中国科学: 数学 2024 年 第 54 卷 第 6 期: 871 ∼ 946
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

综 述

一维复动力系统简介

杨飞

南京大学数学系, 南京 210093
E-mail: yangfei@nju.edu.cn

收稿日期: 2023-10-26; 接受日期: 2024-02-28; 网络出版日期: 2024-05-27
国家自然科学基金 (批准号: 12222107 和 12071210) 资助项目

摘要 复动力系统研究复解析函数的迭代理论. 本文介绍一维复动力系统的历史、基本理论和发展.

关键词 复动力系统 Julia 集 Fatou 集 Mandelbrot 集 双曲猜想 重整化 拟共形手术

MSC (2020) 主题分类 37F05, 37F10

1 复动力系统概述

动力系统是当代数学最前沿的研究领域之一. 它描述几何空间中的点在一个固定规则下随时间变化的长期行为. 一般将 Poincaré 在 19 世纪末撰写的 3 卷专著作为现代动力系统的开端: Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste (天体力学新方法) I, II, III (1892, 1893, 1899). 进入 20 世纪后, 动力系统朝着不同的方向发展, 其中主要分为离散动力系统与连续动力系统.

考虑一个从空间 X 到自身的映射 $f: X \to X$ 形成的离散动力系统. 人们主要关心初始点 $x_0 \in X$ 在 f 迭代 (iteration) 下的轨道

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f^{\circ 2}(x_0), \dots, x_n = f(x_{n-1}) = f^{\circ n}(x_0), \dots$$

当 n 趋于 ∞ 时的极限行为. 当 X 是一个复流形且 $f: X \to X$ 是一个全纯映射时, 上述离散动力系统即为一个复动力系统 1).

复动力系统的萌芽可以追溯到 17 世纪. 因多数方程不存在求根公式而无法得到精确解, 所以寻找方程的近似解就显得尤为重要. 在计算实多项式 $g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ ($a_n \neq 0$, $n \geqslant 2$) 的根时, Newton 考虑了如下有理函数:

$$f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)},$$

1) 更准确地, 此时的动力系统是一个复解析动力系统. 广义的复动力系统还包括某些实动力系统和算术动力系统等.

英文引用格式: Yang F. A brief introduction to one-dimensional complex dynamics (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 871–946, doi: 10.1360/SSM-2023-0292

并证明了对于合适的初始点 $x_0 \in \mathbb{R}$, 迭代序列 $\{f^{\circ n}(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 g 的一个根. 该方法被称为 Newton 迭代法 2). 1879 年, Cayley [168] 建议用该方法求解复多项式的根. 但他发现这个问题即使对于三次复多项式也已经非常困难: "The case of the cubic equation appears to present considerable difficulty." 从今天的视角来看, Cayley 在那时遇到困难是不可避免的, 因为他要解决的问题是计算一个三次有理函数的 Julia 集 (见图 1).

Cayley 并不是第一个在 19 世纪 70 年代研究迭代的人. Schröder 在 1870–1871 年也考虑了用迭代法解方程, 同时还对下面的 Schröder 方程做了研究 3):

$$\varphi(f(z)) = \lambda\,\varphi(z), \quad \text{其中 } f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \cdots \text{ 且 } \lambda \neq 0.$$

1884 年, Koenigs [416] 证明了如果导数 (或称 "乘子") $\lambda = f'(0)$ 满足 $|\lambda| \neq 1$, 则上述方程在不动点 0 的邻域内本质上只有唯一解. 之后, Leau [428] 在 1897 年研究了 λ 是单位根的情形. 对于 $|\lambda| = 1$ 且 λ 不是单位根的研究则困难得多, 直到 Cremer [200] 在 1928 年和 Siegel [689] 在 1942 年才取得了重要进展.

Fatou [302] 于 1906 年开始研究全纯函数的迭代. 他考虑的是 $z \mapsto z^2/(z^2+2)$ 并证明了除了一个 Cantor 集外, 其余点的轨道都收敛到 0. 这引起了很多人的兴趣. 第一次世界大战后, Fatou [303] 和

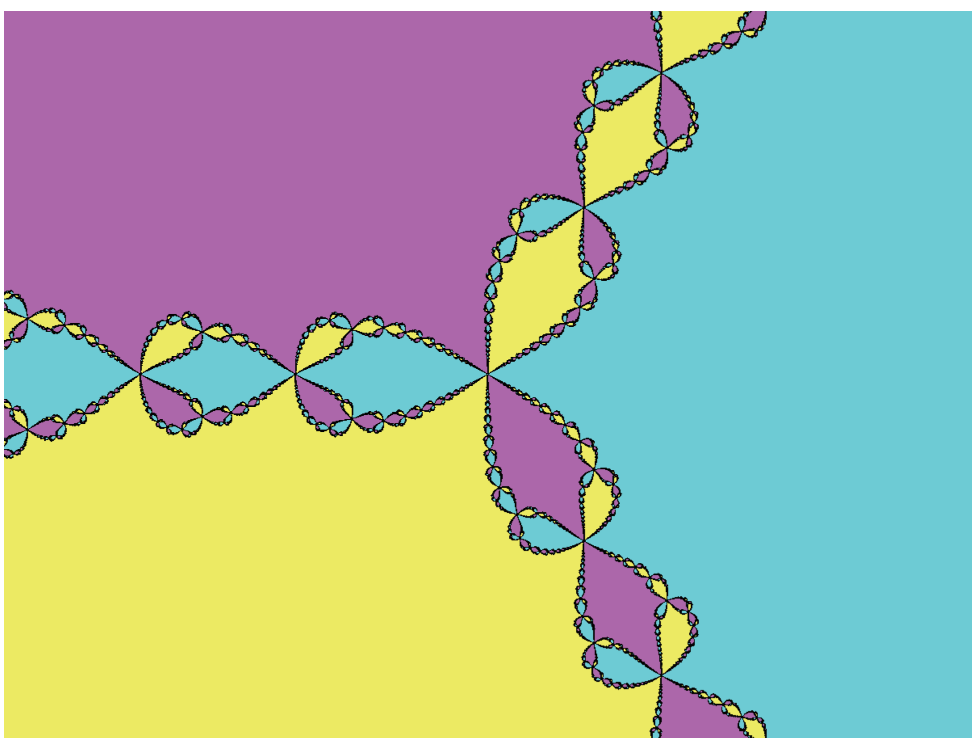


图 1 (网络版彩图) 三次多项式 $g(z) = z^3 - 1$ 的 Newton 迭代法示意图. 3 种不同的颜色 (青、紫、黄) 对应的集合 (均为不连通的开集) 表示当初始点 z_0 分别落在其中时, 由 Newton 迭代法 $f(z) = z - g(z)/g'(z)$ 定义的序列 $\{f^{\circ n}(z_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 分别收敛到 g 的 3 个根 1、$e^{2\pi i/3}$ 和 $e^{4\pi i/3}$. 这 3 个集合具有相同的边界, 它是使得 g 的 Newton 迭代法失效的地方, 为 f 的 Julia 集

2) 事实上 Newton 只考虑了方程 $g(x) = x^3 - 2x - 5$. 该迭代方法后来由 Raphson 在 1690 年做了系统的研究. 因而很多时候该方法也称为 Newton-Raphson 迭代法 (参见文献 [58, 第 1.9 小节]).

3) Böttcher [119] 在 1904 年考虑了 $\lambda = 0$ 即 $f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots$ ($a_n \neq 0$, $n \geqslant 2$) 的情形, 并证明了 $\varphi(f(z)) = (\varphi(z))^n$ 有解.

Julia [391] 利用 Montel 正规族理论和有理函数迭代的深刻联系, 对一维复动力系统做了奠基性的工作. 他们通过将复球面进行正规和非正规的划分, 引入了现在被称为 Fatou 集 (也称稳定集) 和 Julia 集 (也称不稳定集、混沌集) 的研究对象.

在 Fatou 和 Julia 所在的那个时代, 他们就对这两个集合的拓扑结构都有了很好的理解. 例如, 他们知道 Julia 集上任何一点的邻域在函数迭代下最终会覆盖整个球面 (除了最多两个例外点), 也知道 Fatou 集的连通分支个数只能是 0、1、2 或 ∞. 这也解释了为什么三次 Newton 映射的 Julia 集非常复杂: 因为它的 Fatou 集有无穷多个连通分支. 对于旋转域 (即共轭于无理旋转的周期 Fatou 分支), 尽管当时还没有具体的例子 4), 但 Fatou 坚信它们是存在的, 而 Julia 却认为不存在. 在写作风格上, Julia 的证明偏公理化, 而 Fatou 的证明则是偏描述性的, 更注重思想的表达. 利用完全不同的方法, 他们均证明了有理函数的 Julia 集是斥性周期点的闭包这一重要结果.

尽管 Fatou 做出了更广泛且更本质的工作, 但因为 Julia 的另一个身份是负伤的战争英雄, 后者在 1918 年获得了由法国科学院颁发的 "Grand Prix des Sciences Mathematiques (数学科学大奖)" 5). 当年的该奖项被用于表彰在复函数的迭代方面做出最杰出工作的数学家.

20 世纪初期, 除了前文提到的 Cremer, 在复动力系统领域做出重要工作的还有 Lattès、Ritt、Wolff 和 Denjoy 等 6) (参见文献 [230, 425, 636, 637, 759]). 之后, 从 20 世纪 30 年代到 70 年代, 这个领域整体上沉寂了一段时间. 但在 1942 年, Siegel [689] 在全纯函数的局部线性化问题 (一类特殊的 Schröder 函数方程) 上取得了重要进展. Brolin [133] 研究了多项式 Julia 集的测度、容量、质量分布和遍历等性质. Baker 从 20 世纪 50 年代开始就一直研究超越整函数的动力系统 (其发表文章列表可参见文献 [632]).

20 世纪 70 年代后期, (一维) 复动力系统开始得到飞速发展. 这其中有以下几方面的原因:

(1) 双曲几何领域中 Kleinian 群的发展. 作用在 Riemann 球面上的 Kleinian 群是一个离散的分式线性变换群. 作为一个动力系统, 它将球面分解成两个互不相交的不变集: 极限集和不连续集, 其性质分别类似于有理函数迭代产生的 Julia 集和 Fatou 集. Ahlfors 和 Bers 等对 Kleinian 群的研究, 使得 Sullivan [713] 意识到类似的想法可以用来解决有理函数的迭代问题. 后者在 20 世纪 80 年代初证明了有理函数没有游荡域, 解决了 Fatou 在 20 世纪 20 年代提出的著名公开问题. 在同一论文中, 他提出了所谓的 "Sullivan 字典", 将有理函数迭代得到的各种动力系统对象与 Kleinian 群进行了列表对比. 这对复动力系统的研究起到了非常重要的推动作用.

(2) 新的数学工具的引入. 拟共形映射和 Teichmüller 理论最先被 Sullivan [713] 引入复动力系统的研究, 前者在游荡域不存在定理的证明中起到本质作用, 后者被用于研究有理函数的 Teichmüller 空间和周期 Fatou 分支的分类 7) (参见文献 [506]). 之后, Douady 和 Hubbard [264] 借助拟共形映射系统地研究了二次多项式的动力系统, 并提出了类多项式 (polynomial-like) 理论 [265], 这是研究重整化 (renormalization) 的基础. Shishikura [676] 利用拟共形手术 (quasiconformal surgery) 解决了 Fatou 的另一个著名公开问题: 通过有理函数的映射度 (degree) 给出了非斥性周期轨道数目的最好上界. Thurston 将 3 维流形中的 "轨形" (orbifold) 概念引入到复动力系统, 结合 Teichmüller 理论给出了临界有限有理函数的拓扑刻画 8) (参见文献 [266]). 另外, 拓扑学、遍历论、符号动力学和分歧理论等的引入, 大大

4) 现在已经知道它们确实存在, 为 Siegel 盘和 Herman 环 (见第 7 节).

5) Montel 和 Lebesgue 非常同情 Fatou, 但 Picard 更支持 Julia (参见文献 [8]).

6) Denjoy-Wolff 定理在周期 Fatou 分支的分类中起到非常关键的作用. Denjoy 的论文发表于 1926 年 1 月 25 日, 改进了 Wolff 于当年 1 月 18 日的结果. 一些文献中根据 Wolff 和 Denjoy 论文发表的时间也将他们的结果称之为 Wolff-Denjoy 定理.

7) 该工作的预印本出现在 1983 年, Sullivan 当时是唯一作者.

8) Orbifold 的另一个应用是证明次双曲有理函数 Julia 集的局部连通性 (参见文献 [264]).

丰富了复动力系统的研究课题和方法. 但要说明的是, 经典的复分析理论仍是研究复动力系统的主要工具.

(3) 计算机技术水平的提高. 20 世纪 80 年代, 人们在计算机上可以很容易作出全纯函数迭代产生的图形, 这为复动力系统的研究提供了可视化支撑. 这一时期 “分形之父” Mandelbrot 和其他分形爱好者在计算机上画出了包括 Mandelbrot 集、Julia 集、倍周期分叉图和严格自相似分形集等在内的大量图形, 激发了学者研究复动力系统的兴趣. 当时这个领域的问题被一些学者称为 “计算机图形背后的数学” (mathematics behind computer graphics) [243]. 事实上, 基于图形来解决数学问题是一种非常重要的辅助研究手段.

超越整函数的研究始于 Fatou [304]. 在 Sullivan 关于有理函数游荡域的工作之前, Baker [40] 已于 20 世纪 70 年代证明了超越整函数可以有游荡域. 进入 20 世纪 80 年代, 随着 Misiurewicz [525] 对指数映射的研究, 超越整函数动力系统进入迅猛发展时期. 除了经典的有理函数和超越整函数迭代外, 复动力系统自 20 世纪 70 年代开始还细分成几个子方向发展. 物理学家 Feigenbaum、Coullet 和 Tresser 在研究区间映射的迭代时, 发现了著名的倍周期分叉现象. 为了得到数学理论上的解释, 这引发了大量关于区间映射和重整化的研究. Jakobson [381] 建立的定理也是区间映射动力系统得到大量关注的原因之一. 另外, 作为研究圆周微分同胚动力系统的先驱, Herman [359] 在 1979 年解决 Arnol’d 的猜想后, 找到了有理函数的最后一种周期 Fatou 分支: Herman 环. Devaney 和 Keen [242] 在 20 世纪 80 年代后期开始研究复平面上超越亚纯函数的动力系统.

高维复动力系统的研究可以追溯到 19 世纪末. 早在 1893 年 (参见文献 [2, 第 35 页]), Poincaré 就开始研究 $\mathbb{C}^n$ 到自身的全纯局部动力系统. 20 世纪 80 年代, 随着 Hubbard [369] 对 Hénon 映射的研究以及 Ueda [738] 的相关工作出现, 高维复动力系统进入迅猛发展时期. Bedford、Fornæss、Sibony、Smillie 和 Ueda 等在 20 世纪 90 年代对高维复动力系统做了开创性的工作. 最近高维复动力系统领域的一个重要进展是: 多项式可以有游荡域 [22], 但其中的证明需要用到一维复动力系统的工具.

算术动力系统研究的是数域上自映射的轨道性质. 与复流形上的动力系统相比, 它更有数论的味道. 自 20 世纪 80 年代起, 算术动力系统开始得到发展, 其中的很多问题来源于算术几何. 它将动力系统、数论和代数几何等领域紧密地联系起来. 这其中的一个典型方向就是非阿域上的动力系统. Herman 和 Yoccoz [363] 在 1983 年对 p-adic 情形下小除子问题的研究可以看作该方向的起点. 关于算术和非阿域动力系统的部分最新进展可参见文献 [63, 64, 225].

复动力系统自 20 世纪 80 年代蓬勃发展至今, 已有多位该领域的专家被邀请在国际数学家大会 (International Congress of Mathematicians, ICM) 上作报告. 他们是:

- V. I. Arnol’d (1983), J. E. Fornæss (1983), R. Mañé (1983), M. Misiurewicz (1983), A. Douady (1986), J.-P. Eckmann (1986, 2002), M. V. Jakobson (1986), D. Sullivan (1986), E. Bedford (1990), L. Carleson (1990), J. P. Ecalle (1990), C. T. McMullen (1990, 1998), M. Rees (1990, 2010), N. Sibony (1990), J.-C. Yoccoz (1990, 1994), J. Kahn (1994, 2014), M. Lyubich (1994, 2014), M. Shishikura (1994), M. Herman (1998), W. de Melo (1998), G. Świątek (1998), M. Benedicks (2002), A. Eremenko (2002), J. Smillie (2002), M. Bonk (2006), S. Smirnov (2006, 2010), X. Buff (2010), A. Chéritat (2010), A. Avila (2010, 2014), 沈维孝 (2014), S. van Strien (2014), L. DeMarco (2018), T.-C. Dinh (2018), F. Przytycki (2018), R. Dujardin (2022), J. H. Silverman (2022) 等.

其中 Yoccoz、McMullen、Smirnov 和 Avila 分别获得了 1994、1998、2010 和 2014 年的菲尔兹奖, Carleson 和 Sullivan 分别获得了 2006 和 2022 年的阿贝尔奖.

20 世纪 80 年代到 90 年代初, 比较有影响力的复动力系统综述和讲义包括文献 [74, 100, 256, 264,

287, 461, 711] 等. 20 世纪 90 年代起, 共出现了 3 本经典的复解析动力系统专著: [58, 165, 519], 它们主要考虑有理函数的迭代. 有关超越函数迭代的参考书可参见文献 [367, 531]. 关于复解析动力系统的专著还有文献 [472, 709] 等. McMullen [499] 关于重整化的专著是进入复动力系统领域的必读文献之一. 此外, 文献 [124, 238, 239, 371, 405, 500] 也是很好的参考文献. 还有一些专著涉及复动力系统的相关领域, 如一维实动力系统 (包括区间和圆周) [135, 196, 220–222]、算术和非阿域动力系统 [62, 690, 691] 等. 高维复动力系统可参见文献 [2, 250, 311].

在杨乐院士的建议下, 国内的复动力系统从 20 世纪 80 年代后期开始发展. 当时的研究人员主要包括: 位于北京的李忠、吕以辇、王跃飞、伍胜健、崔贵珍、郑建华、张广远和方丽萍等, 位于上海的任福尧、邱维元、尹永成、乔建永、张文俊、周维民和龚志民等, 以及位于香港的杨重骏等. 21 世纪初, 沈维孝、李思敏和张高飞等回国后, 使得复动力系统在合肥、南京等地也得到了发展. 从 20 世纪 90 年代起在国外工作, 但一直和国内保持密切联系的华人复动力系统专家有谭蕾、蒋云平、范爱华和胡骏等. 迄今为止共有复动力系统中文专著 [457, 593, 628, 819] 4 本.

关于复动力系统早期发展史 (1942 年 9) 之前的 Fatou-Julia 理论) 可参见数学史专著 [7, 9, 24]. 近百年来复动力系统的介绍可参见文献 [8, 615, 744]. 除了上面提到的一系列专著, 还有以下值得参考的复动力系统论文集 [125, 169, 188, 235, 243, 308, 423, 724] 及 [112, 115, 244, 364, 475, 545, 632, 661] 等.

复解析动力系统是复分析的一个子方向, 它与复分析的其他子方向有紧密的联系, 特别是拟共形映射与 Teichmüller 理论、值分布理论、正规族理论和复微分方程等. 与其他学科也有很多交叉, 如拓扑学、遍历理论、分形几何和统计物理等. 复解析动力系统及相关问题集可参见文献 [95, 355].

限于作者的研究水平和兴趣, 这篇综述将主要侧重于一维有理函数的动力系统. 在叙述有理函数动力系统的相关结果时, 也会适当提及超越整函数和超越亚纯函数的平行结果. 同时, 本文将在其中一节专门介绍超越函数的动力系统, 其侧重于与有理函数动力系统的不同之处.

2 Julia 集的拓扑与几何

2.1 Fatou-Julia 基础理论

定义 2.1 (Fatou 集和 Julia 集) 对于有理函数 $f:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$, 其 Fatou 集 $F(f)$ 定义为 $\widehat{\mathbb{C}}$ 中所有使得迭代序列 $\{f^{\circ n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 局部正规的点集, 其 Julia 集 $J(f)$ 定义为 Fatou 集在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 中的补集.

根据定义可知, Fatou 集是开集, Julia 集是闭集. 它们的连通分支分别称为 Fatou 分支和 Julia 分支. 次数大于 1 的有理函数 Julia 集是一个没有孤立点也没有内点 (除非为整个球面) 的非空完全不变紧集, 它是所有斥性周期点的闭包. 关于有理函数 Fatou 集和 Julia 集的基础理论 10), 可参见文献 [58, 165, 499, 519].

自 20 世纪初 Fatou [303] 和 Julia [391] 系统地研究全纯函数的迭代开始, 到 20 世纪 80 年代 Sullivan 证明游荡域不存在定理并给出周期 Fatou 分支分类为止, 有理函数在 Fatou 集上的动力系统已经完全清楚了 (参见文献 [506, 713]):

9) 注意 1942 年正是 Siegel [689] 发表关于线性化问题里程碑工作的年份. 1942 年以后的复动力系统发展情形是一个好的数学史课题.

10) 有理函数 f 的 Julia 集在 20 世纪 80 年代以前记作 $F(f)$, 而 Fatou 集却记作 $J(f)$ 且那时没有正式的称呼, 有时称作 "等度连续域". Blanchard 在 1984 年引入了现在意义下的 Fatou 集和 Julia 集符号 (参见文献 [100, 第 90 页] 和 [615, 第 1 页]).

定理 2.2 有理函数的 Fatou 分支都是最终周期的, 且周期 Fatou 分支必为以下 5 类之一: 超吸引域、几何吸引域、抛物域、Siegel 盘和 Herman 环.

超吸引域和几何吸引域统称为吸引域, 而 Siegel 盘和 Herman 环则统称为旋转域. Sullivan 最终周期性定理的证明基于拟共形形变, 周期 Fatou 分支的分类基于 Denjoy-Wolff 定理和万有覆盖. 特别地, 这 5 类周期 Fatou 分支都确实存在, 前 4 类可以由二次多项式 $z \mapsto \lambda z + z^2$ 实现 (参见文献 [119,416,428,689]), 而 Herman 环则可以在三次有理函数中找到 (参见文献 [359,676]).

假设有理函数的次数至少为 2. Fatou 证明了超吸引域、几何吸引域和抛物域内必至少含有一个临界点, 而 Siegel 盘和 Herman 环的边界必落在临界点轨道的闭包中 (参见文献 [519, 第 8–11 小节]). 有理函数在临界点局部有强压缩性, 整体上因为覆盖 Riemann 球面多次而呈现出扩张性, 这导致非线性的有理函数呈现复杂而有趣的动力系统.

Fatou 在 20 世纪 20 年代猜测 d 次有理函数的非斥性周期轨道的数目可以由其临界点的个数 $2d-2$ 控制. 利用全纯扰动, Fatou 自己可以将一半的中性周期轨道扰动为吸性, 于是证明了 d 次有理函数至多有 $6d-6$ 个非斥性周期轨道 (参见文献 [257] 和 [165, 第 III.2 小节]). Sullivan 在 1981 年证明了吸性循环和 Herman 环的个数之和不超过 $2d-2$. 利用类多项式理论, Douady 在 1982 年证明了 d 次多项式至多有 $d-1$ 个非斥性周期轨道 (参见文献 [257] 和 [165, 第 VI.1 小节]). 最终在 1986 年, Shishikura [676] 利用拟共形手术进行扰动, 在他的硕士论文中证明了 Fatou 的猜想. 事实上, 他证明了如下更强的结果:

定理 2.3 一个 d 次有理函数的吸性循环、抛物循环、无理中性循环个数之和, 再加上 Herman 环循环的个数的 2 倍, 不超过 $2d-2$. 此外, Herman 环循环的个数不超过 $d-2$.

此类上界估计现在称为 Fatou-Shishikura 不等式, 进一步的研究可参见文献 [106].

对于有理函数, 周期 Fatou 分支的连通数只能是 1、2 或 ∞. 对于任意正整数 n $(\geqslant 3)$, Baker、Keen 和吕以辇 [47] 利用拟共形手术证明了存在有理函数, 其含有一个预周期的 Fatou 分支且连通数恰好等于 n. 但这些有理函数的表达式是未知的. 之后 Shishikura 提出了如下问题 (参见文献 [58, 第 263 页]):

问题 2.4 对于任意 $n \geqslant 3$, 能否找到一个具有显式表达的有理函数, 其含有一个连通数等于 n 的 Fatou 分支? 这样的有理函数最低次数 $d(n)$ 是多少?

Beardon 对这个问题做了研究 (参见文献 [58, 第 11.7 小节]), 进一步的研究可参见文献 [163,322]. 特别地, Canela [163] 证明了 $\liminf_{n\to\infty} d(n) \leqslant 6$. 但 $\limsup_{n\to\infty} d(n)$ 的值还不清楚.

在 Fatou 集上的动力系统清楚后, 需要研究 Julia 集上的动力系统. 这一般采用间接的方式, 将 Fatou 集上的动力系统连续 (或同胚) 地过渡到 Julia 集上 (参见文献 [519, 第 17–19 小节]). 为此, 需要首先研究 Julia 集及其子集的拓扑性质 (如连通性、局部连通性和淹没性等). 此外, 作为典型的分形集, Julia 集的几何性质 (维数、面积等) 有助于揭示动力系统的复杂性.

对于超越整函数和含极点的超越亚纯函数, 除了上面的 5 类周期 Fatou 分支外, 还可能会出现 Baker 域 [303] 和游荡域 [40]. 有关基础理论可参见文献 [74,367,531]. 超越整函数版本的 Fatou-Shishikura 不等式可参见文献 [69,288].

2.2 Julia 集的连通性

任何次数大于 1 的有理映射, 其 Julia 集要么连通, 要么有不可数多个连通分支. 对于多项式, Julia 集连通的充要条件是每个有限临界点的轨道有界. 当所有临界点的轨道均无界时, Julia 集是一个 Cantor 集 (同胚意义下) (参见文献 [165, 第 III.4 小节]). 因此对于二次多项式, Julia 集要么连通,

要么为一个 Cantor 集. 尹永成 [782] 和 Milnor [513] 独立地证明这个结论对二次有理函数也成立.

Fatou 猜测当多项式的 Julia 集是一个 Cantor 集时, 临界点的轨道均无界. Brolin [133] 在 1965 年构造了一个三次多项式, 其有一个有界的临界轨道但 Julia 集为 Cantor 集, 从而否定了 Fatou 的猜想. Branner 和 Hubbard [127] 利用他们发明的表格 (tableaux) 技巧, 证明了三次多项式的 Julia 集是一个 Cantor 集的充要条件是每个临界点所在的填充 Julia 集 11) 分支是非周期的. 同时他们猜测这对一般的多项式也成立. Levin 和 van Strien [439, 440] 证明了当多项式具有实系数且仅有一个轨道有界的临界点时 Branner-Hubbard 猜想成立. 之后, 邱维元和尹永成 [607] 以及 Kozlovski 和 van Strien [422] 独立地解决了 Branner-Hubbard 猜想 (部分结果可参见文献 [727, 799]):

定理 2.5 对于任意非线性多项式 f, 其填充 Julia 集 $K(f)$ 的一个连通分支为单点当且仅当其向前轨道不含周期临界分支. 特别地, 多项式的 Julia 集为 Cantor 集的充要条件是 $K(f)$ 的临界分支都是非周期的.

Branner-Hubbard 猜想的解决主要用到了组合工具 KSS (Kozlovski-Shen-van Strien) 嵌套 [420] 和分析工具 Kahn-Lyubich 覆盖引理 [396]. 这两个工具在处理含持续回归临界点的问题中起到重要作用, 如刚性、双曲稠密性和 Fatou 分支边界的局部连通性等问题.

对于以下情形, 有理函数的 Julia 集是连通的: 临界轨道均有界的多项式 (Fatou)、临界有限的有理函数 [496]、多项式的 Newton 映射 [684] 和一类广义重整化变换函数 [595, 777] 等. 注意 Julia 集连通等价于每个 Fatou 分支单连通, 因此, 若有理函数含 Herman 环或者非单连通的吸引域或抛物域, 则 Julia 集一定非连通. 关于一些其他特殊有理函数族 Julia 集的连通性, 如 McMullen 映射 Julia 集等的连通性可参见文献 [247, 761, 770], 其中 Riemann-Hurwitz 公式在证明中起到主要作用.

超越亚纯函数 Julia 集的连通性 12) 可参见文献 [43, 51, 251].

2.3 Julia 集的局部连通性

若次数大于 1 的有理函数 f 有一个不变的单连通 Fatou 分支 U, 则存在共形映射将 $f: U \to U$ 共轭到一个定义在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的有限 Blaschke 乘积 $g: \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ [496]. 若 U 的边界 ∂U 局部连通 (特别地, 若为简单闭曲线), 则通过 Carathéodory 定理可以将 g 在单位圆周上的动力系统半共轭 (或进一步地, 共轭) 到 f 在 U 边界上的动力系统. 于是 Julia 集的子集 ∂U 上的动力系统便得到了很好的描述 (参见文献 [258]). 整个 Julia 集的局部连通性和每个 Fatou 分支边界的局部连通性的关系可由如下 Whyburn 的结果得到 (参见文献 [755, 第 113 页]).

引理 2.6 复球面上的一个紧子集 X 局部连通当且仅当下列条件成立:

(1) $\widehat{\mathbb{C}} \setminus X$ 的每个连通分支的边界局部连通;

(2) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, $\widehat{\mathbb{C}} \setminus X$ 仅有有限多个连通分支的球面直径大于 ε.

如果整个 Julia 集 $J(f)$ 局部连通, 则 f 的每个 Fatou 分支单连通且边界局部连通, 其上的动力系统可以通过 Fatou 分支的动力系统连续延拓. 注意, 如果有理函数的 Julia 集不连通, 则它一定不是局部连通的.

对于 Julia 集的局部连通性, 主要有两种证明方法. 第一种方法是利用上述引理先证明每个 Fatou 分支边界局部连通, 然后再证明 Fatou 分支的直径趋向于 0 (对于多项式, 只需要证明无界的那个 Fatou

11) 多项式 f 的填充 Julia 集 (filled Julia set) 定义为 $K(f) := \{z \in \mathbb{C} : \{f^{\circ n}(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有界$\}$, 其拓扑边界 $\partial K(f)$ 为 f 的 Julia 集.

12) 一个值得关注的问题是正弦函数族 $f_\lambda(z) = \lambda \sin(z)$ 的 Julia 集 $J(f_\lambda)$ 的连通性. Domínguez 和 Sienra [255] 在 2002 年猜想 $J(f_\lambda)$ 连通当且仅当 $|\lambda| \geqslant 1$. 这个猜想目前还没有完全解决.

分支的边界局部连通). 这需要有理函数在 Julia 集附近存在扩张度量或者有一定的扩张性, 其中经典的 "压缩引理" (shrinking lemma) 对 Julia 集的局部连通性研究起到重要作用 (参见文献 [482, 687, 726] 和 [473, 第 12 节]). 利用上述原理, 有理函数的连通 Julia 集在以下情形被证明是局部连通的:

- 几何有限有理函数 [726], 这包括了双曲、次双曲和临界有限有理函数以及几何有限多项式 [264] (也可参见文献 [165, 第 V.4 节]);
- 半双曲有理函数 [166, 784];
- 含有一个完全不变 Fatou 分支, 满足 Collet-Eckmann 条件 13) 或可和性条件且指标较小 14) 的有理函数 [342, 343];
- 弱双曲有理函数 [641].

考虑到局部连通是局部性质, 第二种证明 Julia 集局部连通性的方法是逐点分析: 对于 Julia 集上的每一点, 找一个连通的邻域基. 该方法的优点在于可以根据点的向前轨道的动力系统行为采取不同的分析办法. 这里的一个经典方法就是构造 Yoccoz 拼图 (参见文献 [370, 516]).

定义 2.7 (Yoccoz 拼图) 考虑二次多项式 $f(z) = z^2 + c$, 其 Julia 集连通且包含两个斥性不动点, 其中一个斥性不动点 α 的组合旋转数为 q/p, 这里 p 和 q 为互素的正整数且 $p \geqslant 2$. 取 f 的一条等势线 γ, 则恰有 p 条外射线着陆在 α, 它们将 γ 围成的有界区域分割成一个深度为 0 的 Yoccoz 拼图 (puzzle), 它由 p 个互不相交的拓扑圆盘 $P^{(i)}$ 组成, $i = 0, 1, \dots, p-1$, 称其为深度为 0 的拼图片 (puzzle pieces). 而称 $f^{-n}(P^{(i)})$ 的任意连通分支为深度为 n 的拼图片, 其中 $n \geqslant 1$. 这些深度为 n 的拼图片也是拓扑圆盘, 它们给出了 $f^{-n}(\gamma)$ 所围有界区域的一个有限平铺 (finite tiling), 见图 2.

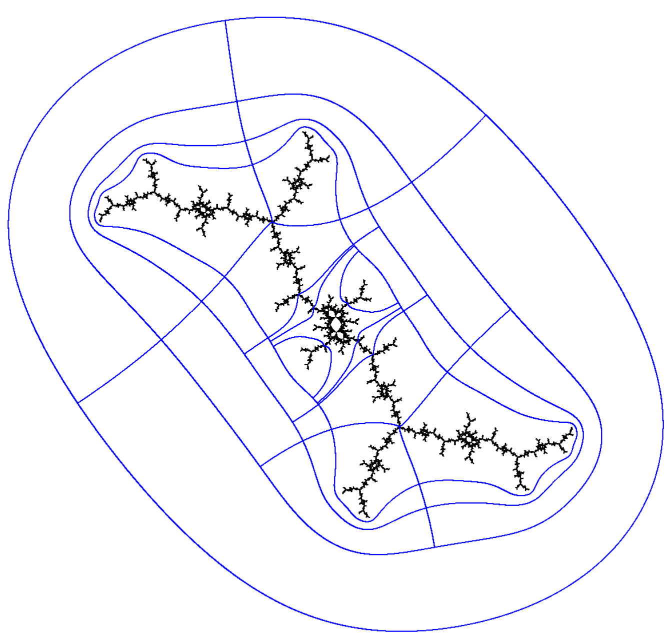


图 2 (网络版彩图) 一个二次多项式的 Yoccoz 拼图

13) 设 f 是一个有理函数, 如果存在 $C > 0$ 和 $\lambda > 1$ 使得对于所有落在 f 的 Julia 集上且向前轨道与其他的临界点不交的临界点 c, $|(f^{\circ n})'(f(c))| > C\lambda^n$ 对所有 $n \geqslant 0$ 成立, 则称 f 是 Collet-Eckmann 的.

14) 设 f 是一个有理函数, 如果存在指标 $\beta > 0$ 使得对于所有落在 f 的 Julia 集上且向前轨道与其他的临界点不交的临界点 c, 有 $\sum_{n=0}^{\infty} |(f^{\circ n})'(f(c))|^{-\beta} < \infty$, 则称 f 是满足可和性条件的. 可和性条件与 Collet-Eckmann 条件的关系可参见文献 [321].

根据 Yoccoz 拼图的定义 (主要基于这 p 条外射线是一个向前不变集) 可以验证任何两个拼图片要么不交, 要么一个包含另外一个. 由 Yoccoz 拼图可以得到一个由拼图片组成的 Markov 分解. 这样的分解可以通过 Branner-Hubbard 表格 [127] 或者 Yoccoz τ- 函数来进行研究. 证明 Julia 集在一点 z 处局部连通归结为证明 $P_n(z)$ 的 Euclid 直径趋向于 0, 其中 $P_n(z)$ 表示深度为 n 且闭包包含 z 的拼图片 15), 其随着 n 的增大为一个嵌套序列. 注意 $P_n(z) \setminus \overline{P_{n+1}(z)}$ 为一个 (退化) 圆环. 根据 Grötzsch 共形模不等式, 要证 $J(f)$ 在点 z 局部连通, 只需要证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{mod}(P_n(z) \setminus \overline{P_{n+1}(z)}) = \infty.$$

在该等式的证明过程中, 寻找非退化的圆环是一个关键环节, 这其中可能需要对拼图片进行 "加厚" (参见文献 [516]). 为陈述 Yoccoz 关于 Julia 集局部连通性的结果, 我们先给出类多项式和重整的定义 (参见文献 [265, 466, 499]).

定义 2.8 (类多项式) 设 U 和 V 均为 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的 Jordan 区域且 $\overline{U} \subset V$. 若 $f: U \to V$ 是一个次数为 $d \geqslant 2$ 的逆紧全纯映射, 则称 $f: U \to V$ 是一个 d 次类多项式 (polynomial-like map), 其填充 Julia 集定义为 $K(f) = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(V)$, 且 Julia 集为 $J(f) = \partial K(f)$.

定义 2.9 (可重整) 设 f 是一个带有标记临界点 c_0 (局部度为 d) 的全纯函数, 若存在正整数 n 和包含 c_0 的 Jordan 区域 U 和 V, 使得 $f^{\circ n}: U \to V$ 是一个 d 次类多项式且 $K(f^{\circ n})$ 连通 16), 则称 f 关于 c_0 是 n- 可重整的 (renormalizable), 简称 f 可重整.

记 $\mathcal{R}(f) := \{n \geqslant 1 : f$ 关于某个临界点 c_0 是 n- 可重整的$\}$. 若 $\mathcal{R}(f)$ 分别为空、有限或无限集, 则称 f 分别为不可重整、(至多) 有限可重整或无穷可重整. 对于可重整的单临界多项式, 根据重整的组合可将其划分成 primitive 和 satellite 等类型 17) (参见文献 [499, 第 7.3 小节]).

利用拼图, Yoccoz 证明了下面的结论 (参见文献 [370, 516]):

定理 2.10 若二次多项式 $f(z) = z^2 + c$ 的 Julia 集连通, 并且不含无理中性周期点且非无穷可重整, 则 f 的 Julia 集是局部连通的.

在 Yoccoz 的结果之后, 二次多项式 Julia 集的局部连通性研究分为两个方向, 一个是无穷可重整, 另一个是含有无理中性周期点的情形. 基于 Sullivan [714] 对具有有界组合的无穷可重整实二次多项式建立的 "复界", 胡骏和蒋云平 [365] 首先证明了 Feigenbaum 二次实多项式的 Julia 集是局部连通的 [388]. 通过对更多的单临界多项式证明复界的存在性 (参见第 3.2 小节), Julia 集的局部连通对于以下情形成立:

- 部分具有无界组合的无穷可重整二次多项式 [395, 398, 467]、具有有界组合的无穷 primitive 可重整二次多项式 [394]、具有有界组合的无穷 satellite 可重整二次多项式 [272, 273];
- 单临界实多项式 [438], 包括二次实多项式 [345, 474];
- 不含无理中性周期点且至多有限可重整的单临界多项式 [397].

作为 Branner-Hubbard-Yoccoz 拼图的进化, Kozlovski、沈维孝和 van Strien [420] 引入的 KSS 嵌套 18) 以及 Kahn-Lyubich [396] 发展的覆盖引理被用来处理多临界多项式 Julia 集的局部连通性. 下列函数的 Julia 集被证明是局部连通的 (假定 Julia 集连通):

15) 如果这样的 $P_n(z)$ 不唯一, 那么就考虑这些拼图片的并.

16) 这里 $K(f^{\circ n}) = K(f^{\circ n}|_U)$ 为类多项式 $f^{\circ n}: U \to V$ 的填充 Julia 集. 当 f 是有理函数时, 要求 $J(f^{\circ n})$ 是 $f: \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ 的 Julia 集的真子集.

17) McMullen [499] 将重整划分为 α- 型、β- 型和不交型. 现在一般分为 satellite 可重整和 primitive 可重整 (参见文献 [469, 515, 516]).

18) 相比于经典的共形模 $\operatorname{mod}(P_n(z) \setminus \overline{P_{n+1}(z)})$ 求和计算, Lyubich 引入的加强版嵌套 (enhanced nest) 和 KSS 嵌套考

- 不含无理中性周期点且至多有限可重整的多项式 [422];
- 实多项式 [194].

对于含有无理中性周期点的情形, Petersen [562] 利用三次 Blaschke 模型, 通过构造所谓的 "Petersen 拼图" 证明了如下定理:

定理 2.11 对于任何有界型无理数 α, 二次多项式 $f(z)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}z+z^2$ 都有一个边界穿过临界点的 Siegel 盘, 其 Julia 集是局部连通的.

Yampolsky [765] 利用临界圆周映射复界的存在性给出了上述定理的一个不同证明, 但其证明仍需要使用 Petersen 拼图. 该拼图与 Branner-Hubbard-Yoccoz 拼图非常不同: 由两个嵌套的 Petersen 拼图片的差得到的圆环永远是退化的, 因此证明局部连通性时无法使用 Grötzsch 模不等式. Petersen 的证明想法是通过圆周上的无理旋转来控制拼图片的大小. 通过类似的办法, 并基于退化 Beltrami 方程的研究 (参见文献 [216]), Petersen 和 Zakeri [569] 将前者的结果推广到了几乎所有的无理数. 最近, 在不依赖于拼图的情形下, Petersen 局部连通性的结果被推广到了一类含有界型 Siegel 盘的有理函数和超越整函数 [748].

此外, 确实存在有理函数, 其 Julia 集连通但非局部连通. Douady 和 Sullivan 证明了, 若多项式含有 Cremer 点 (即局部不可线性化的无理中性周期点, 参见第 7 节), 或含有 Siegel 盘但其边界上不含临界点, 则该多项式的 Julia 集一定非局部连通 (该条件称为 Douady-Sullivan 准则, 参见文献 [256, 第 48 页]、[711, 第 749 页] 和 [519, 第 18 节]). Douady 和 Hubbard 在 20 世纪 80 年代构造了一个无穷 satellite 可重整且 Julia 集非局部连通的二次多项式 [516]. 更多非局部连通 Julia 集的例子 19) 可参见文献 [249, 434, 644, 702].

尽管多项式的 Julia 集可能非局部连通 (如含有 Cremer 点时), 但 Roesch 和尹永成却证明有界临界 Fatou 分支的边界有很好的拓扑 (参见文献 [649, 650]):

定理 2.12 多项式的有界 Fatou 分支, 如果不最终迭代到一个 Siegel 盘, 则必为一个 Jordan 区域.

该定理的证明基于 KSS 嵌套和 Kahn-Lyubich 覆盖引理. 值得一提的是, Kahn-Lyubich 覆盖引理最近也被用在 Siegel 盘和 Herman 环的研究中 (参见文献 [449, 778]). 对于多项式的 Siegel 盘边界, 作为 Petersen-Zakeri 结果的推广, 目前最一般的结果是张高飞证明的如下定理 (参见文献 [804]):

定理 2.13 对几乎所有旋转数, 多项式的 Siegel 盘是一个 Jordan 区域.

关于 Siegel 盘边界拓扑的进一步研究, 涉及 Douady-Sullivan 猜想, 详见第 7 节.

目前所有已知的连通且非局部连通的有理函数 Julia 集, 造成非局部连通的原因都是某个 Fatou 分支的边界非局部连通, 而不是因为 Fatou 分支的直径不趋向于 0 (参见引理 2.6). Roesch [644] 在 2006 年提出下面的问题:

问题 2.14 是否存在一个有理函数, 其 Julia 集连通且非局部连通, 但该有理函数的每个 Fatou 分支边界都是局部连通的?

上述问题的答案很可能是否定的, 即一个有理函数的 Julia 集如果连通, 则其 Fatou 分支的直径猜测应该趋向于 0. 尹永成提出了一个与 Roesch 问题相关的猜想:

猜想 2.15 多项式 Fatou 分支的个数要么有限, 要么 Euclid 直径趋向于 0.

虑的是形如 $P_n(z)\setminus\overline{P_{n+k}(z)}$ 的圆环的模求和, 这样计算时模的 "损失" 更小, 模的求和级数更有可能发散, 从而更有可能得到局部连通的结论. 关于 KSS 嵌套的表格方法运用参见文献 [552].

19) 目前所有已知的由无穷可重整二次多项式生成的非局部连通 Julia 集都是 satellite 类型的. 因此一个自然的问题是, 是否存在无穷 primitive 可重整的二次多项式, 其 Julia 集非局部连通?

对于没有无理中性周期点且 Julia 集连通的多项式, 其 Julia 集局部连通当且仅当 Julia 集上没有游荡连续统 (continuum)[20] (参见文献 [412, 第 245 页] 和 [433, 729]).

通过寻找拼图结构, 一些经典的有理函数 (非多项式) 的 Julia 集也被证明是局部连通的. Roesch 考虑了三次多项式的 Newton 映射, 利用割线 (cut rays, 类比于多项式的外射线) 构造拼图, 证明了多项式根所在的吸性 Fatou 分支总是 Jordan 区域, 且大部分 Julia 集是局部连通的[647]. 特别地, 她证明了存在三次 Newton 映射, 使得下面两种情形都能发生:

- Julia 集局部连通但含有 Cremer 点;
- Julia 集局部连通但含有游荡的连续统 (且 Julia 集仅含斥性周期点).

