^2-14y_n^2=1$ 可得

$$y_n^2-16=y_n^2-16(x_n^2-14y_n^2)=(15y_n-4x_n)(15y_n+4x_n)=y_{n-1}y_{n+1}.$$

(iv) 由 $x_n^2-14y_n^2=1$ 可得 $x_n\equiv1(\bmod 2)$,由递归序列 $\{y_n\}$ 的性质可得:$y_{2n}\equiv0(\bmod 8)$,$y_{2n+1}\equiv4(\bmod 8)$.

(v) 由 $x_n^2-14y_n^2=1$ 可得 $\gcd(x_n,y_n)=1$;由 $x_n\equiv1,15(\bmod 56)$ 可得 $\gcd(x_n,56)=1$;由 $\gcd(x_n,y_n)=1$ 及 $x_{n+1}=15x_n+56y_n$ 可得

$$\gcd(x_n,x_{n+1})=\gcd(x_n,15x_n+56y_n)=\gcd(x_n,56y_n)=\gcd(x_n,56)=1,$$

由 $\gcd(x_n,y_n)=1$,$y_{n+1}=15y_n+4x_n$ 及 $y_n\equiv0(\bmod 4)$ 可得

$$\gcd(y_n,y_{n+1})=\gcd(y_n,15y_n+4x_n)=\gcd(y_n,4x_n)=\gcd(y_n,4)=4.$$

(vi) 由递归序列 $\{x_n\}$ 的性质可得 $x_{2n}\equiv(-1)^n(\bmod 15)$,由此可得 $\gcd(x_{2n},15)=1$;由 $y_{n+1}=15y_n+4x_n$ 及 $\gcd(x_n,y_n)=1$ 可得

$$\gcd(x_{2n},y_{2n+1})=\gcd(x_{2n},15y_{2n}+4x_{2n})=\gcd(x_{2n},15y_{2n})=\gcd(x_{2n},15)=1;$$

由 $y_{2n+1}\equiv4\times(-1)^n(\bmod 15)$ 可得 $(y_{2n+1},15)=1$;由 $\gcd(x_n,y_n)=1$ 及 $x_{n+1}=15x_n+56y_n$ 可得

$$\gcd(x_{2n+2},y_{2n+1})=\gcd(15x_{2n+1}+56y_{2n+1},y_{2n+1})=\gcd(15x_{2n+1},y_{2n+1})=1;$$

由 $y_{2n}\equiv0(\bmod 15)$ 可得 $(y_{2n},15)=15$;由 $\gcd(x_n,y_n)=1$ 及 $x_{n+1}=15x_n+56y_n$ 可得

$$\gcd(x_{2n+1},y_{2n})=\gcd(15x_{2n}+56y_{2n},y_{2n})=\gcd(15x_{2n},y_{2n})=15;$$

由 $x_{2n+1}\equiv0(\bmod 15)$ 及 $y_{n+1}=15y_n+4x_n$ 可得

$$\gcd(x_{2n+1},y_{2n+2})=\gcd(x_{2n+1},15y_{2n+1}+4x_{2n+1})=\gcd(x_{2n+1},15y_{2n+1})=\gcd(x_{2n+1},15)=15.$$

(vii) 若 $x_n=s^2$,则由 $x_n^2-14y_n^2=1$ 可得 $s^4-14y_n^2=1$,由引理 4(i) $s^4-14y_n^2=1$ 仅有整数解 $(s,y_n)=(\pm1,0)$,因此 $x_n=1$,则 $n=0$;若 $\dfrac{x_n}{15}=t^2$,则由 $x_n^2-14y_n^2=1$ 可得 $225t^4-14y_n^2=1$,由引理 4(ii) 方程 $225t^4-14y_n^2=1$ 仅有正整数解 $(t,y_n)=(1,4)$,因此 $n=1$;反之,结论显然成立.

(viii) 若 $\dfrac{y_n}{4}=s^2$,则由 $x_n^2-14y_n^2=1$ 可得 $x_n^2-224s^4=1$,由引理 4(iii)可知 $s=0,\pm1$,因此 $y_n=0,4$,由此可得 $n=0,1$;反之,结论显然成立.