这两个现象说明了有理函数与多项式的动力系统有很大区别.

三次多项式的 Newton 映射仅有一个自由临界点, 在可重整情形下其动力系统类比于二次多项式. 对于一般多项式的 Newton 映射, 会出现多个自由临界点. 利用 KSS 嵌套和 Kahn-Lyubich 覆盖引理等工具, 多项式 Newton 映射的根的吸引域边界被证明是局部连通的, 且在不可重整或可重整但不含 Siegel 盘等情形下 Julia 集也被证明是局部连通的 (参见文献 [268, 752]). Hubbard 有如下猜想:

猜想 2.16 多项式 Newton 映射的 Julia 集总是局部连通的.

前文提到有理函数的 Julia 集如果不连通, 那么一定不局部连通. 此时可以考虑 Julia 分支的局部连通性和其他拓扑性质. 如果 Julia 分支是周期的, 则根据 McMullen[496] 的结果, 可以将该 Julia 分支转化为研究某个有理函数的连通 Julia 集的拓扑性质. 如果 Julia 分支游荡, 则判断其拓扑性质是一个困难的问题. 如果一个有理函数的 Julia 集是一个 Cantor 集, 则该 Julia 集上一定存在不可数多个游荡的单点 Julia 分支. 第一个具有非单点游荡 Julia 分支的有理函数由 McMullen[496] 在 1988 年给出. 他证明当正整数 m 和 n 满足 $1/m+1/n<1$ 且参数 $\lambda\ (\neq 0)$ 充分小时, McMullen 映射 $f_\lambda(z)=z^m+\lambda/z^n$ 的 Julia 集是一个 Cantor 圆周 (同胚于一个标准的三分 Cantor 集和单位圆周的乘积), 且包含了不可数多个 Jordan 曲线型游荡 Julia 分支.

对于几何有限有理函数, 谭蕾和尹永成证明了周期 Julia 分支是局部连通的[726], 而 Pilgrim 和谭蕾证明了游荡 Julia 分支要么是单点要么是一条 Jordan 曲线[575]. 因此几何有限有理函数的每个 Julia 分支都局部连通. 一个 Julia 分支如果不是单点也不是 Jordan 曲线, 则称为复杂型 Julia 分支. 一个 d 次多项式的复杂型分支循环不超过 $d-1$ 个 (参见文献 [422, 607]). 对于给定次数 $d\ (\geqslant 3)$ 的有理函数, 复杂型周期 Julia 循环的个数可以任意多 (参见文献 [207]). 对于某些临界有限有理函数游荡连续统的拓扑性质可参见文献 [202].

基于某种割线 (cut ray) 来构造拼图[236], 邱维元、王晓光和尹永成研究了 McMullen 映射 Julia 集的局部连通性[601], 得到了与文献 [647] 平行的结果.

在对有理函数的 Julia 集进行局部连通性研究时, 最关键的部分是构造一个能将 Julia 集割开的不变集. 对于多项式可以用外射线, 对于 Newton 映射和 McMullen 映射可以用 "割线". 对于一些特殊的有理函数, 如某些重整化变换函数, 可以用 Fatou 串构成的气泡射线 (bubble ray) 将 Julia 集分开来证明局部连通性[19] (部分结果参见文献 [597]).

超越整函数 Julia 集的局部连通性虽然没有有理函数那么重要, 但也引起了很多人的兴趣. 对于超越整函数的有界周期 Fatou 分支, 人们猜测它们也与多项式一样, 为 Jordan 区域. 但游荡域的边界拓扑以及 Julia 分支的拓扑却可以非常复杂 (参见文献 [488, 489]). 关于超越整函数 Julia 集局部连通性的研究可参见文献 [11, 83, 529, 542, 548] 以及其中的参考文献.

20) 连续统指的是非单点的连通紧集, 称它是游荡的指的是它的向前轨道两两不交.

2.4 Julia 集的面积和 Hausdorff 维数

关于一个无处稠密的有理函数 Julia 集是否总是具有零面积 (2 维 Lebesgue 测度) 的问题可以追溯到 20 世纪初的 Fatou [303]. 他证明了一类 Cantor Julia 集具有零面积. 20 世纪 80 到 90 年代, 有很多有理函数的 Julia 集 (如果不是整个球面) 被证明具有零面积 (事实上它们的 Hausdorff 维数被证明严格小于 2): 几何有限 [264, 458], 临界非回归 [740, 784], 满足 Collet-Eckmann 条件 [584], 满足可和性条件且指标较小 [343] (也可参见文献 [140, 638]), 具有向后压缩性质 [640] 等. 对于二次多项式, Lyubich [463] 和 Shishikura [678] 在 20 世纪 90 年代独立地证明了下面的结果:

定理 2.17 如果一个二次多项式没有无理中性周期点也不是无穷可重整的, 则其 Julia 集面为零.

对于某些含有 Siegel 盘 (参见文献 [501, 562, 569, 765]) 和某些无穷可重整的二次多项式 (参见文献 [29, 269, 779]), Julia 集也被证明具有零面积. Julia 集的零面积在证明有理函数的刚性过程中起到关键作用. 特别地, 如果所有多项式的 Julia 集面积都为零, 则多项式的双曲稠密猜想成立 (参见第 3 节). 证明 Julia 集具有零面积的主要方法之一是通过各种偏差定理, 证明 Julia 集上几乎每一点都不是 Lebesgue 密度点.

2005 年, Buff 和 Chéritat 完成了 Douady 在 20 世纪 90 年代制定的计划, 通过扰动二次多项式, 证明了存在正面积的二次多项式 Julia 集 21) (参见文献 [146, 150, 180]):

定理 2.18 存在二次多项式, 其 Julia 集具有正面积. 这样的二次多项式可以含有 Cremer 点, 或者含有 Siegel 点, 或者是无穷可重整的.

Buff 和 Chéritat 的证明本质地用到了 Inou 和 Shishikura [379] 发展起来的近抛物重整理论. 该理论可以很好地控制二次映射的临界轨道 (参见文献 [150, 174]). 同样基于该理论 (以及文献 [29] 中的结果), Avila 和 Lyubich [29] 证明了某些 (具有有界组合的无穷 primitive 可重整) Feigenbaum 二次多项式的 Julia 集具有正面积且是局部连通的. 这个结果比较违反直觉: 一般认为具有正面积的多项式 Julia 集, 其拓扑应该是 "坏" 的. 但 Avila 和 Lyubich 的结果告诉我们: 多项式 Julia 集的正面积和局部连通可以兼容 22). 利用 Dudko、Lyubich 和 Selinger 发展的 pacman 重整理论 [274], Dudko 和 Lyubich [272] 证明了存在具有有界组合的无穷 satellite 可重整二次多项式, 其 Julia 集具有正面积且局部连通 23).

尽管 Julia 集的局部连通和正面积可以兼容, 但非局部连通和零面积是否一定不能兼容还不清楚. 下面的问题可参见文献 [95, 第 443 页] 和 [180]:

问题 2.19 是否存在含 Cremer 点的有理函数, 其 Julia 集面积为零?

利用类多项式重整理论, 可以将 Buff 和 Chéritat 的结果推广到任意次的多项式. 事实上, 利用 Chéritat [183] 最近构造的具有任意局部映射度的抛物重整不变类, 结合 McMullen [501] 和 Cheraghi [174] 的工作, 可以证明对于任意 $d \geqslant 2$, 存在单临界多项式 $f(z) = z^d + c$, 其 Julia 集具有正面积且 f 含有 Cremer 点, 或者含有 Siegel 点, 或者是无穷可重整的 [776]. 一个自然的问题如下:

问题 2.20 是否存在不含无理中性周期点且不可重整的多项式 ($\deg \geqslant 3$), 其 Julia 集有正面积?

目前已知的具有正面积 Julia 集的二次多项式都是复系数的. Avila 和 Lyubich [31] 提出了下面的

21) Nowicki 和 van Strien 在 1994 年宣布证明了存在充分大的 d, 使得实多项式 $f(z) = z^d + c$ 的 Julia 集具有正面积. 但 Buff 在 1997 年找到了证明中的一个缺陷 (参见文献 [143] 和 [744, 第 563 页]).

22) 基于文献 [31, 150], 利用类多项式重整理论, 可以在 McMullen 映射族中找到具有正面积的 Sierpiński 地毯型 Julia 集 (该类型 Julia 集自动局部连通) [316].

23) 目前已经有了 3 类无穷可重整的二次多项式, 其 Julia 集具有正面积. 一个自然的问题是, 是否存在具有无界组合的无穷 primitive 可重整二次多项式, 其 Julia 集具有正面积?

问题:

问题 2.21　是否存在实数 c, 使得 $f(z)=z^2+c$ 的 Julia 集有正面积?

关于二次多项式 Julia 集的面积, 更多的问题可参见文献 [180, 第 4.2 小节].

在 Sullivan 的字典中, 有理函数 Julia 集 $J(f)$ 的面积和有限生成 Kleinian 群极限集 $\Lambda(\Gamma)$ 的面积都受到很大关注. 著名的 Ahlfors 面积猜想断言: 如果 $\Lambda(\Gamma)$ 不为整个球面, 那么其面积为零. 这个猜想在 21 世纪初由 Agol [3] 以及 Calegari 和 Gabai [162] 独立解决了. 这是 Kleinian 群与有理函数动力系统的显著差异之一.

次数大于 1 的有理函数 Julia 集的 Hausdorff 维数一定严格大于 0 (参见文献 [327]). 前文提到了很多类型有理函数的 Julia 集 Hausdorff 维数严格小于 2, 除了几何有限, 临界非回归, 满足 Collet-Eckmann 条件, 满足可和性条件且指标较小, 还包括所有含有界型 Siegel 盘的二次多项式 [501] 和某些无穷可重整的二次多项式 [29]. 为了说明 Julia 集的 Hausdorff 维数小于 2, 可以通过证明 Julia 集是一致疏朗 (uniformly porous) 集, 这在一些情形下是基于沿临界轨道的扩张性质, 并利用 Poincaré 级数和共形测度等工具. 注意证明 Julia 集具有零面积时只需要说明其是非一致疏朗集.

Hausdorff 维数等于 2 的非球面有理函数 Julia 集最先由 Shishikura [679] 给出. 特别地, Shishikura 证明了存在含无理中性不动点 (详细刻画可参见文献 [177]) 和不可重整的二次多项式, 其 Julia 集的 Hausdorff 维数等于 2. Avila 和 Lyubich [29,31] 证明了面积为零且 Hausdorff 维数等于 2 的 Feigenbaum 二次 Julia 集的存在性. 满足该性质的 Cantor Julia 集例子可参见文献 [772].

多项式的 Julia 集, 如果不是 Cantor 集, 也不是圆周或线段, 其 Hausdorff 维数一定严格大于 1 (参见文献 [587]). 对于有理函数, 其单连通的吸引域边界如果不是圆周或线段, 则其 Hausdorff 维数严格大于 1 (参见文献 [581]). 单连通抛物域边界的 Hausdorff 维数研究可参见文献 [739]. 关于 Siegel 盘边界的 Hausdorff 维数和面积问题, 参见第 7 节.

对于双曲有理函数, 其 Julia 集的 Hausdorff 维数有如下精确计算公式 (参见文献 [120] 和 [823, 第 5.3 小节]):

定理 2.22 (Bowen 公式)　若 f 是一个次数至少为 2 的双曲有理函数, 则其 Julia 集 $J(f)$ 的 Hausdorff 维数 $s\ (>0)$ 是下面函数的唯一零点:

$$s\mapsto \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\sum_{z\in f^{-n}(z_0)}|(f^{\circ n})'(z)|^{-s},$$

其中 z_0 是 $J(f)$ 上任意给定点.

与此公式相关的理论被称为热力学机制 (thermodynamic formalism) (参见文献 [54,505,582,741]). 利用 Bowen 公式, Ruelle [657] 证明了双曲有理函数 Julia 集的 Hausdorff 维数是实解析依赖于参数的并给出了 $f_c(z)=z^2+c$ 的 Julia 集的 Hausdorff 维数在 $c=0$ 处的二阶展开. 此后, 更一般的函数族和更高阶的 Hausdorff 维数展开也得到了研究 (参见文献 [195]). 基于 Bowen 公式, 有很多同胚于 Cantor 集或圆周的 Julia 集的 Hausdorff 维数渐近展开得到了计算. 第一个非 Cantor 集且非拟圆周 Julia 集的 Hausdorff 维数的渐近展开可参见文献 [452,604]. 在 Bowen 公式基础上进一步计算 Julia 集的 Hausdorff 维数的方法包括特征值算法 [502] 和周期点算法 [384] 等.

Bowen 公式对某些含抛物点的有理函数也成立 (参见文献 [232]). 二次多项式 Julia 集的 Hausdorff 维数在抛物参数处是不连续的 (参见文献 [267,822]). McMullen [503] 将该结论推广到一般情形的同时还考虑了使得 Hausdorff 维数在抛物参数处连续变化的路径 (也可参见文献 [639]). Julia 集的 Hausdorff 维数限制在实参数上的性质, 包括连续性、上下界和左右导数等, 参见文献 [354,382,383].

在估计 Hausdorff 维数时, 上界相对容易得到, 通过找一列特殊的覆盖即可. 下界则困难一些, 可通过 Frostman 引理 (参见文献 [491, 第 112 页]) 找到. 共形测度是用来估计 Julia 集的 Hausdorff 维数的重要工具之一. Sullivan 证明了任意次数大于 1 的有理函数 Julia 集上都存在共形测度. 由共形测度可以定义共形维数. Sullivan 证明了当有理函数双曲时, Julia 集上的共形测度唯一且共形维数等于 Hausdorff 维数[711]. 之后, 共形维数和 Hausdorff 维数相等的情形在一些非双曲有理函数中也得到了 (参见文献 [29, 443, 580, 740, 800] 及其中的参考文献). 在此过程中, 拓扑压、Poincaré 级数、Lyapunov 指数、双曲维数和锥点 (conical point) 等起到重要作用 (参见综述 [741] 和专著 [586]).

复球面的一个紧子集 X 的 Ahlfors 正则共形维数是指所有与 X 拟对称等价的度量空间的 Hausdorff 维数的下确界. 事实上, Ahlfors 正则共形维数可以对任意度量空间定义, 该概念来自于双曲几何[547]. 有理函数 Julia 集的 Ahlfors 正则共形维数的研究可参见文献 [167, 409, 477, 550, 604].

动力系统可以用来研究经典分形集合的 Hausdorff 维数, 最近一个引人注目的结果是任浩杰和沈维孝关于 Weierstrass 函数图像的 Hausdorff 维数的研究[629, 673].

超越整函数 Julia 集的 Hausdorff 维数和面积的结果非常丰富. 与有理函数的情形相反, 超越函数的 Julia 集更容易出现面积为正和 Hausdorff 维数等于 2 的情形 (参见文献 [15, 495]). 超越整函数 Julia 集的 Hausdorff 维数至少等于 1, 事实上可以取到闭区间 $[1, 2]$ 中的任何值 (参见文献 [97, 706]). 更多的结论参见第 8.3 小节.

2.5 可测动力学与统计性质

对于非线性复动力系统, 很多时候无法判断给定某一点的轨道的极限行为, 但可以通过统计的观点得到一些确定的结论. Sullivan[711] 在 20 世纪 80 年代证明了, 对于有理函数, 可以定义共形测度使得它在 Julia 集上具有紧支撑. 对于双曲有理函数, Julia 集的 2 维 Lebesgue 测度为 0, 其上的 Hausdorff 测度有限非零且等价于某个 δ- 共形测度. 若 Julia 集具有正面积, 则 2 维 Lebesgue 测度是一个 2- 共形测度. 共形测度能够反映 Julia 集的几何性质. 研究动力系统复杂性的一个途径就是寻找关于系统的一个自然遍历测度.

定义 2.23 (遍历) 对于有理函数 f, 若任意满足 $X = f^{-1}(X)$ 的 Lebesgue 可测集 $X \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 都蕴涵着 X 为零测集或 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus X$ 为零测集, 则称 f (关于 Lebesgue 测度) 是遍历的 (ergodic).

任何次数大于 1 的有理函数 f 的后临界集 (post-critical set) $P(f)$ 为 f 的所有临界值的向前轨道的并的闭包. 下面的结果刻画了有理函数 Julia 集中点的典型极限行为 (参见文献 [458] 和 [499, 第 3.3 小节]):

定理 2.24 若 f 是一个次数大于 1 的有理函数, 则

- $J(f) = \widehat{\mathbb{C}}$ 且 f 是遍历的; 或者
- 对几乎所有的 $z \in J(f)$, 当 $n \to +\infty$ 时, $f^{\circ n}(z)$ 与 $P(f)$ 的球面距离趋于 0.

如果有理函数关于 Lebesgue 测度遍历, 那么在某种程度上反映了该动力系统不能作进一步分解. 如果有理函数不是遍历的, 那么能分解成多少个遍历分支是一个受关注的问题. 下面的问题可参见文献 [480, 第 460 页]、[355, 第 56 页] 和 [95, 第 448 页]:

问题 2.25 若 d 次有理函数 f 的 Julia 集为整个球面, 则 f 关于 Lebesgue 测度是否遍历? f 是否至多有 $2d-2$ 个遍历分支?

具有遍历性质的有理函数可参见文献 [107, 485, 579, 580, 608]. 关于遍历分支的研究有文献 [27, 448, 464, 670, 746] 等. 下面的问题参见文献 [31, 第 7 页]:

问题 2.26　是否存在无理数 α, 使得 $f(z)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}z+z^2$ 的 Julia 集具有正面积且 f 关于 Lebesgue 测度是遍历的?

关于动力系统遍历论的研究可参见文献 [586]. 关于超越函数的遍历性可参见文献 [525] 以及综述 [417].

除了遍历性质, 一维动力系统中的一个重要问题是, 区间映射是否存在一个关于 Lebesgue 测度绝对连续的不变概率测度 (absolutely continuous invariant probability measure, 英文缩写为 acip). 对于具有负 Schwarz 导数的紧区间上的单临界 C^3 实映射, Bruin、沈维孝和 van Strien 证明了当该映射的迭代在临界值处的导数绝对值均大于某个常数时, 有 acip [138]. 这推广了之前要求映射满足可和性等条件的结果 (参见文献 [197, 486, 540]).

对于多临界点的情形, acip 在大导数的条件下得到了证明 (参见文献 [137]), 这推广了文献 [526] 等的结果. 关于 acip 的存在性还可参见文献 [139, 381, 471, 583, 641] 及其中的参考文献. 其他的统计性质可参见文献 [323, 442].

吸引子 (attractor) 至今还没有一个非常完善的定义 (类似于分形). 关于各种吸引子的概念可参见文献 [510]. 对于一个紧区间 I 上的自映射 $f: I\to I$, 其任意一点 x 的 ω- 极限集 $\omega(x)$ 定义为 x 的向前轨道的聚点集. 一个向前不变的紧集 $A\subset I$ 称作是度量吸引子 (相应地, 拓扑吸引子), 如果 $B(A):=\{x\in I:\omega(x)\subset A\}$ 具有正测度 (相应地, Baire 第二纲集) 且对任意的向前不变紧子集 $A'\subsetneq A$, $B(A')$ 具有零测度 (相应地, Baire 第一纲集). Milnor [510] 提出了怎样对吸引子分类的问题, 同时还提出如下问题: 对于给定的光滑单峰映射, 度量吸引子是否总是拓扑吸引子? 如果不是, 则这样的吸引子称为野生吸引子 (wild attractor).

对于具有负 Schwarz 导数和一个二阶临界点的 C^3 映射, Lyubich [465] 证明了度量吸引子只有 3 种类型, 且它们同时也是拓扑吸引子: (1) A 是一个非斥性周期循环; (2) A 是一个周期区间循环; (3) A 是一个螺线型的 Cantor 集 (一列闭区间循环的可数交). 利用 Kozlovski [418] 的想法, Graczyk、Sands 和 Świątek 在去掉具有负 Schwarz 导数这个条件的情形下证明了同样的结论 [340]. 而第 4 类吸引子—野生吸引子 (也为 Cantor 集) 确实存在 (参见文献 [136]). 解决 Milnor 关于吸引子的问题主要依赖于对含二阶临界点的光滑映射建立几何衰减 (decay of geometry) 性质 [341], 一般用的是复方法. 沈维孝用纯实的方法对更广泛的函数类得到了该性质 [672].

Cantor 吸引子的测度为 0 (参见文献 [485, 746]). 进一步地, 李思敏和沈维孝证明了它们的 Hausdorff 维数一致小于 1 (仅依赖于临界点的局部度) [444].

2.6　淹没点和奇异扰动

前文提到, 若 Fatou 分支的边界有好的拓扑, 则可以通过 Fatou 分支上的动力系统来研究其边界 (为 Julia 集的子集) 上的动力系统. 然而并不是所有 Julia 集中的点都落在 Fatou 分支的边界上.

定义 2.27 (淹没点和分支)　非球面 Julia 集上的一点如果不落在任何 Fatou 分支的边界上, 则称它为淹没点 (buried point). 如果一个非球面 Julia 分支上每一点都不落在 Fatou 分支的边界上, 则称该分支是淹没 Julia 分支.

显然, 如果有理函数含一个完全不变的 Fatou 分支 (如多项式), 那么其 Julia 集不含淹没点, 因为该完全不变 Fatou 分支的边界是整个 Julia 集. McMullen [496] 在 1988 年第一个给出了 Julia 集上含淹没点的有理函数. 他构造的 Julia 集是一个 Cantor 圆周, 包含了不可数多个淹没的 Jordan 曲线分支. 在 20 世纪 80 年代末, 作为与 Kleinian 群的类比, Makienko 提出了下面的猜想 (参见文献 [287, 第

578 页]):

猜想 2.28 如果有理函数 f 的二次迭代 $f^{\circ 2}$ 没有完全不变的 Fatou 分支, 则 f 的 Julia 集含有淹没点.

这个猜想考虑 f 的 2 次迭代而不是 f 本身, 目的是排除类似于 $z \mapsto 1/z^2$ 这样的有理函数. Makienko 猜想在以下情形是成立的: Julia 集不连通且每个 Fatou 分支的连通数有限 (参见文献 [57]); Julia 集不连通, 或连通且局部连通[591] (部分特殊情形参见文献 [528,530]); Julia 集是一个可分割的连续统[24)][213] (部分特殊情形参见文献 [717]). 注意不可分割的 Julia 集猜测是不存在的 (参见文献 [493]), 因此 Makienko 猜想极有可能成立. 此外, 淹没点在 Julia 集中的分布性质等可参见文献 [254,528]. 高延、杨璐鲜和曾劲松研究了双曲分支边界上含淹没临界点的几何有限有理函数[326].

McMullen 证明 5 次的有理函数 $f(z) = z^2 + \lambda/z^3$ 当 $\lambda \neq 0$ 充分小时有淹没 Julia 分支. 他提出了一个问题 (参见文献 [496, 第 55 页]): 能否找到一个次数小于 5 的简单有理函数, 也具有淹没的 Julia 分支? 在 Beardon[57] 给出了首个一般性的充分条件后, 乔建永于 1995 年给出了有理函数 Julia 集存在淹没分支的充分必要条件[590]:

定理 2.29 若 f 是一个 Julia 集不为球面的有理函数, 则 $J(f)$ 含淹没分支的充要条件是 f 的 Julia 集非连通且 Fatou 集没有完全不变分支.

根据上述定理, 要判断一个有理函数是否含有淹没 Julia 分支就变得容易了. 但要构造非单点也非 Jordan 曲线的淹没 Julia 分支, 则需要进一步分析.

McMullen 的例子是通过对 z^2 作奇异扰动得到的. 通过类似的扰动可以得到许多含淹没 Julia 分支的有理函数, 它们的次数至少为 5 且淹没分支为单点或 Jordan 曲线. 直到 2015 年, Godillon[334] 利用 Thurston 定理找到了一个 3 次有理函数, 其 Julia 集包含了一个淹没的 Julia 分支, 该分支既非单点也非 Jordan 曲线. 注意二次有理函数的 Julia 集要么连通要么为 Cantor 集, 因此回答 McMullen 问题的最好结果就是次数等于 3 的有理函数. 利用新的奇异扰动方法 (在临界值处作扰动), 王有明和本文作者找到了更多能够回答 McMullen 问题的 3 次和 4 次有理函数. 特别地, 大部分连通 Julia 集都可以淹没地嵌入到更高次有理函数的 Julia 集中 (参见文献 [754]).

多项式的奇异扰动研究的课题主要包括 Julia 集的连通性、局部连通性、淹没 Julia 分支的存在性、参数空间中双曲分支的计数和边界的正则性等 (参见文献 [246,599,601,645,710,762,763]). 更多与奇异扰动有关的问题可参见文献 [237] 及其中的参考文献. 除了文献 [496], Julia 集为 Cantor 圆周的有理函数动力系统还可参见文献 [246,313,454,605,751,762].

超越整函数的淹没点问题由乔建永最先开始研究 (参见文献 [589]). 其他与超越函数淹没分支相关的问题可参见文献 [44,254,590,591].

2.7 其他性质

限于篇幅, 还有很多关于有理函数 Julia 集及其子集的性质不能完全展开, 这里简要说明其中一部分. 多项式外射线的着陆 (landing) 情形在构造拼图时非常关键. Douady-Hubbard 证明了如下着陆定理: 假定多项式连通, 则每条周期外射线都着陆在一个斥性或抛物周期点. 反之, 每个斥性或抛物周期点都是至少一条周期外射线的着陆点 (参见文献 [256,285,561] 和 [519, 第 18 节]). 假定多项式 f 的 Julia 集 $J(f)$ 局部连通, 如果 $J(f)$ 上的一点 ξ 使得 $J(f) \setminus \{\xi\}$ 至少含有 3 个连通分支, 则称 ξ 为分支

24) 不可分割的连续统指的是不能写成两个连通真子集的并的非单点连通紧集 (注意这两个连通真子集允许相交). 有理函数的动力系统中尚未出现这样的 Julia 分支, 但超越动力系统中可以出现 (参见文献 [489]).

点 (branching point). Thurston [729] 证明对于二次多项式, 若 ξ 为分支点, 则 ξ 要么预周期, 要么预临界. 但这对高次多项式不成立 (参见文献 [109, 144]).

如果两个函数 f 和 g 满足 $f \circ g = g \circ f$, 则称 f 和 g 可交换. Fatou [303] 和 Julia [391] 证明了若有理函数 f 和 g 可交换, 则它们有相同的 Julia 集. 而 Ritt [637] 给出了所有可交换的有理函数类一个完整的刻画, 但没有涉及迭代方法. Eremenko [283] 以最大熵测度为工具, 用迭代的方法给出了 Ritt 结果新的证明. 反过来, 若有理函数 f 和 g 具有相同的 Julia 集, 则在一些情形下可以推导出 f 和 g 可交换 (参见文献 [45]). 通过最大熵测度刻画有理函数可交换性的研究还可以参见 Levin 和 Przytycki [436] 及叶和溪 [780] 和 Dujardin 等 [278] 的工作.

如果复球面的一个紧子集 E 至少含有两点且 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ 中任何分离 E 的圆环的共形模有一致上界, 则 E 是一致完全的 (uniformly perfect). 任何次数大于 1 的有理函数 Julia 集都是一致完全集 (参见文献 [483] 和 [165, 第 64 页]).

关于 Julia 集在 Hausdorff 拓扑意义下变化的连续性, Douady [259] 证明了对于没有持续中性周期点的全纯多项式族 $\mathscr{F} = \{f\}$, 其填充 Julia 集 $K(f)$ 在 f_0 处连续当且仅当 f_0 没有抛物点, 其 Julia 集 $J(f)$ 在 f_0 处连续当且仅当 f_0 没有抛物点和 Siegel 点. 邱维元和尹永成在 20 世纪 90 年代初也独立地证明了该结论 (未全部发表, 部分结果参见文献 [783]). 伍胜健研究了全纯有理函数族 Julia 集变化的连续性, 证明了 Julia 集在 f_0 处连续当且仅当 f_0 没有抛物点和旋转域 [760]. 更多关于特殊 Julia 集连续变化的结论可参见文献 [211, 406, 407, 503]. 有理函数 Julia 集对复平面紧子集的逼近可参见文献 [451].

3 双曲猜想

3.1 双曲与结构稳定性

如果一个有理函数的所有临界点都被吸性周期轨道所吸引, 则该有理函数称作是双曲的 (hyperbolic). 复动力系统领域中的一个中心猜想是如下猜想:

猜想 3.1 (双曲稠密性猜想) 双曲有理函数在有理函数空间中是开且稠密的.

容易看出双曲性是一个开的条件, 但稠密性至今尚未完全解决. 双曲稠密性的问题最早可以追溯到 20 世纪 20 年代初的 Fatou, 因此双曲稠密性猜想也称为 Fatou 猜想 (参见文献 [303, 第 73 页] 和 [499, 第 4.1 小节]).

动力系统中的双曲性一般可以通过 Smale 的 “公理 A” 来描述 (参见文献 [696]). Smale 在 20 世纪 60 年代让他的学生将上述双曲稠密性的问题作为博士论文课题, 得到了肯定的回答, 但后来发现证明有误 (参见文献 [697, 第 282 页]). 在那之前, 人们甚至相信双曲系统在所有维数中都是稠密的. 可到了 20 世纪 60 年代后期, 人们发现对维数大于等于 2 的流形上的微分同胚, 这是不对的 (参见文献 [535, 695]). 对于一维的情形, Jakobson [380] 证明了紧区间到自身的双曲映射在 C^1 拓扑下是稠密的, Blokh 和 Misiurewicz [108] 部分解决了 C^2 拓扑的情形, 沈维孝于 2004 年完全解决了 C^2 拓扑下双曲稠密性的问题 [671].

20 世纪 90 年代, McMullen 证明了, 如果 c 落在一个与实轴相交的 Mandelbrot 集的内部分支, 则二次多项式 $z \mapsto z^2 + c$ 是双曲的 (参见文献 [499, 第 174 页]). 一个重大进展出现在 1997 年, Graczyk 和 Świątek [346, 347] 及 Lyubich [467] 独立地证明了双曲映射在实二次多项式中是稠密的. 他们的证明非常依赖于二次多项式只有一个局部映射度为 2 的单临界点. Kozlovski [419] 证明了双曲映射在任意整

数阶光滑 (包括无穷阶和实解析) 单峰区间映射空间中是稠密的. Kozlovski、沈维孝和 van Strien 完全解决了实一维动力系统的双曲稠密性问题[421]:

定理 3.2 任何实多项式 25) 都可以被同次数的双曲实多项式逼近. 特别地, 双曲映射在 C^k 光滑区间映射空间中是稠密的, 其中 $k = 1, 2, \dots, \infty, \omega$.

根据 Douady-Hubbard 的整理定理 (straightening theorem) (参见文献 [265, 第 296 页]), 任何类多项式 $f: U \to V$ 都混合等价 26) (hybrid equivalent) 于一个相同次数的多项式 g, 且若填充 Julia 集 $K(f)$ 连通, 则 g 在相差一个仿射共轭的意义下是唯一的. 类多项式的概念后被推广为复盒子映射 27) (complex box mapping), 参见文献 [422].

对于复系数多项式的双曲稠密性, Kozlovski 和 van Strien[422] 证明了任何仅具有双曲 (即非中性) 周期点的有限可重整多项式都可以被一个双曲多项式逼近. 彭文娟、尹永成和翟羽证明了任何具有 Cantor Julia 集的有理函数都可以被另一个具有 Cantor Julia 集的双曲有理函数逼近[555].

定义 3.3 (结构稳定) 对于有理函数 f 和 g, 如果存在一个同胚 $\phi: \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ 使得 $\phi \circ f \circ \phi^{-1} = g$, 则称 f 和 g 是拓扑共轭的. 如果 f 与其某个邻域内的所有有理函数都是拓扑共轭的, 则称 f 是结构稳定的.

下面的结论与双曲稠密性猜想密切相关 (参见文献 [460, 484]):

定理 3.4 结构稳定的有理函数是开且稠密的.

根据定理 3.4, 为解决双曲稠密性猜想, 只需要证明任何结构稳定的有理函数一定是双曲的. 在光滑动力系统中, 已经知道结构稳定或双曲的稠密性对高维流形上的微分同胚不成立, 但 Mañé[481] 证明了任何结构稳定的 C^1 微分同胚一定是双曲的. 在 Sullivan[713] 的字典中, 他将有限生成的 Kleinian 群看作平行于有理函数的对象, 并在 1985 年证明了结构稳定的有限生成 Kleinian 群一定是双曲的 (参见文献 [712]), 但这样的群在整个有限生成 Kleinian 群中是否稠密当时并不清楚. 直到 2004 年, Brock 和 Bromberg[132] 给出了肯定的回答. 最近, 双曲和结构稳定性在高维复动力系统中得到了广泛关注 (参见文献 [73, 91, 279]), 但它们的稠密性并不成立 (参见文献 [276]).

Mañé[480] 证明了带有 Herman 环的有理函数不是结构稳定的. Julia 集的稳定性可以用来刻画有理函数的结构稳定性, 其各种等价刻画可参见文献 [499, 第 4.1 小节]. 有理函数的结构稳定性可以通过不变线域的存在性来研究.

定义 3.5 (不变线域) 若有理函数 f 和可测集 $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 以及 $z \in E$ 的切空间 $T_z\widehat{\mathbb{C}}$ 的一个 1 维实子空间 L_z 满足:

- E 具有正面积;
- $f^{-1}(E) = E$;
- L_z 的斜率关于 z 的变化是可测的; 且
- 对于所有 $z \in E$, 导数 f' 将 L_z 映入 $L_{f(z)}$,

则称 $\{L_z : z \in E\}$ 为有理函数 f 的一个不变线域 (invariant line field). 特别地, 如果 E 包含在 Julia 集 $J(f)$ 中, 则称 f 在其 Julia 集上有一个不变线域.

注意到 f 在其 Julia 集上有不变线域的前提条件是其 Julia 集有正面积. 特别地, 当 Julia 集为整个 Riemann 球面时具有正面积, 且这样的有理函数在给定次数的有理函数空间中具有正测度[608].

Lattès 在 1918 年最先构造出了 Julia 集为整个 Riemann 球面的有理函数, 他的构造想法如下 (参

25) 实多项式指的是系数为实数且所有的临界点也落在实轴上的多项式. 实有理函数的定义类似.
26) 即存在一个定义在 $K(f)$ 邻域内的拟共形共轭 ϕ 使得其限制在 $K(f)$ 上有 $\bar{\partial}\phi = 0$.
27) 复盒子映射之前也被称为类多项式盒子映射 (polynomial-like box mapping), 参见文献 [420, 671].

见文献 [425,497,518]): 考虑复环面 $X=\mathbb{C}/\Lambda$, 其中 $\Lambda=\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}$ 是复平面上的格点. 给定正整数 $n\geqslant 2$, 并令 $F(x)=nx:X\to X$ 为次数等于 n^2 的全纯自同态. 由于 F 是一致扩张的, 容易看出 F 的斥性周期点在环面 X 上稠密, 因此 F 的 Julia 集是整个 X. 环面 X 通过等价关系 $x\sim -x$ 得到的商空间是 Riemann 球面 $\widehat{\mathbb{C}}$, 且商映射 $\wp:X\to\widehat{\mathbb{C}}$ 可以由 Weierstrass $\wp$- 函数给出, 它通过 X 将球面覆盖了两次. 因为 $F(-x)=-F(x)$, 于是 F 的动力系统诱导了 Riemann 球面到自身的一个有理函数 f, 使得 $\wp\circ F=f\circ\wp$ 且 f 的 Julia 集等于整个 Riemann 球面. 由该构造得到的有理函数 f 是通过一个整体环面自同态的双层覆盖 (double covered by an integral torus endomorphism) 得到的, 称它为 Lattès 映射. 注意 f 在其 Julia 集上有不变线域: F 保持水平直线族不变, 这些水平直线族在环面上形成了平行的简单闭测地线族, 通过商映射投影后得到 Riemann 球面上的 f- 不变叶状结构 (foliation), 即为 f 的一个不变线域.

猜想 3.6 (不变线域猜想) 有理函数在其 Julia 集上没有不变线域, 除非它是一个 Lattès 映射.

一个有理函数如果是结构稳定的, 并且其 Julia 集上没有不变线域, 那么它一定是双曲的 (参见文献 [506, 定理 9.3]). 因此不变线域猜想强于双曲稠密性猜想 (参见文献 [484,506]):

定理 3.7 如果有理函数的不变线域猜想成立, 那么双曲稠密性猜想成立.

相比于双曲稠密性猜想, 考虑不变线域猜想的一个优点在于, 原来证明双曲稠密性猜想需要研究一族有理函数, 现在只需要研究单个有理函数的遍历性质. 作为对不变线域猜想的一个支撑, Sullivan [712] 证明了有限生成的 Kleinian 群极限集上没有不变线域.

已经知道对于以下情形, Julia 集上没有不变线域:

- 非无穷可重整且没有中性周期点的多项式 [422], 包括相应的二次多项式 [370];
- 实多项式 [194], 包括实二次多项式和无穷可重整的实单临界多项式 [499] 以及仅有一个非逃逸临界点的实多项式 [439, 440];
- 鲁棒的 (robust) 无穷可重整二次多项式以及临界有限的非 Lattès 映射 [499];
- 弱双曲的非 Lattès 有理函数 [352];
- 临界点为偶数阶且都在实轴上的非 Lattès 有理函数 [670];
- 某些满足可和性条件的非 Lattès 有理函数 [343, 479];
- Julia 集为 Cantor 集的有理函数 [785].

特别地, 若 Julia 集面积为 0, 则其上自然没有不变线域. 关于 Julia 集零面积的结果参见第 2.4 小节.

3.2 刚性

考虑一个以复流形 Λ 为参数空间的非常值全纯有理函数族 $\mathcal{F}$, 例如一族次数为 d 的有理函数、一族次数为 d 的多项式, 或者特别地, 一族复的单临界多项式

$$f_c(z)=z^d+c,\quad \text{其中 } d\geqslant 2,\quad c\in\mathbb{C}. \tag{3.1}$$

如果函数族 $\mathcal{F}$ 中的两个映射 f 和 g 落在 Λ 的一个连通子集中, 且该连通子集中的所有映射都是组合等价、拓扑共轭或拟共形共轭的, 则称 f 和 g 属于同一组合等价类、拓扑等价类或拟共形等价类.

粗略地, 如果对 $\mathcal{F}$ 中两个有理函数的动力系统平面进行划分后, 它们在任何深度都有相同的组合, 则称这两个有理函数是组合等价的. 对于两个多项式, 如果它们的有理角度外射线的着陆模式相同, 则称它们是组合等价的. 这里的外射线着陆模式可以通过层 (lamination) (参见文献 [498, 第 5 节]) 或轨道描绘 (orbit portrait) (参见文献 [336, 515]) 来刻画. 对于 (3.1) 定义的单临界多项式, 其对应的

Multibrot 集为

$$M_d := \{c \in \mathbb{C} : \{f_c^{\circ n}(0)\}_{n \geqslant 0} \text{ 有界}\}.$$

Multibrot 集的一个等价定义是 $\{c \in \mathbb{C} : J(f_c) \text{ 连通}\}$. 特别地, 当 $d = 2$ 时, M_d 即为著名的 Mandelbrot 集 (见图 3). 对于 M_d 中的单临界多项式 f_{c_1} 和 f_{c_2}, 组合等价有如下等价定义: 如果 c_1 和 c_2 落在由有理角度参数射线形成的相同闭区域嵌套序列中 (每个闭区域由有限个 wakes 作差后取闭包, 参见文献 [370]), 则称 f_{c_1} 和 f_{c_2} 是组合等价的. 特别地, 如果 c_1 和 c_2 落在相同的 Multibrot 集复制像构成的无穷嵌套序列中, 则称这两个无穷可重整的 f_{c_1} 和 f_{c_2} 是组合等价的 (参见文献 [28, 172, 467, 659]).

与多项式不同, 一般的有理函数可能没有外射线或好的动力系统划分, 无法通过上述方法定义组合等价, 但对类多项式和复盒子映射是可以定义的 (参见文献 [422, 467]). 特别地, 组合等价对有拼图结构的有理函数可以定义, 如多项式的 Newton 映射和 McMullen 映射等. 当下文中提到组合等价时, 均认为组合等价是可以定义的 [28].

定义 3.8 (刚性) 全纯有理函数族 $\mathcal{F}$ 中的映射 f 在 $\mathcal{F}$ 中的组合等价类、拓扑等价 (共轭) 类和拟共形等价 (共轭) 类 (商去共形等价类) 分别记作 $\mathrm{Com}(f)$、$\mathrm{Top}(f)$ 和 $\mathrm{QC}(f)$. 它们显然满足 $\mathrm{Com}(f) \supset \mathrm{Top}(f) \supset \mathrm{QC}(f)$. 如果分别有 [29] $\mathrm{Com}(f) = \{f\}$、$\mathrm{Top}(f) = \{f\}$ 或 $\mathrm{QC}(f) = \{f\}$, 则称 f 具有组合刚性、拓扑刚性或拟共形刚性.

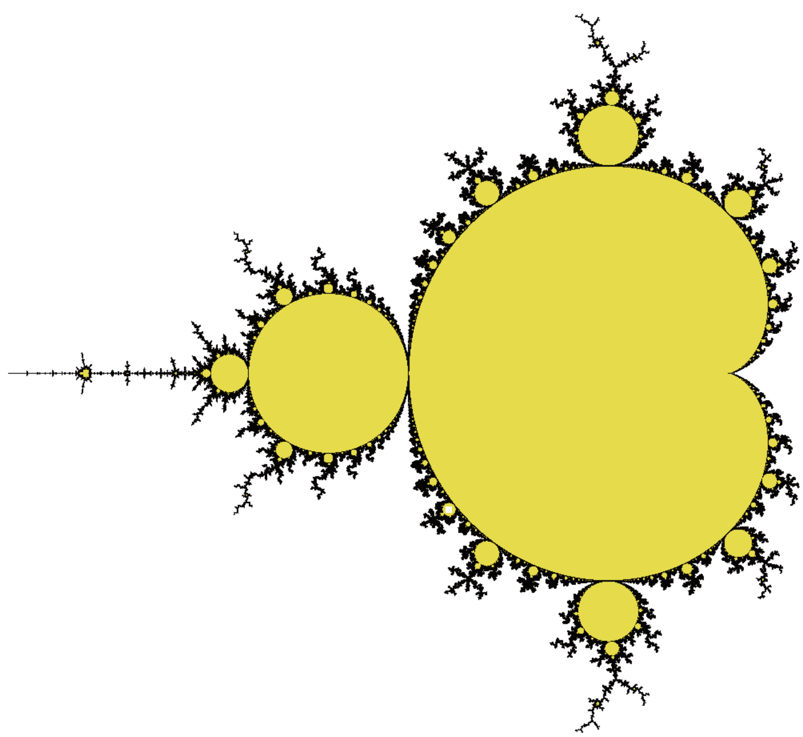


图 3 (网络版彩图) Mandelbrot 集

28) 还有另一种意义下的组合等价 (也称为 Thurston 等价) 对于任何有理函数都可以定义, 用于 Thurston 定理对有理函数的拓扑刻画中 (参见文献 [266] 和第 6 节).

29) 这里 $\mathrm{Com}(f) = \{f\}$ 表示 $\mathcal{F}$ 中与 f 组合等价的函数与 f 都是共形等价的. 符号 $\mathrm{Top}(f) = \{f\}$ 和 $\mathrm{QC}(f) = \{f\}$ 的含义类似.

猜想 3.9 [466, 467, 498] (刚性猜想)　对于没有持续中性周期点的全纯有理函数族 $\mathcal{F}$, 若 $f \in \mathcal{F}$ 非双曲且不是 Lattès 映射, 则有

- (组合刚性猜想) $\mathrm{Com}(f) = \{f\}$;
- (拓扑刚性猜想) $\mathrm{Top}(f) = \{f\}$;
- (拟共形刚性猜想) $\mathrm{QC}(f) = \{f\}$.

组合刚性猜想的弱形式是 $\mathrm{Com}(f) = \mathrm{Top}(f)$ 和 $\mathrm{Com}(f) = \mathrm{QC}(f)$. 拓扑刚性猜想的弱形式是 $\mathrm{Top}(f) = \mathrm{QC}(f)$. 显然组合刚性强于拓扑刚性, 拓扑刚性强于拟共形刚性. 除了 Lattès 映射, Julia 集上有不变线域等价于其上可以作非平凡的拟共形形变. 因此不变线域猜想等价于拟共形刚性猜想, 强于双曲稠密性猜想. 于是对于全纯有理函数族 $\mathcal{F}$, 上述猜想有如下蕴涵关系:

$$\text{组合刚性猜想} \Rightarrow \text{拓扑刚性猜想} \Rightarrow \text{拟共形刚性猜想} \Leftrightarrow \text{不变线域猜想} \Rightarrow \text{双曲稠密性猜想}.$$

单临界多项式的组合刚性猜想对于以下情形成立: 最多有限次可重整 (参见文献 [28,370]) 和部分无穷可重整 (参见文献 [172,178,272,394,395,398,434,467]). 二次多项式的组合刚性等价于 Mandelbrot 集的局部连通性, 高次单临界多项式的组合刚性等价于 Multibrot 集的局部连通性 (参见文献 [264, 659]). 关于 Mandelbrot 集和 Multibrot 集局部连通性更详细的结果参见第 3.3 小节.

组合刚性猜想对于临界有限的有理函数成立 (参见文献 [266]), 但对于非单临界的三次多项式不成立. Henriksen [358] 给出了反例: 存在两个有相同 orbit portrait 的三次多项式, 它们在 Julia 集上不是拟共形共轭的. 关于组合刚性的研究还可参见文献 [553].

关于拓扑刚性, 下列函数族可以由拓扑共轭推导出拟共形共轭: 没有中性周期点且不可重整的多项式 [28, 422, 789]、实多项式 [194, 346, 420, 467]、拓扑 Collet-Eckmann 映射 [585]、一致弱双曲有理函数 [352]、Julia 集为 Cantor 集的有理函数 [798] 以及不可重整的多项式 Newton 映射 [268, 651].

因为结构稳定参数在全纯有理函数族 $\mathcal{F}$ 中是稠密的, 那么其补集—分歧迹 (bifurcation locus) 具有空的内部. 根据可测 Riemann 映射定理, 拟共形等价类要么是开集, 要么是单点, 因此分歧迹中的有理函数一定有拟共形刚性. 注意拟共形刚性等价于不变线域猜想, 除了前文提到的不变线域结果外, 关于拟共形和拟对称刚性的研究还可参见文献 [193, 554].

20 世纪 90 年代, Sullivan [714] 引入了如下概念:

定义 3.10 (复界)　设 f 是一个关于临界点 c_0 (局部度为 d) 无穷可重整的有理函数. 若存在 $\varepsilon > 0$、严格递增正整数列 $(n_k)_{k\geqslant 0}$ 和一列包含 c_0 的 d 次类多项式 $\{(f^{\circ n_k}, U_k, V_k)\}_{k\geqslant 0}$, 使得对于任意 $k \geqslant 0$, 共形模满足 $\mathrm{mod}\,(V_k \setminus \overline{U}_k) \geqslant \varepsilon > 0$, 则称 f 有复界 [30] (complex bounds).

复界的存在性反映了类多项式重整序列的紧性. 对于至多有限可重整的多项式, 复界可以通过拼图片来得到. 粗略地讲, 存在一个由浅层拼图片与深层拼图片 (回归区域) 的差得到的嵌套圆环序列, 其共形模有一致下界 (精确定义可参见文献 [194]).

由复界可以得到刚性 (包括没有不变线域 (参见文献 [499, 定理 10.2]) 和双曲稠密性)、重整映射的收敛性 (包括 Feigenbaum-Coullet-Tresser 重整化和 Milnor "毛发" 猜想 [469, 511])、Julia 集的局部连通性、Mandelbrot 集的局部连通性、Julia 集的面积和 Hausdorff 维数的二分定理 [29] 等.

Sullivan [714] 最先证明了具有有界组合的实无穷可重整二次多项式具有复界 (参见文献 [222]). 目前复界在以下情形成立:

30) 复界 (complex bounds) 也称复先验界 (complex *a priori* bounds).

• 所有实多项式[194], 包括单临界实多项式[344, 438, 474]、具有有界组合的多临界 (偶数阶) 无穷可重整实多项式[698]、临界点为偶数阶的无穷可重整实多项式[671] 和至多有限可重整的实多项式[420] 以及临界点为奇数阶的实多项式[439];

• 至多有限可重整的多项式[422], 包括二次多项式情形[370, 789] 和单临界多项式情形[397] 以及具有特殊组合的不可重整情形[699];

• 具有某种组合的无穷可重整二次多项式, 包括文献 [394, 395, 398, 467].

关于组合刚性、复界和不变线域的研究还可参见文献 [192]. Douady 和 Hubbard 证明了存在无穷可重整的二次多项式, 其没有复界 (参见文献 [434, 516, 702]).

对于上述复界结果, Yoccoz 拼图[370]、主要嵌套 (principal nest)[467]、由 Kozlovski、沈维孝和 van Strien 引入的 KSS 嵌套、Kahn 和 Lyubich[396] 引入的覆盖引理、各种偏差定理、全纯运动和 QC- 标准[356, 399] 等起到了关键作用. 此外, 这些工具对 Julia 集和参数空间的研究也起到重要作用[420].

对于超越整函数的刚性, 不变线域和双曲稠密性的研究可参见文献 [620, 624, 626, 627]. 对于临界圆周映射的刚性, 复界的研究可参见文献 [218, 219, 765].

3.3 二次多项式与 MLC (The Mandelbrot set is locally connected)

20 世纪 70 年代, 随着计算机技术的提高, 很多数学爱好者在计算机上编程画出由函数迭代产生的分形图像. 第一幅 Mandelbrot 集的 (粗略) 图像是由 Brooks 和 Matelski[134] 在 1978 年得到的. 之后 Mandelbrot、Douady-Hubbard 和 Milnor 等改进算法, 得到了更多更精确的 Mandelbrot 集图像. 1982 年, Douady 和 Hubbard[263] 利用复分析工具证明了 Mandelbrot 集是连通的 (参见图 3). 在文献 [264] 中, 他们证明了如果 Mandelbrot 集局部连通, 那么不但 Mandelbrot 集有了一个很好的拓扑模型, 而且其边界上对应的二次多项式有了精确的组合刻画, 更为重要的是二次多项式的双曲稠密猜想成立. 于是他们提出了下面复动力系统领域最重要的猜想之一:

猜想 3.11 (MLC 猜想) Mandelbrot 集是局部连通的.

对于二次多项式, MLC 猜想和前文提到的一系列猜想关系如下 (参见文献 [499]):

$$\text{MLC 猜想} \Leftrightarrow \text{组合刚性猜想} \Rightarrow \text{拟共形刚性猜想} \Leftrightarrow \text{不变线域猜想} \Leftrightarrow \text{双曲稠密性猜想}.$$

特别地, MLC 猜想最强, 而且这个猜想的好处是可以逐点证明. 当二次多项式 $f_c(z) = z^2 + c$ 满足以下条件时, Mandelbrot 集在参数 c 处是局部连通的:

• 至多有限可重整, 包括含中性周期点情形 (参见文献 [370, 659, 723]) 以及不含中性周期点情形 (参见文献 [370, 393, 643]);

• 某些 primitive 无穷可重整, 包括具有充分大组合, 满足第二 “limbs” 条件[467] 和 “unbranched” 条件且具有复界 31)[389], 具有有界组合[394], 满足 “decoration” 条件[395] 和 “molecule” 条件[398];

• 某些 satellite 无穷可重整, 包括部分无界组合 32) (参见文献 [178, 516, 702]) 和所有有界组合 (也称为 Feigenbaum 型)[272, 273];

• 重整周期满足某些增长条件且具有无界组合[434, 435];

• c 为实数 33) (Dudko-Kahn-Lyubich, 2023).

31) 该文的预印本于 1995 年出现在 Berkely MSRI. 关于 “unbranched” 的定义参见文献 [499, 第 10 节].

32) Milnor 文章的预印本出现在 1992 年 (受 Douady 和 Hubbard 的工作的启发).

33) 在日本京都举行的复动力系统会议上, Lyubich 做了题为 “Real story of the Mandelbrot set” 的报告并宣布证明了该结果. 会议网址为 https://sites.google.com/view/shishikura2023.

Douady 在复动力系统领域有一句名言: “You first plow in the dynamical plane and then harvest in the parameter plane” (你首先在动力平面上耕种, 然后在参数平面上收获). 作为参数空间, Mandelbrot 集的各种性质均通过对二次多项式进行动力系统研究得到. 著名的 Pommerenke-Levin-Yoccoz (PLY) 不等式可用于估计 Mandelbrot 集子集的大小, 在 Yoccoz 证明 MLC 的相关结果时起到重要作用, 它刻画了斥性周期循环的组合旋转数与该循环的乘子之间的关系 (参见文献 [370, 401, 432, 561, 578]).

由于 Mandelbrot 集的补集是一个无界的双曲分支, 因此二次多项式 $f_c(z) = z^2 + c$ 的双曲稠密性猜想等价于 Mandelbrot 集内部的每个分支都是双曲的. 若其内部存在非双曲分支 Q (称为奇异分支 [659]), 则对于任意 $c \in Q$, f_c 的 Julia 集具有正面积且有不变线域 [499].

尽管猜测 Mandelbrot 集是局部连通的, 但其边界却非常复杂. Shishikura [679] 在 20 世纪 90 年代证明了如下结果 (参见文献 [722]), 肯定地回答了 Milnor 和 Mandelbrot 的猜想:

定理 3.12 Mandelbrot 集边界的 Hausdorff 维数等于 2.

在此之前, 谭蕾证明了 Mandelbrot 集在 Misiurewicz 参数点处 (即临界点是预周期的) 与对应的 Julia 集有局部相似性 [719]. 与 Mandelbrot 集相关的一些重要结果包括 Mandelbrot 集的万有性 [504] 和 Mandelbrot 集的组合结构 [515] 等.

对于 Multibrot 集, 类似的 MLC 猜想也受到了很大关注. 当 $f_c(z) = z^d + c$ 满足以下条件时 (其中 $d \geqslant 2$), Multibrot 集 M_d 在参数 c 处是局部连通的:

- Misiurewicz 点或中性周期点 [659];
- 不含中性周期点且至多有限可重整 [28];
- 某些 primitive 无穷可重整, 包括具有复界且满足第二 “limbs” 条件, 特别地, 对于 “decoration” 和 “molecule” 条件成立 (参见文献 [172]).

关于 MLC 猜想及其相关理论, 可参见 Benini 的综述 [66] (也可参见 Branner 的介绍 [122]). 特别地, 除了有理函数, Benini 还将超越整函数动力系统的相应理论进行了平行归纳.

3.4 非双曲参数与重整算子的双曲性

Fatou 以一种隐晦的方式认为非双曲的有理函数落在可数多个真子簇 (proper subvarieties) 的并集中 (参见文献 [303, 第 73 页]). 这其实是不对的: Rees [608] 证明了非双曲有理函数在任意给定次数的有理函数空间中具有正的 Lebesgue 测度. 但对于二次多项式, 有如下猜想 (参见文献 [678]):

猜想 3.13 Mandelbrot 集边界的 (2 维 Lebesgue) 测度为 0.

在 Rees 的结果之前, Jokobson 于 1981 年证明了在实二次多项式空间中, 非双曲的映射占有正测度且具有绝对连续的不变测度 (尽管现在已经知道实双曲映射是稠密的) (参见文献 [65, 381]). 对于 Mandelbrot 集的边界, Shishikura [678] 证明了其上所有非无穷可重整的复参数构成的集合具有零测度 (也可参见文献 [33, 34]). Lyubich [468] 证明了其上无穷可重整的复参数构成的集合其 Hausdorff 维数至少为 1, 而无穷可重整实参数构成的集合其 Hausdorff 维数至少为 1/2. 之后, Lyubich [471] 证明了所有无穷可重整的实参数构成的集合具有零测度.

Lyubich 的零测度结果是通过研究重整算子的一致双曲性推导出的. 该问题起源于 20 世纪 70 年代, 物理学家 Feigenbaum 和 Coullet 以及 Tresser 独立地发现了在一维实解析变换中, 一般的函数族在倍周期分叉 (cascades of doubling bifurcations) 时有一个普适的伸缩定律 (universal laws) [306, 736]. 为解释这个现象, 他们猜测有一个重整算子双曲地作用在一个适当的无穷维函数空间上, 且该算子有一个一维的不稳定方向和余一维的稳定方向. 此后, 除了倍周期现象外, 其他的分歧组合也在一般的

实或复解析变换中观察到了.

在有界组合条件下, 作用在二次实单临界类多项式函数空间上重整算子的双曲性由 Sullivan [714] (基于 Teichmüller 理论)、McMullen [500] (基于塔的几何理论及其拟共形刚性) 和 Lyubich [469] (基于塔的刚性和 Banach 空间的 Schwarz 引理) 证明. 之后, Lyubich [471] 对于任意组合证明了该猜想. Avila 和 Lyubich [30] 将二次的结果推广到任意偶数次实单临界类多项式函数空间. 最近, Smania [700] 对有界组合的多峰映射证明了重整算子的双曲性.

正如上文所提到的, 重整算子的双曲性在一维可测动力学, 特别是在正则和随机二分性质 (Palis 猜想的特殊情形 [546]) 的证明中起到重要作用. 相关结论如下:

• 对于几乎所有的 $c \in \mathbb{R}$, 二次多项式 $f_c(z) = z^2 + c$ 要么双曲 (正则性), 要么有一个绝对连续的不变测度 (随机性); 特别地, 无穷可重整的 f_c 构成的集合具有零测度 [471]. 该结论对实解析的拟二次单峰映射也成立 (参见文献 [32]). 事实上, f_c 要么是双曲的, 要么是 Collet-Eckmann 的 (具有绝对连续的不变测度) [34];

• 对于几乎所有的 $c \in \mathbb{C}$, 单临界多项式 $f_c(z) = z^d + c$ $(d \geqslant 2)$ 要么是双曲的, 要么是无穷可重整的. 对于几乎所有的 $c \in \mathbb{R}$, f_c 要么是双曲的, 要么是 Collet-Eckmann 的, 要么是无穷可重整的 (参见文献 [33]);

• 对于一般的多峰映射族 (如三次多项式), 具有有界组合的无穷可重整映射构成的参数集具有零测度 [700].

重整算子双曲性的重要作用还体现在以下方面: Yoccoz [790] 引入的扇形重整, 考虑了带有无理旋转的单叶函数的第一次回归映射, 用于研究全纯函数的局部线性化问题, 给出了二次多项式可以局部线性化的充要条件; Yampolsky [766] 建立的临界圆周映射重整算子的双曲性, 严格解释了普适伸缩定律在圆周映射中也成立; McMullen [501] 通过研究二次多项式的有界型 Siegel 盘重整的双曲性, 证明了二次无理型 Siegel 盘边界关于临界点的自相似性; Inou 和 Shishikura [379] 发展的近抛物重整算子, 其双曲性对于构造具有正面积的二次 Julia 集起到关键作用 (参见文献 [31, 150]); Dudko、Lyubich 和 Selinger 引入的 Siegel pacman 重整 [274], 被用于证明 MLC 在某些具有有界组合的 satellite 无穷可重整参数处成立 (参见文献 [272]).

4 参数空间

4.1 双曲分支

对于一个全纯有理函数族, 所有双曲映射构成了一个开子集, 其每个连通分支称为双曲分支. 双曲分支的有界性、拓扑结构及其边界的拓扑和几何性质是人们关心的主要问题.

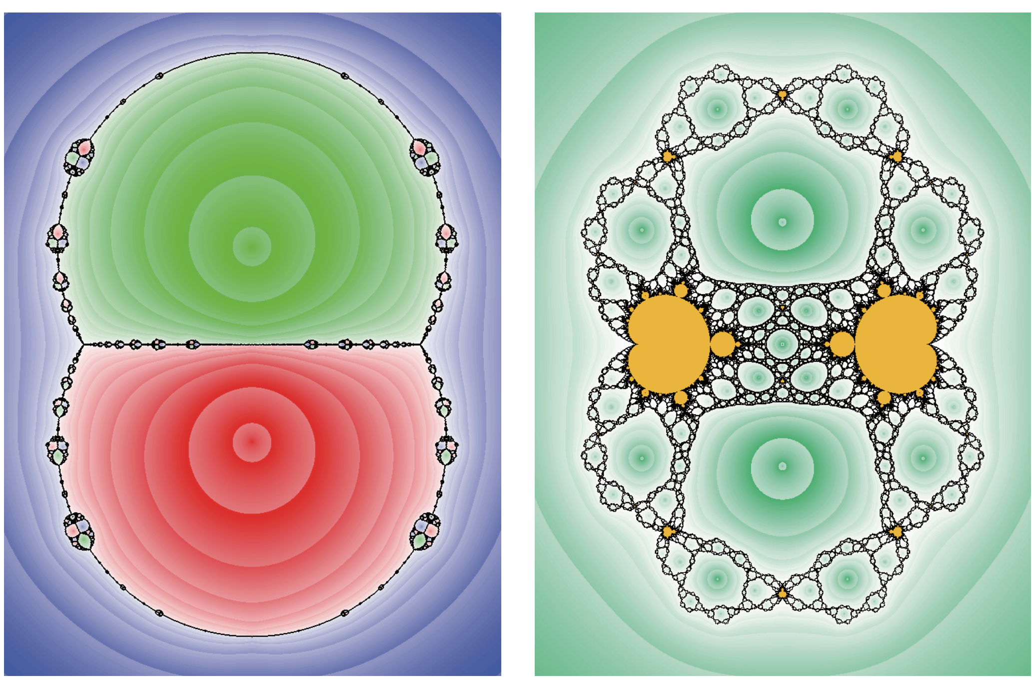
对于首一中心的 d 次多项式空间, 其连通迹 (connectedness locus) 是一个类胞腔 (cell-like, 即为一列嵌套球的交) (参见文献 [126, 228, 263, 426]). Milnor [521] 证明了其每个有界的双曲分支是一个胞腔且包含唯一的临界有限多项式. 特别地, 当 $d = 2$ 时这些有界双曲分支都是 Jordan 区域 (参见文献 [264] 和 [165, 第 VIII.2 小节]). 由于复高维的参数空间不能可视化, Milnor 建议先对复一维的参数空间切片 (slice) 进行研究.

复一维的参数空间除了能够作图可视化, 为证明的结论带来直观的引导外, 在很多情形下还能直接得到双曲分支边界的整体拓扑和几何结构. 这样的结论有很多: McMullen 映射 [599]、三次 Newton

映射[648]、临界周期曲线 $\mathcal{S}_p$ 空间 34) [750] (包括 $p=1$ 的情形[305] 及其推广 (参见文献 [646])). 这些文献在单参数的情形下证明了参数空间中的双曲分支 (无界双曲分支除外) 都是 Jordan 区域. 最近, 邱维元、Roesch 和王悦洋改进了文献 [599] 中的结论, 证明了 McMullen 映射参数平面上的逃逸双曲分支边界都是拟圆周[600]. 证明的方法主要是通过全纯运动将动力系统平面的结论转移到参数平面, 用到的工具还包括参数拼图 (parapuzzle)、刚性讨论和抛物爆炸理论等 (参见图 4).

高维的参数空间研究要困难很多. 20 世纪 90 年代初, Rees、Milnor 等开始对二次有理函数双曲分支进行研究, 并根据临界轨道的动力系统行为将它们分成 4 类 (参见文献 [513, 611–613], 类似的分类也被用于三次多项式[520]). 对二次有理函数模空间和双曲分支的研究还可参见文献 [224, 733]. 对于一般多项式, 其转移迹 (shift locus) 的研究可参见文献 [101, 229]. 对于中心双曲分支 (即包含 z^d 的双曲分支), Petersen 和谭蕾[568] 及骆宇盛[456] 对其边界上部分映射的组合性质做了研究. 对三次有理函数的中心分支的一个特殊切片的研究可参见文献 [113].

有理函数连通迹 (connectedness locus) 中的双曲分支的全局拓扑由 Milnor[521] 给出 (二次有理函数的情形参见文献 [611]). 第一个在不连通迹 (disconnectedness locus) 中对高维有理函数双曲分支给出全局拓扑刻画的工作由王晓光和尹永成完成. 他们考虑了 Julia 集为 Cantor 圆周的双曲分支并证明了它们是一个 Euclid 空间的有限商[751]. 对于全纯有理函数族的双曲分支 $\mathcal{H}$, Milnor[522] 证明了如果 $\mathcal{H}$ 中映射的每个吸引域中仅含一个大轨道等价的临界点, 则 $\mathcal{H}$ 的边界是半代数的, 因而局部连通. 同时他提出了如下猜想:



(a)　　(b)

图 4　(网络版彩图) 两个经典有理映射族的参数空间图. (a) 三次 Newton 映射参数空间图; (b) 指标为 3 的 McMullen 映射参数空间图. 根据文献 [599, 648], 图中双曲分支的边界均为 Jordan 曲线

34) 对于任意整数 $p \geqslant 1$, 三次多项式 $f_{c,a}(z)=z^3-3c^2z+a$ 空间中的周期为 p 的临界周期曲线为 $\mathcal{S}_p=\{(c,a)\in\mathbb{C}^2: f_{c,a}^{\circ p}(c)=c$ 且 $f_{c,a}^{\circ k}(c)\neq c, \forall 1\leqslant k<p\}$. 该空间得到了 Milnor 等的广泛研究, 包括它的亏格、光滑性和不可约性等性质 (参见文献 [12, 114, 520, 750] 及其中的参考文献).

猜想 4.1 (1) 若 $\mathcal{H}$ 中映射的某个吸引域中有两个自由的临界点, 则 $\partial\mathcal{H}$ 非局部连通.

(2) 若 $\partial\mathcal{H}$ 中的某个映射没有中性周期循环, 则 $\partial\mathcal{H}$ 是一个分形集, 且其 Hausdorff 维数严格大于拓扑维数.

曹杰、王晓光和尹永成研究了多项式空间中的一类捕获 (capture) 双曲分支, 部分解决了 Milnor 的上述猜想[164]. 特别地, 他们证明了当吸引域中有两个自由临界点且它们都位于严格预周期 Fatou 分支中时, 双曲分支边界是局部连通的, 这给出了 Milnor 的猜想 (1) 的否定回答[35)]. 对于猜想 (2), 他们不但给出了肯定回答, 同时还得到了关于双曲分支边界的一个 Hausdorff 维数公式, 以等式的形式建立了参数空间与动力平面之间的联系.

若一个 $d\,(\geqslant 2)$ 次的全纯有理函数族 $\mathcal{F}$ 中的双曲分支 $\mathcal{H}$ 在有理函数模空间 Rat_d 中具有紧的闭包, 则称 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{F}$ 中的一个有界双曲分支. 20 世纪 90 年代, Rees[611] 研究了二次有理函数一个实切片的双曲分支的有界性. 二次有理函数的双曲分支可以分成 4 类, 其中的 D- 类型指的是具有两个吸性周期循环的二次有理函数 (双临界有理函数也有类似定义). Epstein[281] 得到了第一个关于双曲分支紧性的一般结果. 他证明了若 $\mathcal{H}\subset\mathrm{Rat}_2$ 是 D- 类型且其中有理函数的吸性周期循环的周期至少为 2, 则 $\mathcal{H}$ 是有界的. 之后, 双曲分支的有界性被聂洪明和 Pilgrim[539] 以及骆宇盛[455] 等做了进一步研究, 其中用到了算术动力系统[413]. 关于三次多项式有界双曲分支的研究还可参见文献 [602].

如果复球面上的一个紧子集内部为空, 并可以写成可数多个球面直径趋向于零且闭包两两不交的 Jordan 圆盘的并的补集, 则称该集合是一个 Sierpiński 地毯. 第一个 Sierpiński 地毯型 Julia 集是由 Milnor 和谭蕾[513] 找到的. 更多的 Sierpiński 地毯型 Julia 集可参见文献 [240, 246, 316, 570, 762, 771]. 对于这类特殊的 Julia 集, McMullen 提出了以下问题 (参见文献 [498, 问题 5.3]):

问题 4.2 Sierpiński 地毯型双曲分支在有理函数模空间中是否有界?

根据 Milnor 和谭蕾[513] (也可参见文献 [240]) 以及 Epstein[281] 的结果, 二次有理函数模空间中的某些 Sierpiński 地毯型双曲分支是有界的. 2022 年, Dudko 和骆宇盛宣称在不交 (disjoint) 型情形下解决了 McMullen 的问题[36)]. 同时, Kahn 宣称完全解决了该问题[37)].

对于双曲分支何时无界的问题, Makienko[478] 给出了若干充分条件. 特别地, 当有理函数的 Julia 集不连通时, 所在双曲分支无界. 相关的研究还可参见文献 [563, 725].

关于有理函数双曲分支的计数结果有: 二次多项式[506]、部分 McMullen 映射[645]、某种类型的二次有理函数[414] 以及 Cantor 圆周型有理函数[604] 等.

4.2 分歧迹

一个全纯有理函数族 $\mathcal{F}$ 的分歧迹 (bifurcation locus) 指的是 $\mathcal{F}$ 中所有使得 Julia 集不连续变化的参数集合的闭包. 由文献 [460, 484] 可知, 分歧迹是一个无处稠密集. 根据 Shishikura[679]、谭蕾[722]、McMullen[504] 和 Gauthier[329] 的工作, 一般的全纯有理函数族的分歧迹具有满的 Hausdorff 维数.

Rees[608] 证明了 $d\,(\geqslant 2)$ 次有理函数模空间 Rat_d 中的分歧迹具有正的 Lebesgue 测度. 定义在 Rat_d 上的分歧测度 (bifurcation measure) 由 Bassanelli 和 Berteloot[56] 在 2007 年引入 (基于分歧流[223]), 它的支撑集真包含在分歧迹中. 一个自然的问题是, 分歧测度的支撑集是否具有正的 Lebesgue 测度? Buff 和 Epstein[153] 证明了分歧测度的支撑集等于两类有理函数的闭包, 第 1 类含有 $2d-2$ 个中性

35) 为了使 Milnor 的猜想 (1) 不被否定, 或许需要将陈述中的 “吸引域” 换成 “直接吸引域”.

36) Https://www.impan.pl/en/activities/banach-center/conferences/22-juliasets4/abstracts.

37) Https://www.slmath.org/seminars/26703/schedules/31335.

循环, 第 2 类是严格预周期且不为灵活 Lattès 映射的临界有限有理函数 (部分结论参见文献 [277]). Astorg、Gauthier、Mihalache 和 Vigny 证明了分歧测度的支撑集包含了一部分 Collet-Eckmann 映射且该映射构成的集合具有正的 Lebesgue 测度[23]. 在此之前, Aspenberg[14] 证明了所有非双曲 Collet-Eckmann 映射在 Rat_d 具有正的 Lebesgue 测度.

上述结论的证明一般需要用到临界关系的横截性、双曲集的全纯运动和一些偏差估计, 从而将动力平面的结果转移到参数空间. 早在 20 世纪 90 年代, 该方法就被谭蕾[719] 用于证明 Mandelbrot 集和 Julia 集的局部相似性, 被 Shishikura[679] 用于证明 Mandelbrot 集边界的 Hausdorff 维数等于 2 等. 临界关系的横截性研究可参见文献 [437, 743] 及其中的参考文献.

对于只有一个自由临界点的三次多项式, 除了 Milnor 等研究的临界周期曲线 $\mathcal{S}_p$ 外, Zakeri[792] 研究了含周期为 1 的有界型 Siegel 盘的参数空间, Buff 和 Henriksen[158] 研究了含中性不动点的参数空间和动力平面的相似性, 张润泽[810] 研究了含抛物不动点的参数空间捕获分支边界的正则性等. 关于二次有理函数参数空间的一维切片研究可参见文献 [19, 152, 240, 318, 513, 732] 等. 最近一个深刻的结果是, Petersen 和 Roesch[567] 证明了抛物 Mandelbrot 集和经典的 Mandelbrot 集是同胚的.

有关超越亚纯函数参数空间的研究可参见文献 [255, 296, 598, 624, 625] 及其中的参考文献.

4.3 熵的单调与连续性

给定实轴上一个紧区间 I 上的自映射连续函数族 $\{f\}$, 一个自然的问题是, 该函数族的 "动力系统复杂度" 是如何变化的. 而拓扑熵 (topological entropy) $h_{\mathrm{top}}(f)$ 可以很好地刻画这一变化. 拓扑熵可以通过下式计算:

$$h_{\mathrm{top}}(f) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \ell(f^{\circ n}),$$

其中 $\ell(f^{\circ n}) - 1$ 是使得导函数 $x \mapsto df^{\circ n}/dx$ 在 I 中改变符号的点的数目 (参见文献 [527]).

熵函数 $h_{\mathrm{top}}(f)$ 的单调性问题可以追溯到 20 世纪 70 年代. 对于光滑的单峰映射 $f: I \to I$, 其中, $I = [0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $f(1/2) = 1$, 考虑 $f_a(x) = af(x)$, $a \in [0, 1]$. Douady[261]、Douady 和 Hubbard[264] 及 Milnor 和 Thurston[523] 证明了二次多项式族 $f_a(x) = 4ax(1-x)$ 的拓扑熵关于参数 $a \in [0, 1]$ 是单调递增的, 且证明依赖于复方法. Tsujii[737] 给出了另外一个不依赖于全纯动力系统的证明. 正弦函数族 $f_a(x) = a\sin(\pi x)$ 的拓扑熵的单调性直到最近才解决 (参见文献 [627]). 由于实一维动力系统的双曲稠密性, 上述 $h_{\mathrm{top}}(f)$ 在 I 的任何子区间上都不是严格单调的.

对于实系数的三次多项式 $f: I \to I$, 其中, $I = [-1, 1]$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$, 函数族 $f_{a,b}(x) = ax^3 + bx^2 + (1-a)x - b$ 的等熵线 (isentropes) $(a, b) \mapsto h_{\mathrm{top}}(f_{a,b})$ 是非常复杂的类分形集, 因此没有理由期望对于给定的 a (或 b), $h_{\mathrm{top}}(f_{a,b})$ 关于参数 b (或 a) 具有单调性. 20 世纪 90 年代初, Milnor 提出了一个关于一般实多项式拓扑熵的 "单调性" 猜想 (具体陈述参见文献 [512, 745]):

猜想 4.3 对于给定次数的非退化实多项式族, 每条等熵线都是连通的.

对于三次多项式的情形, 双曲稠密性猜想可以推导出 Milnor 的熵单调猜想[217]. 之后, Milnor 和 Tresser[524] 证明了三次多项式情形下这个猜想成立, 但证明仅依赖于二次多项式的双曲稠密性 (注意, 在当时二次以上多项式的双曲稠密性还是未知的) 和平面上的一些拓扑结论. 2015 年, Bruin 和 van Strien[141] 彻底解决了 Milnor 的这个猜想, 且证明依赖于实双曲多项式的稠密性[421]. 拓扑熵的单调性的进一步研究可参见文献 [437]. 关于实映射拓扑熵的其他相关结论, 可参见文献 [730, 745].

事实上, 拓扑熵可以对任何紧度量空间 X 上的自映射 f 进行定义 (参见文献 [261]). 对于每个次数为 d 的多项式, 其填充 Julia 集上的拓扑熵都是 $\log d$ (事实上对有理函数也正确, 参见文献 [459]).

为本质地刻画复多项式动力系统的复杂度, 在填充 Julia 集的一个有意义的子集上定义拓扑熵是一个重要的问题.

对于临界有限的多项式 f, 其 Hubbard 树 H_f 定义为包含临界轨道的最小正则树 (参见文献 [256, 264, 577]) 且 H_f 在 f 作用下是不变的. Thurston[729] 定义 f 的核熵 (core entropy) 为 f 限制在 H_f 上的拓扑熵, 并猜想核熵关于多项式是连续变化的. 当 f 为二次多项式时, Thurston 猜想成立 (参见文献 [275, 735]). 最近, 高延和 Tiozzo 对于任意次数的多项式证明了 Thurston 的猜想[325].

在此之前, 已经知道二次多项式的核熵沿着 Mandelbrot 集的 "脉络" (vein) 是单调递增的 (参见文献 [275, 445, 796]). 其证明基于外射线着陆的组合性质. 特别地, 对于局部连通的 d 次多项式 f, 其 Hubbard 树可能是无限的, 但其核熵有计算公式

$$h(f) = \log d \cdot \dim_H \mathrm{Acc}(f),$$

其中 $\dim_H \mathrm{Acc}(f)$ 代表 f 的填充 Julia 集上点的双可达 (biaccessible) 角度构成的集合的 Hausdorff 维数[275, 734]. 事实上, 上述公式本质上刻画了 f 的层 (lamination, 该概念由 Thurston[729] 引入) 的预临界叶子 (precritical leaves) 的增长率. 当 f 是临界有限多项式时, 这个定义与通常的核熵定义吻合, 并可以通过 Thurston 核熵算法进行计算 (参见文献 [324, 731]).

5 拟共形映射与应用

5.1 平面拟共形映射基础

复球面上两个区域 Ω_1 和 Ω_2 之间的保向同胚 $f:\Omega_1\to\Omega_2$ 称为 K- 拟共形映射 (K-quasiconformal map), 如果 f 有线段上绝对连续 (absolutely continuous on lines, ACL) 性质且 f 在 Ω_1 内满足 Beltrami 方程 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\mu(z)\frac{\partial f}{\partial z}$, 其中 μ 为 Beltrami 系数且 $|\mu(z)|\leqslant k=\frac{K-1}{K+1}<1$ 几乎处处成立. 这是拟共形映射的分析定义. 若存在 $H>0$ 使得对于任意 $z_0\in\Omega_1$ 都有

$$\limsup_{r\to 0}\frac{\sup_{d_{\widehat{\mathbb{C}}}(z,z_0)=r} d_{\widehat{\mathbb{C}}}(f(z),f(z_0))}{\inf_{d_{\widehat{\mathbb{C}}}(z,z_0)=r} d_{\widehat{\mathbb{C}}}(f(z),f(z_0))}\leqslant H,$$

则 $f:\Omega_1\to\Omega_2$ 也为一个拟共形映射. 这是拟共形映射的度量定义. 此外还有通过拓扑四边形的共形模来刻画的拟共形映射几何定义等, 这些定义都是等价的. 拟共形映射关于二维 Lebesgue 测度绝对连续.

一个与拟共形映射有关的事实是, 其度量定义中的上极限可以改为下极限[356] (注意改为下极限后判定一个同胚是否为拟共形会更容易), 甚至改为下极限后还可以去掉某些例外集[399]. 这些结论在研究有理函数的刚性时有重要应用: 用于证明整体拓扑共轭但在 Fatou 集上拟共形共轭的两个有理函数是整体拟共形共轭的 (参见文献 [343, 352, 585, 699] 和 [420, 第 12 节]). 拟共形映射是几乎处处可微的, 但具体在哪一点可微则无法保证, 在一点可微的判定标准可参见文献 [430, 第 V.6 小节] 和 [685] 及其中的参考文献.

文献 [4, 20, 430] 是关于拟共形映射的经典参考文献. 国内的经典参考书籍是由李忠编著的《复分析导引》(2004)[446] 和《拟共形映射与 Teichmüller 空间》(2013)[447], 均为北京大学出版社出版. 下面是拟共形映射理论最重要的结论之一:

定理 5.1　给定一个有界可测函数 $\mu \in L^\infty(\widehat{\mathbb{C}})$, 其中 $\|\mu\|_\infty < 1$, 则存在一个拟共形映射 $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, 使得 f 的复特征 $\mu_f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} / \frac{\partial f}{\partial z}$ 等于 μ. 此外, 这样的 f 在相差一个后复合 Möbius 映射的意义下是唯一的.

该定理称为可测 Riemann 映射定理 (measurable Riemann mapping theorem), 也称为可积性定理 (integrability theorem). 事实上, 可测函数 μ 对应着复球面上的一个椭圆域, 在几乎所有点处都指定了一个给定方向和长短轴之比的无穷小椭圆, 定理中的拟共形映射 f 将这些无穷小椭圆全部映成无穷小圆. 根据拟共形映射的表示定理, 可以证明规范化的拟共形映射关于参数具有连续 (或解析) 依赖性 (参见文献 [5]).

5.2　拟共形手术与发展

拟共形映射理论对复动力系统领域的发展至关重要. 前文已经提到, Sullivan 在 20 世纪 80 年代将拟共形映射理论引入复动力系统后, 证明了有理函数没有游荡域, 完成了周期 Fatou 分支的分类 (参见文献 [506, 713]). 之后 Douady 和 Hubbard [265] 引入了类多项式的概念, 这是重整理论的基础 [499]. Shishikura [676] 给出了有理函数非斥性周期轨道数目的最好上界.

拟共形手术 (quasiconformal surgery) 的主要原理是通过各种剪切和粘贴, 先得到一个拟正则映射 $g : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$; 再寻找一个在 g 作用下不变的椭圆域 (对应一个定义在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的 Beltrami 系数 μ), 即 $g^*\mu = \mu$; 然后由可测 Riemann 映射定理得到一个拟共形映射 $\phi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, 使得其复特征 $\mu_\phi = \mu$. 那么 $f := \phi \circ g \circ \phi^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ 一定是一个有理函数, 因为 f 是拟正则映射且将无穷小圆映到无穷小圆. 这个新得到的有理函数 f 与原来的拟正则映射 g 是拟共形共轭的, 它们具有相同的动力系统, 因此可以通过 g 来研究 f. 由于 g 可以进行局部构造, 所以自由度大很多.

以证明有理函数的非斥性周期轨道的上界为例. 之前利用全纯扰动的方法, 只能将一半的中性周期轨道扰动为吸性, 于是只能得到 d 次有理函数至多有 $6d-6$ 个非斥性周期轨道 (参见文献 [165, 第 III.2 小节]). 而 Shishikura [676] 利用拟共形手术, 将所有的中性周期轨道都扰动为吸性, 证明了非斥性周期轨道的最好上界是 $2d-2$.

对拟正则映射 g 作拟共形手术最关键的一点是找一个不变的 Beltrami 系数 μ. 这在大多数情形下要求在通过拉回 g 定义 μ 时, 轨道经过非全纯的地方至多有限多次, 由此才能保证 μ 的本性上界严格小于 1 (参见文献 [676, 第 3 节]). 对于某些情形, 轨道经过非全纯区域无穷次时, 结合拟共形手术和 Thurston 算法也能找到一个与给定拟正则映射 g 半共轭的有理函数 f (参见文献 [640, 674]).

当给定的 Beltrami 系数 μ 本性上界等于 1 但 $\{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |\mu(z)| > 1-\varepsilon\}$ 的 Lebesgue 测度关于 ε 指数减小时, Beltrami 方程也有 (非拟共形) 同胚解 [216]. Haïssinsky [350] 首先利用该理论从一对吸性和斥性周期点出发来构造抛物点. 之后 Petersen 和 Zakeri [569] 将其用于 Siegel 盘的研究中, 证明了几乎所有的含 Siegel 盘的二次多项式 Julia 集都是局部连通的, 其中的手术构造称为超拟共形手术 (trans-quasiconformal surgery).

与拟共形手术有关的经典文献有 Shishikura 的著名论文 [676], 还有他的拟共形手术综述 [683], 以及38) Branner 和 Fagella 的拟共形手术专著 [124]. 该专著涵盖了各种手术, 包括 Siegel 盘和 Herman 环的相互转化 [676]、Mandelbrot 集 limbs 上的同胚延拓 [123]、圆盘 - 圆环手术 [574] 和纠缠 (intertwining) 手术 [282] 等. 此外, pinching 和 plumbing 手术可参见文献 [211]. 拟共形手术的应用还包括: Douady

38) Mercer 和 Stankewitz 的 “Introduction to quasiconformal mappings in the plane with an application to quasiconformal surgery”, http://www.cs.bsu.edu/~rstankewitz/QCMapsIntro.pdf, 非常适合初学者.

和 Hubbard [265] 的整理定理 (straightening theorem) 及其高维推广 [377]. 除了有理函数, 拟共形手术也可用于超越动力系统. 值得一提的是拟共形手术在复微分方程中也有重要应用 (参见文献 [82]).

5.3 全纯运动

全纯运动由 Mañé、Sad 和 Sullivan [484] 及 Lyubich [460] 在 1983 年独立引入, 当时被用于构造有理函数扰动后的拟共形共轭. 之后全纯运动被证明是复动力系统领域的一个非常强大的工具.

定义 5.2 (全纯运动) 对于 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的一个非空子集 E, 称映射 $h:\mathbb{D}\times E\to\widehat{\mathbb{C}}$ 是以 0 为基点、$\mathbb{D}$ 为参数空间的 E 的全纯运动 (holomorphic motion), 如果

- 对每个 $z\in E$, $\lambda\mapsto h(\lambda,z)$ 关于 $\lambda\in\mathbb{D}$ 全纯;
- 对每个 $\lambda\in\mathbb{D}$, $z\mapsto h(\lambda,z)$ 是 E 上的单射; 且
- 对所有的 $z\in E$, 有 $h(0,z)=z$.

第一个关于全纯运动的重要结论是 λ- 引理: E 上的全纯运动可以延拓为 $\overline{E}$ 上的全纯运动 (参见文献 [460,484]). 在 Sullivan 和 Thurston [715] 及 Bers 和 Royden [90] 的工作之后, 利用多复变中的工具, Slodkowski [694] 证明了一个一般的结论: E 上的全纯运动可以延拓为 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的全纯运动, 且仍然以 $\mathbb{D}$ 为参数圆盘. 其一般形式如下 (证明可参见文献 [190,260,328] 和 [20, 第 12 节]):

定理 5.3 若 $h(\lambda,z):\mathbb{D}\times E\to\widehat{\mathbb{C}}$ 是以 0 为基点、$\mathbb{D}$ 为参数空间的闭子集 $E\subset\widehat{\mathbb{C}}$ 的全纯运动, 则

- 存在一个全纯运动 $H(\lambda,z):\mathbb{D}\times\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ 是 $h(\lambda,z)$ 的延拓;
- 对于任意 $\lambda\in\mathbb{D}$, $H(\lambda,\cdot):\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ 是一个拟共形映射, 其复特征具有上界 $(1+|\lambda|)/(1-|\lambda|)$.

此外, $H(\lambda,\cdot)$ 的 Beltrami 系数是 $\mathbb{D}$ 到 Banach 空间 $L^\infty(\mathbb{C})$ 的单位球中的全纯函数.

除了单位圆盘 $\mathbb{D}$, 全纯运动可以定义在任何连通复流形 X 上 (参见文献 [499, 第 4.1 小节]). 但如果 X 不是单连通的, 则子集 $E\subset\widehat{\mathbb{C}}$ 上以 X 为参数空间的全纯运动不一定能延拓为整个 $\widehat{\mathbb{C}}$ 上的全纯运动 (参见文献 [260]). 蒋云平和 Mitra [390] 做了很多关于全纯运动方面的工作.

全纯运动的主要应用之一是通过动力平面来研究参数平面, 这方面有很多重要的工作, 如参数拼图 (parapuzzle) 的构造 [33,470,643]、双曲分支边界的拓扑和几何性质研究等. 此外, 全纯运动还可用于证明拓扑熵的单调性 [437].

6 Thurston 定理与应用

6.1 拓扑刻画

Thurston 给出的关于临界有限有理函数的拓扑刻画是复动力系统领域最深刻的结果之一 (参见文献 [266]). 该理论被应用在复动力系统的各个方面, 主要包括: Douady [261] 对单峰映射拓扑熵单调性的证明, Rees [614] 对参数空间的刻画, Kiwi [412] 对多项式 lamination 的刻画 (基于文献 [94,576]), Rees, Shishikura 和谭蕾对多项式耦合的研究 (参见文献 [610,686,720,721] 和第 6.2 小节) 以及 Pilgrim 和谭蕾 [573] 的沿弧剪切 - 粘贴手术的研究等. 更多的应用可参见文献 [151,210].

令 $f:S^2\to S^2$ 为二维球面上一个次数大于 1 的分支覆盖 (branched covering). 其临界点为 $C_f:=\{x\in S^2:\deg_x(f)>1\}$, 后临界集为 $P(f)=\overline{\bigcup_{n\geqslant 1}f^{\circ n}(C_f)}$. 若 $P(f)$ 是一个有限集, 则称 f 是临界有限的.

定义 6.1 (组合等价) 对于两个分支覆盖 f 和 g, 若存在同胚 $\phi,\psi:S^2\to S^2$ 使得 $\phi\circ f=g\circ\psi$, 且 ϕ 和 ψ 相对于 $P(f)$ 是同痕的 (isotopic), 则称 f 和 g 组合等价 (或 Thurston 等价).