3　定理 1 的证明

Pell 方程 $x^2-14y^2=1$ 的全部正整数解为 (x_n,y_n),$n\in\mathbf{Z}^+$,设 (x_n,y_n,z) 为方程组(1)的正整数解,由引理 5 的(iii)可知:

$$Dz^2=y_n^2-16=y_{n-1}y_{n+1}. \tag{2}$$

情形 1　若 n 为正偶数,由引理 5 的(iv)可知:$y_{n-1}\equiv y_{n+1}\equiv4(\bmod 8)$ 且 $\gcd(y_{n-1},y_{n+1})=4$,由此可知 $\dfrac{y_{n-1}}{4}$,$\dfrac{y_{n+1}}{4}$ 为奇数且互素. 由式(2)可得 $Dz^2=4^2\dfrac{y_{n-1}}{4}\dfrac{y_{n+1}}{4}$,由此可知 D 应为奇数,这与 $D=2p_1p_2\cdots p_s(1\leqslant s\leqslant4)$ 相矛盾,故此种情形下不定方程组(1)无公解.

情形 2　若 n 为正奇数,令 $n=2m-1$,$m\geqslant1$,$m\in\mathbf{Z}^+$,由引理 5(i) $y_{2n}=2x_ny_n$ 得

$$Dz^2=y_{2(m-1)}y_{2m}=4x_{m-1}y_{m-1}x_my_m. \tag{3}$$

情形 2.1　若 $m=1$,式(3)为 $Dz^2=4x_0y_0x_1y_1=0$,则 $z=0$,此时方程组(1)仅有平凡解 $(x,y,z)=(\pm15,\pm4,0)$. 若 $m\neq1$ 为正奇数,由引理 5(v)、(vi)可知:

$$\gcd(x_{m-1},y_{m-1})=\gcd(x_{m-1},x_m)=\gcd(x_{m-1},y_m)=1,$$

$\gcd(y_{m-1},x_m)=15,\gcd(y_{m-1},y_m)=4,$
$\gcd(x_m,y_m)=1,$

可知 $x_{m-1},\frac{y_{m-1}}{60},\frac{x_m}{15},\frac{y_m}{4}$ 两两互素. 令 $m=2k-1$, $k\in\mathbf{Z}^+$, 且 $k\geqslant 2$. 此时式(3)成为

$$Dz^2=4x_{2(k-1)}y_{2(k-1)}x_{2k-1}y_{2k-1}. \tag{4}$$

由引理 5(i) $y_{2n}=2x_ny_n$, 式(4)可化为

$$Dz^2=8x_{2(k-1)}y_{k-1}x_{k-1}x_{2k-1}y_{2k-1}. \tag{5}$$

由引理 5(iv)可知 $4\mid y_{k-1}$; 当 $k\geqslant 2$ 为偶数时, $x_{2(k-1)},\frac{y_{k-1}}{4},\frac{x_{k-1}}{15},\frac{x_{2k-1}}{15},\frac{y_{2k-1}}{4}$ 两两互素;当 $k\geqslant 3$ 为奇数时, $x_{2(k-1)},\frac{y_{k-1}}{60},x_{k-1},\frac{x_{2k-1}}{15},\frac{y_{2k-1}}{4}$ 两两互素.

情形 2.1.1 当 $k\geqslant 2$ 为偶数时, $x_{2(k-1)},\frac{y_{k-1}}{4},\frac{x_{k-1}}{15},\frac{x_{2k-1}}{15},\frac{y_{2k-1}}{4}$ 两两互素且均为奇数;仅当 $k=1$ 时, $x_{2(k-1)},\frac{x_{2k-1}}{15}$ 为平方数;仅当 $k=1,2$ 时, $\frac{y_{k-1}}{4}$ 为平方数;仅当 $k=2$ 时, $\frac{x_{k-1}}{15}$ 为平方数;仅当 $k=1$ 时, $\frac{y_{2k-1}}{4}$ 为平方数. 若 $k=2$, 式(5)成为 $Dz^2=8x_2y_1x_1x_3y_3$, 可得 $z=120,D=2\times 3\times 13\times 23\times 29\times 31\times 449$, 因此 D 有 6 个不同的奇素数,从而式(5)不成立. 若 $k\geqslant 4$ 为偶数, $x_{2(k-1)},\frac{y_{k-1}}{4},\frac{x_{k-1}}{15},\frac{x_{2k-1}}{15},\frac{y_{2k-1}}{4}$ 为两两互素的奇数且均不为平方数,此时它们至少含有 5 个不同的奇素数,从而式(5)不成立.