对于 $S^2\setminus P(f)$ 中的一条简单闭曲线 γ, 如果 $S^2\setminus\gamma$ 有一个分支不含 $P(f)$ 中的点, 则称 γ 是平凡的; 如果 $S^2\setminus\gamma$ 有一个分支仅包含 $P(f)$ 中的一个点, 则称 γ 是次要的 (peripheral); 如果 $S^2\setminus\gamma$ 的每个分支都包含 $P(f)$ 中至少两个点, 则称 γ 是本质的 (essential). 对于 $S^2\setminus P(f)$ 中的两条简单闭曲线, 如果它们相对于 $P(f)$ 同伦, 则称它们同伦. 一族多重曲线 (multicurve) Γ 是由 $S^2\setminus P(f)$ 中有限多条互不相交的两两不同伦的本质曲线组成的集合. 设 Γ 是多重曲线, 如果对于任意 $\gamma\in\Gamma$, $f^{-1}(\gamma)$ 的任何本质分支都同伦于 Γ 中的一条曲线, 则称 Γ 是 f- 不变的. 多重曲线 $\Gamma=\{\gamma_1,\dots,\gamma_n\}$ 确定了一个 $n\times n$ 的转移矩阵 $M(\Gamma)=(a_{ij})_{n\times n}$:

$$a_{ij}=\sum_{\beta\sim\gamma_i}\frac{1}{\deg(f:\beta\to\gamma_j)},$$

其中和式 $\sum_{\beta\sim\gamma_i}$ 是对 $f^{-1}(\gamma_j)$ 的所有与 γ_i 同伦的分支 β 求和. 由于矩阵 $M(\Gamma)$ 中的元素均非负, 根据矩阵论中的 Perron-Frobenius 定理, $M(\Gamma)$ 有一个非负且最大的特征值 (即为谱半径) $\lambda(\Gamma)$. 对于一族 f- 不变的多重曲线 Γ, 如果 $\lambda(\Gamma)\geqslant 1$, 则称 Γ 是一个 Thurston 障碍 (obstruction).

对每个 $x\in S^2$, 令 $\nu_f(x)$ 为 $\{\deg_y(f^{\circ n}): f^{\circ n}(y)=x \text{ 且 } n\geqslant 1\}$ 的最小公倍数. 注意 $\nu_f(x)$ 可能等于 ∞ 且若 $x\notin P(f)$, 则 $\nu_f(x)=1$. 称 $\mathcal{O}_f=(S^2,\nu_f)$ 是对应 f 的轨形 (orbifold), 其中 $\nu_f: P(f)\to\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 称为 $\mathcal{O}_f$ 的特征 (signature) [266] (参见文献 [499, 附录] 和 [519, 附录 E]). 如果轨形 $\mathcal{O}_f=(S^2,\nu_f)$ 的欧拉示性数

$$\chi(\mathcal{O}_f)=2-\sum_{x\in P(f)}\left(1-\frac{1}{\nu_f(x)}\right)<0,$$

则称轨形 $\mathcal{O}_f=(S^2,\nu_f)$ 是双曲的. 如果 f 是临界有限的, 则 $\chi(\mathcal{O}_f)\leqslant 0$. 非双曲轨形 $\mathcal{O}_f=(S^2,\nu_f)$ 的分类可参见文献 [266,499]. 如果 $\#P(f)\geqslant 4$, 则 $\mathcal{O}_f$ 非双曲当且仅当 $\mathcal{O}_f$ 的特征为 $(2,2,2,2)$. Thurston 证明了如下定理:

定理 6.2 [266, 371] 一个临界有限的分支覆盖 $f: S^2\to S^2$ 组合等价于一个有理函数 g 当且仅当下面情形中的一种成立:

- (环面情形) $\mathcal{O}_f$ 的特征是 $(2,2,2,2)$ 且 g 由一个环面自同态的双层覆盖得到;
- (一般情形) $\mathcal{O}_f$ 的特征不是 $(2,2,2,2)$ 且 f 没有 Thurston 障碍 (即对于任意 f- 不变的多重曲线 Γ 有 $\lambda(\Gamma)<1$).

对于第二种情形, 这样的 g 在相差一个共形共轭的意义下是唯一的.

换言之, Thurston 定理证明了具有双曲轨形的临界有限分支覆盖 f 组合等价于有理函数的充要条件是 f 没有 Thurston 障碍. 一个自然的问题是, Thurston 定理可以在多大程度上推广到临界无限的情形? McMullen 研究了一般有理函数 f 的多重曲线 Γ (不要求 f 临界有限和 Γ 的不变性) 并证明了除了一些平凡的情形外, 没有 Thurston 障碍对于具有双曲轨形的有理函数本质上是成立的 (参见文献 [499, 第 B.2 节]):

定理 6.3 有理函数 f 的任何多重曲线 Γ 均满足 $\lambda(\Gamma)\leqslant 1$. 若 $\lambda(\Gamma)=1$, 则有

- f 临界有限, $\mathcal{O}_f=(2,2,2,2)$ 且 f 由一个环面自同态的双层覆盖得到; 或
- f 临界无限, Γ 包含了 f 的一个圆环循环中的本质曲线且这些圆环落在 f 的 Siegel 盘或 Herman 环中, 其中每一个圆环都是 $\widehat{\mathbb{C}}\setminus P(f)$ 的一个连通分支.

临界有限的 Thurston 定理首先被崔贵珍和谭蕾 [210] 以及张高飞和蒋云平 [808] 推广到次双曲情形 [210, 808] (也可参见文献 [204–206]):

定理 6.4 若 f 是一个临界无限的次双曲半有理分支覆盖, 则 f 组合等价于一个有理函数当且仅当 f 没有 Thurston 障碍.

之后 Thurston 定理被推广到几何有限有理函数 [211], 含 Siegel 盘的分支覆盖 [806] 以及含 Herman 环的情形 [749]. 值得一提的是, Hubbard、Schleicher 和 Shishikura 将 Thurston 定理推广到了临界有限的指数映射 [374].

对于临界有限分支覆盖 f 的 Thurston 定理 [266], 证明 f 组合等价于一个有理函数归结为证明 Thurston 拉回映射 $\sigma_f: T_f \to T_f$ 有唯一的吸性不动点, 其中 T_f 是 $(S^2, P(f))$ 的 Teichmüller 空间. 关于 Thurston 拉回映射的进一步研究可参见文献 [154, 415, 666]. 在研究临界无限分支覆盖的 Thurston 定理时, 除了直接在 Teichmüller 空间内对 Thurston 拉回映射进行迭代外 (参见文献 [808]), 还可以用剪切 - 粘贴手术 [573] 对动力系统进行典型分解, 将问题归结为临界有限的情形 (参见文献 [210]). 其他有关动力系统的分解可参见文献 [207, 209, 496, 749].

Thurston 的定理给出了存在唯一性的证明, 但验证这个定理的条件却很困难, 因为很多情形下不可能对所有的多重曲线都验证它们没有 Thurston 障碍. 若多重曲线 $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ 满足对于任意 $i = 1, 2, \ldots, n$, 曲线 γ_{i-1} (或 γ_n, 如果 $i = 1$) 同伦于 $f^{-1}(\gamma_i)$ 的一个连通分支 γ'_{i-1}, 且 $f: \gamma'_{i-1} \to \gamma_i$ 是一个同胚, 则称 Γ 为一个 Levy 循环. 显然 Levy 循环一定是一个 Thurston 障碍. Levy 在他的博士学位论文中引入了 Levy 循环的概念并证明了对于二次临界有限分支覆盖, 有 Thurston 障碍等价于存在 Levy 循环 (参见文献 [441, 720]). 这个结论对于任意次数的拓扑多项式也成立 (参见文献 [94]). 因此对某些分支覆盖寻找 Levy 循环是验证 Thurston 定理条件的一个办法. 但 Shishikura 和谭蕾却证明了存在三次临界有限分支覆盖, 其含有 Thurston 障碍但不含 Levy 循环 [686].

Bartholdi 和 Nekrashevych [55] 通过引入迭代单值化群 (iterated monodromy group) 这个组合不变量解决了 Hubbard 提出的 "扭兔子" 组合等价问题. Kameyama [400] 和 Pilgrim [572] 也尝试寻找一个有效的算法来得到 Thurston 定理中的有理函数. Thurston [266] 对临界有限有理函数的实现问题给出的是一个反面的判断标准, 最近 D. Thurston [728] 给出了一个正面的刻画. 通过对 Douady-Hubbard 证明的加细, Pilgrim [571] 引入了典型 (canonical) Thurston 障碍的概念 (为一些特别的 Levy 循环及其逆像的并, 相关研究还可参见文献 [170, 667]).

利用几何群论, Belk、Lanier 和 Margalit 等考虑树的单纯复形 (simplicial complex of trees) 上的迭代, 给出了一个能决定临界有限拓扑多项式是否组合等价于一个多项式的简单算法. 如果组合等价, 则该算法能直接输出 Hubbard 树; 否则, 该算法输出典型的 Thurston 障碍. 此外, 该算法还能解决与 Hubbard "扭兔子" 问题相关的更一般问题 [61]. 对于临界有限多项式, 其组合结构由其 Hubbard 树上的动力系统决定. 如果要确定由 Hubbard 树决定的多项式系数, 则可用 Hubbard 和 Schleicher [372] 的 "蜘蛛算法" (spider algorithm).

对于一般的有理函数, 寻找组合不变量是一个重要问题 (参见文献 [498, 第 5 节]). 有理函数的不变图 (invariant graph) 是类似于多项式的 Hubbard 树的组合不变量. 不变图为判定是否存在 Thurston 障碍提供了一条途径 (参见文献 [209, 211]). 除了前文提到的 Newton 映射和 McMullen 映射, 扩张的 Thurston 映射 [118] 和临界有限有理函数 [203] 等也存在不变图.

如果临界有限分支覆盖 f 没有 Thurston 障碍, 则由 Thurston 拉回映射 $\sigma_f: T_f \to T_f$ 得到的序列 $\tau_n = \sigma_f^{\circ n}(\tau_0)$ 收敛到 σ_f 的不动点, 且该不动点对应着一个与 f 组合等价的有理函数 g (参见文献 [266]). 这个通过构造复结构序列 τ_n (对应于一列拟共形映射) 来寻找与 f 组合等价的有理函数 g 的过程被称为 Thurston 算法. 关于一般映射的 Thurston 算法收敛性的研究可参见文献 [638, 640]. 通过分析拟共形同痕, McMullen 证明任何两个拟共形组合等价的有理函数都是拟共形共轭的 (参见文

献 [501, 附录 A]). 崔贵珍[201] 进一步加强了该结论.

6.2　耦合问题

20 世纪 80 年代, Douady 和 Hubbard 观察到某些有理函数的动力系统可以很好地分解为一对多项式的动力系统[256]. 为了将部分二次有理函数通过一对二次多项式进行参数化, 他们引入了耦合 (mating) 的概念. 耦合有数种类型, 可以参考 Petersen 和 Meyer[566] 关于耦合的介绍.

假定 f_i 为首一中心且填充 Julia 集 $K(f_i)$ 局部连通的二次多项式, 其中 $i=1,2$. 考虑 Böttcher 映射 $\Phi_i:\widehat{\mathbb{C}}\setminus K(f_i)\to\widehat{\mathbb{C}}\setminus\overline{\mathbb{D}}$, 它是使得当 $z\in\widehat{\mathbb{C}}\setminus K(f_i)$ 时 $\Phi_i(f_i(z))=(\Phi_i(z))^2$ 的共形映射, 其中 $\Phi_i(\infty)=\infty$ 且 $\Phi_i'(\infty)=1$. 根据 Carathéodory 定理, Φ_i^{-1} 可以连续延拓到边界 $\Phi_i^{-1}:\partial\mathbb{D}\to J(f_i)$, 其中 $J(f_i)=\partial K(f_i)$ 为 f_i 的 Julia 集. 参数曲线 $\eta_i(t)=\Phi_i^{-1}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}):\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to J(f_i)$ 即为 $J(f_i)$ 的 Carathéodory 圈 (loop). 按相反的方向沿着填充 Julia 集的边界粘贴, 得到一个拓扑空间

$$X=(K(f_1)\sqcup K(f_2))/(\eta_1(t)\sim\eta_2(-t)),$$

其中等价关系 $\sim$ 被称为外射线等价 (ray equivalence), 并记为 $\sim_r$. 若 X 同胚于 2- 维球面 S^2, 则称多项式偶对 (f_1,f_2) 是可拓扑耦合的 (topologically mateable). 诱导的映射称为 f_1 和 f_2 的拓扑耦合:

$$f_1\sqcup_{\mathcal{T}}f_2=(f_1|_{K(f_1)})\sqcup(f_2|_{K(f_2)})/(\eta_1(t)\sim\eta_2(-t)).$$

如果存在一个二次有理函数 $F:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ 和一个同胚 $\Phi:S^2\to\widehat{\mathbb{C}}$ 使得 Φ 将 $f_1\sqcup_{\mathcal{T}}f_2$ 共轭为 F 且 Φ 在 $K(f_1)$ 和 $K(f_2)$ 的内部 (如果内部非空的话) 是共形的, 则称 f_1 和 f_2 是可共形耦合的 (conformally mateable), 并称 $F=f_1\sqcup f_2$ 是 f_1 和 f_2 的一个共形耦合. 如果这个 F 在相差一个 Möbius 共轭的意义下是唯一的, 则称 F 是 f_1 和 f_2 的共形耦合.

如果 f_1 和 f_2 落在 Mandelbrot 集的共轭 limbs 里且具有局部连通的 Julia 集, 则即使是 f_1 和 f_2 的拓扑耦合都不能实现, 因为 $(K(f_1)\sqcup K(f_2))/\sim_r$ 不同胚于一个 2- 维球面. 利用 Thurston 对临界有限有理函数的拓扑刻画[266], 谭蕾、Rees 和 Shishikura 证明了下面的定理 (参见文献 [610,612,680,720]):

定理 6.5　任何两个 Julia 集连通的次双曲二次多项式能共形耦合当且仅当它们不落在 Mandelbrot 集的共轭 limbs 里.

此外, Rees[612] 和 Shishikura[680] 还证明了, 若两个临界有限二次多项式的形式耦合 (formal mating, 定义参见文献 [720]) 组合等价于一个有理函数, 则它们的拓扑耦合共轭于该有理函数. 证明的主要步骤是说明存在一个形式耦合到有理函数的半共轭. 关于该结果的推广可参见文献 [208,675].

当两个二次多项式都有一个严格预周期的临界点时, 它们的填充 Julia 集内部为空, 而耦合之后的有理函数的 Julia 集是整个球面. 这样的例子和解释可参见文献 [517]. 上述耦合结果被 Haïssinsky 和谭蕾[353] 利用抛物手术推广到几何有限有理函数. 若 f_1 和 f_2 是双曲的 (所在的 Mandelbrot 集的双曲分支为 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$) 且落在两个不共轭的 limbs 中, 则通过耦合给了 $\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2$ 和二次有理函数参数空间中的一个双曲分支之间的一个同构. 但这个同构不能连续延拓到 $\overline{\mathcal{H}}_1\times\overline{\mathcal{H}}_2$ 上 (参见文献 [280,563]).

第一个不依赖于 Thurston 定理的耦合结果出现在文献 [453] 中. 其主要方法是先寻找作为耦合候选的有理函数 (某些情形需要依赖于参数拼图), 然后再证明候选的有理函数确实就是一个耦合. 该方法被用于 $z\mapsto z^2-1$ (其 Julia 集被称为 "教堂" (basilica)) 和其他二次多项式的耦合 (参见文献 [19,270,732,758]). 其中的证明需要研究一个含有周期为 2 的超吸性周期循环的二次有理函数的参数空间切片.

对于含有中性不动点的二次有理函数 $f_\theta(z)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta}z+z^2$, 其中 $\theta\in\mathbb{R}$, Milnor 提出了下面的问题 (参见文献 [517, 第 61 页]):

问题 6.6 假设 f_θ 和 f_ν 的 Julia 集局部连通且 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\theta+\nu)}\neq 1$. 那么 f_θ 和 f_ν 的共形耦合 $f_\theta\sqcup f_\nu$ 是否存在?

这个问题是一般的二次耦合猜想 (quadratic mating conjecture) 的特殊情形 (参见文献 [513, 第 54 页]). 注意 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\theta+\nu)}\neq 1$ 可类比于之前要求的不落在共轭 limbs 里的条件. Milnor 的问题在当 θ 和 ν 为有理数或有界型无理数 (此时二次多项式含有 Siegel 盘) 时被解决了 39) (参见文献 [317, 353, 767]). 付宇铭和张艳华 [319] 最近证明了对于任何有界型无理数 θ, 二次多项式 f_θ 与任何次双曲二次多项式是共形可耦合的. 在证明含有 Siegel 盘的二次多项式耦合定理时, 一个与上述共形耦合等价的定义被引入 (参见文献 [767, 第 27 页] 和 [566]), 它在应用时更方便 (见图 5).

除了二次多项式, 高次多项式的耦合也得到了很多研究. 但由于出现更多的临界轨道, Shishikura 和谭蕾 [686] 证明了三次临界有限多项式的耦合和二次的情形有很大不同: 一个三次的临界有限分支覆盖可以没有 Levy 循环但有 Thurston 障碍 [182]. 一些三次的 Newton 映射也可以看作两个三次的多项式通过耦合得到 (参见文献 [18, 721]). 其他的三次多项式的耦合可参见文献 [668].

对于很多情形, 要得到耦合后的有理函数的表达式是很困难的. 有一些算法能够计算这些有理函数的数值近似, 主要是 Thurston 算法和 “水母算法” (mesuda algorithm) (参见文献 [121, 392, 757]). Meyer [507, 508] 给出了有理函数能通过耦合得到的充分条件. 特别地, 他证明了任何一个临界有限且没有周期临界点的有理函数 f (于是 Julia 集为整个球面), 其若干次迭代 $f^{\circ n}$ 一定是两个临界有限多项式的共形耦合.

一个有意义的问题是, 研究具有连通但非局部连通 Julia 集的多项式耦合. Milnor 建议通过粘贴等势线求极限的方式来定义 (参见文献 [513, 第 54 页]). Buff 和 Koch 提出了另外的定义方式 (参见文献 [155, 问题 5.3]). 因此有如下问题:

问题 6.7 是否存在可共形耦合的二次多项式对, 其 Julia 集连通且非局部连通?

关于多项式耦合的其他结果, 可参见文献 [208, 455, 476, 756] 和其中的参考文献. 更多关于耦合的问题 40), 可参见文献 [155].

耦合是将两个填充 Julia 集按相反的方向沿边界粘贴. 另一种构造新动力系统的方式是将其中的一个填充 Julia 集边界沿着另一个多项式的有界不动 Fatou 分支边界粘贴, 称其为调频 (tuning). 该构造由 Douady 和 Hubbard 在 20 世纪 80 年代引入, 用于说明 Mandelbrot 集包含了自身小复制 (little copies) 的原因以及从哪里可以找到这些复制 (参见文献 [265, 351]). 沈维孝和王轶珉 [674] 证明了, 如果 f 是一个临界有限的双曲多项式且其有界 Fatou 分支的闭包两两不交, 则 f 可以和任何次数兼容的多项式 (Julia 集连通) 进行调频. 关于调频的研究还可参见文献 [376, 377].

最近张高飞 [807] 考虑了一种新型的构造—Jordan 耦合, 即将两个临界有限的多项式沿着它们的有界不动 Fatou 分支边界粘贴, 可以得到一个新的有理函数. 其他通过粘贴生成新动力系统的构造还包括二次有理函数与模群的耦合 [161] 以及反全纯 (anti-holomorphic) 二次多项式和理想三角群的耦合 [429]. 更多关于耦合的信息可参见文献 [160, 566].

39) 对几乎所有的无理数 θ 和 ν, 张高飞肯定地回答了 Milnor 关于 f_θ 和 f_ν 的共形耦合问题, 见 https://www.math.univ-toulouse.fr/∼cheritat/Exposes/Banff.pdf, 2011.

40) 2011 年 6 月, 图卢兹召开了一个关于多项式耦合的研讨会. 2012 年, 图卢兹科学院年鉴上刊登了一期关于耦合的专业文章 (https://afst.centre-mersenne.org/issues/AFST_2012_6_21_S5/).

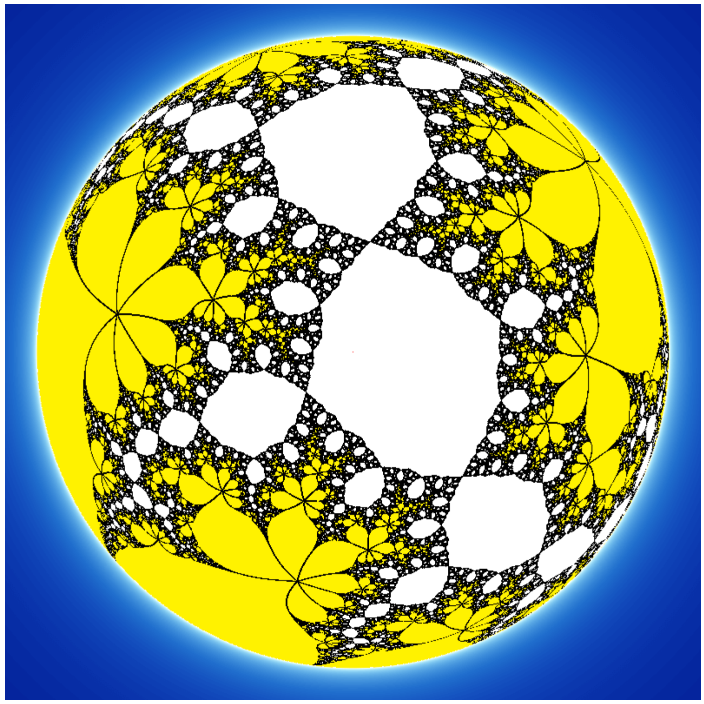


图 5 (网络版彩图) 二次多项式 f_θ 和 f_ν 的耦合, 其中 $\theta = (\sqrt{5}-1)/2$ 和 $\nu = 1/7$ 使得 f_θ 和 f_ν 分别有一个 Siegel 盘和一个带 7 个花瓣的抛物点

7 旋转域和中性周期点

7.1 Siegel 盘与 Cremer 点

考虑定义在包含原点的一个开邻域内的非线性全纯函数芽 $f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2)$, 其中 $\lambda \neq 0$. 一个经典的问题是, f 能否局部线性化? 即是否存在一个坐标变换, 使得 f 共轭到它的线性部分 $z \mapsto \lambda z$? 当 $|\lambda| \neq 1$ 时, 答案是肯定的 (参见文献 [416]). 而当 $\lambda = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}$ 且 $\alpha \in \mathbb{Q}$ 时, 答案是否定的, 除非存在 $n \geqslant 1$ 使得 $f^{\circ n} = \mathrm{id}$ (参见文献 [303, 428]). 于是只需要考虑

$$f(z) = \lambda z + \mathcal{O}(z^2), \quad \text{其中 } \lambda = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

的局部线性化问题 41). 此时 0 称为 f 的一个无理中性不动点.

20 世纪初, 对于上述问题, Kasner、Pfeiffer 和 Julia 分别得到了一些结论, 但证明均有误. 直到 20 世纪 20 年代后期, Cremer [200] 证明了, 对于任意正整数 $d \geqslant 2$, 存在无理数 α 使得任意次数为 d 的上述有理函数 f 均不能在 0 处局部线性化. 这些无理数满足

$$\limsup_{q\to+\infty} \left(\frac{1}{|\lambda^q - 1|}\right)^{\frac{1}{d^q}} = +\infty.$$

可以直观地认为这些 α 是 "非常靠近" 有理数的无理数. Siegel [689] 给出了所有全纯函数芽可以局部线性化的一个充分条件:

41) 如果 f 能拓扑共轭到 $z \mapsto \lambda z$, 则它一定能共形共轭到 $z \mapsto \lambda z$ (参见文献 [165, 第 42 页]).

定理 7.1 若存在 $c>0$ 和 $\kappa\geqslant 2$ 使得对所有的整数 $q\geqslant 1$ 有

$$\frac{1}{|\lambda^q-1|}<c\,q^{\kappa-1},$$

则任何全纯函数芽 $f(z)=\lambda z+\mathcal{O}(z^2)$ 在 0 处均可局部线性化.

Siegel 定理中的条件等价于 α 是阶为 κ 的丢番图数 (Diophantine number), 即 $\alpha\in\mathcal{D}(\kappa)$ 且

$$\mathcal{D}(\kappa):=\left\{\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,\middle|\,\exists\,\varepsilon>0,\kappa\geqslant 2\text{ s.t. }\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{\varepsilon}{q^\kappa},\forall\,\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\right\}.$$

显然, 若 $\kappa<\kappa'$ 则 $\mathcal{D}(\kappa)\subset\mathcal{D}(\kappa')$. 丢番图数的基本性质包括: 每个代数数都是丢番图的, $\mathcal{D}(2+):=\bigcap_{\kappa>2}\mathcal{D}(\kappa)$ 在 $\mathbb{R}$ 中具有满测度, $\mathcal{D}(2)\neq\emptyset$ 且具有零测度, 对于任意 $0<\kappa<2$ 有 $\mathcal{D}(\kappa)=\emptyset$ 等.

任何无理数 $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 都有连分式展开:

$$\alpha=[a_0;a_1,a_2,a_3,\ldots]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots}}},$$

其中 a_0 为整数使得 $\alpha-a_0\in(0,1)$ 且每个 a_n 为正整数, $n\geqslant 1$. 其 n 次逼近定义为 $a_0+p_n/q_n=[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_n]$, 这里 p_n 和 q_n 是互素的正整数. 归纳地可以验证, 对于所有 $n\geqslant 2$ 有

$$\begin{aligned}q_n&=a_nq_{n-1}+q_{n-2},\quad q_0=1,\quad q_1=a_1,\\ p_n&=a_np_{n-1}+p_{n-2},\quad p_0=0,\quad p_1=1.\end{aligned}$$

于是 $\alpha\in\mathcal{D}(\kappa)\Leftrightarrow q_{n+1}\leqslant Cq_n^{\kappa-1},\forall\,n\geqslant 1$, 其中 $C>0$ 是一个常数. 特别地,

$$\alpha\in\mathcal{D}(2)\Leftrightarrow q_{n+1}=a_{n+1}q_n+q_{n-1}\leqslant Cq_n\Leftrightarrow\sup_{n\geqslant 1}\{a_n\}<+\infty.$$

每个 $\alpha\in\mathcal{D}(2)$ 称作是有界型 (bounded type) 或常数型 (constant type), 例如 $(\sqrt{5}-1)/2=[0;1,1,1,\ldots]\in\mathcal{D}(2)$. 如果 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 最终周期, 则称 $\alpha=[0;a_1,a_2,a_3,\ldots]$ 是二次无理的. 这等价于 α 是一个整系数二次多项式的根. 例如, $\sqrt{2}-1=[0;2,2,2,\ldots]$ 是 $x^2+2x-1=0$ 的一个根.

Brjuno [129–131] 和 Rüssmann [658] 进一步研究了全纯函数芽的线性化问题, 得到了下面的一般结果:

定理 7.2 若

$$\alpha\in\mathcal{B}:=\left\{\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,\middle|\,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(q_{n+1})}{q_n}<+\infty\right\},$$

则任何全纯函数芽 $f(z)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}z+\mathcal{O}(z^2)$ 在 0 处均可局部线性化.

数集 $\mathcal{B}$ 中的无理数称为 Brjuno 数, 且有 $\mathcal{D}(2)\subsetneq\mathcal{D}(2+)\subsetneq\mathcal{D}:=\bigcup_{\kappa\geqslant 2}\mathcal{D}(\kappa)\subsetneq\mathcal{B}$. 例如, 对于任意 $a_1\geqslant 1$, 当 $a_{n+1}=\lfloor\mathrm{e}^{a_n}\rfloor$ 时, 有 $\alpha=[0;a_1,a_2,\ldots]\in\mathcal{B}\setminus\mathcal{D}$. Yoccoz [788, 790] 证明了上述线性化条件是最优的:

定理 7.3 若 $\alpha\notin\mathcal{B}$, 则 $f(z)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}z+z^2$ 在 0 处不能局部线性化. 此外, f 具有小循环 (small cycles) 性质, 即 0 的任何邻域内都包含无穷多个周期轨道.

关于小循环的进一步研究可参见文献 [27,556,557]. 如果全纯函数芽 $f(z)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}z+\mathcal{O}(z^2)$ 在 0 处局部可线性化, 则称 0 是 f 的一个 Siegel 点, 否则称 0 是 f 的一个 Cremer 点. 基于以上结果, Douady 在 20 世纪 80 年代提出了如下猜想 (参见文献 [257, 第 162 页, 注 2]):

猜想 7.4 若 $f(z)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}z+\mathcal{O}(z^2)$ 是一个非线性有理函数 (或超越整函数) 且 0 是 f 的一个 Siegel 点, 则 $\alpha\in\mathcal{B}$.

在对临界轨道作一些限制后, Douady 猜想被证明对一些特殊函数族成立 (参见文献 [174,330,331, 541,558]). 特别地, Douady 猜想对任意单临界多项式成立. 除了文献 [174], 这些结果的证明本质上依赖于 Yoccoz 的结果和多复变函数论. 目前, 即使是对三次多项式 $z\mapsto\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}z+b_2z^2+z^3$、正弦函数 $z\mapsto\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}\sin z$ 和指数映射 $z\mapsto\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}(\mathrm{e}^z-1)$, Douady 猜想仍未解决.

定义 7.5 (Siegel 盘) 若 $f(z)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}z+\mathcal{O}(z^2)$ 是定义在开集 $U\ni 0$ 上的一个全纯函数芽且在 0 处局部可线性化, 则称 f 在 U 中包含 0 的最大线性化区域 Δ_f 为 f 的以 0 为心的 Siegel 盘.

任何 Siegel 盘都是单连通的, 其内部不含临界点且不含除了中心以外的任何周期点. 由于 Siegel 盘内部的动力系统非常清楚 (共轭于无理旋转), 因此一个自然的问题是研究 Siegel 盘的边界. Douady 和 Sullivan 提出了如下猜想 (参见文献 [256,652]):

猜想 7.6 非线性有理函数的 Siegel 盘都是一个 Jordan 区域.

通过构造一个 3 次的 Blaschke 乘积作为模型, Douady 和 Herman 利用 Herman-Świątek 拟对称延拓定理 42) (参见文献 [362,564,565,718] 和 [795, 定理 2.7]) 和拟共形手术证明了当 α 为有界型时, 二次多项式 $f_\alpha(z)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}z+z^2$ 的 Siegel 盘 Δ_α 边界是一个拟圆周并穿过 f_α 的临界点 [257]. 利用同样的方法, Herman [362] 证明了存在无理数 α 使得 Δ_α 的边界是一个拟圆周但不穿过临界点.

通过研究更一般的 Blaschke 乘积, 张高飞推广了 Zakeri 和 Shishikura 等的结果 [682,767,792], 在有界型条件下证明了 Douady-Sullivan 猜想 [803]:

定理 7.7 任何非线性有理函数的有界型 Siegel 盘边界都是一个拟圆周且至少穿过一个临界点.

关于超越整函数 Siegel 盘的边界拓扑, 通过构造超越亚纯 Blaschke 乘积, Zakeri [795] 证明了下述结果:

定理 7.8 任何非线性整函数 $f(z)=P(z)\mathrm{e}^{Q(z)}$ 的以 0 为心的有界型 Siegel 盘边界都是 $\mathbb{C}$ 中的一个拟圆周且至少穿过 f 的一个临界点, 其中 P 和 Q 为多项式.

上面两个定理的想法都是证明 Siegel 盘内部的不变曲线为一致拟圆周. 若 Zakeri 定理中的多项式 Q 是常数, 则 f 是一个多项式, 该定理即为 Shishikura [682] 证明的情形. 在超越整函数方面, Zakeri 的这个结论推广了 Geyer [330]、Keen 和张高飞 [408] 的结论. 当 Siegel 盘的旋转数 α 为有界型时, 其边界的拓扑对以下函数类是已知的: 正弦函数族 [802] 和某些 "简单" 的整函数 [179], 具有 3 个奇异值的超越整函数 [184] 和其他情形 [769,811] (见图 6).

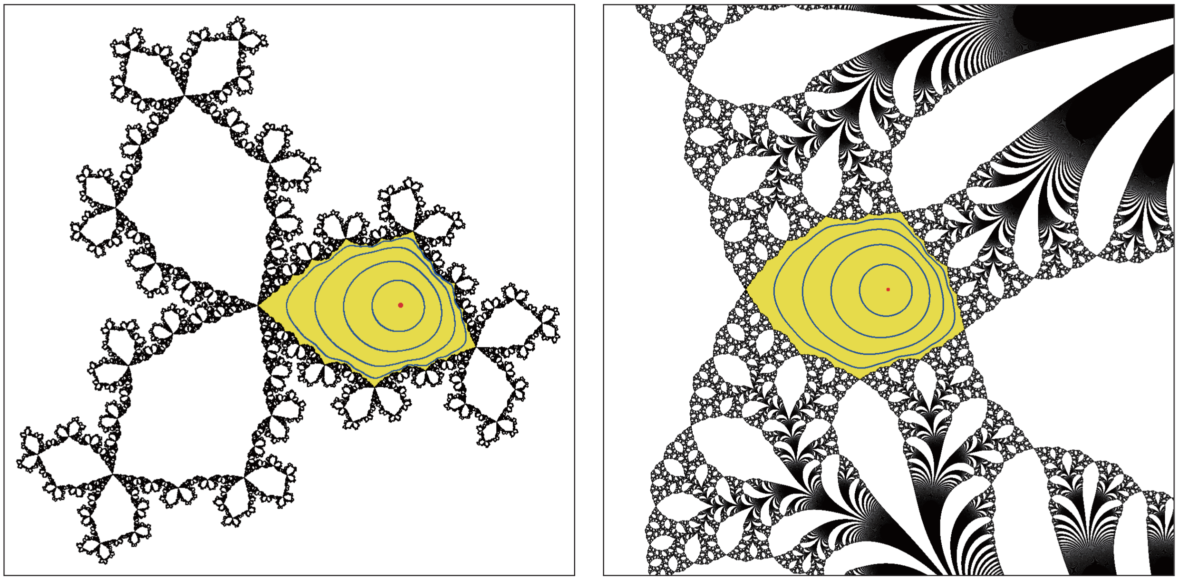
作为有界型无理数的推广, Petersen 和 Zakeri [569] 引入了无理数集

$$\mathrm{PZ}:=\{\alpha\in(0,1)\setminus\mathbb{Q}:\log a_n\leqslant\mathcal{O}(\sqrt{n})\ \text{对}\ n\to\infty\},$$

并通过超拟共形手术和解退化的 Beltrami 方程证明了对于 $\alpha\in\mathrm{PZ}$, 二次多项式 $f_\alpha(z)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}z+z^2$ 的 Siegel 盘 Δ_α 边界是一条 Jordan 曲线且穿过 f_α 的临界点. 特别地, PZ 在无理数中具有满测度, 且

$$\mathcal{D}(2)\subsetneq\mathrm{PZ}\subsetneq\mathcal{D}(2+)=\bigcap_{\kappa>2}\mathcal{D}(\kappa).$$

42) 在对单位圆盘进行拟共形延拓时, 可以用 Beurling-Ahlfors 延拓 [92] 或 Douady-Earle 延拓 [262].



(a) (b)

图 6 (网络版彩图) 两个整函数的 Siegel 盘, 旋转数均为 $(\sqrt{5}-1)/2$. (a) 一个单临界三次多项式的 Siegel 盘; (b) 一个超越整函数的 Siegel 盘. 它们的边界都是拟圆周且穿过一个临界点

Petersen 和 Zakeri 的结果被张高飞 [804,805] 推广到所有的多项式和正弦函数.

对二次多项式, 沈良 [669] 进一步推广了 Petersen 和 Zakeri 的结果. Avila、Buff 和 Chéritat [25,26] 证明了存在二次多项式, 其具有边界无穷阶光滑的 Siegel 盘和边界其他阶光滑的 Siegel 盘 [148]. 利用 Runge 逼近定理, Chéritat [181] 构造了一个全纯函数芽, 其 Siegel 盘在定义域中具有紧的闭包但边界是一个伪圆 (pseudo-circle), 因而不是局部连通的. 但目前这样的例子还未在有理函数和超越整函数中找到.

Siegel 盘是使得线性化成立的最大区域, 那么是什么阻止了全纯函数不能越过 Siegel 盘边界进一步线性化呢? Siegel 盘附近出现的周期点和临界点是主要原因. 关于周期点, Avila 和 Cheraghi [27] 证明对于某些旋转数, 二次多项式的 Siegel 盘附近包含无穷多个周期轨道, 类似于 Cremer 点附近的小循环性质. 关于 Siegel 盘边界是否包含临界点的问题 (参见文献 [256, 第 40 页]), Ghys [332] 和 Herman [362] 首先给出多项式的例子说明 Siegel 盘边界可以不含临界点. 此外, 对于上面提到的与 Douady-Sullivan 猜想有关的结论, 其对应的 Siegel 盘边界在大部分情形下包含了一个临界点. Graczyk 和 Świątek [348] 证明了如下一般结果: 若解析函数有一个紧包含在定义域中的有界型 Siegel 盘, 则该 Siegel 盘的边界一定包含一个临界点. 关于 Siegel 盘边界何时包含临界点 (或奇异值), Herman 有如下猜想 (参见文献 [361, 第 595 页]):

猜想 7.9 任何非线性有理函数 (或超越整函数) 的 Siegel 盘边界都包含一个临界点 (或奇异值) 当且仅当 Siegel 盘的旋转数是 Herman 类型.

对于一个无理数 α, 如果任何具有旋转数 α 的保向实解析圆周微分同胚都实解析共轭到刚性旋转 (所有该类型无理数构成的集合记成 $\mathcal{H}$), 则称 α 为 Herman 类型. Herman [359] 证明了 $\mathcal{H}$ 包含某些丢番图数, 之后, Yoccoz [786] 证明了 $\mathcal{H}$ 包含所有的丢番图数并给了 $\mathcal{H}$ 一个算术刻画 [791]. 文献 [68,186,332,361,619,652,653] 在旋转数为 Herman 类型条件下证明了 Siegel 盘边界上包含临界点 (或奇异值).

利用近抛物重整理论, Shishikura 和本文作者 [688] 以及 Cheraghi [175] 独立地证明了, 当无理数 α 满足高型 (high type) 条件 43) 时, 二次多项式 f_α 的 Siegel 盘边界 (如果非空) 是一条 Jordan 曲线且它穿过临界点当且仅当 α 是 Herman 类型.

20 世纪 80 年代, Manton、Nauenberg 和 Widom 等通过数值计算观察到对某些 Siegel 盘, 其边界关于临界点有自相似性. McMullen [501] 利用 Siegel 重整, 从数学上严格证明了二次多项式的二次无理型 Siegel 盘边界关于临界点确实是自相似的. 关于相似性的进一步研究可参见文献 [157, 187, 320, 450]. Siegel 盘的边界可以是光滑的 (因此 Hausdorff 维数等于 1), 也可以是 Hausdorff 维数严格介于 1 和 2 之间的拟圆周 [339]. 一个有趣的问题是 (参见文献 [25]):

问题 7.10　是否存在无理数 α, 使得 $f_\alpha(z) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}z + z^2$ 的 Siegel 盘边界的 Hausdorff 维数等于 2?

若 U 是一个包含 0 的双曲区域, U 在 0 处的共形半径 (conformal radius) 定义为 $|\pi'(0)|$, 其中 $\pi:(\mathbb{D},0)\to(U,0)$ 是一个万有覆盖. 特别地, 当 U 是单连通区域, 例如是 Siegel 盘时, π 是共形映射. 共形半径用于刻画区域的大小. 基于文献 [145, 790], Buff 和 Chéritat [147] 证明了 Yoccoz 定义的 Brjuno 和 (Brjuno sum) 可以连续地估计二次多项式 Siegel 盘的共形半径. 进一步的研究参见文献 [149, 176].

关于含 Siegel 盘的有理函数 Julia 集的局部连通性研究, 参见第 2.3 小节以及文献 [317, 562, 569, 669, 748, 765, 767]. 有关 Siegel 盘的综述和问题集可参见文献 [257, 794] (也可参见文献 [349, 第 7.1 小节]).

由于全纯函数在其 Cremer 点处不能局部线性化, 因而其附近的动力系统非常复杂. Pérez-Marco 建立的如下定理是关于 Cremer 点 (以及当 Siegel 盘的边界不含临界点时) 最深刻的结果之一 (参见文献 [560]):

定理 7.11　对于全纯芽 $f(z) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}z + \mathcal{O}(z^2)$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 若 f 和 f^{-1} 都单叶地定义在一个包含 0 的 Jordan 区域 Ω 的闭包的一个邻域内, 则存在一个满且紧的连通集 K, 使得 $0\in K\subset\overline{\Omega}$, $K\cap\partial\Omega\neq\emptyset$ 且 $f(K)=f^{-1}(K)=K$.

集合 K 被称为一个 "Siegel 紧统" (Siegel compactum), 它可以看作是退化的 Siegel 盘. 如果 K 不落在一个线性化区域的闭包中 (例如当 0 是一个 Cremer 点时), 则称 K 是一个 "刺猬" (hedgehog). 刺猬在拓扑上是复杂的, 特别地, 它们一定非局部连通. Kiwi [411] 证明了具有 Cremer 点且满足小循环性质的多项式 (特别地, 二次多项式满足该条件 (参见文献 [790])) 一定有一个临界点, 使得其从无穷远的吸引域不可达 (not accessible). 在进一步假设 Julia 集连通时, 一定有一条外射线既聚集到临界值也聚集到 Cremer 点. 特别地, 这蕴涵了 Julia 集非局部连通并且加强了 Douady 和 Sullivan 的结论 (参见文献 [519, 第 18 节]). 证明时主要利用外射线在周期点的着陆性质.

对于二次多项式 $f_\alpha(z) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}z + z^2$, Zakeri [793] 证明了, 如果 z 是 f_α 的 Julia 集上的一个双可达 (biaccessible) 点, 则 z 的向前轨道要么经过临界点 (此时 0 是一个 Siegel 点), 要么经过不动点 0 (此时 0 是一个 Cremer 点). 当 α 满足高型条件时, Cheraghi 等研究了 f_α 的最大刺猬 Λ_α, 给出了其拓扑结构的刻画 (参见文献 [175, 688]), 证明了其 Lebesgue 测度为 0 [174], 且当临界点不在 Siegel 盘边界上时其 Hausdorff 维数等于 2 [177].

Biswas 研究了含 Cremer 点的全纯函数芽, 证明了存在一些不含内点的刺猬, 其 Hausdorff 维数可以等于 1 [98], 面积也可以为正 [99]. 含 Cremer 点的二次多项式 Julia 集的拓扑结构研究还可参见文献 [105, 701]. 但至今为止, 还没有任何一个含 Cremer 点的 Julia 集整体拓扑结构被刻画清楚 (部分结

43) 如果其连分式展开的系数都大于某个给定的正整数, 则称 α 是高型无理数. 该类型数集与常见的无理数集 (如有界型、PZ 类型、丢番图数集、Herman 类型和 Brjuno 类型等) 的交都是非空的.

果可参见文献 [349]).

全纯函数 $f(z) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}z + \mathcal{O}(z^2)$ 在无理中性不动点 0 处的性质还包括: 旋转数 α 是一个拓扑不变量[532]; f 不存在收敛到 0 的向前轨道 (除非该轨道最终映到 0 本身) (参见文献 [559]); 特别地, 若 f 是一个多项式, 则 f 有一个 "刺猬之母" (mother hedgehog, 可以看作是最大的刺猬), 其边界上包含一个临界点[189]. 最近, Dudko 和 Lyubich[271] 证明了对于任意无理数 α, 二次多项式 f_α 都有一个刺猬之母, 使得 f_α 在其上的限制是一个同胚. 该结论的一个直接推论是 f_α 的 Siegel 盘边界不是整个 Julia 集.

鉴于全纯函数在 Cremer 点附近动力系统的复杂性, 除了含 Cremer 点的 Julia 集的整体拓扑不清楚外, 至今为止还没有人画出一个含 Cremer 点的多项式 Julia 集图像. 20 世纪 90 年代, Milnor 提出了下面的问题 (参见文献 [95, 第 443 页]):

问题 7.12 能否用计算机画出一个含 Cremer 点的多项式 Julia 集图像?

更多含 Cremer 点的全纯函数动力系统相关问题可参见文献 [95, 第 19.6 小节] 和 [349, 第 7.2 小节]. 其中主要包括外射线的着陆情形、小循环性质、去掉割点后连通分支的个数、Julia 集的 Hausdorff 维数和面积等问题.

7.2 Herman 环

早在 19 世纪后期, Poincaré 就考虑了单位圆周上同胚映射 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 的线性化问题, 并证明了如果 f 没有周期点, 则 f 半共轭于刚性旋转 $R_\alpha(z) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}z$, 其中 α 是一个无理数且等于 f 的旋转数 $\rho(f)$ (参见文献 [222, 第 32 页]). 进一步地, Denjoy 和 Yoccoz 分别证明了如果 $\rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 且 f 是一个 C^2 微分同胚 (参见文献 [231] 和 [222, 第 38 页]), 或为至少有一个临界点的实解析同胚[787], 则 Poincaré 半共轭是一个共轭 44).

1961 年, Arnol'd[13] 证明如果 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 实解析, 旋转数 $\rho(f)$ 是丢番图的, 且 f 是刚性旋转的一个小扰动, 则 f 的共轭映射也是实解析的. Arnol'd 猜测 f 是刚性旋转的一个小扰动这个条件去掉后结论也成立. Herman[359] 在 1979 年对一大类丢番图数证明了 Arnol'd 的猜想, 后该猜想由 Yoccoz[786] 推广到 Herman 类型 $\mathcal{H}$ (其为 Brjuno 类型 $\mathcal{B}$ 的真子集). Yoccoz[791] 给了 Herman 数一个算术刻画, 同时证明了下面关于圆周的整体和局部共轭定理:

定理 7.13 (1) (整体共轭) 若 $\rho \in \mathcal{H}$, 则任何旋转数为 ρ 的解析圆周微分同胚可以解析线性化. 若 $\rho \notin \mathcal{H}$, 则存在一个旋转数为 ρ 的解析圆周微分同胚不能解析线性化.

(2) (局部共轭) 若 $\rho \in \mathcal{B}$, 则存在 $R = R(\rho) > 1$ 使得任何旋转数为 ρ 且能单叶延拓到圆环 $\{z \in \mathbb{C} : 1/R < |z| < R\}$ 的解析圆周微分同胚可以解析线性化, 且条件 $\mathcal{B}$ 是最优的.

关于圆周解析线性化的问题还可参见文献 [191, 292, 635].

定义 7.14 (Herman 环) 如果一个亚纯函数 f 的 Fatou 分支 U 共形同构于一个圆环, 且 f 或 f 的某次迭代在 U 上共轭于该圆环上的无理旋转, 则称 U 是一个 Herman 环.

鉴于 Arnol'd 在圆周同胚解析线性化方面的工作 (参见文献 [13]), 一些文献中将 Herman 环也称作 Arnol'd-Herman 环. 根据最大模原理, 可知整函数没有 Herman 环. Shishikura[676] 证明了二次有理函数没有 Herman 环. 因此含有 Herman 环的最简单例子是一个 3 次 Blaschke 乘积:

$$f_\rho(z) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}z^2\frac{z-a}{1-az}, \quad 其中\ a > 3, \quad t \in (0,1),$$

44) 事实上, Denjoy 的条件是要求 f' 有界变差, 而 Yoccoz 的条件是要求 f 为 C^∞ 映射且没有平坦 (flat) 临界点.

使得 $f_\rho: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ 的旋转数是一个 Herman 数 ρ.

Arnol'd-Herman 构造 Herman 环的办法是研究圆周上的实解析微分同胚, 这样得到的映射关于圆周有对称性. 利用拟共形手术, Shishikura [676] 将两个 Siegel 盘沿着周期曲线粘起来, 不但可以得到非对称的 Herman 环, 同时还可以得到周期大于 1 的 Herman 环和嵌套的 Herman 环等. 有理函数的周期 Herman 环的各种组合研究可参见文献 [677]. 关于具有周期 Herman 的亚纯函数的显示表达研究可参见文献 [774] (见图 7).

根据拟共形手术 [676], Siegel 盘和 Herman 环可以相互转化. 特别地, 若存在无理数 ρ 使得一个有理函数的 Siegel 盘的旋转数为 ρ, 则一定存在一个有理函数, 其含有一个旋转数为 ρ 的 Herman 环. 反之亦然. 作为对 Shishikura 结果的推广, Milnor [514] 证明了双临界有理函数没有 Herman 环. 本文作者 [770] 利用拟共形手术证明了只有一个自由临界大轨道的有理函数没有 Herman 环. 肖映青和胡骏也研究了有理函数不含 Herman 环的充分条件 [366]. 根据 Milnor 的结果可知, 一个包含 Herman 环的有理函数的临界值个数至少为 3 (不计重数). 一个自然的问题是:

问题 7.15　是否存在仅有 3 个临界值 (不计重数) 的有理函数, 其含有 Herman 环?

根据文献 [366], 如果这样的有理函数存在, 那么 Herman 环的周期至少为 4. 关于有理函数退化 Herman 环的研究可参见文献 [449, 775].

第一个包含 Herman 环的超越亚纯函数由郑建华 [816] 根据拟共形手术得到 (也参见文献 [253]). 超越亚纯函数和 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上的全纯函数 (如复标准族) 的 Herman 环研究可参见文献 [156, 292, 534, 642] 及其中的参考文献.

7.3　抛物爆炸与重整

全纯函数在抛物点附近的动力系统很清楚, 然而一旦扰动, 则可能产生非常复杂的动力系统现象. 一维复动力系统中有如下说法: "抛物点是不稳定的根源". 这其中最典型的现象就是抛物爆炸.

对于一个全纯有理函数族 $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, 称一个参数 $\lambda \in \Lambda$ 为抛物参数 (或 Siegel 参数) 是指 f_λ 有一个非持续 (non-persistent) 的抛物周期点 (或 Siegel 周期点). Douady 研究了多项式 f 的填充 Julia 集 $K(f)$ 和 Julia 集 $J(f)$ 的连续性 (在复平面上紧子集的 Hausdorff 距离意义下), 证明了如下定理 (参

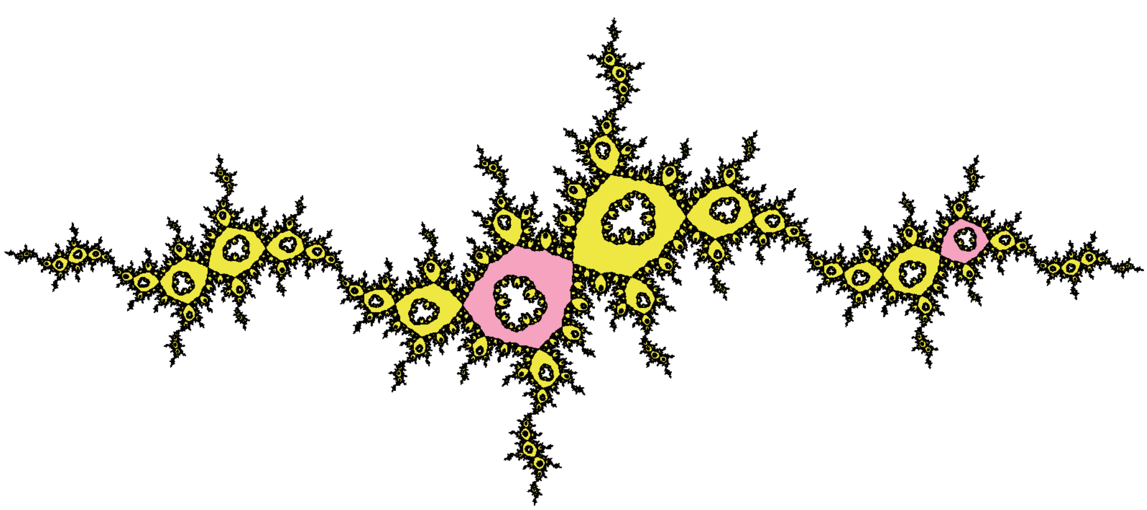


图 7　(网络版彩图) 一个三次有理函数的周期为 2 的 Herman 环循环, 旋转数为 $(\sqrt{5}-1)/2$

见文献 [259]):

定理 7.16 对于全纯多项式族 $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, 函数 $f_\lambda \mapsto K(f_\lambda)$ 是上半连续的, 其在 f_λ 处连续当且仅当 λ 不是抛物参数. 函数 $f_\lambda \mapsto J(f_\lambda)$ 是下半连续的, 其在 f_λ 处连续当且仅当 λ 不是抛物参数或 Siegel 参数.

对于抛物全纯函数 $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\mathcal{O}(z^4)$, 其中 $a_2\neq 0$, 通过坐标变换 $w=\varphi(z)=-1/(a_2z)$, 抛物不动点 0 移到了 ∞ 且 f 在这个新的坐标下的表达式为 $F(w)=w+1+\frac{\gamma}{w}+\mathcal{O}(\frac{1}{w^2})$, 其中 $\gamma=1-a_3/a_2^2$ 是 f 的迭代留数 (iterative residue). 对充分大的 $L>0$, 存在单叶函数 $\Phi_{\mathrm{attr},F}:\Omega_{\mathrm{attr},F}=\{w\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,w-L>-|\mathrm{Im}\,w|\}\to\mathbb{C}$ 和 $\Phi_{\mathrm{rep},F}:\Omega_{\mathrm{rep},F}=\{w\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,w+L<|\mathrm{Im}\,w|\}\to\mathbb{C}$, 使得

$$\Phi_{s,F}(F(w))=\Phi_{s,F}(w)+1,\quad \forall\, w\in\Omega_{s,F}\ \ (s=\mathrm{attr},\mathrm{rep}).$$

它们分别称为 F 的吸性和斥性 Fatou 坐标, 且当 $w\to\infty$ 时有 45) (参见文献 [681])

$$\Phi_{\mathrm{attr},F}(w)=w-\gamma\log w+C_{-,0}+o(1),$$
$$\Phi_{\mathrm{rep},F}(w)=w-\gamma\log w+C_{+,0}+o(1),$$

其中 $C_{\mp,0}$ 为常数. 这两个映射 $\Phi_{\mathrm{attr},F}$ 和 $\Phi_{\mathrm{rep},F}$ 在相差一个可加常数的意义下是唯一的. 记 $\Omega_s=\varphi^{-1}(\Omega_{s,F})$ 和 $\Phi_s=\Phi_{s,F}\circ\varphi$, 其中 $s=\mathrm{attr},\mathrm{rep}$, 则 Φ_{attr} 和 Φ_{rep} 分别在 Ω_{attr} 和 Ω_{rep} 上关于 f 也共轭于单位平移, 且在相差一个可加常数的意义下是唯一的. 类似地, 它们分别称为 f 的吸性和斥性 Fatou 坐标.

吸性 Fatou 坐标可以通过 $\Phi_{\mathrm{attr}}(z)=\Phi_{\mathrm{attr}}(f^{\circ n}(z))-n$ 全纯地延拓到 0 的整个抛物域 B_f 中. 若 f 是一个有理函数或超越整函数, 则斥性 Fatou 坐标的逆 Φ_{rep}^{-1} 可以通过 $\Psi_{\mathrm{rep}}(\zeta)=f^{\circ n}(\Phi_{\mathrm{rep}}^{-1}(\zeta-n))$ 全纯地延拓到整个复平面.

定义 7.17 (Lavaurs 映射) 对于 $\sigma\in\mathbb{C}$, 具有相 (phase) σ 的 Lavaurs 映射定义为

$$\mathcal{L}_{f,\sigma}:=\Psi_{\mathrm{rep}}\circ T_\sigma\circ\Phi_{\mathrm{attr}}:B_f\to\widehat{\mathbb{C}},\quad 其中\ T_\sigma(w)=w+\sigma.$$

Lavaurs [426] 在他的博士学位论文中证明了下面的结果 (也可参见文献 [259]):

定理 7.18 对于多项式 $f_0(z)=z+z^2+\mathcal{O}(z^3)$ 和 $\varepsilon\in\mathbb{C}$, 记 $f_\varepsilon(z)=f_0(z)+\varepsilon^2$. 若存在一列复数 $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ 和整数 $(m_n)_{n\geqslant 0}$, 使得当 $n\to+\infty$ 时, $\varepsilon_n\to 0$, $m_n\to+\infty$ 且

$$\frac{\pi}{\varepsilon_n}-m_n\to\sigma\in\mathbb{C},$$

则 $f_{\varepsilon_n}^{\circ m_n}$ 在 B_{f_0} 中局部一致收敛到 $\mathcal{L}_\sigma:=\mathcal{L}_{f_0,\sigma}$. 此外,

$$\liminf_{n\to+\infty}J(f_{\varepsilon_n})\supset J(f_0,\mathcal{L}_\sigma)\supsetneq J(f_0),$$
$$\limsup_{n\to+\infty}K(f_{\varepsilon_n})\subset K(f_0,\mathcal{L}_\sigma)\subsetneq K(f_0),$$

其中 $K(f_0,\mathcal{L}_\sigma)=\mathbb{C}\setminus\bigcup_{n\geqslant 0}\mathcal{L}_\sigma^{-n}(\mathbb{C}\setminus K(f_0))$ 和 $J(f_0,\mathcal{L}_\sigma)=\partial K(f_0,\mathcal{L}_\sigma)$.

基于上述定理和作为 Kleinian 群的类比, Lavaurs 映射也称作几何极限. 定理中的 $J(f_0,\mathcal{L}_\sigma)$ 称作是丰盈 Julia 集 (enriched Julia set). 该现象被称为抛物爆炸 (parabolic implosion), 见图 8. 此时有关 Julia 集 Hausdorff 维数连续性的研究可参见文献 [267].

45) 对数函数 $\log w$ 分别定义在单连通区域 $\Omega_{\mathrm{attr},F}$ 和 $\Omega_{\mathrm{rep},F}$ 上, 且约定它们在 $\{w\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,w>|\mathrm{Re}\,w|+L\}$ 上表示同一对数分支, 即 $\log(2L\mathrm{i})=\log(2L)+\frac{\pi}{2}\mathrm{i}$.

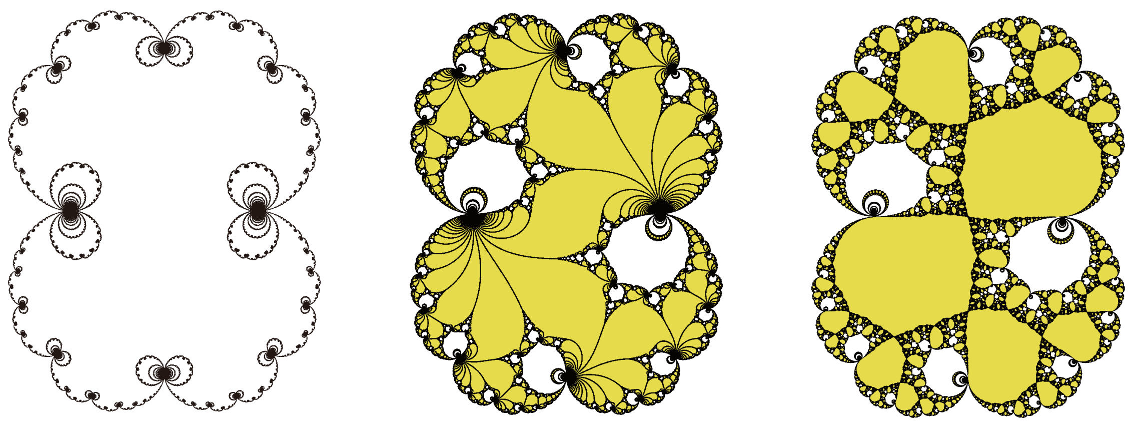


图 8　(网络版彩图) 由 $f_0(z) = z + z^2$ 抛物爆炸后得到的 3 种不同类型的丰盈 Julia 集 $J(f_0, \mathcal{L}_\sigma)$

除了 Douady 和 Lavaurs 的上述结果, 抛物爆炸的应用还包括: 三次多项式连通迹 (connectedness locus) 的非局部连通性和 Mandelbrot 集的极限象 (limit elephant) 现象 [426], 类多项式重整的不连续性 [265], Mandelbrot 集双曲分支的根 (root) 处存在参数射线着陆 [264], Mandelbrot 集边界的 Hausdorff 维数等于 2 [679]; 有关 Siegel 盘大小的细致研究 (参见文献 [25, 145, 147, 149]).

抛物爆炸也发生在参数空间中, 参见文献 [152]. 最近抛物爆炸在高维复动力系统中有了重要应用: 存在含游荡域的二维多项式, 这与一维的情形完全不同 (证明依赖于一维情形下 Lavaurs 映射的性质) (参见文献 [22]).

定义 7.19 (角形映射)　对于上文中的抛物映射 F, 吸性和斥性 Fatou 坐标 $\Phi_{\mathrm{attr},F}$ 和 $\Phi_{\mathrm{rep},F}$ 在 $V_\pm = \{w \in \mathbb{C} : \pm \operatorname{Im} w > |\operatorname{Re} w| + L\}$ 中均有定义 (相应地, Φ_{attr} 和 Φ_{rep} 在 $\varphi^{-1}(V_\pm)$ 中均有定义). 抛物映射 f 在 $\Phi_{\mathrm{rep},F}(V_\pm)$ 上的角形映射 (horn map) 为 46)

$$E_f := \Phi_{\mathrm{attr}} \circ \Phi_{\mathrm{rep}}^{-1}.$$

假设 $L' > 0$ 充分大, 则 E_f 可以全纯地延拓到 $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \zeta| > L'\}$ 上并满足 $E_f(\zeta+1) = E_f(\zeta)+1$. 根据上文中 Fatou 坐标的展开式, 有

$$\lim_{\operatorname{Im} \zeta \to +\infty} E_f(\zeta) - \zeta = C_0 \quad 且 \quad \lim_{\operatorname{Im} \zeta \to -\infty} E_f(\zeta) - \zeta = C_0 + 2\pi \mathrm{i} \gamma,$$

其中 $C_0 = C_{-,0} - C_{+,0}$. 由于吸性 Fatou 坐标 $\Phi_{\mathrm{attr}} : \Omega_{\mathrm{attr}} \to \mathbb{C}$ 可全纯延拓为 $\Phi_{\mathrm{attr}} : B_f \to \mathbb{C}$, 斥性 Fatou 坐标的逆 $\Phi_{\mathrm{rep}}^{-1} : \Phi_{\mathrm{rep}}(\Omega_{\mathrm{rep}}) \to \mathbb{C}$ 可全纯延拓为 $\Psi_{\mathrm{rep}} : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$, 因此角形映射可以全纯地延拓为

$$E_f = \Phi_{\mathrm{attr}} \circ \Psi_{\mathrm{rep}} : \Psi_{\mathrm{rep}}^{-1}(B_f) \to \mathbb{C}$$

且仍满足 $E_f(\zeta+1) = E_f(\zeta)+1$.

因为 Fatou 坐标在相差一个可加常数的意义下唯一, 所以可以对它们作一个规范化. 吸性 Fatou 坐标一般规范为 $\Phi_{\mathrm{attr}}(v) = 1$, 其中 v 是一个标记的临界值 (或奇异值). 斥性 Fatou 坐标可以规范化使得 $C_0 = 0$, 即

$$当 \operatorname{Im} z \to +\infty 时, \quad E_f(\zeta) = \zeta + o(1).$$

46) 注意 $E_f = \Phi_{\mathrm{attr}} \circ \Phi_{rep}^{-1} = (\Phi_{\mathrm{attr}} \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \Phi_{\mathrm{rep}}^{-1}) = \Phi_{\mathrm{attr},F} \circ \Phi_{\mathrm{rep},F}^{-1} = E_F$.

角形映射与 Lavaurs 映射具有密切的联系. 根据 Lavaurs 映射 (相 $\sigma=0$ 时) 的定义 $\mathcal{L}_f:=\mathcal{L}_{f,0}=\Psi_{\mathrm{rep}}\circ\Phi_{\mathrm{attr}}:B_f\to\widehat{\mathbb{C}}$ 可知, $\Psi_{\mathrm{rep}}:\Psi_{\mathrm{rep}}^{-1}(B_f)\to B_f$ 是角形映射 E_f 与 Lavaurs 映射 $\mathcal{L}_f$ 之间的一个半共轭 (semi-conjugacy). 相比于 Lavaurs 映射, 角形映射有如下优点: 它更容易理解且有更好的覆盖性质, 最重要的是因为它与单位平移可交换, 可以经投影后得到圆柱上的动力系统 (参见文献 [183, 附录 B]). 角形映射在 20 世纪 80 年代被引入, 但抛物重整的想法则最先由 Shishikura [679, 681] 在 20 世纪 90 年代提出. 其更详细的定义可参见文献 [379]:

定义 7.20 (抛物重整) 记共形同构 $\mathrm{Exp}(z)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}:\mathbb{C}/\mathbb{Z}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$. 定义

$$\mathcal{R}_0f:=\mathrm{Exp}\circ E_f\circ(\mathrm{Exp})^{-1}.$$

于是 0 是 $\mathcal{R}_0f$ 的可去奇点, $(\mathcal{R}_0f)(0)=0$ 且 $(\mathcal{R}_0f)'(0)=1$, 即 $\mathcal{R}_0f$ 在 0 处有一个抛物不动点. 称 $\mathcal{R}_0f$ 为 f 的抛物重整 (parabolic renormalization) 47), 见图 9 和文献 [424].

在抛物重整作用下具有不变性的解析函数族可以用来解决复动力系统中的重要问题. 第一个抛物重整不变类 $\mathcal{F}_0$ 是 Shishikura [679] 在研究 Mandelbrot 集边界的 Hausdorff 维数时引入的. 受角形映射诱导抛物重整映射启发, Petersen 观察到具有抛物不动点的临界圆周映射也可定义抛物重整, 之后 Yampolsky [766] 系统地研究了临界圆周映射的圆柱重整并证明了重整算子的双曲性. 21 世纪初, Inou 和 Shishikura [379] 定义了一个新的抛物重整不变类 $\mathcal{F}_1\supsetneq\mathcal{F}_0$, 它的优点是 $\mathcal{F}_1$ 扰动后在近抛物重整算子作用下也有不变性, 但 $\mathcal{F}_0$ 没有该性质.

令 $P(z)=z(1+z)^2$ 且 V 是一个包含 0 和单临界点 $cp_P=-1/3$ 的 $\mathbb{C}$ 中区域. 不变类 $\mathcal{F}_1$ 的定义如下:

$$\mathcal{F}_1:=\{f=P\circ\varphi^{-1}:\varphi(V)\to\mathbb{C}\mid\varphi(z)=z+\mathcal{O}(z^2):V\to\mathbb{C}\text{ 单叶且 }\varphi\text{ 能拟共形延拓到 }\mathbb{C}\text{ 上}\}.$$

Inou 和 Shishikura [379] 证明了下面的定理:

定理 7.21 存在 Jordan 区域 $V\subset\mathbb{C}$ 使得 $\mathcal{F}_1$ 在抛物重整算子 $\mathcal{R}_0$ 作用下不变: $\mathcal{R}_0(\mathcal{F}_1)\subset\mathcal{F}_1$, 即对于 $f\in\mathcal{F}_1$, 抛物重整 $\mathcal{R}_0f$ 有定义且 $\mathcal{R}_0f=P\circ\psi^{-1}\in\mathcal{F}_1$. 此外, 存在一个包含 $\overline{V}$ 且不依赖于 f 的单连通区域 $V'\subset\mathbb{C}$ 使得 ψ 可以延拓为 V' 到 $\mathbb{C}$ 上的单叶函数.

区域 V 和 V' 的精确定义可参见文献 [379]. 上面定理中的 V 紧包含在 V' 中非常重要, 这表明 $\mathcal{F}_1$ 中的函数经过抛物重整, 新得到的函数解析性质更好. 由此便能得到抛物重整算子关于 $\mathcal{F}_1$ 上 Teichmüller 度量的一致压缩性.

利用角形映射的连续变化性, Inou 和 Shishikura 证明了近抛物重整 (near-parabolic renormalization) $\mathcal{R}$ 可以定义在下面的空间上:

$$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\mathcal{A}(\alpha_*)}\times\mathcal{F}_1=\{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}h(z)\mid\alpha\in\mathcal{A}(\alpha_*)\text{ 且 }h\in\mathcal{F}_1\},$$

其中 $\mathcal{A}(\alpha_*)=\{\alpha\in\mathbb{C}\mid 0<|\alpha|<\alpha_*,|\arg\alpha|<\pi/4\text{ 或 }|\arg(-\alpha)|<\pi/4\}$ 且 $\alpha_*>0$ 非常小. 特别地, $\mathcal{R}$ 可以表示为一个斜积 (skew product) $\mathcal{R}:(\alpha,h)\mapsto(-1/\alpha,\mathcal{R}_\alpha h)$, 其中 $\mathcal{R}_\alpha:\mathcal{F}_1\to\mathcal{F}_1$ 是纤维方向 (fiber direction) 的抛物重整. 若 α 是满足高型条件的无理数, 即 α 的连分式展开系数都大于 $1/\alpha_*$, 则映射 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}h\in\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\,\mathcal{A}(\alpha_*)}\times\mathcal{F}_1$ 可以被近抛物重整算子 $\mathcal{R}$ 作用无穷多次. 这对于研究含无理中性周期点或无穷可重整的动力系统是非常有用的.

注意 $z+z^2\notin\mathcal{F}_1$ 但 $\mathcal{R}_0(z+z^2)\in\mathcal{F}_1$, 因此 Inou-Shishikura 的理论可以用来研究二次多项式的动力系统. 这方面的第一个里程碑应用就是 Buff 和 Chéritat 通过控制某些含无理中性不动点映射的临

47) 准确地说, 该定义为圆柱上端的抛物重整, 圆柱下端的抛物重整可以类似地定义 (参见文献 [379, 第 3 节]).

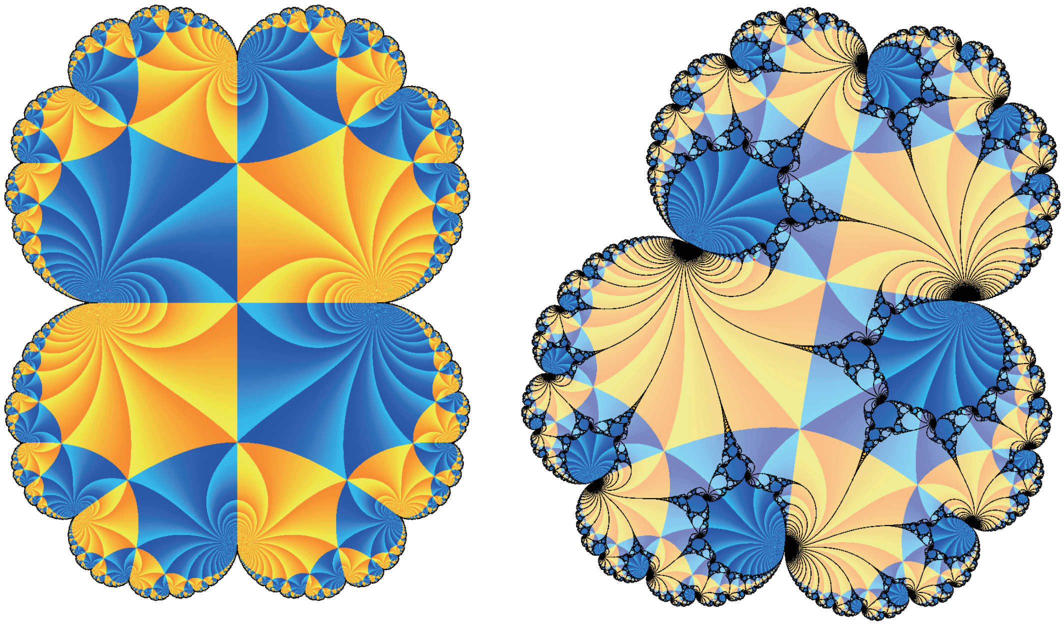


图 9 (网络版彩图) 二次多项式 $f(z) = z + z^2$ 及其抛物重整 $\mathcal{R}_0 f$ 的动力平面, 其中 $\mathcal{R}_0 f$ 的抛物点和直接抛物域内的临界点分别标成绿色和红色

界轨道, 证明了存在具有正面积的二次多项式 Julia 集 [150]. 基于 Inou-Shishikura 的理论, Cheraghi 发展了关于近抛物重整的一系列精细分析技术 (参见文献 [173,174]). 基于此, 更多的关于二次多项式动力系统方面的进展包括: 具有正面积的 Feigenbaum 二次 Julia 集的存在性 [31]、Marmi-Moussa-Yoccoz 猜想的部分证明 [176]、某些无穷 satellite 可重整参数处的 MLC 猜想证明 [178]、含无理中性不动点的统计性质研究 [27]、部分无理中性吸引子的拓扑结构48) [175,688] 和 Hausdorff 维数的刻画 [177]. 更多的应用可参见文献 [596,775,776].

Inou 和 Shishikura [379] 引入的不变类 $\mathcal{F}_1$ 中的解析函数在其定义域 $\varphi(V)$ 内仅有一个单临界点和一个临界值, 因此相关理论仅适用于局部映射度为 2 的全纯函数 (包括二次多项式). 受文献 [379] 启发, 本文作者 [773] 考虑了局部映射度为 3 的情形, 构造了一个类似的抛物重整不变类且证明也依赖于数值计算. Chéritat [183] 引入的不变类可以将近抛物重整理论应用到任何单临界多项式且证明不依赖于数值计算. 这样, 前文提到的与二次多项式有关的结果可以自然地推广到单临界多项式. 对于多临界值的抛物重整理论目前进展非常缓慢. Chéritat 和 Petersen 构造了一个具有 2 个 (自由) 临界值的抛物重整不变类, 但该函数类在扰动后关于近抛物重整没有不变性. 因此一个自然的问题是:

问题 7.22 是否存在含多个临界值的全纯函数类在近抛物重整算子作用下不变?

Inou 和 Shishikura 的近抛物重整理论在应用到含无理中性不动点的动力系统时, 只适用于当旋转数 α 为高型的情形, 即 $\alpha = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ 中的每个 a_n 都大于或等于某个正整数 N. 现在 N 的取值还是未知的, 猜测介于 20 到 1000 之间 (参见文献 [185, 第 6 页]). 如果 $N \geqslant 2$, 则所有高型无理数构成的集合具有零测度. 而当 $N = 1$ 时这样的无理数即代表了所有无理数. 因此, 若能将 Inou-Shishikura 重整理论应用到更多的旋转数, 特别地, 应用到 $N = 1$ 的情形, 则将完全解决二次多

48) 特别地, 当 α 为高型无理数时, 若 $f_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha} z + z^2$ 含 Cremer 点, 其后临界集 $P(f_\alpha)$ 刚好为 "刺猬之母" (mother hedgehog) 且拓扑上是一个 Cantor 束 (Cantor bouquet), 这可类比于部分指数映射的拓扑模型 [1,616]. 而当 f_α 含 Siegel 盘 Δ_α 但临界点不在 $\partial\Delta_\alpha$ 上时, $P(f_\alpha)$ 是一个单边毛圈 (one-sided hairy circle).

项式的一系列重要问题, 如 Siegel 盘的边界拓扑 (Douady-Sullivan 猜想) 和刺猬的拓扑结构等. 这其中将涉及研究含多个抛物花瓣的抛物重整 (注意文献 [379] 中的理论仅适用于一个花瓣的情形). 关于含多个花瓣的抛物映射的扰动可参见文献 [402, 544, 679].

除了文献 [183, 379], 关于抛物扰动理论的经典论文可参见文献 [681]. 关于抛物爆炸和重整的综述可参见文献 [185]. 对于仅含渐近值但不含临界值的抛物全纯函数 (如指数映射), 也可以定义抛物重整, 但目前为止还未找到一个该类型的抛物重整不变类 (参见文献 [183]). 高维的抛物爆炸可参见文献 [60, 93].

8 超越动力系统

除了有理函数动力系统, 复动力系统中另一个备受关注的方向就是超越函数动力系统, 这主要包括超越整函数和含极点的超越亚纯函数. 造成超越和有理动力系统不同的最重要原因就是无穷远点成了一个本性奇点. 超越整函数的动力系统始于 1926 年的 Fatou [304]. 20 世纪 50 年代开始, Baker 做了大量超越整函数动力系统的工作. 20 世纪 80 年代开始, 复平面上的超越亚纯函数动力系统开始得到研究. Baker、Keen 和吕以辇做了系列工作 (参见文献 [48] 及其中的参考文献). 关于超越动力系统的综述可参见文献 [74, 662]. 本节简要陈述超越函数动力系统中的主要问题, 并关注与有理函数动力系统的不同之处.

8.1 Eremenko 猜想

Fatou 在他 1926 年的论文中观察到了某些特殊的整函数, 如 $z \mapsto r\sin(z)$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 包含逃逸曲线 (即曲线上所有的点在迭代下都趋向于 ∞). 同时他对一般整函数的这条性质是否仍然成立感兴趣. Eremenko 在 20 世纪 80 年代考虑了任意超越整函数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 的逃逸集 (escaping set)

$$I(f) := \{z \in \mathbb{C} : \text{ 当 } n \to +\infty \text{ 时}, f^{\circ n}(z) \to \infty\}.$$

他证明了 $\overline{I(f)}$ 的每个连通分支都是无界的, 并问 $I(f)$ 的每个分支是否都无界 (这称为 Eremenko 弱猜想)? 同时他也陈述了现在被称为 Eremenko 猜想 [284] 的强形式:

猜想 8.1 逃逸集 $I(f)$ 中的每一点都经 $I(f)$ 中的一条曲线连到 ∞.

上述猜想的重要性体现在, 如果这样的曲线存在, 那么就可以用组合方法来研究超越动力系统. 这些曲线可以类比于多项式情形下 Douady-Hubbard 引入的外射线 [264], 而外射线在多项式动力系统的研究中起到非常基本的作用.

如果一个超越整函数 f 在 $\mathbb{C}$ 中的奇异值 (包括临界值和渐近值 49)) 集合 $S(f)$ 是有界的, 则称 f 为有界型, 或属于 Eremenko-Lyubich 类 $\mathcal{B}$ [288, 692]. 对于这样的函数类, 逃逸集中的每一点都包含在 Julia 集中. 然而, 即使是对 $\mathcal{B}$ 类, Eremenko 的强猜想也不是总成立, 但确实存在一大类超越整函数使得 Eremenko 的强猜想成立 (参见文献 [655]):

定理 8.2 存在双曲整函数 $f \in \mathcal{B}$ 使得 $J(f)$ 的每个道路连通分支都有界. 若 $f \in \mathcal{B}$ 为有限阶 50), 或一般地, 为有限多个该类型映射的复合, 则任何 $z \in I(f)$ 都可以通过一条曲线 γ 连到 ∞ 并使得 $f^{\circ n}|_\gamma \to \infty$ 一致成立.

49) 若存在一条无界连续曲线 $\gamma(t) : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ 使得 $\lim_{t\to+\infty} f(\gamma(t)) = s \in \mathbb{C}$, 则称点 s 是 f 的一个渐近值 (asymptotic value).

50) 若整函数 f 满足当 $|z| \to \infty$ 时, 有 $\log\log|f(z)| = \mathcal{O}(\log|z|)$, 则称 f 是有限阶的 (finite order).

关于上述定理的后半部分, Barański[50] 给出了一个独立的证明 (基于 Rempe 刚性的结果, 参见文献 [620]). 在此之前, 关于 Eremenko 猜想的结果有: 具有吸性不动点的实指数映射含有逃逸曲线[245], 后该结论被推广到任意指数映射[111] 和 $\mathcal{B}$ 类中的一个子类 (参见文献 [248]). 直到 2003 年, Schleicher 和 Zimmer[664] 才对指数映射 $z\mapsto \lambda e^z$ 解决了 Eremenko 强猜想. 不久后, 余弦函数族 $z\mapsto ae^z+be^{-z}$ 也得到了解决 (参见文献 [656]). 关于超越亚纯函数的 Eremenko 强猜想结果可参见文献 [655, 推论 1.3]. 关于弱形式的 Eremenko 猜想进展可参见文献 [618].

对于有限阶且奇异值集合落在一个直接吸引域的紧子集中的超越整函数 f, 其 Julia 集等于该直接吸引域的边界, 是由不可数多条曲线, 也称作 "毛发" (hairs) 的并组成 (参见文献 [50, 52]). 这样的 Julia 集称作是一个 Cantor 束, 最先由 Devaney 等观察到. 这些曲线除端点外, 都包含在逃逸集 $I(f)$ 中. Aarts 和 Oversteegen[1] 证明了任何这样的 Julia 集都同胚于一个拓扑模型, 即所谓的直刷 (straight brush). 指数映射的这些毛发是 C^∞ 光滑的 (参见文献 [215]), 但对于其他映射毛发可能处处不可微 (参见文献 [199]).

Mayer[492] 证明了 Cantor 束有如下令人惊奇的拓扑性质: 它们的端点集是完全不连通的, 但端点集并上 ∞ 则成了连通集 (∞ 称为后者的爆炸点). 该现象最先在指数映射中被发现, 后被推广到其他函数族[10]. 另一个关于 Cantor 束的惊奇性质是, 它们具有维数悖论 (dimension paradox): Karpińska 证明了双曲指数映射 Cantor 束端点的 Hausdorff 维数等于 2[404], 而毛发去掉端点后 Hausdorff 维数则等于 1[403]. 该现象后被推广到更一般的超越整函数族[660]. 维数悖论甚至出现在参数空间中[35, 368], 还出现在 3 维空间的拟正则动力系统[78] 和多项式动力系统[177] 中.

周期外射线的 Douady-Hubbard 着陆定理是研究多项式动力学的基本工具之一. 对于后奇异集 (post-singular set) 有界且增长阶有限的超越整函数 f, 由文献 [655] 可知逃逸集 $I(f)$ 包含称为周期毛发 (periodic hairs) 的某些曲线. 对于这样的函数 f, Benini 和 Rempe[71] 证明了与 Douady-Hubbard 类似的定理: 每根周期性毛发都着陆在一个斥性或抛物周期点上, 反过来, 每个斥性或抛物周期点都是至少一根周期性毛发的着陆点, 这推广了之前的结论 (参见文献 [70, 509, 663]). 此外, Benini 和 Rempe 还对具有无穷阶的后奇异有界整函数研究了着陆定理并在毛发可能不存在的情形下引入了发束 (dreadlocks) 的概念.

除了上面提到的着陆逃逸曲线, 20 世纪 90 年代开始, Devaney 等构造了一些非着陆的逃逸曲线, 其聚点集为无界的不可分割连续统 (参见文献 [234, 241, 617]). 付建勋、张高飞和张松等构造了聚点集有界且非着陆的逃逸曲线并研究了它们的拓扑结构 (参见文献 [314, 315]). 关于超越亚纯函数 Julia 连通分支的可能拓扑结构参见文献 [252, 488, 489, 623].

8.2 游荡域

对于亚纯函数 $f:\mathbb{C}\to\widehat{\mathbb{C}}$ 的一个 Fatou 分支 U, 若对于任意正整数 $m\neq n$ 有 $f^{\circ m}(U)\cap f^{\circ n}(U)=\emptyset$, 则称 U 是 f 的一个游荡域 (wandering domain). 利用拟共形手术, Sullivan[713] 在 20 世纪 80 年代证明了有理函数没有游荡域.

Fatou[303] 证明了若 U 是一个游荡域, 则 U 上所有收敛的子序列 $(f^{\circ n_k})_k$ 的极限函数都是常数. 令 $L(U)\subset\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 表示收敛子序列所有可能的极限值集合. Baker[38] 改进了 Fatou 的结果, 得到了 $L(U)\subset(J(f)\cup P(f))\cup\{\infty\}$, 其中 $P(f)$ 为 f 的后奇异集. 目前这方面最好的结果属于 Bergweiler 等[84]: $L(U)\subset(J(f)\cup P(f)')\cup\{\infty\}$, 其中 $P(f)'$ 为 $P(f)$ 的导集. 郑建华[815, 817] 将该结果推广到了部分超越亚纯函数.

令 $K(f) := \{z \in \mathbb{C} : \{f^{\circ n}(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有界$\}$ 且 $BU(f) := \mathbb{C} \setminus (I(f) \cup K(f))$, 其中 $BU(f)$ 是由 f 的所有向前轨道无界但非逃逸点构成, 称其为 f 的蹦极集 (buggle set) [543]. 容易看出 $I(f)$、$K(f)$ 和 $BU(f)$ 都是完全不变的, 且它们一起刚好给出了复平面的一个动力系统划分. 根据向前轨道和极限函数的取值情形, f 的游荡域 U 可以分为以下 3 类:

- (逃逸型) $U \subset I(f)$, 即 $L(U) = \{\infty\}$;
- (振荡型) $U \subset BU(f)$, 即存在 $a \in \mathbb{C}$ 使得 $\{\infty, a\} \subset L(U)$;
- (有界轨道型) $U \subset K(f)$, 即 $\infty \notin L(U)$.

在 Sullivan 的结果之前, Baker [36, 40] 通过构造具有无穷乘积形式的超越整函数, 证明了游荡域的存在性:

定理 8.3 存在含 (多连通) 游荡域的超越整函数.

事实上, 若一个超越整函数含有一个多连通的 Fatou 分支, 那么该分支一定是一个 (快速) 逃逸的游荡域 [42, 631]. Kisaka 和 Shishikura [410] 通过拟共形手术也构造了多连通的游荡域. 单连通的逃逸型游荡域可参见文献 [42, 294, 360] 和 [286, 例 2], 见图 10. Eremenko-Lyubich 构造了第一个振荡型游荡域 (参见文献 [286, 例 1]).

奇异值在整函数的迭代中起到关键作用. 一个超越整函数称作是有限型, 或属于 Speiser 类 $\mathcal{S}$, 若奇异集 $S(f)$ 是一个有限集. Eremenko 和 Lyubich [288] 及 Goldberg 和 Keen [335] 受 Sullivan 游荡域不存在定理的启发, 独立地证明了 $\mathcal{S}$ 类中的函数都没有游荡域. Eremenko 和 Lyubich [288] 还证明了任何 $f \in \mathcal{B}$ 都有性质 $I(f) \subset J(f)$, 因此 $\mathcal{B}$ 类中的函数没有逃逸型游荡域. 事实上, $\mathcal{B}$ 类中的函数是否存在游荡域是一个经典的问题.

直到 2015 年, Bishop [96] 利用一种构造整函数的新技术—拟共形折叠 (quasiconformal folding), 证明了 $\mathcal{B}$ 类中存在具有振荡型游荡域的整函数 (为无限阶) [51]. 之后, 该方法被用于构造更多的具有游荡域的超越整函数 [293, 295, 427]. Martí-Pete 和 Shishikura [490] 利用拟共形手术, 构造了第一个具有振荡型游荡域的有限阶整函数. 但至今为止, 关于游荡域还有以下公开问题:

问题 8.4 是否存在超越整函数, 其含有一个轨道有界的游荡域?

关于该问题的部分进展可参见文献 [549]. 超越整函数的周期 Fatou 分支可分为 5 类: 吸引域、超吸引域、抛物域、Siegel 盘和 Baker 域. 对游荡域的动力系统分类直到最近才部分完成: 单连通逃逸型游荡域可以分为 9 类 [67], 单连通振荡型游荡域可分为 6 类 [290], 多连通游荡域的分类可参见文献 [307].

Eremenko 和 Lyubich [286] 最先使用经典的 Runge 逼近论来构造游荡域. 该方法最近除了被用于游荡域的分类 (参见文献 [67]), 还被用于构造具有各种拓扑边界的游荡域. 如果一个开集 U 和它的闭包 $\overline{U}$ 具有相同的内部, 则称该开集是正则的 (regular). Boc Thaler 证明了如果一个有界的正则区域 $U \subset \mathbb{C}$ 的闭包的补集连通 (如任何 Jordan 区域), 则存在一个超越整函数使得 U 是其逃逸型游荡域 [110]. 该结果后被 Martí-Pete、Rempe 和 Waterman [488] 推广到更一般情形. 整函数游荡域边界点的轨道, 特别是超脱点 [52] (maverick point) 的研究可参见文献 [67, 543, 633]. 其他与整函数游荡域相关的研究还可参见文献 [72, 89, 97, 289].

Baker、Kotus 和吕以辇 [46] 考虑了定义在复平面上含极点的超越亚纯函数, 在 20 世纪 90 年代初

51) Bishop 在 https://www.math.stonybrook.edu/~bishop/papers/QC-corrections.pdf 中对其原文证明有误的地方进行了更正.

52) 对于 f 的游荡域 U 边界上的一点 z, 若存在序列 $(n_k)_k$ 使得 $f^{\circ n_k}(z) \to w \in \widehat{\mathbb{C}}$ 但 w 不是 $(f^{\circ n_k}(U))_k$ 的极限函数, 则称点 z 是超脱的 (maverick).