情形 2.1.2 当 $k\geqslant 3$ 为奇数,令 $k=2l-1$, $l\in\mathbf{Z}^+$, 且 $l\geqslant 2$. 由引理 5(i) $y_{2n}=2x_ny_n$, 此时式(5)成为

$$Dz^2=16x_{4(l-1)}x_{l-1}y_{l-1}x_{2(l-1)}x_{4l-3}y_{4l-3}. \tag{6}$$

当 $l\geqslant 3$ 为奇数时, $x_{4(l-1)},x_{l-1},\frac{y_{l-1}}{60},x_{2(l-1)},\frac{x_{4l-3}}{15},\frac{y_{4l-3}}{4}$ 两两互素; $x_{4(l-1)},x_{l-1},x_{2(l-1)},\frac{x_{4l-3}}{15},\frac{y_{4l-3}}{4}$ 为奇数;仅当 $l=1$ 时, $x_{4(l-1)},x_{l-1},x_{2(l-1)},\frac{x_{4l-3}}{15},\frac{y_{4l-3}}{4}$ 为平方数;因此 $l\geqslant 3$ 为奇数时, $x_{4(l-1)},x_{l-1},x_{2(l-1)},\frac{x_{4l-3}}{15},\frac{y_{4l-3}}{4}$ 为两两互素的奇数且均不为平方数,此时它们至少含有 5 个不同的奇素数,从而式(6)不成立.

当 $l\geqslant 2$ 为偶数时,若 $l=2$, 此时式(6)成为 $Dz^2=16x_4x_1y_1x_2x_5y_5$, 计算可知 $16x_4x_1y_1x_2x_5y_5$ 含有 10 个不同的奇素数因子,从而式(6)不成立. 若 $l\geqslant 4$ 为偶数时, $x_{4(l-1)},\frac{x_{l-1}}{15},\frac{y_{l-1}}{4},x_{2(l-1)},\frac{x_{4l-3}}{15},\frac{y_{4l-3}}{4}$ 两两互素且均为奇数;仅当 $l=1$ 时, $x_{4(l-1)},x_{2(l-1)},\frac{x_{4l-3}}{15},\frac{y_{4l-3}}{4}$ 为平方数;仅当 $l=2$ 时, $\frac{x_{l-1}}{15}$ 为平方数;仅当 $l=1,2$ 时, $\frac{y_{l-1}}{4}$ 为平方数;因此 $l\geqslant 4$ 为偶数时, $x_{4(l-1)},\frac{x_{l-1}}{15},\frac{y_{l-1}}{4},x_{2(l-1)},\frac{x_{4l-3}}{15},\frac{y_{4l-3}}{4}$ 为两两互素的奇数且均不为平方数,此时它们至少含有 6 个不同的奇素数,从而式(6)不成立.

情形 2.2 若 $m\geqslant 2$ 为偶数,则若 $m=2$, 式(3)化为 $Dz^2=4x_1y_1x_2y_2$, 此时 $D=2\times 449,z=120$, 从而可得方程组(1)的非平凡解 $(x,y,z)=(\pm 13\ 455,\pm 3\ 596,\pm 120)$; 若 $m\geqslant 4$ 为偶数,令 $m=2k,k\in\mathbf{Z}^+$, 且 $k\geqslant 2$. 此时由引理 5(i) $y_{2n}=2x_ny_n$, 式(3)成为

$$Dz^2=8x_{2k-1}y_{2k-1}x_{2k}x_ky_k. \tag{7}$$

情形 2.2.1 当 $k\geqslant 3$ 为奇数时, $\frac{x_{2k-1}}{15},\frac{y_{2k-1}}{4},x_{2k},\frac{x_k}{15},\frac{y_k}{4}$ 两两互素且均为奇数;仅当 $k=1$ 时, $\frac{x_{2k-1}}{15},\frac{y_{2k-1}}{4},\frac{x_k}{15}$ 为平方数;仅当 $k=0$ 时, x_{2k} 为平方数;仅当 $k=0,1$ 时, $\frac{y_k}{4}$ 为平方数;因此当 $k\geqslant 3$ 为奇数时, $\frac{x_{2k-1}}{15},\frac{y_{2k-1}}{4},x_{2k},\frac{x_k}{15},\frac{y_k}{4}$ 为两两互素的奇数且无平方数,此时它们至少含有 5 个不同的奇素数,从而式(7)不成立.