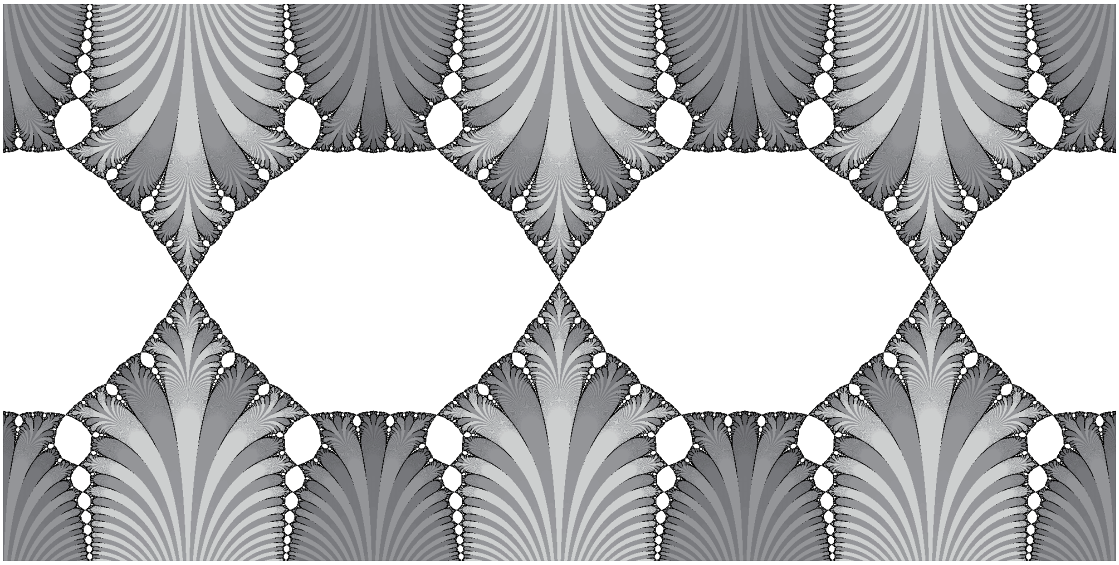


图 10 超越整函数 $f(z) = z + 2\pi + \sin z$ 的动力平面, 它含有单连通的逃逸型游荡域 [294] (所有白色区域)

给出了具有各种连通数的有界或无界游荡域. 郑建华 [815, 817, 818] 对超越亚纯函数的游荡域做了很多研究. 关于 $\mathbb{C}$ 上超越亚纯函数游荡域边界的拓扑和 Julia 分支拓扑的研究, 可参见文献 [489]. 其中一个令人惊奇的结果是, Mandelbrot 集的边界是某个超越亚纯函数的 Julia 分支.

与一维的情形不同, 高维的多项式可以含有游荡域 [21, 22]. Peters、Raissy、Smit 和冀诸超等证明了在某些情形下的多项式斜积没有游荡域 (参见文献 [385] 及其中的参考文献). 此外, 一个有趣的事实是, 数论中著名的 $3n+1$ 猜想 (也称 Collatz 猜想) 与某些超越整函数的游荡域是否存在有关 (参见文献 [431]).

8.3 超越 Julia 集的面积和维数

与有理函数一样, 超越函数 Julia 集的面积和 Hausdorff 维数也是研究的重点之一. 对于超越整函数 f, 其 Julia 集 $J(f)$ 的 Hausdorff 维数至少为 1, 因为 Baker [39] 证明了 $J(f)$ 一定包含连续统, 于是 $1 \leqslant \dim_H J(f) \leqslant 2$. 若 $J(f) = \mathbb{C}$, 则显然 $\dim_H J(f) = 2$, 例如 $f(z) = \mathrm{e}^z$ [525]. 事实上, McMullen [495] 证明了对所有的 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 有 $\dim_H J(\lambda \mathrm{e}^z) = 2$. 该结果后被进行了各种推广 (参见文献 [86] 及其中的参考文献).

Stallard [704] 证明了 $\mathcal{B}$ 类中函数 Julia 集的 Hausdorff 维数严格大于 1. 该结论对比 $\mathcal{B}$ 类更广的一类具有对数道 (logarithmic tracts) 的超越整函数也成立 (参见文献 [88]). 她还证明了 $\mathcal{B}$ 类中超越整函数 Julia 集的 Hausdorff 维数可以取到区间 $(1, 2]$ 中的任何值 (参见文献 [706]). Bishop [97] 证明了存在一个具有多连通游荡域的超越整函数其 Julia 集的 Hausdorff 维数等于 1. 以上结论表明了超越整函数 Julia 集的 Hausdorff 维数可以取到闭区间 $[1, 2]$ 中的任何值. Albrecht 和 Bishop [6] 证明了对于给定的 $\delta > 0$, 存在 $\mathcal{S}$ 类中的一个函数 f (事实上仅有 3 个有限的奇异值), 使得 $\dim_H J(f) < 1 + \delta$.

对于超越亚纯函数, Rippon 证明了它们 Julia 集的 Hausdorff 维数严格大于 0 (参见文献 [703]), 还证明对于任意 $s \in (0, 1)$, 存在一个有界型超越亚纯函数 f 使得 $\dim_H J(f) = s$ (参见文献 [705]). 再结合 $J(\tan z) = \mathbb{R}$ 和 Misiurewicz 的结果 $J(\mathrm{e}^z) = \mathbb{C}$ [525] 可知, 有界型超越亚纯函数 Julia 集的 Hausdorff 维数可以取到区间 $(0, 2]$ 中的任何值. Bergweiler 和崔巍巍 [80] 证明了对于任意 $s \in (0, 2]$, 存在一个有

限型的超越亚纯函数 f (事实上仅有 3 个奇异值), 使得 $\dim_H J(f)=s$. 对于有限型超越亚纯函数逃逸集的 Hausdorff 维数研究可参见文献 [16,17].

部分超越整函数 Julia 集双曲维数的研究可参见文献 [621,622], Hausdorff 测度的研究可参见文献 [742], 部分超越亚纯函数共形测度的研究可参见文献 [53,693,764]. 关于超越亚纯函数 Julia 集的维数综述可参见文献 [417,707].

McMullen [495] 证明了正弦函数族 $f(z)=\sin(\alpha z+\beta)$, $\alpha\neq 0$ 的 Julia 集面积是严格正的, 其首次用到了望远镜 (telescope) 方法. 事实上, McMullen 证明的是 f 的快速逃逸集

$$A(f):=\{z\in\mathbb{C}:\ \text{存在 } k\in\mathbb{N} \text{ 使得 } \forall n\in\mathbb{N}, |f^{\circ(n+k)}(z)|\geqslant M^{\circ n}(R)\}$$

的面积为正, 其中 $M(R)=\max_{|z|=R}|f(z)|$ 且 $R>0$ 是使得 $M^{\circ n}(R)\to\infty$ 的常数. 快速逃逸集的概念由 Bergweiler 和 Hinkkanen [85] 在 1999 年引入. 关于 $A(f)$ 的主要性质可参见文献 [634]. McMullen 关于超越整函数 Julia 集正面积的结果被推广到了更一般的函数族 (参见文献 [15,79]). 关于超越整函数 Julia 集或逃逸集 (或其补集) 面积的研究还可参见文献 [212,357,665,812].

关于超越整函数可测动力学的研究开始于 20 世纪 80 年代. 称一个超越整函数 f 是遍历的 (ergodic) 是指复平面不能分成两个不交且具有正测度的 f 不变子集. Lyubich[462] 证明了指数映射 $z\mapsto e^z$ 非遍历且复平面上几乎所有的点都非回归 53) (相关结果还可参见文献 [333,609]). McMullen[495] 证明了正弦函数族 $f(z)=\sin(\alpha z+\beta)$, $\alpha\neq 0$ 中的每一个函数都不是遍历的. 对于超越亚纯函数的遍历性研究可参见文献 [494].

对于超越整函数的参数空间, 邱维元 [598] 证明了指数函数族 $z\mapsto\lambda e^z$ 的分歧迹具有满的 Hausdorff 维数而正弦函数族 $z\mapsto\lambda\sin(z)$ 的分歧迹具有正面积. 关于超越整函数参数空间分歧迹的面积和 Hausdorff 维数的研究还可参见文献 [35,368,801] 及其中的参考文献.

8.4 其他结论

除了游荡域, 超越亚纯函数还可以出现一类有理函数没有的周期 Fatou 分支, 即 Baker 域, 其上的动力系统与抛物域非常类似: 内部点的向前轨道都趋向于边界上的一点 (极点或无穷远点). Baker 域这个名称首先在文献 [287,288] 中被使用, 但第一个具有 Baker 域的整函数例子却是 Fatou [303] 找到的. 他证明了右半平面包含在 $f(z)=z+1+e^{-z}$ 的一个不变的 Baker 域中. 20 世纪 80 年代开始, 各种类型的周期 Baker 域被陆续找到. 但 Eremenko 和 Lyubich[288] 证明了如果 f 是 $\mathcal{B}$ 类中的一个超越整函数, 则 f 没有 Baker 域. 同样的结论对于 $\mathcal{S}$ 类中的超越亚纯函数也成立 (参见文献 [74, 第 4.8 小节]). 关于 Baker 域的基本性质可参见文献 [74, 第 4 节] 和综述 [630].

Baker [41] 在 20 世纪 80 年代初问: 当超越整函数 f 的增长级充分小时, 是否蕴涵着 f 的 Fatou 分支都是有界的? 对于这个问题, Baker、Stallard、乔建永、Anderson-Hinkkanen、华歆厚 - 杨重骏、郑建华、王跃飞、Rippon-Stallard、杨存基 - 李玉华和 Nicks-Rippon-Stallard 等都进行了研究 (参见文献 [537,753,768] 及其中的参考文献).

Benini、Rippon 和 Stallard [72] 证明了: 若超越整函数 f 与 g 可交换且 f 和 g 没有单连通的快速逃逸游荡域, 则 f 和 g 有相同的 Julia 集. 这推广了 Baker、Langley 和 Bergweiler-Hinkkanen 等的结论. 其他与可交换超越整函数有关的内容还可参见文献 [536] 及其参考文献.

Rempe 和 Schleicher [625] 研究了指数映射族 $E_\kappa(z)=e^z+\kappa$ 的参数空间, 证明了其双曲分支的边界是一条穿过 ∞ 的 Jordan 曲线且 E_κ 的分歧迹是 $\mathbb{C}$ 上的一个连通集. 这是一个类比二次多项式

53) 如果一个点 z 落在其向前轨道 $\{z, f(z), f^{\circ 2}(z),\ldots\}$ 的闭包中, 则称 z 是回归的 (recurrent).

Mandelbrot 集的结果. 关于 E_κ 的结构稳定性研究可参见文献 [781] 等. Fagella、Keen、陈涛和蒋云平等考虑了以正切函数为代表的超越亚纯函数参数空间 (参见文献 [171, 296]).

对于超越亚纯函数 f, 若存在无界点列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset J(f)$ 使得 $\lim_{n\to\infty}\arg z_n=\theta\in[0,2\pi)$, 则称角度 θ 是 Julia 集 $J(f)$ 的极限方向. 该概念最早由乔建永 [588, 592] 在其博士学位论文中引入. 关于 Julia 集的所有极限方向构成的集合的性质研究可参见文献 [747] 及其中的参考文献.

Baker [37] 证明了次数 d 大于等于 2 的有理函数 f 若没有 (最小) 周期为 p 的周期点, 则 $p=2$ 且 $d\in\{2,3,4\}$, 或者 $p=3$ 且 $d=2$. 特别地, 若 f 为多项式, 则 $p=d=2$. 注意 $z\mapsto \mathrm{e}^z+z$ 没有不动点. Bergweiler [76] 证明了对于任意 $p\geqslant 2$, 任何超越亚纯函数都有无穷多个周期为 p 的周期点 (参见文献 [74, 第 158 页]). 其中部分结果的证明依赖于 Nevanlinna 值分布理论, 即量化版本的 Picard 定理. 此外, 亚纯函数族不动点 (或单个函数的周期点) 的存在性与正规性的判定密切相关.

Ahlfors 的覆盖曲面论在超越函数动力系统中具有重要应用. Baker 在 20 世纪 60 年代首先利用 “五岛定理” 证明了斥性周期点在超越整函数的 Julia 集中是稠密的, 其进一步的应用可参见文献 [75]. “三岛定理” 的应用可参见文献 [252]. Wiman-Valiron 理论在超越动力系统中的应用由 Eremenko [284] 首先引入, 其进一步发展可参见文献 [88].

9 相关领域

除了已经介绍的有理函数动力系统 $f:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$、超越整函数动力系统 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 和含极点的超越亚纯函数动力系统 $f:\mathbb{C}\to\widehat{\mathbb{C}}$, 其余受关注的一维复动力系统还包括穿孔复平面 $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上的超越全纯动力系统 $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*$, 其中 0 和 ∞ 均为本性奇点. 该类函数都具有形式

$$f(z)=z^n\mathrm{e}^{g(z)+h(1/z)},$$

其中, n 为整数, g 和 h 为非常值整函数. 这类函数中的一个典型代表就是 Arnol'd 标准族

$$f_{\alpha,\beta}(z)=z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{\beta(z-1/z)/2},$$

其中 $\alpha\in[0,2\pi)$, $\beta\geqslant 0$ [291]. 方丽萍、Fagella 和 Martí-Pete 等对 $\mathbb{C}^*$ 上的全纯自映射动力系统做了大量工作 (参见文献 [297, 301, 487] 及其中的参考文献).

一维复动力系统与统计物理的联系, 特别是涉及的重整变换有理函数的动力系统可参见文献 [102–104, 233, 594]. 研究复动力系统的动机之一是通过迭代计算方程的根, 多项式 Newton 映射的实际计算可参见文献 [214, 375], 而 König 求根算法可参见文献 [159].

高维复动力系统是复动力系统领域中的一个重要分支, 近些年来得到了迅猛的发展. 其研究需要用到多复变, 但很多情形下也依赖于一维复动力系统的结果. 自 20 世纪 80 年代开始, Bedford、Fornæss、Hubbard、Lyubich、Oberste-Vorth、Sibony、Smillie、Ueda、张广远和张文俊等做了大量关于高维复动力系统的工作 (参见文献 [59, 312, 809, 813]). 21 世纪以来, Abate、Berteloot、Bianchi、Benini、Dinh、Dujardin、Ishii、Peters、Raissy、戎锋和冀诸超等促进了高维复动力系统的进一步发展 (参见综述 [2, 250, 309, 386, 654]).

传统的复动力系统考虑的是复数域上的迭代. 如果将复数域换成其他数域, 则会产生相应数域上的动力系统. 这其中得到广泛研究的是算术和非阿 (特别地, p-adic) 动力系统, 它们与传统的复动力系统有紧密的联系. 一些传统复动力系统中无法证明的结论可以通过算术动力系统解决. 这其中比

较著名的是 “不太可能相交 (unlikely intersection)” 问题[49], 与之有关联的包括 André-Oort 猜想和 Manin-Mumford 猜想等. 张寿武、DeMarco、Ghioca、Krieger、Nguyen、袁新意、叶和溪等做了很多工作 (参见文献 [226,227] 及其中的参考文献). Benedetto、Berkovich、Favre、Kiwi、Rivera-Letelier 和 Silverman 以及范爱华、王跃飞、廖灵敏、邱彦奇、凡石磊、谢俊逸、史汝西、聂洪明和杨静桦等研究了非阿域上的动力系统 (参见文献 [142,299,300,387,538,603] 及其中的参考文献). 算术动力系统的著作可参见文献 [62,690], 综述和相关问题可参见文献 [63,64].

除了经典的一维复动力系统、高维复动力系统和算术动力系统, 以下动力系统也与经典的复动力系统有密切联系:

• 反全纯 (anti-holomorphic) 动力系统. 主要研究反全纯函数的迭代, 如 $f(z) = \bar{z}^d + c$, 参见文献 [373,378,533,814]. 该类型动力系统最先出现在三次实多项式的研究中 (参见文献 [512]).

• 拟正则映射的动力系统. 杨乐院士和孙道椿[716] 是国际上研究拟正则映射动力系统的先驱. 之后, Bergweiler 等对该领域做了进一步的发展 (参见文献 [77,78,81,87,198]).

• 随机迭代动力系统. Fornæss 和 Sibony[310] 在 20 世纪 90 年代初提出了有理函数的随机迭代. 任福尧、邱维元、周维民、龚志民和周吉等从 20 世纪 90 年代中期开始在这方面做了很多工作 (参见文献 [337,338,820,821]). 近年来 Stankewitz 和 Sumi[708] 进一步发展了随机函数的迭代并进行了有理半群的研究.

除了极少数情形 (圆周、线段和球面), 次数大于 1 的有理函数 Julia 集都是一个分形, 因此复动力系统和分形几何有着天然的联系. 分形几何中的一些研究方法也适用于有理函数的迭代. Falconer 的著作 [298] 是分形几何的经典文献.

拟共形几何领域中的一个重要问题是判断两个同胚的度量空间是否是拟对称等价的. 此类问题也出现于 Gromov 双曲群和双曲空间的分类中. Bonk、Kleiner 和 Merenkov 等研究了分形集上的拟共形几何 (参见文献 [116,797] 其中的参考文献) 并将相关理论应用到有理函数的动力系统中 (参见文献 [117,606]).

在计算机上作动力平面 (包括 Julia 集、Fatou 分支、外射线和拼图等) 和参数空间 (包括分歧迹、双曲分支和参数射线) 的图像是研究复动力系统的重要辅助手段. 相关算法可参见文献 [519, 附录 H] 和 [128,551]. 除了自编程序作图外, 常用的辅助工具包括[54] “超级分形” (Ultra Fractal) 软件和 Jung 开发的 “Mandel” 软件.

致谢 感谢复旦大学邱维元教授仔细阅读了本文初稿并提出了大量的修改意见! 感谢中国科学院数学与系统科学研究院崔贵珍研究员、北京邮电大学乔建永教授、复旦大学沈维孝教授、深圳大学王跃飞教授、浙江大学尹永成教授、南京大学张高飞教授和审稿人对本文撰写提出了宝贵意见和勉励! 感谢法国图卢兹第三大学 Arnaud Chéritat 研究员分享了文中部分图像的生成算法. 感谢杨依依在本文撰写过程中的持续鼓励. 限于作者的研究水平、视野和兴趣, 该领域的一些子方向和研究人员在本文中可能没有提及或无法进行详细展开, 在此表示歉意.

参考文献

1 Aarts J M, Oversteegen L G. The geometry of Julia sets. Trans Amer Math Soc, 1993, 338: 897–918
2 Abate M. Discrete holomorphic local dynamical systems. In: Holomorphic Dynamical Systems. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1998. Berlin: Springer, 2010, 1–55
3 Agol I. Tameness of hyperbolic 3-manifolds. arXiv:0405568, 2004
4 Ahlfors L V. Lectures on Quasiconformal Mappings, 2nd ed. With Supplemental Chapters by C J Earle, I Kra, M Shishikura and J H Hubbard. University Lecture Series, vol. 38. Providence: Amer Math Soc, 2006
5 Ahlfors L V, Bers L. Riemann's mapping theorem for variable metrics. Ann of Math (2), 1960, 72: 385–404

54) 见 https://www.ultrafractal.com 和 http://www.mndynamics.com/indexp.html.

6 Albrecht S, Bishop C J. Speiser class Julia sets with dimension near one. J Anal Math, 2020, 141: 49–98

7 Alexander D S. A History of Complex Dynamics, from Schröder to Fatou and Julia. Aspects of Mathematics, E24. Braunschweig: Friedr Vieweg & Sohn, 1994

8 Alexander D S, Devaney R L. A century of complex dynamics. In: A century of Advancing Mathematics. Washington: Math Assoc America, 2015, 15–34

9 Alexander D S, Iavernaro F, Rosa A. Early Days in Complex Dynamics, A History of Complex Dynamics in One Variable During 1906–1942. History of Mathematics, vol. 38. Providence: Amer Math Soc, 2012

10 Alhabib N, Rempe L. Escaping endpoints explode. Comput Methods Funct Theory, 2017, 17: 65–100

11 Alhamed M, Rempe L, Sixsmith D. Geometrically finite transcendental entire functions. J Lond Math Soc (2), 2022, 106: 485–527

12 Arfeux M, Kiwi J. Irreducibility of periodic curves in cubic polynomial moduli space. Proc Lond Math Soc (3), 2023, 127: 792–835

13 Arnol'd V I. Small denominators I: Mapping the circle onto itself. Izv Akad Nauk SSSR Ser Mat, 1961, 25: 21–86

14 Aspenberg M. The Collet-Eckmann condition for rational functions on the Riemann sphere. Math Z, 2013, 273: 935–980

15 Aspenberg M, Bergweiler W. Entire functions with Julia sets of positive measure. Math Ann, 2012, 352: 27–54

16 Aspenberg M, Cui W. Hausdorff dimension of escaping sets of meromorphic functions. Trans Amer Math Soc, 2021, 374: 6145–6178

17 Aspenberg M, Cui W. Hausdorff dimension of escaping sets of meromorphic functions II. Ergodic Theory Dynam Systems, 2023, 43: 1471–1491

18 Aspenberg M, Roesch P. Newton maps as matings of cubic polynomials. Proc Lond Math Soc (3), 2016, 113: 77–112

19 Aspenberg M, Yampolsky M. Mating non-renormalizable quadratic polynomials. Comm Math Phys, 2009, 287: 1–40

20 Astala K, Iwaniec T, Martin G. Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane. Princeton Mathematical Series, vol. 48. Princeton: Princeton Univ Press, 2009

21 Astorg M, Boc Thaler L, Peters H. Wandering domains arising from Lavaurs maps with Siegel disks. Anal PDE, 2023, 16: 35–88

22 Astorg M, Buff X, Dujardin R, et al. A two-dimensional polynomial mapping with a wandering Fatou component. Ann of Math (2), 2016, 184: 263–313

23 Astorg M, Gauthier T, Mihalache N, et al. Collet, Eckmann and the bifurcation measure. Invent Math, 2019, 217: 749–797

24 Audin M. Fatou, Julia, Montel, the Great Prize of Mathematical Sciences of 1918, and Beyond. Lecture Notes in Mathematics, vol. 2014. Heidelberg: Springer, 2011

25 Avila A, Buff X, Chéritat A. Siegel disks with smooth boundaries. Acta Math, 2004, 193: 1–30

26 Avila A, Buff X, Chéritat A. Smooth Siegel disks everywhere. Astérisqué, 2020, 416: 133–180

27 Avila A, Cheraghi D. Statistical properties of quadratic polynomials with a neutral fixed point. J Eur Math Soc (JEMS), 2018, 20: 2005–2062

28 Avila A, Kahn J, Lyubich M, et al. Combinatorial rigidity for unicritical polynomials. Ann of Math (2), 2009, 170: 783–797

29 Avila A, Lyubich M. Hausdorff dimension and conformal measures of Feigenbaum Julia sets. J Amer Math Soc, 2008, 21: 305–364

30 Avila A, Lyubich M. The full renormalization horseshoe for unimodal maps of higher degree: exponential contraction along hybrid classes. Publ Math Inst Hautes Études Sci, 2011, 114: 171–223

31 Avila A, Lyubich M. Lebesgue measure of Feigenbaum Julia sets. Ann of Math (2), 2022, 195: 1–88

32 Avila A, Lyubich M, de Melo W. Regular or stochastic dynamics in real analytic families of unimodal maps. Invent Math, 2003, 154: 451–550

33 Avila A, Lyubich M, Shen W. Parapuzzle of the Multibrot set and typical dynamics of unimodal maps. J Eur Math Soc (JEMS), 2011, 13: 27–56

34 Avila A, Moreira C G. Phase-parameter relation and sharp statistical properties for general families of unimodal maps. In: Geometry and Dynamics. Contemporary Mathematics, vol. 389. Providence: Amer Math Soc, 2005, 1–42

35 Bailesteanu M, Balan H V, Schleicher D. Hausdorff dimension of exponential parameter rays and their endpoints. Nonlinearity, 2008, 21: 113–120

36 Baker I N. Multiply connected domains of normality in iteration theory. Math Z, 1963, 81: 206–214

37 Baker I N. Fixpoints of polynomials and rational functions. J Lond Math Soc (2), 1964, 39: 615–622

38 Baker I N. Limit functions and sets of non-normality in iteration theory. Ann Acad Sci Fenn Ser A I, 1970, 467: 11pp

39 Baker I N. The domains of normality of an entire function. Ann Acad Sci Fenn Ser I Math, 1975, 1: 277–283
40 Baker I N. An entire function which has wandering domains. J Aust Math Soc, 1976, 22: 173–176
41 Baker I N. The iteration of polynomials and transcendental entire functions. J Aust Math Soc, 1981, 30: 483–495
42 Baker I N. Wandering domains in the iteration of entire functions. Proc Lond Math Soc (3), 1984, s3-49: 563–576
43 Baker I N, Domínguez P. Some connectedness properties of Julia sets. Complex Var Theory Appl, 2000, 41: 371–389
44 Baker I N, Domínguez P. Residual Julia sets. J Anal, 2000, 8: 121–137
45 Baker I N, Eremenko A. A problem of Julia sets. Ann Acad Sci Fenn Ser I Math, 1987, 12: 229–236
46 Baker I N, Kotus J, Lü Y. Iterates of meromorphic functions II: Examples of wandering domains. J Lond Math Soc (2), 1990, 42: 267–278
47 Baker I N, Kotus J, Lü Y. Iterates of meromorphic functions III: Preperiodic domains. Ergodic Theory Dynam Systems, 1991, 11: 603–618
48 Baker I N, Kotus J, Lü Y. Iterates of meromorphic functions IV: Critically finite functions. Results Math, 1992, 22: 651–656
49 Baker M, DeMarco L. Preperiodic points and unlikely intersections. Duke Math J, 2011, 159: 1–29
50 Barański K. Trees and hairs for some hyperbolic entire maps of finite order. Math Z, 2007, 257: 33–59
51 Barański K, Fagella N, Jarque X, et al. On the connectivity of the Julia sets of meromorphic functions. Invent Math, 2014, 198: 591–636
52 Barański K, Jarque X, Rempe L. Brushing the hairs of transcendental entire functions. Topology Appl, 2012, 159: 2102–2114
53 Baranski K, Karpinska B, Zdunik A. Conformal measures for meromorphic maps. Ann Acad Sci Fenn Math, 2018, 43: 247–266
54 Barreira L. Thermodynamic Formalism and Applications to Dimension Theory. Progress in Mathematics, vol. 294. Basel: Birkhäuser/Springer, 2011
55 Bartholdi L, Nekrashevych V. Thurston equivalence of topological polynomials. Acta Math, 2006, 197: 1–51
56 Bassanelli G, Berteloot F. Bifurcation currents in holomorphic dynamics on $\mathbb{P}^k$. J Reine Angew Math, 2007, 608: 201–235
57 Beardon A F. The components of a Julia set. Ann Acad Sci Fenn Ser I Math, 1991, 16: 173–177
58 Beardon A F. Iteration of Rational Functions. Graduate Texts in Mathematics, vol. 132. New York: Springer-Verlag, 1991
59 Bedford E, Smillie J. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. VIII: Quasi-expansion. Amer J Math, 2002, 124: 221–271
60 Bedford E, Smillie J, Ueda T. Semi-parabolic bifurcations in complex dimension two. Comm Math Phys, 2017, 350: 1–29
61 Belk J, Lanier J, Margalit D, et al. Recognizing topological polynomials by lifting trees. Duke Math J, 2022, 171: 3401–3480
62 Benedetto R L. Dynamics in One Non-Archimedean Variable. Graduate Studies in Mathematics, vol. 198. Providence: Amer Math Soc, 2019
63 Benedetto R L. A survey of non-Archimedean dynamics. Notices Amer Math Soc, 2022, 69: 1
64 Benedetto R L, Ingram P, Jones R, et al. Current trends and open problems in arithmetic dynamics. Bull Amer Math Soc (NS), 2019, 56: 611–685
65 Benedicks M, Carleson L. On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$. Ann of Math (2), 1985, 122: 1–25
66 Benini A M. A survey on MLC, rigidity and related topics. arXiv:1709.09869v2, 2018
67 Benini A M, Evdoridou V, Fagella N, et al. Classifying simply connected wandering domains. Math Ann, 2022, 383: 1127–1178
68 Benini A M, Fagella N. Singular values and bounded Siegel disks. Math Proc Cambridge Philos Soc, 2018, 165: 249–265
69 Benini A M, Fagella N. Singular values and non-repelling cycles for entire transcendental maps. Indiana Univ Math J, 2020, 69: 1543–1558
70 Benini A M, Lyubich M. Repelling periodic points and landing of rays for post-singularly bounded exponential maps. Ann Inst Fourier (Grenoble), 2014, 64: 1493–1520
71 Benini A M, Rempe L. A landing theorem for entire functions with bounded post-singular sets. Geom Funct Anal, 2020, 30: 1465–1530
72 Benini A M, Rippon P J, Stallard G M. Permutable entire functions and multiply connected wandering domains. Adv Math, 2016, 287: 451–462
73 Berger P, Dujardin R. On stability and hyperbolicity for polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^2$. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2017, 50: 449–477

74 Bergweiler W. Iteration of meromorphic functions. Bull Amer Math Soc (NS), 1993, 29: 151–188
75 Bergweiler W. The role of the Ahlfors five islands theorem in complex dynamics. Conform Geom Dyn, 2000, 4: 22–35
76 Bergweiler W. Bloch's principle. Comput Methods Funct Theory, 2006, 6: 77–108
77 Bergweiler W. Iteration of quasiregular mappings. Comput Methods Funct Theory, 2011, 10: 455–481
78 Bergweiler W. Karpińska's paradox in dimension 3. Duke Math J, 2010, 154: 599–630
79 Bergweiler W. Lebesgue measure of Julia sets and escaping sets of certain entire functions. Fund Math, 2018, 242: 281–301
80 Bergweiler W, Cui W. The Hausdorff dimension of Julia sets of meromorphic functions in the Speiser class. Math Z, 2022, 302: 2193–2205
81 Bergweiler W, Ding J. Non-escaping points of Zorich maps. Israel J Math, 2021, 243: 27–43
82 Bergweiler W, Eremenko A. On the Bank-Laine conjecture. J Eur Math Soc (JEMS), 2017, 19: 1899–1909
83 Bergweiler W, Fagella N, Rempe L. Hyperbolic entire functions with bounded Fatou components. Comment Math Helv, 2015, 90: 799–829
84 Bergweiler W, Haruta M, Kriete H, et al. On the limit functions of iterates in wandering domains. Ann Acad Sci Fenn Ser A I Math, 1993, 18: 369–375
85 Bergweiler W, Hinkkanen A. On semiconjugation of entire functions. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1999, 126: 565–574
86 Bergweiler W, Karpińska B. On the Hausdorff dimension of the Julia set of a regularly growing entire function. Math Proc Cambridge Philos Soc, 2010, 148: 531–551
87 Bergweiler W, Nicks D A. Foundations for an iteration theory of entire quasiregular maps. Israel J Math, 2014, 201: 147–184
88 Bergweiler W, Rippon P J, Stallard G M. Dynamics of meromorphic functions with direct or logarithmic singularities. Proc Lond Math Soc (3), 2008, 97: 368–400
89 Bergweiler W, Wang Y. On the dynamics of composite entire functions. Ark Mat, 1998, 36: 31–39
90 Bers L, Royden H L. Holomorphic families of injections. Acta Math, 1986, 157: 259–286
91 Berteloot F, Bianchi F, Dupont C. Dynamical stability and Lyapunov exponents for holomorphic endomorphisms of $\mathbb{P}^k$. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2018, 51: 215–262
92 Beurling A, Ahlfors L. The boundary correspondence under quasiconformal mappings. Acta Math, 1956, 96: 125–142
93 Bianchi F. Parabolic implosion for endomorphisms of $\mathbb{C}^2$. J Eur Math Soc (JEMS), 2019, 21: 3709–3737
94 Bielefeld B, Fisher Y, Hubbard J. The classification of critically preperiodic polynomials as dynamical systems. J Amer Math Soc, 1992, 5: 721–762
95 Bielefeld B, Lyubich M. Holomorphic dynamics. In: Linear and Complex Analysis. Problem Book 3, Part II. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1574. Berlin: Springer-Verlag, 1994, 423–462
96 Bishop C J. Constructing entire functions by quasiconformal folding. Acta Math, 2015, 214: 1–60
97 Bishop C J. A transcendental Julia set of dimension 1. Invent Math, 2018, 212: 407–460
98 Biswas K. Hedgehogs of Hausdorff dimension one. Ergodic Theory Dynam Systems, 2008, 28: 1713–1727
99 Biswas K. Positive area and inaccessible fixed points for hedgehogs. Ergodic Theory Dynam Systems, 2016, 36: 1839–1850
100 Blanchard P. Complex analytic dynamics on the Riemann sphere. Bull Amer Math Soc (NS), 1984, 11: 85–141
101 Blanchard P, Devaney R L, Keen L. The dynamics of complex polynomials and automorphisms of the shift. Invent Math, 1991, 104: 545–580
102 Bleher P, Lyubich M. Julia sets and complex singularities in hierarchical Ising models. Comm Math Phys, 1991, 141: 453–474
103 Bleher P, Lyubich M, Roeder R. Lee-Yang zeros for the DHL and 2D rational dynamics, I. Foliation of the physical cylinder. J Math Pures Appl (9), 2017, 107: 491–590
104 Bleher P, Lyubich M, Roeder R. Lee-Yang-Fisher zeros for the DHL and 2D rational dynamics, II. Global pluripotential interpretation. J Geom Anal, 2020, 30: 777–833
105 Blokh A, Buff X, Chéritat A, et al. The solar Julia sets of basic quadratic Cremer polynomials. Ergodic Theory Dynam Systems, 2010, 30: 51–65
106 Blokh A, Childers D, Levin G, et al. An extended Fatou-Shishikura inequality and wandering branch continua for polynomials. Adv Math, 2016, 288: 1121–1174
107 Blokh A, Lyubich M. Measurable dynamics of S-unimodal maps of the interval. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 1991, 24: 545–573
108 Blokh A, Misiurewicz M. Typical limit sets of critical points for smooth interval maps. Ergodic Theory Dynam Systems, 2000, 20: 15–45

109 Blokh A, Oversteegen L. Wandering gaps for weakly hyperbolic polynomials. In: Complex Dynamics. Wellesley: A K Peters, 2009, 139–168
110 Boc Thaler L. On the geometry of simply connected wandering domains. Bull Lond Math Soc, 2021, 53: 1663–1673
111 Bodelón C, Devaney R L, Hayes M, et al. Hairs for the complex exponential family. Internat J Bifur Chaos, 1999, 09: 1517–1534
112 Bonahon F, Devaney R L, Gardiner F P, et al. Conformal Dynamics and Hyperbolic Geometry. Contemporary Mathematics, vol. 573. Providence: Amer Math Soc, 2012
113 Bonifant A, Buff X, Milnor J. Antipode preserving cubic maps: The Fjord theorem. Proc Lond Math Soc (3), 2018, 116: 670–728
114 Bonifant A, Kiwi J, Milnor J. Cubic polynomial maps with periodic critical orbit, Part II: Escape regions. Conform Geom Dyn, 2010, 14: 68–112
115 Bonifant A, Lyubich M, Sutherland S. Frontiers in Complex Dynamics. Princeton Mathematical Series, vol. 51. Princeton: Princeton Univ Press, 2014
116 Bonk M. Quasiconformal geometry of fractals. In: International Congress of Mathematicians vol. II. Zürich: Eur Math Soc, 2006, 1349–1373
117 Bonk M, Lyubich M, Merenkov S. Quasisymmetries of Sierpiński carpet Julia sets. Adv Math, 2016, 301: 383–422
118 Bonk M, Meyer D. Expanding Thurston Maps. Mathematical Surveys, Monographs, vol. 225. Providence: Amer Math Soc, 2017
119 Böttcher L E. The principal laws of convergence of iterates and their application to analysis (in Russian). Bull Kasan Math Soc, 1904, 14: 155–234
120 Bowen R. Hausdorff dimension of quasi-circles. Publ Math Inst Hautes Études Sci, 1979, 50: 11–25
121 Boyd S, Henriksen C. The Medusa algorithm for polynomial matings. Conform Geom Dyn, 2012, 16: 161–183
122 Branner B. The Mandelbrot set. In: Chaos and Fractals. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 39. Providence: Amer Math Soc, 1989, 75–105
123 Branner B, Douady A. Surgery on complex polynomials. In: Holomorphic Dynamics. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1345. Berlin: Springer, 1988, 11–72
124 Branner B, Fagella N. Quasiconformal Surgery in Holomorphic Dynamics. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 141. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2014
125 Branner B, Hjorth P. Real and Complex Dynamical Systems. NATO Advanced Science Institutes Series C, Mathematical, Physical Sciences, vol. 464. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995
126 Branner B, Hubbard J H. The iteration of cubic polynomials Part I: The global topology of parameter space. Acta Math, 1988, 160: 143–206
127 Branner B, Hubbard J H. The iteration of cubic polynomials Part II: Patterns and parapatterns. Acta Math, 1992, 169: 229–325
128 Braverman M, Yampolsky M. Computability of Julia Sets. Algorithms and Computation in Mathematics, vol. 23. Berlin: Springer-Verlag, 2009
129 Brjuno A D. Convergence of transformations of differential equations to normal forms. Dokl Akad Nauk USSR, 1965, 165: 987–989
130 Brjuno A D. Analytic form of differential equations I. Trudy Moskov Mat Obšč, 1971, 25: 119–262
131 Brjuno A D. Analytic form of differential equations II. Trudy Moskov Mat Obšč, 1972, 26: 199–239
132 Brock J F, Bromberg K W. On the density of geometrically finite Kleinian groups. Acta Math, 2004, 192: 33–93
133 Brolin H. Invariant sets under iteration of rational functions. Ark Mat, 1965, 6: 103–144
134 Brooks R, Matelski J P. The dynamics of 2-generator subgroups of PSL(2, $\mathbf{C}$). In: Riemann Surfaces and Related Topics. Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference. Annals of Mathematics Studies, vol. 97. Princeton: Princeton Univ Press, 1981, 65–71
135 Brucks K M, Bruin H. Topics From One-Dimensional Dynamics. London Mathematical Society Student Texts, vol. 62. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2004
136 Bruin H, Keller G, Nowicki T, et al. Wild cantor attractors exist. Ann of Math (2), 1996, 143: 97–130
137 Bruin H, Rivera-Letelier J, Shen W, et al. Large derivatives, backward contraction and invariant densities for interval maps. Invent Math, 2008, 172: 509–533
138 Bruin H, Shen W, van Strien S. Invariant measures exist without a growth condition. Comm Math Phys, 2003, 241: 287–306
139 Bruin H, Shen W, van Strien S. Existence of unique SRB-measures is typical for real unicritical polynomial families. Ann Sci École Norm Sup (4), 2006, 39: 381–414
140 Bruin H, van Strien S. Expansion of derivatives in one-dimensional dynamics. Israel J Math, 2003, 137: 223–263

141 Bruin H, van Strien S. Monotonicity of entropy for real multimodal maps. J Amer Math Soc, 2015, 28: 1–61
142 Bufetov A I, Qiu Y. Ergodic measures on spaces of infinite matrices over non-Archimedean locally compact fields. Compos Math, 2017, 153: 2482–2533
143 Buff X. Ensembles de Julia de mesure positive (d'après van Strien et Nowicki). Séminaire Bourbaki, 1997, 245: 7–39
144 Buff X, Canela J, Roesch P. Julia sets with a wandering branching point. Indiana Univ Math J, 2020, 69: 2241–2265
145 Buff X, Chéritat A. Upper bound for the size of quadratic Siegel disks. Invent Math, 2004, 156: 1–24
146 Buff X, Chéritat A. Ensembles de Julia quadratiques de mesure de Lebesgue strictement positive. C R Math Acad Sci Paris, 2005, 341: 669–674
147 Buff X, Chéritat A. The Brjuno function continuously estimates the size of quadratic Siegel disks. Ann of Math (2), 2006, 164: 265–312
148 Buff X, Chéritat A. How regular can the boundary of a quadratic Siegel disk be? Proc Amer Math Soc, 2007, 135: 1073
149 Buff X, Chéritat A. A new proof of a conjecture of Yoccoz. Ann Inst Fourier (Grenoble), 2011, 61: 319–350
150 Buff X, Chéritat A. Quadratic Julia sets with positive area. Ann of Math (2), 2012, 176: 673–746
151 Buff X, Cui G, Tan L. Teichmüller spaces and holomorphic dynamics. In: Handbook of Teichmüller Theory, vol. IV. IRMA Lect Math Theor Phys, vol. 19. Zürich: Eur Math Soc, 2014, 717–756
152 Buff X, Écalle J, Epstein A. Limits of degenerate parabolic quadratic rational maps. Geom Funct Anal, 2013, 23: 42–95
153 Buff X, Epstein A L. Bifurcation measure and postcritically finite rational maps. In: Complex Dynamics. Wellesley: A K Peters, 2009, 491–512
154 Buff X, Epstein A L, Koch S, et al. On Thurston's pullback map. In: Complex Dynamics. Wellesley: A K Peters, 2009, 561–583
155 Buff X, Epstein A L, Koch S, et al. Questions about polynomial matings. Ann Fac Sci Toulouse Math (6), 2012, 21: 1149–1176
156 Buff X, Fagella N, Geyer L, et al. Herman rings and Arnold disks. J Lond Math Soc (2), 2005, 72: 689–716
157 Buff X, Henriksen C. Scaling ratios and triangles in Siegel disks. Math Res Lett, 1999, 6: 293–305
158 Buff X, Henriksen C. Julia sets in parameter spaces. Comm Math Phys, 2001, 220: 333–375
159 Buff X, Henriksen C. On König's root-finding algorithms. Nonlinearity, 2003, 16: 989–1015
160 Bullett S. Matings in holomorphic dynamics. In: Geometry of Riemann Surfaces. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 368. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2010, 88–119
161 Bullett S, Lomonaco L. Dynamics of modular matings. Adv Math, 2022, 410: 108758
162 Calegari D, Gabai D. Shrinkwrapping and the taming of hyperbolic 3-manifolds. J Amer Math Soc, 2006, 19: 385–446
163 Canela J. Singular perturbations of Blaschke products and connectivity of Fatou components. Discrete Contin Dyn Syst, 2017, 37: 3567–3585
164 Cao J, Wang X, Yin Y. Boundaries of capture hyperbolic components. arXiv:2206.07462, 2022
165 Carleson L, Gamelin T W. Complex Dynamics. Universitext: Tracts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1993
166 Carleson L, Jones P W, Yoccoz J-C. Julia and John. Bol Soc Bras Mat, 1994, 25: 1–30
167 Carrasco M P. On the conformal gauge of a compact metric space. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2013, 46: 495–548
168 Cayley M. The Newton-Fourier imaginary problem. Amer J Math, 1879, 2: 97
169 Cerveau D, Ghys É, Sibony N, et al. Complex Dynamics and Geometry. SMF/AMS Texts and Monographs, vol. 10. Providence: Amer Math Soc; Paris: Soc Math France, 2003
170 Chen T, Jiang Y. Canonical Thurston obstructions for sub-hyperbolic semi-rational branched coverings. Conform Geom Dyn, 2013, 17: 6–25
171 Chen T, Jiang Y, Keen L. Slices of parameter space for meromorphic maps with two asymptotic values. Ergodic Theory Dynam Systems, 2023, 43: 99–139
172 Cheraghi D. Combinatorial rigidity for some infinitely renormalizable unicritical polynomials. Conform Geom Dyn, 2010, 14: 219–255
173 Cheraghi D. Typical orbits of quadratic polynomials with a neutral fixed point: Brjuno type. Comm Math Phys, 2013, 322: 999–1035
174 Cheraghi D. Typical orbits of quadratic polynomials with a neutral fixed point: Non-Brjuno type. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2019, 52: 59–138
175 Cheraghi D. Topology of irrationally indifferent attractors. arXiv:1706.02678v3, 2022
176 Cheraghi D, Chéritat A. A proof of the Marmi-Moussa-Yoccoz conjecture for rotation numbers of high type. Invent Math, 2015, 202: 677–742

177 Cheraghi D, DeZotti A, Yang F. Dimension paradox of irrationally indifferent attractors. arXiv:2003.12340, 2020
178 Cheraghi D, Shishikura M. Satellite renormalization of quadratic polynomials. arXiv:1509.07843, 2015
179 Chéritat A. Ghys-like models for Lavaurs and simple entire maps. Conform Geom Dyn, 2006, 10: 227–256
180 Chéritat A. The hunt for Julia sets with positive measure. In: Complex Dynamics. Wellesley: A K Peters, 2009, 539–559
181 Chéritat A. Relatively compact Siegel disks with non-locally connected boundaries. Math Ann, 2011, 349: 529–542
182 Chéritat A. Tan Lei and Shishikura's example of non-mateable degree 3 polynomials without a Levy cycle. Ann Fac Sci Toulouse Math (2), 2012, 21: 935–980
183 Chéritat A. Near parabolic renormalization for unicritical holomorphic maps. Arnold Math J, 2022, 8: 169–270
184 Chéritat A, Epstein A L. Bounded type Siegel disks of finite type maps with few singular values. Sci China Math, 2018, 61: 2139–2156
185 Chéritat A, Epstein A L, Petersen C L. Perspectives on parabolic points in holomorphic dynamics. Workshop Report, 2015
186 Chéritat A, Roesch P. Herman's condition and Siegel disks of bi-critical polynomials. Comm Math Phys, 2016, 344: 397–426
187 Chéritat A, Yang F. Self-similarity of the boundaries of the high type Siegel disks in the quadratic family. Http://maths.nju.edu.cn/~yangfei/materials/Self-similarity.pdf, 2016
188 Cherry W, Yang C-C. Value Distribution Theory and Complex Dynamics. Contemporary Mathematics, vol. 303. Providence: Amer Math Soc, 2002
189 Childers D K. Are there critical points on the boundaries of mother hedgehogs? In: Holomorphic Dynamics and Renormalization. Fields Institute Communications, vol. 53. Providence: Amer Math Soc, 2008, 75–87
190 Chirka E M. On the propagation of holomorphic motions. Dokl Akad Nauk, 2004, 397: 37–40
191 Chu H. Surgery on Herman rings of the standard Blaschke family. Discrete Contin Dyn Syst, 2018, 38: 63–74
192 Clark T, Drach K, Kozlovski O, et al. The dynamics of complex box mappings. Arnold Math J, 2022, 8: 319–410
193 Clark T, van Strien S. Quasisymmetric rigidity in one-dimensional dynamics. arXiv:1805.09284, 2018
194 Clark T, van Strien S, Trejo S. Complex bounds for real maps. Comm Math Phys, 2017, 355: 1001–1119
195 Collet P, Dobbertin R, Moussa P. Multifractal analysis of nearly circular Julia set and thermodynamical formalism. Ann Inst H Poincaré Phys Théor, 1992, 56: 91–122
196 Collet P, Eckmann J-P. Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems. Progress in Physics, vol. 1. Boston: Birkhäuser, 1980
197 Collet P, Eckmann J-P. Positive Liapunov exponents and absolute continuity for maps of the interval. Ergodic Theory Dynam Systems, 1983, 3: 13–46
198 Comdühr P. On the differentiability of hairs for Zorich maps. Ergodic Theory Dynam Systems, 2019, 39: 1824–1842
199 Comdühr P. Nowhere differentiable hairs for entire maps. Math Z, 2019, 292: 343–359
200 Cremer H. Zum Zentrumproblem. Math Ann, 1928, 98: 151–163
201 Cui G. Conjugacies between rational maps and extremal quasiconformal maps. Proc Amer Math Soc, 2001, 129: 1949–1953
202 Cui G, Gao Y. Wandering continua for rational maps. Discrete Contin Dyn Syst, 2016, 36: 1321–1329
203 Cui G, Gao Y, Zeng J. Invariant graphs of rational maps. Adv Math, 2022, 404: 108454
204 Cui G, Jiang Y. Geometrically finite and semi-rational branched coverings of the two-sphere. Trans Amer Math Soc, 2011, 363: 2701–2714
205 Cui G, Jiang Y, Sullivan D. On geometrically finite branched coverings I. In: Complex Dynamics and Related Topics: Lectures from the Morningside Center of Mathematics. New Studies in Advanced Mathematics, vol. 5. Somerville: Int Press, 2003, 1–14
206 Cui G, Jiang Y, Sullivan D. On geometrically finite branched coverings II. In: Complex Dynamics and Related Topics: Lectures from the Morningside Center of Mathematics. New Studies in Advanced Mathematics, vol. 5. Somerville: Int Press, 2003, 15–29
207 Cui G, Peng W. On the cycles of components of disconnected Julia sets. Math Ann, 2021, 381: 971–1003
208 Cui G, Peng W, Tan L. On a theorem of Rees-Shishikura. Ann Fac Sci Toulouse Math (6), 2012, 21: 981–993
209 Cui G, Peng W, Tan L. Renormalizations and wandering Jordan curves of rational maps. Comm Math Phys, 2016, 344: 67–115
210 Cui G, Tan L. A characterization of hyperbolic rational maps. Invent Math, 2011, 183: 451–516
211 Cui G, Tan L. Hyperbolic-parabolic deformations of rational maps. Sci China Math, 2018, 61: 2157–2220
212 Cui W. Lebesgue measure of escaping sets of entire functions. Ergodic Theory Dynam Systems, 2020, 40: 89–116
213 Curry C P, Mayer J C, Meddaugh J, et al. Any counterexample to Makienko's conjecture is an indecomposable

continuum. Ergodic Theory Dynam Systems, 2009, 29: 875–883
214 Curry J H, Garnett L, Sullivan D. On the iteration of a rational function: Computer experiments with Newton's method. Comm Math Phys, 1983, 91: 267–277
215 da Silva M V. The differentiability of the hairs of $\exp(Z)$. Proc Amer Math Soc, 1988, 103: 1179–1184
216 David G. Solutions de l'equation de Beltrami avec $\|\mu\|_\infty = 1$. Ann Acad Sci Fenn Ser I Math, 1988, 13: 25–70
217 Dawson S P, Galeeva R, Milnor J, et al. A monotonicity conjecture for real cubic maps. In: Real and Complex Dynamical Systems. Mathematics and Physical Sciences, vol. 464. Dordrecht: Kluwer Acad Publ, 1995, 165–183
218 de Faria E, de Melo W. Rigidity of critical circle mappings I. J Eur Math Soc (JEMS), 1999, 1: 339–392
219 de Faria E, de Melo W. Rigidity of critical circle mappings II. J Amer Math Soc, 2000, 13: 343–370
220 de Faria E, de Melo W. Mathematical Tools for One-Dimensional Dynamics. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 115. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2008
221 de Faria E, Guarino P. Dynamics of Circle Mappings. 33° Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 2022
222 de Melo W, van Strien S. One-Dimensional Dynamics. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 25. Berlin: Springer-Verlag, 1993
223 DeMarco L. Dynamics of rational maps: A current on the bifurcation locus. Math Res Lett, 2001, 8: 57–66
224 DeMarco L. The moduli space of quadratic rational maps. J Amer Math Soc, 2007, 20: 321–355
225 DeMarco L. Critical orbits and arithmetic equidistribution. In: Proceedings of the ICM—Rio de Janeiro, 2018, vol. III. Invited Lectures. Hackensack: World Sci Publ, 2018, 1867–1886
226 DeMarco L, Krieger H, Ye H. Uniform Manin-Mumford for a family of genus 2 curves. Ann of Math (2), 2020, 191: 949–1001
227 DeMarco L, Krieger H, Ye H. Common preperiodic points for quadratic polynomials. J Mod Dyn, 2022, 18: 363–413
228 DeMarco L, Pilgrim K M. Polynomial basins of infinity. Geom Funct Anal, 2011, 21: 920–950
229 DeMarco L, Pilgrim K M. The classification of polynomial basins of infinity. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2017, 50: 799–877
230 Denjoy A. Sur l'itération des fonctions analytiques. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1926, 182: 255–257
231 Denjoy A. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. J Math Pures Appl (9), 1932, 11: 333–376
232 Denker M, Urbański M. Hausdorff and conformal measures on Julia sets with a rationally indifferent periodic point. J Lond Math Soc (2), 1991, s2-43: 107–118
233 Derrida B, De Seze L, Itzykson C. Fractal structure of zeros in hierarchical models. J Stat Phys, 1983, 33: 559–569
234 Devaney R L. Knaster-like continua and complex dynamics. Ergodic Theory Dynam Systems, 1993, 13: 627–634
235 Devaney R L. Complex Dynamical Systems, the Mathematics Behind the Mandelbrot and Julia Sets. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, vol. 49. Providence: Amer Math Soc, 1994
236 Devaney R L. Intertwined internal rays in Julia sets of rational maps. Fund Math, 2009, 206: 139–159
237 Devaney R L. Singular perturbations of complex polynomials. Bull Amer Math Soc (NS), 2013, 50: 391–429
238 Devaney R L. A First Course in Chaotic Dynamical Systems, 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2020
239 Devaney R L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 3rd ed. Boca Raton: CRC Press, 2022
240 Devaney R L, Fagella N, Garijo A, et al. Sierpinski curve Julia sets for quadratic rational maps. Ann Acad Sci Fenn Math, 2014, 39: 3–22
241 Devaney R L, Jarque X. Indecomposable continua in exponential dynamics. Conform Geom Dyn, 2002, 6: 1–12
242 Devaney R L, Keen L. Dynamics of tangent. In: Dynamical Systems. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1342. Berlin: Springer, 1988, 105–111
243 Devaney R L, Keen L. Chaos and Fractals, the Mathematics Behind the Computer Graphics. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, vol. 39. Providence: Amer Math Soc, 1989
244 Devaney R L, Keen L. Complex Dynamics, 25 Years After the Appearance of the Mandelbrot Set. Contemporary Mathematics, vol. 396. Providence: Amer Math Soc, 2006
245 Devaney R L, Krych M. Dynamics of $\exp(z)$. Ergodic Theory Dynam Systems, 1984, 4: 35–52
246 Devaney R L, Look D M, Uminsky D. The escape trichotomy for singularly perturbed rational maps. Indiana Univ Math J, 2005, 54: 1621–1634
247 Devaney R L, Russell E D. Connectivity of Julia sets for singularly perturbed rational maps. In: Chaos, CNN, Memristors and Beyond. Singapore: World Scientific, 2013, 239–245
248 Devaney R L, Tangerman F. Dynamics of entire functions near the essential singularity. Ergodic Theory Dynam Systems, 1986, 6: 489–503
249 DeZotti A, Roesch P. On (non-)local connectivity of some Julia sets. In: Frontiers in Complex Dynamics. Princeton

Mathematical Series, vol. 51. Princeton: Princeton Univ Press, 2014, 135–162
250 Dinh T-C, Sibony N. Dynamics in several complex variables: Endomorphisms of projective spaces and polynomial-like mappings. In: Holomorphic Dynamical Systems. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1998. Berlin: Springer, 2010, 165–294
251 Domínguez P. Connectedness properties of Julia sets of transcendental entire functions. Complex Var Theory Appl, 1997, 32: 199–215
252 Domínguez P. Dynamics of transcendental meromorphic functions. Ann Acad Sci Fenn Math, 1998, 23: 225–250
253 Domínguez P, Fagella N. Existence of Herman rings for meromorphic functions. Complex Var Theory Appl, 2004, 49: 851–870
254 Domínguez P, Fagella N. Residual Julia sets of rational and transcendental functions. In: Transcendental Dynamics and Complex Analysis. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 348. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2008, 138–164
255 Domínguez P, Sienra G. A study of the dynamics of $\lambda \sin z$. Internat J Bifur Chaos, 2002, 12: 2869–2883
256 Douady A. Systèmes dynamiques holomorphes. In: Bourbaki Seminar, Astérisque, vol. 105. Paris: Soc Math France, 1983, 39–63
257 Douady A. Disques de Siegel et anneaux de Herman. Astérisque, 1987, 152–153: 151–172
258 Douady A. Descriptions of compact sets in **C**. In: Topological Methods in Modern Mathematics. Houston: Publish or Perish, 1993, 429–465
259 Douady A. Does a Julia set depend continuously on the polynomial? In: Complex Dynamical Systems. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 49. Providence: Amer Math Soc, 1994, 91–138
260 Douady A. Prolongement de mouvements holomorphes (d'après Słodkowski et autres). Astérisque, 1995, 227: 7–20
261 Douady A. Topological entropy of unimodal maps: Monotonicity for quadratic polynomials. In: Real and Complex Dynamical Systems. Mathematics and Physical Sciences, vol. 464. Dordrecht: Kluwer Acad Publ, 1995, 65–87
262 Douady A, Earle C J. Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle. Acta Math, 1986, 157: 23–48
263 Douady A, Hubbard J H. Itération des polynômes quadratiques complexes. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1982, 294: 123–126
264 Douady A, Hubbard J H. Étude dynamique des polynômes complexes, Partie I. II. Publications Mathématiques d'Orsay, vols. 84–85. Orsay: Université de Paris-Sud, 1984–1985
265 Douady A, Hubbard J H. On the dynamics of polynomial-like mappings. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 1985, 18: 287–343
266 Douady A, Hubbard J H. A proof of Thurston's topological characterization of rational functions. Acta Math, 1993, 171: 263–297
267 Douady A, Sentenac P, Zinsmeister M. Implosion parabolique et dimension de Hausdorff. C R Acad Sci Sér I Math, 1997, 325: 765–772
268 Drach K, Schleicher D. Rigidity of Newton dynamics. Adv Math, 2022, 408: 108591
269 Dudko A, Sutherland S. On the Lebesgue measure of the Feigenbaum Julia set. Invent Math, 2020, 221: 167–202
270 Dudko D. Matings with laminations. arXiv:1112.4780, 2011
271 Dudko D, Lyubich M. Uniform *a priori* bounds for neutral renormalization. arXiv:2210.09280, 2022
272 Dudko D, Lyubich M. Local connectivity of the Mandelbrot set at some satellite parameters of bounded type. Geom Funct Anal, 2023, 33: 912–1047
273 Dudko D, Lyubich M. MLC at Feigenbaum points. arXiv:2309.02107, 2023
274 Dudko D, Lyubich M, Selinger N. Pacman renormalization and self-similarity of the Mandelbrot set near Siegel parameters. J Amer Math Soc, 2020, 33: 653–733
275 Dudko D, Schleicher D. Core entropy of quadratic polynomials. Arnold Math J, 2020, 6: 333–385
276 Dujardin R. Non-density of stability for holomorphic mappings on $\mathbb{P}^k$. J Éc polytech Math, 2017, 4: 813–843
277 Dujardin R, Favre C. Distribution of rational maps with a preperiodic critical point. Amer J Math, 2008, 130: 979–1032
278 Dujardin R, Favre C, Gauthier T. When do two rational functions have locally biholomorphic Julia sets? Trans Amer Math Soc, 2023, 376: 1601–1624
279 Dujardin R, Lyubich M. Stability and bifurcations for dissipative polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^2$. Invent Math, 2015, 200: 439–511
280 Epstein A L. Counterexamples to the quadratic mating conjecture. Manuscript, 1998
281 Epstein A L. Bounded hyperbolic components of quadratic rational maps. Ergodic Theory Dynam Systems, 2000, 20: 727–748
282 Epstein A L, Yampolsky M. Geography of the cubic connectedness locus: Intertwining surgery. Ann Sci École Norm

Sup (4), 1999, 32: 151–185
283 Eremenko A E. Some functional equations connected with the iteration of rational functions. Algebra i Analiz, 1989, 1: 102–116
284 Eremenko A E. On the iteration of entire functions. In: Dynamical Systems and Ergodic Theory, vol. 23. Warsaw: Banach Center Publ, 1989, 339–345
285 Eremenko A E, Levin G M. Periodic points of polynomials. Ukraïn Mat Zh, 1989, 41: 1258–1262
286 Eremenko A E, Lyubich M. Examples of entire functions with pathological dynamics. J Lond Math Soc (2), 1987, 36: 458–468
287 Eremenko A E, Lyubich M. The dynamics of analytic transformations. Leningrad Math J, 1990, 1: 563–634
288 Eremenko A E, Lyubich M. Dynamical properties of some classes of entire functions. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1992, 42: 989–1020
289 Essén M, Wu S. Repulsive fixpoints of analytic functions with applications to complex dynamics. J Lond Math Soc (2), 2000, 62: 139–148
290 Evdoridou V, Rippon P J, Stallard G M. Oscillating simply connected wandering domains. Ergodic Theory Dynam Systems, 2023, 43: 1239–1268
291 Fagella N. Dynamics of the complex standard family. J Math Anal Appl, 1999, 229: 1–31
292 Fagella N, Geyer L. Surgery on Herman rings of the complex standard family. Ergodic Theory Dynam Systems, 2003, 23: 493–508
293 Fagella N, Godillon S, Jarque X. Wandering domains for composition of entire functions. J Math Anal Appl, 2015, 429: 478–496
294 Fagella N, Henriksen C. The Teichmüller space of an entire function. In: Complex Dynamics. Wellesley: A K Peters, 2009, 297–330
295 Fagella N, Jarque X, Lazebnik K. Univalent wandering domains in the Eremenko-Lyubich class. J Anal Math, 2019, 139: 369–395
296 Fagella N, Keen L. Stable components in the parameter plane of transcendental functions of finite type. J Geom Anal, 2021, 31: 4816–4855
297 Fagella N, Martí-Pete D. Dynamic rays of bounded-type transcendental self-maps of the punctured plane. Discrete Contin Dyn Syst, 2017, 37: 3123–3160
298 Falconer K. Fractal Geometry, 3rd ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2014
299 Fan A, Fan S, Liao L, et al. On minimal decomposition of p-adic homographic dynamical systems. Adv Math, 2014, 257: 92–135
300 Fan A, Fan S, Liao L, et al. Fuglede's conjecture holds in $\mathbb{Q}_p$. Math Ann, 2019, 375: 315–341
301 Fang L P. On the iteration of holomorphic self-maps of $\mathbf{C}^*$. Acta Math Sin (Engl Ser), 1998, 14: 139–144
302 Fatou P. Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1906, 143: 546–548
303 Fatou P. Sur les équations fonctionnelles. Bull Soc Math France, 1919, 47: 161–271; 1920, 48: 33–94, 208–314
304 Fatou P. Sur l'itération des fonctions transcendantes Entiéres. Acta Math, 1926, 47: 337–370
305 Faught D. Local connectivity in a family of cubic polynomials. PhD Thesis. New York: Cornell University, 1992
306 Feigenbaum M J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. J Stat Phys, 1978, 19: 25–52
307 Ferreira G R, Rempe L. Classifying multiply connected wandering domains. arXiv:2405.12165, 2024
308 Flexor M, Sentenac P, Yoccoz J-C. Géométrie Complexe et Systèmes Dynamiques. Paris: Soc Math France, 2000
309 Fornæss J E, Rong F. Estimate of the squeezing function for a class of bounded domains. Math Ann, 2018, 371: 1087–1094
310 Fornæss J E, Sibony N. Random iterations of rational functions. Ergodic Theory Dynam Systems, 1991, 11: 687–708
311 Fornæss J E, Sibony N. Complex dynamics in higher dimensions. In: Complex Potential Theory. Mathematics and Physical Sciences, vol. 439. Dordrecht: Kluwer Acad Publ, 1994, 131–186
312 Fornæss J E, Sibony N. Complex dynamics in higher dimension II. In: Modern Methods in Complex Analysis. Annals of Mathematics Studies, vol. 137. Princeton: Princeton Univ Press, 1995, 135–182
313 Fu J, Yang F. On the dynamics of a family of singularly perturbed rational maps. J Math Anal Appl, 2015, 424: 104–121
314 Fu J, Zhang G. On the accumulation sets of exponential rays. Ergodic Theory Dynam Systems, 2019, 39: 370–391
315 Fu J, Zhang S. A new type of non-landing exponential rays. Discrete Contin Dyn Syst, 2020, 40: 4179–4196
316 Fu Y, Yang F. Area and Hausdorff dimension of Sierpiński carpet Julia sets. Math Z, 2020, 294: 1441–1456
317 Fu Y, Yang F. Mating Siegel and parabolic quadratic polynomials. arXiv:2305.15180, 2023
318 Fu Y, Yang F, Zhang G. Quadratic rational maps with a 2-cycle of Siegel disks. J Geom Anal, 2022, 32: 244

319 Fu Y, Zhang Y. Mating Siegel and Thurston quadratic polynomials. arXiv:2402.17475, 2024
320 Gaidashev D. On the scaling ratios for Siegel disks. Comm Math Phys, 2015, 333: 931–957
321 Gao B, Shen W. Summability implies Collet-Eckmann almost surely. Ergodic Theory Dynam Systems, 2014, 34: 1184–1209
322 Gao J, Liu G. On connectivity of Fatou components concerning a family of rational maps. Abstr Appl Anal, 2014, 2014: 1–7
323 Gao R. Viana maps driven by Benedicks-Carleson quadratic maps. Trans Amer Math Soc, 2021, 374: 1449–1495
324 Gao Y. On Thurston's core entropy algorithm. Trans Amer Math Soc, 2020, 373: 747–776
325 Gao Y, Tiozzo G. The core entropy for polynomials of higher degree. J Eur Math Soc (JEMS), 2022, 24: 2555–2603
326 Gao Y, Yang L, Zeng J. Subhyperbolic rational maps on boundaries of hyperbolic components. Discrete Contin Dyn Syst, 2022, 42: 319–326
327 Garber V. On the iteration of rational functions. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1978, 84: 497–505
328 Gardiner F P, Jiang Y, Wang Z. Holomorphic motions and related topics. In: Geometry of Riemann Surfaces. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 368. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2010, 156–193
329 Gauthier T. Strong bifurcation loci of full Hausdorff dimension. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2012, 45: 947–984
330 Geyer L. Siegel discs, Herman rings and the Arnold family. Trans Amer Math Soc, 2001, 353: 3661–3683
331 Geyer L. Linearizability of saturated polynomials. Indiana Univ Math J, 2019, 68: 1551–1578
332 Ghys É. Transformations holomorphes au voisinage d'une courbe de Jordan. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1984, 298: 385–388
333 Ghys É, Goldberg L R, Sullivan D P. On the measurable dynamics of $z \mapsto e^z$. Ergodic Theory Dynam Systems, 1985, 5: 329–335
334 Godillon S. A family of rational maps with buried Julia components. Ergodic Theory Dynam Systems, 2015, 35: 1846–1879
335 Goldberg L R, Keen L. A finiteness theorem for a dynamical class of entire functions. Ergodic Theory Dynam Systems, 1986, 6: 183–192
336 Goldberg L R, Milnor J. Fixed points of polynomial maps. Part II. Fixed point portraits. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 1993, 26: 51–98
337 Gong Z, Qiu W, Li Y. Connectedness of Julia sets for a quadratic random dynamical system. Ergodic Theory Dynam Systems, 2003, 23: 1807–1815
338 Gong Z, Ren F. A random dynamical system formed by infinitely many functions. J Fudan Univ Nat Sci, 1996, 35: 387–392
339 Graczyk J, Jones P. Dimension of the boundary of quasiconformal Siegel disks. Invent Math, 2002, 148: 465–493
340 Graczyk J, Sands D, Świątek G. Metric attractors for smooth unimodal maps. Ann of Math (2), 2004, 159: 725–740
341 Graczyk J, Sands D, Świątek G. Decay of geometry for unimodal maps: Negative Schwarzian case. Ann of Math (2), 2005, 161: 613–677
342 Graczyk J, Smirnov S. Collet, Eckmann and Hölder. Invent Math, 1998, 133: 69–96
343 Graczyk J, Smirnov S. Non-uniform hyperbolicity in complex dynamics. Invent Math, 2009, 175: 335–415
344 Graczyk J, Świątek G. Polynomial-like mappings induced by real polynomials. In: Dynamical Systems and Applications. World Sci Ser Appl Anal, vol. 4. River Edge: World Sci Publ, 1995, 315–328
345 Graczyk J, Świątek G. Polynomial-like property for real quadratic polynomials. Topology Proc, 1996, 21: 33–112
346 Graczyk J, Świątek G. Generic hyperbolicity in the logistic family. Ann of Math (2), 1997, 146: 1–52
347 Graczyk J, Świątek G. The real Fatou Conjecture. Annals of Mathematics Studies, vol. 144. Princeton: Princeton Univ Press, 1998
348 Graczyk J, Świątek G. Siegel disks with critical points in their boundaries. Duke Math J, 2003, 119: 189–196
349 Grispolakis J, Mayer J C, Oversteegen L G. Building blocks for quadratic Julia sets. Trans Amer Math Soc, 1999, 351: 1171–1201
350 Haïssinsky P. Chirurgie parabolique. C R Acad Sci Ser I Math, 1998, 327: 195–198
351 Haïssinsky P. Modulation dans l'ensemble de Mandelbrot. In: The Mandelbrot Set, Theme and Variations. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000, 37–65
352 Haïssinsky P. Rigidity and expansion for rational maps. J Lond Math Soc (2), 2001, 63: 128–140
353 Haïssinsky P, Tan L. Convergence of pinching deformations and matings of geometrically finite polynomials. Fund Math, 2004, 181: 143–188
354 Havard G, Zinsmeister M. Thermodynamic formalism and variations of the Hausdorff dimension of quadratic Julia sets. Comm Math Phys, 2000, 210: 225–247
355 Hayman W K, Lingham E F. Research Problems in Function Theory. Problem Books in Mathematics. Cham:

Springer, 2019
356 Heinonen J, Koskela P. Definitions of quasiconformality. Invent Math, 1995, 120: 61–79
357 Hemke J M. Recurrence of entire transcendental functions with simple post-singular sets. Fund Math, 2005, 187: 255–289
358 Henriksen C. The combinatorial rigidity conjecture is false for cubic polynomials. Trans Amer Math Soc, 2003, 355: 3625–3639
359 Herman M R. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. Inst Hautes Études Sci Publ Math, 1979: 5–233
360 Herman M R. Exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur la sphère de Riemann. Bull Soc Math France, 1984, 112: 93–142
361 Herman M R. Are there critical points on the boundaries of singular domains? Comm Math Phys, 1985, 99: 593–612
362 Herman M R. Conjugaison quasi-symmétrique des difféomorphismes du cercle à des rotations et applications aux disques singuliers de Siegel. Https://www.math.univ-toulouse.fr/~cheritat/Herman/Herman_man_2.pdf, 1986
363 Herman M R, Yoccoz J-C. Generalizations of some theorems of small divisors to non-Archimedean fields. In: Geometric Dynamics. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1007. Berlin: Springer, 1983, 408–447
364 Hjorth P G, Petersen C L. Dynamics on the Riemann Sphere. A Bodil Branner Festschrift. Zürich: European Math Soc, 2006
365 Hu J, Jiang Y. The Julia set of Feigenbaum quadratic polynomial. In: Dynamical Systems. Proceedings of the International Conference in Honor of Professor Liao Shantao. Singapore: World Scientific, 1999, 99–124
366 Hu J, Xiao Y. No Herman rings for regularly ramified rational maps. Proc Amer Math Soc, 2019, 147: 1587–1596
367 Hua X H, Yang C C. Dynamics of Transcendental Functions. Asian Mathematics Series, vol. 1. Amsterdam: Gordon, Breach Science Publishers, 1998
368 Huang X, Qiu W. The dimension paradox in parameter space of cosine family. Chin Ann Math Ser B, 2020, 41: 645–656
369 Hubbard J H. The Hénon mapping in the complex domain. In: Chaotic Dynamics and Fractals. Notes Rep Math Sci Engrg, vol. 2. Orlando: Academic Press, 1986, 101–111
370 Hubbard J H. Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci: Three theorems of J-C Yoccoz. In: Topological Methods in Modern Mathematics. Houston: Publish or Perish, 1993, 467–511
371 Hubbard J H. Teichmüller Theory and Applications to Geometry, Topology, and Dynamics, vol. 2. Surface Homeomorphisms and Rational Functions. Ithaca: Matrix Editions, 2016
372 Hubbard J H, Schleicher D. The spider algorithm. In: Complex Dynamical Systems. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 49. Providence: Amer Math Soc, 1994, 155–180
373 Hubbard J H, Schleicher D. Multicorns are not path connected. In: Frontiers in Complex Dynamics. Princeton Mathematical Series, vol. 51. Princeton: Princeton Univ Press, 2014, 73–102
374 Hubbard J H, Schleicher D, Shishikura M. Exponential Thurston maps and limits of quadratic differentials. J Amer Math Soc, 2009, 22: 77–117
375 Hubbard J H, Schleicher D, Sutherland S. How to find all roots of complex polynomials by Newton's method. Invent Math, 2001, 146: 1–33
376 Inou H. Combinatorics and topology of straightening maps, II: Discontinuity. arXiv:0903.4289v4, 2018
377 Inou H, Kiwi J. Combinatorics and topology of straightening maps, I: Compactness and bijectivity. Adv Math, 2012, 231: 2666–2733
378 Inou H, Mukherjee S. Non-landing parameter rays of the multicorns. Invent Math, 2016, 204: 869–893
379 Inou H, Shishikura M. The renormalization for parabolic fixed points and their perturbation. Https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~mitsu/pararenorm/, 2008
380 Jakobson M V. Smooth mappings of the circle into itself. Mat Sb (NS), 1971, 85: 163–188
381 Jakobson M V. Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. Comm Math Phys, 1981, 81: 39–88
382 Jaksztas L. On the derivative of the Hausdorff dimension of the quadratic Julia sets. Trans Amer Math Soc, 2011, 363: 5251–5291
383 Jaksztas L, Zinsmeister M. On the derivative of the Hausdorff dimension of the Julia sets for z^2+c, $c \in \mathbb{R}$ at parabolic parameters with two petals. Adv Math, 2020, 363: 106981
384 Jenkinson O, Pollicott M. Calculating Hausdorff dimension of Julia sets and Kleinian limit sets. Amer J Math, 2002, 124: 495–545
385 Ji Z. Non-wandering Fatou components for strongly attracting polynomial skew products. J Geom Anal, 2020, 30: 124–152

386 Ji Z. Structure of Julia sets for post-critically finite endomorphisms on $\mathbb{P}^2$. Math Ann, 2022, 384: 857–880
387 Ji Z, Xie J. Homoclinic orbits, multiplier spectrum and rigidity theorems in complex dynamics. Forum Math Pi, 2023, 11: 37 pp
388 Jiang Y. Infinitely renormalizable quadratic polynomials. Trans Amer Math Soc, 2000, 352: 5077–5091
389 Jiang Y. Local connectivity of the Mandelbrot set at certain infinitely renormalizable points. In: Complex Dynamics and Related Topics: Lectures from the Morningside Center of Mathematics. New Studies in Advanced Mathematics, vol. 5. Somerville: Int Press, 2003, 236–264
390 Jiang Y, Mitra S. Douady-Earle section, holomorphic motions, and some applications. In: Quasiconformal Mappings, Riemann Surfaces, and Teichmüller Spaces. Contemporary Mathematics, vol. 575. Providence: Amer Math Soc, 2012, 219–251
391 Julia G. Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. J Math Pures Appl (9), 1918, 8: 47–246
392 Jung W. The Thurston algorithm for quadratic matings. arXiv:1706.04177, 2017
393 Kahn J. Holomorphic removability of Julia sets. arXiv:9812164, 1998
394 Kahn J. *A priori* bounds for some infinitely renormalizable quadratics I: Bounded primitive combinatorics. arXiv:0609045, 2006
395 Kahn J, Lyubich M. *A priori* bounds for some infinitely renormalizable quadratics II: Decorations. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2008, 41: 57–84
396 Kahn J, Lyubich M. The quasi-additivity law in conformal geometry. Ann of Math (2), 2009, 169: 561–593
397 Kahn J, Lyubich M. Local connectivity of Julia sets for unicritical polynomials. Ann of Math (2), 2009, 170: 413–426
398 Kahn J, Lyubich M. *A priori* bounds for some infinitely renormalizable quadratics III: Molecules. In: Complex Dynamics. Wellesley: A K Peters, 2009, 229–254
399 Kallunki S, Koskela P. Exceptional sets for the definition of quasiconformality. Amer J Math, 2000, 122: 735–743
400 Kameyama A. The Thurston equivalence for postcritically finite branched coverings. Osaka J Math, 2001, 38: 565–610
401 Kapiamba A. An optimal Yoccoz inequality for near-parabolic quadratic polynomials. arXiv:2103.03211v2, 2022
402 Kapiamba A. Non-degenerate near-parabolic renormalization. arXiv:2210.06647, 2022
403 Karpińska B. Hausdorff dimension of the hairs without endpoints for $\lambda \exp z$. C R Acad Sci Ser I Math, 1999, 328: 1039–1044
404 Karpińska B. Area and Hausdorff dimension of the set of accessible points of the Julia sets of λe^z and $\lambda \sin z$. Fund Math, 1999, 159: 269–287
405 Katok A, Hasselblatt B. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 54. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1995
406 Kawahira T. Semiconjugacies between the Julia sets of geometrically finite rational maps. Ergodic Theory Dynam Systems, 2003, 23: 1125–1152
407 Kawahira T. Semiconjugacies between the Julia sets of geometrically finite rational maps II. In: Dynamics on the Riemann Sphere. Zürich: Eur Math Soc, 2006, 131–138
408 Keen L, Zhang G. Bounded-type Siegel disks of a one-dimensional family of entire functions. Ergodic Theory Dynam Systems, 2009, 29: 137–164
409 Kinneberg K. Conformal dimension and boundaries of planar domains. Trans Amer Math Soc, 2017, 369: 6511–6536
410 Kisaka M, Shishikura M. On multiply connected wandering domains of entire functions. In: Transcendental Dynamics and Complex Analysis. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 348. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2008, 217–250
411 Kiwi J. Non-accessible critical points of Cremer polynomials. Ergodic Theory Dynam Systems, 2000, 20: 1391–1403
412 Kiwi J. Real laminations and the topological dynamics of complex polynomials. Adv Math, 2004, 184: 207–267
413 Kiwi J. Puiseux series dynamics of quadratic rational maps. Israel J Math, 2014, 201: 631–700
414 Kiwi J, Rees M. Counting hyperbolic components. J Lond Math Soc (2), 2013, 88: 669–698
415 Koch S, Pilgrim K M, Selinger N. Pullback invariants of Thurston maps. Trans Amer Math Soc, 2016, 368: 4621–4655
416 Koenigs G. Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 1884, 1: 3–41
417 Kotus J, Urbański M. Fractal measures and ergodic theory of transcendental meromorphic functions. In: Transcendental Dynamics and Complex Analysis. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 348. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2008, 251–316
418 Kozlovski O. Getting rid of the negative Schwarzian derivative condition. Ann of Math (2), 2000, 152: 743–762
419 Kozlovski O. Axiom A maps are dense in the space of unimodal maps in the C^k topology. Ann of Math (2), 2003, 157: 1–43
420 Kozlovski O, Shen W, van Strien S. Rigidity for real polynomials. Ann of Math (2), 2007, 165: 749–841

421 Kozlovski O, Shen W, van Strien S. Density of hyperbolicity in dimension one. Ann of Math (2), 2007, 166: 145–182
422 Kozlovski O, van Strien S. Local connectivity and quasi-conformal rigidity of non-renormalizable polynomials. Proc Lond Math Soc (3), 2009, 99: 275–296
423 Kriete H. Progress in Holomorphic Dynamics. Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 387. Harlow: Longman, 1998
424 Lanford O E III, Yampolsky M. Fixed Point of the Parabolic Renormalization Operator. Springer Briefs in Mathematics. Cham: Springer, 2014
425 Lattès S. Sur l'itération des substitutions rationnelles et les fonctions de Poincaré. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1918, 166: 26–28
426 Lavaurs P. Systèmes dynamiques holomorphes: Explosion de points periodiques paraboliques. PhD Thesis. Orsay: Université de Paris-Sud, 1989
427 Lazebnik K. Several constructions in the Eremenko-Lyubich class. J Math Anal Appl, 2017, 448: 611–632
428 Leau L. Étude sur les équations fonctionnelles à une ou à plusieurs variables. Ann Fac Sci Toulouse Math (6), 1897, 11: E1–E110
429 Lee S Y, Lyubich M, Makarov N G, et al. Schwarz reflections and anti-holomorphic correspondences. Adv Math, 2021, 385: 107766
430 Lehto O, Virtanen K I. Quasiconformal Mappings in the Plane, 2nd ed. New York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1973
431 Letherman S, Schleicher D, Wood R. The $(3n+1)$-problem and holomorphic dynamics. Exp Math, 1999, 8: 241–251
432 Levin G. On Pommerenke's inequality for the eigenvalues of fixed points. Colloq Math, 1991, 62: 167–177
433 Levin G. On backward stability of holomorphic dynamical systems. Fund Math, 1998, 158: 97–107
434 Levin G. Rigidity and non-local connectivity of Julia sets of some quadratic polynomials. Comm Math Phys, 2011, 304: 295–328
435 Levin G. Addendum to: Rigidity and non-local connectivity of Julia sets of some quadratic polynomials. Comm Math Phys, 2014, 325: 1171–1178
436 Levin G, Przytycki F. When do two rational functions have the same Julia set? Proc Amer Math Soc, 1997, 125: 2179–2190
437 Levin G, Shen W, van Strien S. Positive transversality via transfer operators and holomorphic motions with applications to monotonicity for interval maps. Nonlinearity, 2020, 33: 3970–4012
438 Levin G, van Strien S. Local connectivity of the Julia set of real polynomials. Ann of Math (2), 1998, 147: 471–541
439 Levin G, van Strien S. Bounds for maps of an interval with one critical point of inflection type. II. Invent Math, 2000, 141: 399–465
440 Levin G, van Strien S. Total disconnectedness of Julia sets and absence of invariant linefields for real polynomials. In: Géométrie Complexe et Systèmes Dynamiques. Astérisqué, no. 261. Paris: Soc Math France, 2000, 161–172
441 Levy S. Critically finite rational maps. PhD Thesis. Princeton: Princeton University, 1985
442 Li H, Rivera-Letelier J. Equilibrium states of weakly hyperbolic one-dimensional maps for Hölder potentials. Comm Math Phys, 2014, 328: 397–419
443 Li H, Shen W. Dimensions of the Julia sets of rational maps with the backward contraction property. Fund Math, 2008, 198: 165–176
444 Li S, Shen W. Hausdorff dimension of Cantor attractors in one-dimensional dynamics. Invent Math, 2008, 171: 345–387
445 Li T. A monotonicity conjecture for the entropy of Hubbard trees. PhD Thesis. New York: State University of New York at Stony Brook, 2007
446 Li Z. Introduction to Complex Analysis (in Chinese). Beijing: Peking Univ Press, 2004 [李忠. 复分析导引. 北京: 北京大学出版社, 2004]
447 Li Z. Quasiconformal Mappings and Teichmüller Spaces (in Chinese). Beijing: Peking Univ Press, 2013 [李忠. 拟共形映射与 Teichmüller 空间. 北京: 北京大学出版社, 2013]
448 Li Z. Ergodic Theory of Expanding Thurston Maps. Atlantis Studies in Dynamical Systems, vol. 4. Paris: Atlantis Press, 2017
449 Lim W R. *A priori* bounds and degeneration of Herman rings with bounded type rotation number. arXiv:2302.07794, 2023
450 Lim W R. Rigidity of J-rotational rational maps and critical quasicircle maps. arXiv:2308.07217, 2023
451 Lindsey K A, Younsi M. Fekete polynomials and shapes of Julia sets. Trans Amer Math Soc, 2019, 371: 8489–8511
452 Lu H, Qiu W, Yang F. Asymptotics of the Hausdorff dimensions of the Julia sets of McMullen maps with error bounds. Nonlinearity, 2022, 35: 787–816
453 Luo J. Combinatorics and holomorphic dynamics: Captures, matings, Newton's method. PhD Thesis. New York:

Cornell University, 1995
454 Luo Y. On hyperbolic rational maps with finitely connected Fatou sets. J Lond Math Soc (2), 2022, 105: 500–542
455 Luo Y. On geometrically finite degenerations II: Convergence and divergence. Trans Amer Math Soc, 2022, 375: 3469–3527
456 Luo Y. On geometrically finite degenerations I: Boundaries of main hyperbolic components. J Eur Math Soc (JEMS), 2023, 2023: 69 pp
457 Lü Y. Complex analytic dynamical systems (in Chinese). Beijing: Science Press, 1995 [吕以辇. 复解析动力系统. 北京: 科学出版社, 1995]
458 Lyubich M. Typical behavior of trajectories of the rational mapping of a sphere. Dokl Akad Nauk SSSR, 1983, 268: 29–32
459 Lyubich M. Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere. Ergodic Theory Dynam Systems, 1983, 3: 351–385
460 Lyubich M. Some typical properties of the dynamics of rational mappings. Uspekhi Mat Nauk, 1983, 38: 197–198
461 Lyubich M. Dynamics of rational transformations: Topological picture. Uspekhi Mat Nauk, 1986, 41: 35–95
462 Lyubich M. The measurable dynamics of the exponential. Sibirsk Mat Zh, 1987, 28: 111–127
463 Lyubich M. On the Lebesgue measure of the Julia set of a quadratic polynomial. arXiv:9201285, 1991
464 Lyubich M. Ergodic theory for smooth one-dimensional dynamical systems. arXiv:9201286, 1991
465 Lyubich M. Combinatorics, geometry and attractors of quasi-quadratic maps. Ann of Math (2), 1994, 140: 347–404
466 Lyubich M. Renormalization ideas in conformal dynamics. In: Current Developments in Mathematics. Cambridge: Int Press, 1994, 155–190
467 Lyubich M. Dynamics of quadratic polynomials, I-II. Acta Math, 1997, 178: 185–297
468 Lyubich M. How big is the set of infinitely renormalizable quadratics? In: Voronezh Winter Math Schools, American Mathematical Society Translations Series 2, vol. 184. Providence: Amer Math Soc, 1998, 131–143
469 Lyubich M. Feigenbaum-Coullet-Tresser universality and Milnor's hairiness conjecture. Ann of Math (2), 1999, 149: 319–420
470 Lyubich M. Dynamics of quadratic polynomials III. Parapuzzle and SBR measures. In: Géométrie Complexe et Systèmes Dynamiques. Astérisqué, no. 261. Paris: Soc Math France, 2000, 173–200
471 Lyubich M. Almost every real quadratic map is either regular or stochastic. Ann of Math (2), 2002, 156: 1–78
472 Lyubich M. Conformal Geometry and Dynamics of Quadratic Polynomials, vols. I–II. Https://www.math.stonybrook.edu/~mlyubich/book.pdf, 2022
473 Lyubich M, Minsky Y. Laminations in holomorphic dynamics. J Differential Geom, 1997, 47: 17–94
474 Lyubich M, Yampolsky M. Dynamics of quadratic polynomials: Complex bounds for real maps. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1997, 47: 1219–1255
475 Lyubich M, Yampolsky M. Holomorphic Dynamics and Renormalization. Fields Institute Communications, vol. 53. Providence: Amer Math Soc, 2008
476 Ma L. A continuity result on quadratic matings with respect to parameters of odd denominator rationals. Math Proc Cambridge Philos Soc, 2019, 167: 369–388
477 Mackay J M, Tyson J T. Conformal Dimension. University Lecture Series, vol. 54. Providence: Amer Math Soc, 2010
478 Makienko P M. Unbounded components in parameter space of rational maps. Conform Geom Dyn, 2000, 4: 1–21
479 Makienko P M. Remarks on the Ruelle operator and the invariant line fields problem: II. Ergodic Theory Dynam Systems, 2005, 25: 1561–1581
480 Mañé R. On the instability of Herman rings. Invent Math, 1985, 81: 459–471
481 Mañé R. A proof of the C^1 stability conjecture. Inst Hautes Études Sci Publ Math, 1988, 66: 161–210
482 Mañé R. On a theorem of Fatou. Bol Soc Brasil Mat (NS), 1993, 24: 1–11
483 Mañé R, da Rocha L F. Julia sets are uniformly perfect. Proc Amer Math Soc, 1992, 116: 251–257
484 Mañé R, Sad P, Sullivan D. On the dynamics of rational maps. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 1983, 16: 193–217
485 Martens M. Distortion results and invariant Cantor sets of unimodal maps. Ergodic Theory Dynam Systems, 1994, 14: 331–349
486 Martens M, Nowicki T. Invariant measures for typical quadratic maps. In: Géométrie Complexe et Systèmes Dynamiques. Astérisqué, no. 261. Paris: Soc Math France, 2000, 239–252
487 Martí-Pete D. The escaping set of transcendental self-maps of the punctured plane. Ergodic Theory Dynam Systems, 2018, 38: 739–760
488 Martí-Pete D, Rempe L, Waterman J. Eremenko's conjecture, wandering Lakes of Wada, and maverick points. arXiv:2108.10256v3, 2022