情形 2.2.2 当 $k\geqslant 2$ 为偶数时, $\frac{x_{2k-1}}{15},\frac{y_{2k-1}}{4},x_{2k},x_k,\frac{y_k}{60}$ 两两互素;令 $k=2l,l\in\mathbf{Z}^+$, 且 $l\geqslant 1$. 此时由引理 5(i) $y_{2n}=2x_ny_n$, 式(7)成为

$$Dz^2=16x_{4l-1}y_{4l-1}x_{4l}x_{2l}x_ly_l. \tag{8}$$

当 $l\geqslant 1$ 为奇数时, $\frac{x_{4l-1}}{15},\frac{y_{4l-1}}{4},x_{4l},x_{2l},\frac{x_l}{15},\frac{y_l}{4}$ 两两互素且均为奇数; $\frac{x_{4l-1}}{15},\frac{y_{4l-1}}{4}$ 中无平方数;仅当 $l=1$ 时, $\frac{x_l}{15}$ 为平方数;仅当 $l=0,1$ 时, $\frac{y_l}{4}$ 为平方数;仅当 $l=0$ 时, x_{4l},x_{2l} 为平方数;因此若 $l=1$, 式(8)成为 $Dz^2=16x_3y_3x_4x_2x_1y_1$, 计算可知 $16x_3y_3x_4x_2x_1y_1$ 含有 8 个不同的奇素数因子,从而式(8)不成立;若 $l\geqslant 3$ 为奇数, $\frac{x_{4l-1}}{15},\frac{y_{4l-1}}{4},x_{4l},x_{2l},\frac{x_l}{15},\frac{y_l}{4}$ 为两两互素的奇数且均不为平方数,此时它们至少含有 6 个不同

的奇素数，从而式(8)不成立.

当 $l\geqslant 2$ 为偶数时，$\frac{x_{4l-1}}{15}$，$\frac{y_{4l-1}}{4}$，x_{4l}，x_{2l}，x_l，$\frac{y_l}{60}$ 两两互素；$\frac{x_{4l-1}}{15}$，$\frac{y_{4l-1}}{4}$，x_{4l}，x_{2l}，x_l 均为奇数；$\frac{x_{4l-1}}{15}$，$\frac{y_{4l-1}}{4}$ 中无平方数；仅当 $l=0$ 时，x_{4l}，x_{2l}，x_l 为平方数；因此当 $l\geqslant 2$ 为偶数时，$\frac{x_{4l-1}}{15}$，$\frac{y_{4l-1}}{4}$，x_{4l}，x_{2l}，x_l 为两两互素的奇数且均不为平方数，此时它们至少含有 5 个不同的奇素数，从而式(8)不成立. 综上所述，定理得证.

参考文献：

[1] 陈建华. 关于 Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 和 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 武汉大学学报(自然科学版)，1990(1)：8-12.

[2] 陈永高. Pell 方程组 $x^2-2y^2=1$ 和 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 北京大学学报(自然科学版)，1994，30(3)：298-302.

[3] 杜先存，管训贵，杨慧章. 关于不定方程组 $x^2-6y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 华中师范大学学报(自然科学版)，2014，48(3)：310-313.

[4] 万飞，杜先存. 关于不定方程组 $x^2-5y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=16$ 的公解[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2016，33(4)：105-109.

[5] 曹珍富. 丢番图方程引论[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1989：262.

[6] BENNETT M，WALSH G. The Diophantine equation $b^2X^4-dY^2=1$ [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1999，127(12)：3481-3491.

[7] WALSH G. A note on a theorem of Ljunggren and the Diophantine equations $x^2-kxy^2+y^4=1,4$ [J]. Arch Math，1999，73(2)：119-125.

On the solutions of the simultaneous Diophantine equations $x^2-14y^2=1$ and $y^2-Dz^2=16$

QU Yunyun[1,2]，ZENG Jiwen[1*]

(1. School of Mathematical Sciences，Xiamen University，Xiamen 361005，China；2. School of Mathematical Sciences，Guizhou Normal University，Guiyang 550001，China)

Abstract：Let $p_1,p_2,\cdots,p_s(1\leqslant s\leqslant 4)$ be distinct odd primes. By using recurrent sequence and properties of the solution of the Pell equation，we concluded that，if $D=2p_1p_2\cdots p_s(1\leqslant s\leqslant 4)$，then the Diophantine equations $x^2-14y^2=1$ and $y^2-Dz^2=16$ lead to following integer solutions：when $D=2\times 449$，the equations are only associated with solutions $(x,y,z)=(\pm 13\,455,\pm 3\,596,\pm 120)$ and $(x,y,z)=(\pm 15,\pm 4,0)$，when $D\neq 2\times 449$，the equations are only associated with solutions $(x,y,z)=(\pm 15,\pm 4,0)$.

Keywords：Diophantine equations；recurrent sequence；integer solution；Pell equation