489 Martí-Pete D, Rempe L, Waterman J. Bounded Fatou and Julia components of meromorphic functions. arXiv:2204.11781v2, 2023
490 Martí-Pete D, Shishikura M. Wandering domains for entire functions of finite order in the Eremenko-Lyubich class. Proc Lond Math Soc (3), 2020, 120: 155–191
491 Mattila P. Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 44. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1995
492 Mayer J C. An explosion point for the set of endpoints of the Julia set of $\lambda\exp(z)$. Ergodic Theory Dynam Systems, 1990, 10: 177–183
493 Mayer J C, Rogers J T. Indecomposable continua and the Julia sets of polynomials. Proc Amer Math Soc, 1993, 117: 795–802
494 Mayer V, Urbański M. Ergodic properties of semi-hyperbolic functions with polynomial Schwarzian derivative. Proc Edinb Math Soc (2), 2010, 53: 471–502
495 McMullen C T. Area and Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions. Trans Amer Math Soc, 1987, 300: 329–342
496 McMullen C T. Automorphisms of rational maps. In: Holomorphic Functions and Moduli, vol. I. Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. 10. New York: Springer, 1988, 31–60
497 McMullen C T. Frontiers in complex dynamics. Bull Amer Math Soc (NS), 1994, 31: 155–172
498 McMullen C T. The classification of conformal dynamical systems. In: Current Developments in Mathematics. Cambridge: Int Press, 1994, 323–360
499 McMullen C T. Complex dynamics and renormalization. Annals of Mathematics Studies, vol. 135. Princeton: Princeton Univ Press, 1994
500 McMullen C T. Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle. Annals of Mathematics Studies, vol. 142. Princeton: Princeton Univ Press, 1996
501 McMullen C T. Self-similarity of Siegel disks and Hausdorff dimension of Julia sets. Acta Math, 1998, 180: 247–292
502 McMullen C T. Hausdorff dimension and conformal dynamics, III: Computation of dimension. Amer J Math, 1998, 120: 691–721
503 McMullen C T. Hausdorff dimension and conformal dynamics II: Geometrically finite rational maps. Comment Math Helv, 2000, 75: 535–593
504 McMullen C T. The Mandelbrot set is universal. In: The Mandelbrot Set, Theme and Variations. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000, 1–17
505 McMullen C T. Thermodynamics, dimension and the Weil-Petersson metric. Invent Math, 2008, 173: 365–425
506 McMullen C T, Sullivan D P. Quasiconformal Homeomorphisms and Dynamics III. The Teichmüller Space of a Holomorphic Dynamical System. Adv Math, 1998, 135: 351–395
507 Meyer D. Expanding Thurston maps as quotients. arXiv:0910.2003v2, 2012
508 Meyer D. Unmating of rational maps: Sufficient criteria and examples. In: Frontiers in Complex Dynamics. Princeton Mathematical Series, vol. 51. Princeton: Princeton Univ Press, 2014, 197–233
509 Mihaljević-Brandt H. A landing theorem for dynamic rays of geometrically finite entire functions. J Lond Math Soc (2), 2010, 81: 696–714
510 Milnor J. On the concept of attractor. Comm Math Phys, 1985, 99: 177–195
511 Milnor J. Self-similarity and hairiness in the Mandelbrot set. In: Computers in Geometry and Topology. Lecture Notes in Pure Appl Math, vol. 114. New York: Dekker, 1989, 211–257
512 Milnor J. Remarks on iterated cubic maps. Exp Math, 1992, 1: 5–24
513 Milnor J. Geometry and dynamics of quadratic rational maps. With an appendix by the author and Tan L. Exp Math, 1993, 2: 37–83
514 Milnor J. On rational maps with two critical points. Exp Math, 2000, 9: 481–522
515 Milnor J. Periodic orbits, externals rays and the Mandelbrot set: An expository account. In: Géométrie Complexe et Systèmes Dynamiques. Astérisqué, no. 261. Paris: Soc Math France, 2000, 277–333
516 Milnor J. Local connectivity of Julia sets: Expository lectures. In: The Mandelbrot Set, Theme and Variations. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000, 67–116
517 Milnor J. Pasting together Julia sets: A worked out example of mating. Exp Math, 2004, 13: 55–92
518 Milnor J. On Lattès maps. In: Dynamics on the Riemann Sphere. Zürich: Eur Math Soc, 2006, 9–43
519 Milnor J. Dynamics in One Complex Variable, 3rd ed. Annals of Mathematics Studies, vol. 160. Princeton: Princeton Univ Press, 2006
520 Milnor J. Cubic polynomial maps with periodic critical orbit I. In: Complex Dynamics. Wellesley: A K Peters, 2009, 333–411

521 Milnor J. Hyperbolic components. With an appendix by Poirier A. In: Conformal Dynamics and Hyperbolic Geometry. Contemporary Mathematics, vol. 573. Providence: Amer Math Soc, 2012, 183–232

522 Milnor J. Hyperbolic component boundaries. Talk at Gyeongju. Https://www.math.stonybrook.edu/~jack/HCBkoreaPrint.pdf, 2014

523 Milnor J, Thurston W. On iterated maps of the interval. In: Dynamical Systems. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1342. Berlin: Springer, 1988, 465–563

524 Milnor J, Tresser C. On entropy and monotonicity for real cubic maps. Comm Math Phys, 2000, 209: 123–178

525 Misiurewicz M. On iterates of e^z. Ergodic Theory Dynam Systems, 1981, 1: 103–106

526 Misiurewicz M. Absolutely continuous measures for certain maps of an interval. Inst Hautes Études Sci Publ Math, 1981: 17–51

527 Misiurewicz M, Szlenk W. Entropy of piecewise monotone mappings. Studia Math, 1980, 67: 45–63

528 Morosawa S. On the residual Julia sets of rational functions. Ergodic Theory Dynam Systems, 1997, 17: 205–210

529 Morosawa S. Local connectedness of Julia sets for transcendental entire functions. In: Nonlinear Analysis and Convex Analysis. River Edge: World Sci Publ, 1999, 266–273

530 Morosawa S. Julia sets of subhyperbolic rational functions. Complex Var Theory Appl, 2000, 41: 151–162

531 Morosawa S, Nishimura Y, Taniguchi M, et al. Holomorphic Dynamics. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 66. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000

532 Naĭshul' V A. Topological invariants of analytic and area-preserving mappings and their application to analytic differential equations in $\mathbf{C}^2$ and $\mathbf{C}P^2$. Trudy Moskov Mat Obshch, 1982, 44: 235–245

533 Nakane S. Connectedness of the tricorn. Ergodic Theory Dynam Systems, 1993, 13: 349–356

534 Nayak T. Herman rings of meromorphic maps with an omitted value. Proc Amer Math Soc, 2016, 144: 587–597

535 Newhouse S E. Nondensity of axiom A(a) on S^2. In: Global Analysis. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 14. Providence: Amer Math Soc, 1970, 191–202

536 Ng T W. Permutable entire functions and their Julia sets. Math Proc Cambridge Philos Soc, 2001, 131: 129–138

537 Nicks D A, Rippon P J, Stallard G M. Baker's conjecture for functions with real zeros. Proc Lond Math Soc (3), 2018, 117: 100–124

538 Nie H. Berkovich dynamics of Newton maps. Math Z, 2023, 304: 67

539 Nie H, Pilgrim K M. Bounded hyperbolic components of bicritical rational maps. J Mod Dyn, 2022, 18: 533–553

540 Nowicki T, van Strien S. Invariant measures exist under a summability condition for unimodal maps. Invent Math, 1991, 105: 123–136

541 Okuyama Y. Linearization problem on structurally finite entire functions. Kodai Math J, 2005, 28: 347–358

542 Osborne J W. Spiders' webs and locally connected Julia sets of transcendental entire functions. Ergodic Theory Dynam Systems, 2013, 33: 1146–1161

543 Osborne J W, Sixsmith D J. On the set where the iterates of an entire function are neither escaping nor bounded. Ann Acad Sci Fenn Math, 2016, 41: 561–578

544 Oudkerk R. The parabolic implosion: Lavaurs maps and strong convergence for rational maps. In: Value Distribution Theory and Complex Dynamics. Contemporary Mathematics, vol. 303. Providence: Amer Math Soc, 2002, 79–105

545 Pacifico M J, Guarino P. New Trends in One-Dimensional Dynamics. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. 285. Cham: Springer, 2019

546 Palis J. A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors. In: Géométrie Complexe et Systèmes Dynamiques. Astérisqué, no. 261. Paris: Soc Math France, 2000, 335–347

547 Pansu P. Dimension conforme et sphére á l'infini des variétés á courbure négative. Ann Acad Sci Fenn Ser I Math, 1989, 14: 177–212

548 Pardo-simón L. Orbifold expansion and entire functions with bounded Fatou components. Ergodic Theory Dynam Systems, 2022, 42: 1807–1846

549 Pardo-Simón L, Sixsmith D J. Wandering domains with nearly bounded orbits. arXiv:2307.16682, 2023

550 Park I. Julia sets with Ahlfors regular conformal dimension one. PhD Thesis. Bloomington: Indiana University, 2021

551 Peitgen H-O, Saupe D. The Science of Fractal Images. New York: Springer-Verlag, 1988

552 Peng W, Qiu W, Roesch P, et al. A tableau approach of the KSS nest. Conform Geom Dyn, 2010, 14: 35–67

553 Peng W, Tan L. Combinatorial rigidity of unicritical maps. Sci China Math, 2010, 53: 831–848

554 Peng W, Tan L. Quasi-conformal rigidity of multicritical maps. Trans Amer Math Soc, 2015, 367: 1151–1182

555 Peng W, Yin Y, Zhai Y. Density of hyperbolicity for rational maps with Cantor Julia sets. Ergodic Theory Dynam Systems, 2012, 32: 1711–1726

556 Pérez-Marco R. Sur la dynamique des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$ et des difféomorphismes analytiques du cercle. PhD Thesis. Orsay: Université de Paris-Sud, 1990

557 Pérez-Marco R. Solution complète au problème de Siegel de linéarisation d'une application holomorphe au voisinage d'un point fixe (d'après J-C Yoccoz). Astérisqué, 1992: 273–310
558 Pérez-Marco R. Sur les dynamiques holomorphes non linéarisables et une conjecture de V. I. Arnold. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 1993, 26: 565–644
559 Pérez-Marco R. Sur une question de Dulac et Fatou. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1995, 321: 1045–1048
560 Pérez-Marco R. Fixed points and circle maps. Acta Math, 1997, 179: 243–294
561 Petersen C L. On the Pommerenke-Levin-Yoccoz inequality. Ergodic Theory Dynam Systems, 1993, 13: 785–806
562 Petersen C L. Local connectivity of some Julia sets containing a circle with an irrational rotation. Acta Math, 1996, 177: 163–224
563 Petersen C L. No elliptic limits for quadratic maps. Ergodic Theory Dynam Systems, 1999, 19: 127–141
564 Petersen C L. The Herman-Światek theorems with applications. In: The Mandelbrot Set, Theme and Variations. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000, 211–225
565 Petersen C L. On holomorphic critical quasi-circle maps. Ergodic Theory Dynam Systems, 2004, 24: 1739–1751
566 Petersen C L, Meyer D. On the notions of mating. Ann Fac Sci Toulouse Math (6), 2012, 21: 839–876
567 Petersen C L, Roesch P. The parabolic Mandelbrot set. arXiv:2107.09407, 2021
568 Petersen C L, Tan L. Analytic coordinates recording cubic dynamics. In: Complex Dynamics. Wellesley: A K Peters, 2009, 413–449
569 Petersen C L, Zakeri S. On the Julia set of a typical quadratic polynomial with a Siegel disk. Ann of Math (2), 2004, 159: 1–52
570 Pilgrim K M. Cylinders for iterated rational maps. PhD Thesis. Berkeley: University of California, 1994
571 Pilgrim K M. Canonical Thurston obstructions. Adv Math, 2001, 158: 154–168
572 Pilgrim K M. An algebraic formulation of Thurston's combinatorial equivalence. Proc Amer Math Soc, 2003, 131: 3527–3534
573 Pilgrim K M, Tan L. Combining rational maps and controlling obstructions. Ergodic Theory Dynam Systems, 1998, 18: 221–245
574 Pilgrim K M, Tan L. On disc-annulus surgery of rational maps. In: Dynamical Systems, Proceedings of the International Conference in Honor of Professor Shantao Liao. Singapore: World Scientific, 1999, 237–250
575 Pilgrim K M, Tan L. Rational maps with disconnected Julia set. In: Géométrie Complexe et Systèmes Dynamiques. Astérisqué, no 261. Paris: Soc Math France, 2000, 349–384
576 Poirier A. Critical portraits for postcritically finite polynomials. Fund Math, 2009, 203: 107–163
577 Poirier A. Hubbard trees. Fund Math, 2010, 208: 193–248
578 Pommerenke C. On conformal mapping and iteration of rational functions. Complex Var Theory Appl, 1986, 5: 117–126
579 Prado E. Ergodicity of conformal measures for unimodal polynomials. Conform Geom Dyn, 1998, 2: 29–44
580 Przytycki F. Iterations of holomorphic Collet-Eckmann maps: Conformal and invariant measures. Appendix: On non-renormalizable quadratic polynomials. Trans Amer Math Soc, 1998, 350: 717–742
581 Przytycki F. On the hyperbolic Hausdorff dimension of the boundary of a basin of attraction for a holomorphic map and of quasirepellers. Bull Pol Acad Sci Math, 2006, 54: 41–52
582 Przytycki F. Thermodynamic formalism methods in one-dimensional real and complex dynamics. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro, 2018, vol. III. Invited Lectures. Hackensack: World Sci Publ, 2018, 2087–2112
583 Przytycki F, Rivera-Letelier J. Statistical properties of topological Collet-Eckmann maps. Ann Sci École Norm Sup (4), 2007, 40: 135–178
584 Przytycki F, Rohde S. Porosity of Collet-Eckmann Julia sets. Fund Math, 1998, 155: 189–199
585 Przytycki F, Rohde S. Rigidity of holomorphic Collet-Eckmann repellers. Ark Mat, 1999, 37: 357–371
586 Przytycki F, Urbański M. Conformal fractals: Ergodic theory methods. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 371. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2010
587 Przytycki F, Zdunik A. On Hausdorff dimension of polynomial not totally disconnected Julia sets. Bull Lond Math Soc, 2021, 53: 1674–1691
588 Qiao J. Julia sets of entire functions and their derivatives. Chinese Sci Bull, 1994, 39: 186–188
589 Qiao J. The Julia set of the mapping $z \mapsto z\exp(z+\mu)$. Chinese Sci Bull, 1994, 39: 529–533
590 Qiao J. The buried points on the Julia sets of rational and entire functions. Sci China Ser A, 1995, 38: 1409–1419
591 Qiao J. Topological complexity of Julia sets. Sci China Ser A, 1997, 40: 1158–1165
592 Qiao J. On limiting directions of Julia sets. Ann Acad Sci Fenn Math, 2001, 26: 391–399
593 Qiao J. Complex Dynamics of Renormalization Transformations (in Chinese). Beijing: Science Press, 2010 [乔建永.

重整化变换的复动力学. 北京: 科学出版社, 2010]
594 Qiao J. Julia Sets and Complex Singularities of Free Energies. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 234. Providence: Amer Math Soc, 2015
595 Qiao J, Li Y. On connectivity of Julia sets of Yang-Lee zeros. Comm Math Phys, 2001, 222: 319–326
596 Qiao J, Qu H. Area of Julia sets of non-renormalizable cubic polynomials. arXiv:2004.08088, 2020
597 Qiao J, Yin Y, Gao J. Feigenbaum Julia sets of singularities of free energy. Ergodic Theory Dynam Systems, 2010, 30: 1573–1591
598 Qiu W. Hausdorff dimension of the M-set of $\lambda\exp(z)$. Acta Math Sin (Engl Ser), 1994, 10: 362–368
599 Qiu W, Roesch P, Wang X, et al. Hyperbolic components of McMullen maps. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2015, 48: 703–737
600 Qiu W, Roesch P, Wang Y. Escape components of McMullen maps. Ergodic Theory Dynam Systems, 2023, 43: 3745–3775
601 Qiu W, Wang X, Yin Y. Dynamics of McMullen maps. Adv Math, 2012, 229: 2525–2577
602 Qiu W, Wang Y. Intersections between boundaries of bounded hyperbolic components of cubic polynomials. Math Z, 2023, 305: 36pp
603 Qiu W, Wang Y, Yang J, et al. On metric properties of limit sets of contractive analytic non-Archimedean dynamical systems. J Math Anal Appl, 2014, 414: 386–401
604 Qiu W, Yang F. Quasisymmetric uniformization and Hausdorff dimensions of Cantor circle Julia sets. Trans Amer Math Soc, 2021, 374: 5191–5223
605 Qiu W, Yang F, Yin Y. Rational maps whose Julia sets are Cantor circles. Ergodic Theory Dynam Systems, 2015, 35: 499–529
606 Qiu W, Yang F, Zeng J. Quasisymmetric geometry of Sierpiński carpet Julia sets. Fund Math, 2019, 244: 73–107
607 Qiu W, Yin Y. Proof of the Branner-Hubbard conjecture on Cantor Julia sets. Sci China Ser A, 2009, 52: 45–65
608 Rees M. Positive measure sets of ergodic rational maps. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 1986, 19: 383–407
609 Rees M. The exponential map is not recurrent. Math Z, 1986, 191: 593–598
610 Rees M. Realization of matings of polynomials as rational maps of degree two. Manuscript, 1986
611 Rees M. Components of degree two hyperbolic rational maps. Invent Math, 1990, 100: 357–382
612 Rees M. A partial description of parameter space of rational maps of degree two: Part I. Acta Math, 1992, 168: 11–87
613 Rees M. A partial description of the parameter space of rational maps of degree two: Part II. Proc Lond Math Soc (3), 1995, s3-70: 644–690
614 Rees M. Views of Parameter Space: Topographer and Resident. Astérisqué, no. 288. Paris: Soc Math France, 2003
615 Rees M. One hundred years of complex dynamics. Proc R Soc A, 2016, 472: 20150453
616 Rempe L. Topological dynamics of exponential maps on their escaping sets. Ergodic Theory Dynam Systems, 2006, 26: 1939–1975
617 Rempe L. On nonlanding dynamic rays of exponential maps. Ann Acad Sci Fenn Math, 2007, 32: 353–369
618 Rempe L. On a question of Eremenko concerning escaping components of entire functions. Bull Lond Math Soc, 2007, 39: 661–666
619 Rempe L. Siegel disks and periodic rays of entire functions. J Reine Angew Math, 2008, 624: 81–102
620 Rempe L. Rigidity of escaping dynamics for transcendental entire functions. Acta Math, 2009, 203: 235–267
621 Rempe L. Hyperbolic dimension and radial Julia sets of transcendental functions. Proc Amer Math Soc, 2009, 137: 1411–1420
622 Rempe L. Hyperbolic entire functions with full hyperbolic dimension and approximation by Eremenko-Lyubich functions. Proc Lond Math Soc (3), 2014, 108: 1193–1225
623 Rempe L. Arc-like continua, Julia sets of entire functions, and Eremenko's Conjecture. arXiv:1610.06278v4, 2019
624 Rempe L, Schleicher D. Bifurcation loci of exponential maps and quadratic polynomials: Local connectivity, triviality of fibers, and density of hyperbolicity. In: Holomorphic Dynamics and Renormalization. Fields Institute Communications, vol. 53. Providence: Amer Math Soc, 2008, 177–196
625 Rempe L, Schleicher D. Bifurcations in the space of exponential maps. Invent Math, 2009, 175: 103–135
626 Rempe L, van Strien S. Absence of line fields and Mañé's theorem for nonrecurrent transcendental functions. Trans Amer Math Soc, 2011, 363: 203
627 Rempe L, van Strien S. Density of hyperbolicity for classes of real transcendental entire functions and circle maps. Duke Math J, 2015, 164: 1079–1137
628 Ren F. Complex Analytic Dynamical Systems (in Chinese). Shanghai: Fudan University Press, 1997 [任福尧. 复解析动力系统. 上海: 复旦大学出版社, 1997]
629 Ren H, Shen W. A Dichotomy for the Weierstrass-type functions. Invent Math, 2021, 226: 1057–1100

630 Rippon P J. Baker domains. In: Transcendental Dynamics and Complex Analysis. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 348. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2008, 371–395
631 Rippon P J, Stallard G M. On questions of Fatou and Eremenko. Proc Amer Math Soc, 2005, 133: 1119–1126
632 Rippon P J, Stallard G M. Transcendental Dynamics and Complex Analysis: A Tribute to Noel Baker. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 348. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2008
633 Rippon P J, Stallard G M. Boundaries of escaping Fatou components. Proc Amer Math Soc, 2011, 139: 2807–2820
634 Rippon P J, Stallard G M. Fast escaping points of entire functions. Proc Lond Math Soc (3), 2012, 105: 787–820
635 Risler E. Linéarisation des perturbations holomorphes des rotations et applications. Mémoirs de Société Mathématique de France, no. 77. Paris: Soc Math France, 1999
636 Ritt J F. On the iteration of rational functions. Trans Amer Math Soc, 1920, 21: 348–356
637 Ritt J F. Permutable rational functions. Trans Amer Math Soc, 1923, 25: 399–448
638 Rivera-Letelier J. Rational maps with decay of geometry: Rigidity, Thurston's algorithm and local connectivity. Https://www.math.stonybrook.edu/preprints/ims00-09.pdf, 2000
639 Rivera-Letelier J. On the continuity of Hausdorff dimension of Julia sets and similarity between the Mandelbrot set and Julia sets. Fund Math, 2001, 170: 287–317
640 Rivera-Letelier J. A connecting lemma for rational maps satisfying a no-growth condition. Ergodic Theory Dynam Systems, 2007, 27: 595–636
641 Rivera-Letelier J, Shen W. Statistical properties of one-dimensional maps under weak hyperbolicity assumptions. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 2014, 47: 1027–1083
642 Rocha M M. Herman rings of elliptic functions. Arnold Math J, 2020, 6: 551–570
643 Roesch P. Holomorphic motions and puzzles (following M Shishikura). In: The Mandelbrot Set, Theme and Variations. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000, 117–131
644 Roesch P. Some rational maps whose Julia sets are not locally connected. Conform Geom Dyn, 2006, 10: 125–135
645 Roesch P. On capture zones for the family $f_\lambda(z) = z^2 + \lambda/z^2$. In: Dynamics on the Riemann Sphere. Zürich: Eur Math Soc, 2006, 121–129
646 Roesch P. Hyperbolic components of polynomials with a fixed critical point of maximal order. Ann Sci École Norm Sup (4), 2007, 40: 901–949
647 Roesch P. On local connectivity for the Julia set of rational maps: Newton's famous example. Ann of Math (2), 2008, 168: 127–174
648 Roesch P, Wang X, Yin Y. Moduli space of cubic Newton maps. Adv Math, 2017, 322: 1–59
649 Roesch P, Yin Y. The boundary of bounded polynomial Fatou components. C R Math Acad Sci Paris, 2008, 346: 877–880
650 Roesch P, Yin Y. Bounded critical Fatou components are Jordan domains for polynomials. Sci China Math, 2022, 65: 331–358
651 Roesch P, Yin Y, Zeng J. Rigidity of non-renormalizable Newton maps. Sci China Math, 2024, 67: 855–872
652 Rogers J T Jr. Singularities in the boundaries of local Siegel disks. Ergodic Theory Dynam Systems, 1992, 12: 803–821
653 Rogers J T Jr. Diophantine conditions imply critical points on the boundaries of Siegel disks of polynomials. Comm Math Phys, 1998, 195: 175–193
654 Rong F. A brief survey on local holomorphic dynamics in higher dimensions. In: Complex Analysis and Geometry. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. 144. Tokyo: Springer, 2015, 295–307
655 Rottenfusser G, Rückert J, Rempe L, et al. Dynamic rays of bounded-type entire functions. Ann of Math (2), 2011, 173: 77–125
656 Rottenfusser G, Schleicher D. Escaping points of the cosine family. In: Transcendental Dynamics and Complex Analysis. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 348. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2008, 396–424
657 Ruelle D. Repellers for real analytic maps. Ergodic Theory Dynam Systems, 1982, 2: 99–107
658 Rüssmann H. Über die Iteration analytischer Funktionen. J Math Mech, 1967, 17: 523–532
659 Schleicher D. On fibers and local connectivity of Mandelbrot and Multibrot sets. In: Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoît Mandelbrot Part 1. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 72. Providence: Amer Math Soc, 2004, 477–517
660 Schleicher D. The dynamical fine structure of iterated cosine maps and a dimension paradox. Duke Math J, 2007, 136: 343–356
661 Schleicher D. Complex Dynamics, Families and Friends. Wellesley: A K Peters, 2009

662 Schleicher D. Dynamics of entire functions. In: Holomorphic Dynamical Systems. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1998. Berlin: Springer, 2010, 295–339
663 Schleicher D, Zimmer J. Periodic points and dynamic rays of exponential maps. Ann Acad Sci Fenn Math, 2003, 28: 327–354
664 Schleicher D, Zimmer J. Escaping points of exponential maps. J Lond Math Soc (2), 2003, 67: 380–400
665 Schubert H. Area of Fatou sets of trigonometric functions. Proc Amer Math Soc, 2008, 136: 1251–1259
666 Selinger N. Thurston's pullback map on the augmented Teichmüller space and applications. Invent Math, 2012, 189: 111–142
667 Selinger N. Topological characterization of canonical Thurston obstructions. J Mod Dyn, 2013, 7: 99–117
668 Sharland T. Matings of cubic polynomials with a fixed critical point, Part I: Thurston obstructions. Conform Geom Dyn, 2019, 23: 205–220
669 Shen L. An application of the degenerate Beltrami equation: quadratic polynomials with a Siegel disk. Ann Acad Sci Fenn Math, 2018, 43: 267–277
670 Shen W. On the measurable dynamics of real rational functions. Ergodic Theory Dynam Systems, 2003, 23: 957–983
671 Shen W. On the metric properties of multimodal interval maps and C^2 density of Axiom A. Invent Math, 2004, 156: 301–403
672 Shen W. Decay of geometry for unimodal maps: An elementary proof. Ann of Math (2), 2006, 163: 383–404
673 Shen W. Hausdorff dimension of the graphs of the classical Weierstrass functions. Math Z, 2018, 289: 223–266
674 Shen W, Wang Y. Primitive tuning via quasiconformal surgery. Israel J Math, 2021, 245: 259–293
675 Shen W Q. Rees-Shishikura's theorem for geometrically finite rational maps. Acta Math Sin (Engl Ser), 2017, 33: 1587–1596
676 Shishikura M. On the quasiconformal surgery of rational functions. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 1987, 20: 1–29
677 Shishikura M. Trees associated with the configuration of Herman rings. Ergodic Theory Dynam Systems, 1989, 9: 543–560
678 Shishikura M. Topological, geometric and complex analytic properties of Julia sets. In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. vols. 1, 2. Basel: Birkhäuser, 1995, 886–895
679 Shishikura M. The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. Ann of Math (2), 1998, 147: 225–267
680 Shishikura M. On a theorem of M Rees for matings of polynomials. In: The Mandelbrot Set, Theme and Variations. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000, 289–305
681 Shishikura M. Bifurcation of parabolic fixed points. In: The Mandelbrot Set, Theme and Variations. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000, 325–363
682 Shishikura M. Herman's theorem on quasisymmetric linearization of analytic circle homemorphisms. Manuscript, 2001
683 Shishikura M. Complex dynamics and quasiconformal mappings. In: Lectures on Quasiconformal Mappings. University Lecture Series, vol. 38. Providence: Amer Math Soc, 2006, 119–141
684 Shishikura M. The connectivity of the Julia set and fixed points. In: Complex Dynamics. Wellesley: A K Peters, 2009, 257–276
685 Shishikura M. Conformality of quasiconformal mappings at a point, revisited. Ann Acad Sci Fenn Math, 2018, 43: 981–990
686 Shishikura M, Tan L. A family of cubic rational maps and matings of cubic polynomials. Exp Math, 2000, 9: 29–53
687 Shishikura M, Tan L. An alternative proof of Mañé's theorem on non-expanding Julia sets. In: The Mandelbrot Set, Theme and Variations. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000, 265–279
688 Shishikura M, Yang F. The high type quadratic Siegel disks are Jordan domains. J Eur Math Soc, 2024, 2024: 62 pp
689 Siegel C L. Iteration of analytic functions. Ann of Math (2), 1942, 43: 607–612
690 Silverman J H. The Arithmetic of Dynamical Systems. Graduate Texts in Mathematics, vol. 241. New York: Springer, 2007
691 Silverman J H. Moduli Spaces and Arithmetic Dynamics. CRM Monograph Series, vol. 30. Providence: Amer Math Soc, 2012
692 Sixsmith D. Dynamics in the Eremenko-Lyubich class. Conform Geom Dyn, 2018, 22: 185–224
693 Skorulski B. The existence of conformal measures for some transcendental meromorphic functions. In: Complex Dynamics. Contemporary Mathematics, vol. 396. Providence: Amer Math Soc, 2006, 169–201
694 Slodkowski Z. Holomorphic motions and polynomial hulls. Proc Amer Math Soc, 1991, 111: 347–355
695 Smale S. Structurally stable systems are not dense. Amer J Math, 1966, 88: 491–496

696 Smale S. Differentiable dynamical systems. Bull Amer Math Soc (NS), 1967, 73: 747–817
697 Smale S. Mathematical problems for the next century. In: Mathematics: Frontiers and Perspectives. Providence: Amer Math Soc, 2000, 271–294
698 Smania D. Complex bounds for multimodal maps: Bounded combinatorics. Nonlinearity, 2001, 14: 1311–1330
699 Smania D. Puzzle geometry and rigidity: The Fibonacci cycle is hyperbolic. J Amer Math Soc, 2007, 20: 629–673
700 Smania D. Solenoidal attractors with bounded combinatorics are shy. Ann of Math (2), 2020, 191: 1–79
701 Sørensen D E K. Describing quadratic Cremer point polynomials by parabolic perturbations. Ergodic Theory Dynam Systems, 1998, 18: 739–758
702 Sørensen D E K. Infinitely renormalizable quadratic polynomials, with non-locally connected Julia set. J Geom Anal, 2000, 10: 169–206
703 Stallard G M. The Hausdorff dimension of Julia sets of meromorphic functions. J Lond Math Soc (2), 1994, 49: 281–295
704 Stallard G M. The Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions II. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1996, 119: 513–536
705 Stallard G M. The Hausdorff dimension of Julia sets of hyperbolic meromorphic functions II. Ergodic Theory Dynam Systems, 2000, 20: 895–910
706 Stallard G M. The Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions IV. J Lond Math Soc (2), 2000, 61: 471–488
707 Stallard G M. Dimensions of Julia sets of transcendental meromorphic functions. In: Transcendental Dynamics and Complex Analysis. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 348. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2008, 425–446
708 Stankewitz R, Sumi H. Dynamical properties and structure of Julia sets of postcritically bounded polynomial semigroups. Trans Amer Math Soc, 2011, 363: 5293–5319
709 Steinmetz N. Rational Iteration, Complex Analytic Dynamical Systems. De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 16. Berlin: Walter de Gruyter, 1993
710 Steinmetz N. On the dynamics of the McMullen family $R(z) = z^m + \lambda/z^\ell$. Conform Geom Dyn, 2006, 10: 159–183
711 Sullivan D. Conformal dynamical systems. In: Geometric Dynamics. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1007. Berlin: Springer, 1983, 725–752
712 Sullivan D. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics II: Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups. Acta Math, 1985, 155: 243–260
713 Sullivan D. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains. Ann of Math (2), 1985, 122: 401–418
714 Sullivan D. Bounds, quadratic differentials, and renormalization conjectures. In: American Mathematical Society Centennial Publications. Providence: Amer Math Soc, 1992, 417–466
715 Sullivan D, Thurston W. Extending holomorphic motions. Acta Math, 1986, 157: 243–257
716 Sun D, Yang L. Quasirational dynamical systems. Chinese Ann Math Ser A, 1999, 20: 673–684
717 Sun Y, Yang C C. Buried points and lakes of Wada Continua. Discrete Contin Dyn Syst, 2003, 9: 379–382
718 Świątek G. Rational rotation numbers for maps of the circle. Comm Math Phys, 1988, 119: 109–128
719 Tan L. Similarity between the Mandelbrot set and Julia sets. Comm Math Phys, 1990, 134: 587–617
720 Tan L. Matings of quadratic polynomials. Ergodic Theory Dynam Systems, 1992, 12: 589–620
721 Tan L. Branched coverings and cubic Newton maps. Fund Math, 1997, 154: 207–260
722 Tan L. Hausdorff dimension of subsets of the parameter space for families of rational maps (A generalization of Shishikura's result). Nonlinearity, 1998, 11: 233–246
723 Tan L. Local properties of the Mandelbrot set at parabolic points. In: The Mandelbrot Set, Theme and Variations. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000, 133–160
724 Tan L. The Mandelbrot Set, Theme and Variations. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 274. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2000
725 Tan L. On pinching deformations of rational maps. Ann Sci École Norm Sup (4), 2002, 35: 353–370
726 Tan L, Yin Y. Local connectivity of the Julia set for geometrically finite rational maps. Sci China Ser A, 1996, 39: 39–47
727 Tan L, Yin Y. The unicritical Branner-Hubbard conjecture. In: Complex Dynamics. Wellesley: A K Peters, 2009, 215–227
728 Thurston D P. A positive characterization of rational maps. Ann of Math (2), 2020, 192: 1–46
729 Thurston W P. On the geometry and dynamics of iterated rational maps. With an appendix by D Schleicher. In: Complex Dynamics. Wellesley: A K Peters, 2009, 3–137
730 Thurston W P. Entropy in dimension one. In: Frontiers in Complex Dynamics. Princeton Mathematical Series, vol.

51. Princeton: Princeton Univ Press, 2014, 339–384
731 Thurston W P, Baik H, Gao Y, et al. Degree-d-invariant laminations. In: What's Next? The mathematical legacy of William P Thurston. Annals of Mathematics Studies, vol. 205. Princeton: Princeton Univ Press, 2020, 259–325
732 Timorin V. The external boundary of M_2. In: Holomorphic Dynamics and Renormalization. Fields Institute Communications, vol. 53. Providence: Amer Math Soc, 2008, 225–266
733 Timorin V. Topological regluing of rational functions. Invent Math, 2010, 179: 461–506
734 Tiozzo G. Topological entropy of quadratic polynomials and dimension of sections of the Mandelbrot set. Adv Math, 2015, 273: 651–715
735 Tiozzo G. Continuity of core entropy of quadratic polynomials. Invent Math, 2016, 203: 891–921
736 Tresser C, Coullet P. Itérations d'endomorphismes et groupe de renormalisation. C R Acad Sci Paris Sér A-B, 1978, 287: A577–A580
737 Tsujii M. A simple proof for monotonicity of entropy in the quadratic family. Ergodic Theory Dynam Systems, 2000, 20: 925–933
738 Ueda T. Local structure of analytic transformations of two complex variables I. J Math Kyoto Univ, 1986, 26: 233–261
739 Urbański M. On the Hausdorff dimension of a Julia set with a rationally indifferent periodic point. Studia Math, 1991, 97: 167–188
740 Urbański M. Rational functions with no recurrent critical points. Ergodic Theory Dynam Systems, 1994, 14: 391–414
741 Urbański M. Measures and dimensions in conformal dynamics. Bull Amer Math Soc (NS), 2003, 40: 281–321
742 Urbański M, Zdunik A. Geometry and ergodic theory of non-hyperbolic exponential maps. Trans Amer Math Soc, 2007, 359: 3973–3997
743 van Strien S. Misiurewicz maps unfold generically (even if they are critically non-finite). Fund Math, 2000, 163: 39–54
744 van Strien S. One-dimensional dynamics in the new millennium. Discrete Contin Dyn Syst, 2010, 27: 557–588
745 van Strien S. Milnor's conjecture on monotonicity of topological entropy: Results and questions. In: Frontiers in Complex Dynamics. Princeton Mathematical Series, vol. 51. Princeton: Princeton Univ Press, 2014, 323–337
746 van Strien S, Vargas E. Real bounds, ergodicity and negative Schwarzian for multimodal maps. J Amer Math Soc, 2004, 17: 749–782
747 Wang J, Yao X. On Julia limiting directions of meromorphic functions. Israel J Math, 2020, 238: 405–430
748 Wang S, Yang F, Zhang G, et al. Local connectivity of Julia sets of some rational maps with Siegel disks. arXiv:2106.07450, 2021
749 Wang X. A decomposition theorem for Herman maps. Adv Math, 2014, 267: 307–359
750 Wang X. Hyperbolic components and cubic polynomials. Adv Math, 2021, 379: 107554
751 Wang X, Yin Y. Global topology of hyperbolic components: Cantor circle case. Proc Lond Math Soc (3), 2017, 115: 897–923
752 Wang X, Yin Y, Zeng J. Dynamics of Newton maps. Ergodic Theory Dynam Systems, 2023, 43: 1035–1080
753 Wang Y F. Bounded domains of the Fatou set of an entire function. Israel J Math, 2001, 121: 55–60
754 Wang Y M, Yang F. Julia sets as buried Julia components. Trans Amer Math Soc, 2020, 373: 7287–7326
755 Whyburn G T. Analytic Topology. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 28. New York: Amer Math Soc, 1942
756 Wilkerson M. Subdivision rule constructions on critically preperiodic quadratic matings. New York J Math, 2016, 22: 1055–1084
757 Wilkerson M. Thurston's algorithm and rational maps from quadratic polynomial matings. Discrete Contin Dyn Syst Ser S, 2019, 12: 2403–2433
758 Wittner B S. On the bifurcation loci of rational maps of degree two. PhD Thesis. New York: Cornell University, 1988
759 Wolff J. Sur l'itération des fonctions bornées. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1926, 182: 200–201
760 Wu S. Continuity of Julia sets. Sci China Ser A, 1999, 42: 282–285
761 Xiao Y, Qiu W. The rational maps $F_\lambda(z) = z^m + \lambda/z^d$ have no Herman rings. Proc Math Sci, 2010, 120: 403–407
762 Xiao Y, Qiu W, Yin Y. On the dynamics of generalized McMullen maps. Ergodic Theory Dynam Systems, 2014, 34: 2093–2112
763 Xiao Y, Yang F. Singular perturbations of the unicritical polynomials with two parameters. Ergodic Theory Dynam Systems, 2017, 37: 1997–2016
764 Xuan Z. On conformal measures of parabolic meromorphic functions. Discrete Contin Dyn Syst Ser B, 2015, 20: 249–257
765 Yampolsky M. Complex bounds for renormalization of critical circle maps. Ergodic Theory Dynam Systems, 1999,

19: 227–257
766 Yampolsky M. Hyperbolicity of renormalization of critical circle maps. Publ Math Inst Hautes Études Sci, 2003, 96: 1–41
767 Yampolsky M, Zakeri S. Mating Siegel quadratic polynomials. J Amer Math Soc, 2001, 14: 25–78
768 Yang C J, Li Y H. Bounded Fatou components of transcendental entire functions with order less than 1/2. Acta Math Sin (Engl Ser), 2015, 31: 647–658
769 Yang F. On the dynamics of a family of entire functions. Acta Math Sin (Engl Ser), 2013, 29: 2047–2072
770 Yang F. Rational maps without Herman rings. Proc Amer Math Soc, 2017, 145: 1649–1659
771 Yang F. A criterion to generate carpet Julia sets. Proc Amer Math Soc, 2018, 146: 2129–2141
772 Yang F. Cantor Julia sets with Hausdorff dimension two. Int Math Res Not IMRN, 2021, 2021: 4994–5006
773 Yang F. Parabolic and near-parabolic renormalizations for local degree three. arXiv:1510.00043v4, 2021
774 Yang F. On the formulas of meromorphic functions with periodic Herman rings. Math Ann, 2022, 384: 989–1015
775 Yang F. Rational maps with smooth degenerate Herman rings. arXiv:2207.06770, 2022
776 Yang F. Julia sets with positive area and Mañé's conjecture. Http://maths.nju.edu.cn/∼yangfei/materials/PPT-positive-area-Kyoto.pdf, 2023
777 Yang F, Zeng J. On the dynamics of a family of generated renormalization transformations. J Math Anal Appl, 2014, 413: 361–377
778 Yang J. Local connectivity of polynomial Julia sets at bounded type Siegel boundaries. arXiv:2010.14003v4, 2023
779 Yarrington B W. Local connectivity and Lebesgue measure of polynomial Julia sets. PhD Thesis. New York: State University of New York at Stony Brook, 1995
780 Ye H. Rational functions with identical measure of maximal entropy. Adv Math, 2015, 268: 373–395
781 Ye Z. Structural instability of exponential functions. Trans Amer Math Soc, 1994, 344: 379–389
782 Yin Y. On the Julia sets of quadratic rational maps. Complex Var Theory Appl, 1992, 18: 141–147
783 Yin Y. Continuity of Julia sets of polynomials. Acta Math Sinica, 1995, 38: 99–102
784 Yin Y. On the Julia sets of semi-hyperbolic rational maps. Chinese J Contemp Math, 1999, 20: 469–476
785 Yin Y, Zhai Y. No invariant line fields on Cantor Julia sets. Forum Math, 2010, 22: 75–94
786 Yoccoz J-C. Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne. Ann Sci Éc Norm Supér (4), 1984, 17: 333–359
787 Yoccoz J-C. Il n'y a pas de contre-exemple de Denjoy analytique. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1984, 298: 141–144
788 Yoccoz J-C. Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbf{C}, 0)$. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1988, 306: 55–58
789 Yoccoz J-C. On the local connectivity of the Mandelbrot set. Unpublished, 1990
790 Yoccoz J-C. Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques. In: Petits diviseurs en Dimension 1. Astérisqué. Paris: Soc Math France, 1995, 3–88
791 Yoccoz J-C. Analytic linearization of circle diffeomorphisms. In: Dynamical Systems and Small Divisors. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1784. Berlin: Springer, 2002, 125–173
792 Zakeri S. Dynamics of cubic Siegel polynomials. Comm Math Phys, 1999, 206: 185–233
793 Zakeri S. Biaccessibility in quadratic Julia sets. Ergodic Theory Dynam Systems, 2000, 20: 1859–1883
794 Zakeri S. Old and new on quadratic Siegel disks. In: A volume Dedicated to Siavash Shahshahani on the Occasion of his 60th Birthday. Tehran: Sharif University of Technology Press, 2002, 133–158
795 Zakeri S. On Siegel disks of a class of entire maps. Duke Math J, 2010, 152: 481–532
796 Zeng J. Criterion for rays landing together. Trans Amer Math Soc, 2020, 373: 6479–6502
797 Zeng J, Su W. Quasisymmetric rigidity of Sierpiński carpets. Ergodic Theory Dynam Systems, 2015, 35: 1658–1680
798 Zhai Y. Rigidity for rational maps with Cantor Julia sets. Sci China Ser A, 2008, 51: 79–92
799 Zhai Y. A generalized version of Branner-Hubbard conjecture for rational functions. Acta Math Sin (Engl Ser), 2010, 26: 2199–2208
800 Zhai Y. On the dimensions of Cantor Julia sets of rational maps. J Math Anal Appl, 2013, 402: 772–780
801 Zhan G, Liao L. Area of non-escaping parameters of the sine family. Houston J Math, 2012, 38: 493–524
802 Zhang G. On the dynamics of $e^{2\pi i\theta}\sin(z)$. Illinois J Math, 2005, 49: 1171–1179
803 Zhang G. All bounded type Siegel disks of rational maps are quasi-disks. Invent Math, 2011, 185: 421–466
804 Zhang G. Polynomial Siegel disks are typically Jordan domains. arXiv:1208.1881v3, 2014
805 Zhang G. On PZ type Siegel disks of the sine family. Ergodic Theory Dynam Systems, 2016, 36: 973–1006
806 Zhang G. Topological characterisation of rational maps with Siegel disks. Math Proc Cambridge Philos Soc, 2022, 172: 1–41
807 Zhang G. Jordan mating is always possible for polynomials. Math Z, 2024, 306: 71

808 Zhang G, Jiang Y. Combinatorial characterization of sub-hyperbolic rational maps. Adv Math, 2009, 221: 1990–2018
809 Zhang G Y. Bifurcations of periodic points of holomorphic maps from $\mathbf{C}^2$ into $\mathbf{C}^2$. Proc Lond Math Soc (3), 1999, 79: 353–380
810 Zhang R. On the cubic polynomial slice $\mathrm{Per}_1(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{p}{q}})$. arXiv:2211.12537, 2022
811 Zhang S, Fu J, Shi X. Bounded type Siegel disks of a family of sine families. J Math Anal Appl, 2020, 488: 124041
812 Zhang S, Yang F. Area of the complement of the fast escaping sets of a family of entire functions. Kodai Math J, 2018, 41: 531–553
813 Zhang W, Ren F. Iterations of holomorphic self-maps of $\mathbf{C}^N$. J Fudan Univ Natur Sci, 1994, 33: 452–462
814 Zhang X. Cross-sections of the multicorns. Proc Math Sci, 2019, 129: 28
815 Zheng J H. Singularities and wandering domains in iteration of meromorphic functions. Illinois J Math, 2000, 44: 520–530
816 Zheng J H. Remarks on Herman rings of transcendental meromorphic functions. Indian J Pure Appl Math, 2000, 31: 747–751
817 Zheng J H. Singularities and limit functions in iteration of meromorphic functions. J Lond Math Soc (2), 2003, 67: 195–207
818 Zheng J H. On multiply-connected Fatou components in iteration of meromorphic functions. J Math Anal Appl, 2006, 313: 24–37
819 Zheng J H. Dynamics of Meromorphic Functions (in Chinese). Beijing: Tsinghua Univ Press, 2006 [郑建华. 亚纯函数动力系统. 北京: 清华大学出版社, 2006]
820 Zhou J. The Julia set of a random iteration system. Bull Aust Math Soc, 2000, 62: 45–50
821 Zhou W, Ren F. The Julia sets of the random iteration of rational functions. Chinese Sci Bull, 1992, 37: 969–971
822 Zinsmeister M. Fleur de Leau-Fatou et dimension de Hausdorff. C R Acad Sci Ser I Math, 1998, 326: 1227–1232
823 Zinsmeister M. Thermodynamic Formalism and Holomorphic Dynamical Systems. SMF/AMS Texts, Monographs, vol. 2. Providence: Amer Math Soc; Paris: Soc Math France, 2000

A brief introduction to one-dimensional complex dynamics

Fei Yang

Abstract Complex dynamics is a field about the iterative theory of complex analytic functions. In this paper, we survey the history, basic theory and developments of one-dimensional complex dynamics.

Keywords complex dynamics, Julia sets, Fatou sets, Mandelbrot set, hyperbolic conjecture, renormalization, quasiconformal surgery

MSC(2020) 37F05, 37F10

doi: 10.1360/SSM-2023-0292