



特殊函数的复乘值

献给陆洪文教授 85 寿辰

杨同海^{1*}, 叶东曦², 于鹏³

1. Department of Mathematics, University of Wisconsin Madison, Madison, WI 53706, USA;

2. 中山大学数学学院 (珠海), 珠海 519082;

3. 中国人民大学数学学院, 北京 100872

E-mail: thyang@math.wisc.edu, yedx3@mail.sysu.edu.cn, yupeng2020@ruc.edu.cn

收稿日期: 2023-09-25; 接受日期: 2023-10-24; 网络出版日期: 2024-01-16; * 通信作者

Dorothy Gollmar 主任基金、美国威斯康星大学麦迪逊分校 Kellet 职业中期研究成就奖、广东基础与应用基础研究基金 (批准号: 2023A1515010298) 和国家自然科学基金 (批准号: 12101605) 资助项目

摘要 本文综述来自正则化 theta 提升的特殊函数复乘值的研究结果. 本文关注那些作为 Borcherds 提升的模函数和作为正则化 theta 提升的高次 Green 函数, 并阐述这些漂亮公式背后的基本证明思路. 这些函数是 Gross 和 Zagier 在奇异模数 (singular moduli) 上的知名分解公式和高次 Green 函数复乘值代数性猜想的推广. 尽管最著名的 Gross-Zagier 公式的推广也适合本文的思路, 但本文略去这些细节. 本文所述的证明方法与 Gross 和 Zagier 原文中的并不相同.

关键词 复乘理论 Gross-Zagier 公式 模函数 theta 提升 Shimura 簇

MSC (2020) 主题分类 11G15, 11F41, 14K22

1 引言

令

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884q + \cdots \quad (1.1)$$

为 $Y(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ 上著名的模函数, 即 $j(\tau)$ 为椭圆曲线 $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$ 上的 j -不变量. 对于代数数 $\tau \in \mathbb{H}$, Schneider^[36] 的著名定理断言 $j(\tau)$ 是代数数当且仅当 τ 是虚二次数. 进一步而言, 当 τ 确为虚二次数时, $j(\tau)$ 是一个代数整数, 并生成 $\mathcal{O}_\tau$ 的环类域, 其中

$$\mathcal{O}_\tau = \{r \in \mathbb{Q}(\tau) : r\tau \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau\}.$$

Berwick^[2] 在 1928 年观察到, 虽然

$$j\left(\frac{1+\sqrt{-163}}{2}\right) - j\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right) = -2^{18}3^35^323^329^3 = -262537412640768000,$$

英文引用格式: Yang T H, Ye D X, Yu P. CM values of special functions (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 1421–1454, doi: 10.1360/SSM-2023-0260

$$j\left(\frac{1+\sqrt{-163}}{2}\right) - j(i) = -2^6 3^6 7^2 11^2 19^2 127^2 163$$

的绝对值很大, 但实际仅有非常小的素因子, 他据此猜测, 在一般情形下, 对于两个互异的基本判别式 d_1 和 d_2 , $j(\frac{d_1+\sqrt{d_1}}{2}) - j(\frac{d_2+\sqrt{d_2}}{2})$ 的范数也只有非常小的素因子.

Gross 和 Zagier^[23] 在验证他们深刻且著名的 Gross-Zagier 公式^[24] 的退化情形时, 发现 $j(\frac{d_1+\sqrt{d_1}}{2}) - j(\frac{d_2+\sqrt{d_2}}{2})$ 的范数有如下精美的分解公式, 其中 $d_i < 0$ 是基本判别式, 且满足 $(d_1, d_2) = 1$. 特别地, 他们以此证明了 Berwick 的猜想.

当 $(\frac{d_1 d_2}{p}) \neq -1$ 时, 令

$$\epsilon(p) = \begin{cases} \left(\frac{d_1}{p}\right), & \text{若 } p \nmid d_1, \\ \left(\frac{d_2}{p}\right), & \text{若 } p \nmid d_2; \end{cases} \quad (1.2)$$

而当 $(\frac{d_1 d_2}{p}) = -1$ 时, 令 $\epsilon(p) = 0$. 定义一般的 $\epsilon(n) = \prod_{p|n} \epsilon(p)^{\text{ord}_p(n)}$, 其中 $\text{ord}_p(n)$ 为 p 在 n 中的方幂. 对于正整数 m , 若 $\epsilon(m) = -1$, 则定义

$$\mathfrak{F}(m) = \prod_{\substack{nn'=m \\ n, n' > 0}} n^{\epsilon(n')} \in \mathbb{N}, \quad (1.3)$$

它总为一个素数的方幂. 如果 $\epsilon(m) \neq -1$, 则规定 $\mathfrak{F}(m) = 1$. Gross 和 Zagier 的结果可被叙述为如下定理.

定理 1.1 (参见文献 [23, 定理 1.3]) 设 $d_1, d_2 < 0$ 是两个互素的基本判别式, 令 $w_j = |\mathcal{O}_{d_j}^\times|$. 沿用前面的记号, 有

$$J(d_1, d_2)^2 := \prod_{[\mathfrak{a}_j] \in \text{Cl}(d_j), j=1,2} |j(\tau_{\mathfrak{a}_1}) - j(\tau_{\mathfrak{a}_2})|^{8/(w_1 w_2)} = \prod_{\substack{m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z} \\ a^2 + 4m = d_1 d_2}} \mathfrak{F}(m). \quad (1.4)$$

特别地, $J(d_1, d_2)^2$ 的每个素因子不超过 $d_1 d_2 / 4$.

一个自然的问题是, 对于其他的模函数, 是否存在类似的分解公式呢? 如 $\Gamma(2)$ 上的 λ -不变量、不同层数的 Weber 函数以及亏格为 0 模曲线 $X_0(N)$ 上的其他模函数. 答案多数都是肯定的 (参见文献 [31, 44, 45, 49]). 实际上, Gross 和 Zagier 的分解公式可以被推广至正交型 $(n, 2)$ Shimura 簇上的 Borchers 提升 (参见文献 [10, 31, 37, 51, 52]). 第 3 节将探讨这些结果.

除了证明著名的 Gross-Zagier 公式, 在文献 [24] 的 V.4 节 (或文献 [22, V.1 节]) 中, Gross 和 Zagier 还观察到高次 Green 函数复乘值的一些有趣现象, 并做了如下 “代数性猜想”.

为了计算高度配对在无穷位的贡献值 (在他们著名 Gross-Zagier 公式的证明过程中), 我们需要 $X_0(N) \times X_0(N)$ 上的自守 Green 函数

$$G_s^{\Gamma_0(N)}(z_1, z_2) := -2 \sum_{\gamma \in \Gamma_0(N)} Q_{s-1} \left(1 + \frac{|z_1 - \gamma z_2|^2}{2\Im(z_1)\Im(\gamma z_2)} \right), \quad \Re(s) > 1, \quad (1.5)$$

$$Q_{s-1}(t) := \int_0^\infty (t + \sqrt{t^2 - 1} \cosh(u))^{-s} du.$$

它是一个关于 z_1 和 z_2 的 Laplace 算子的特征函数, 特征值为 $s(1-s)$. 当 z_i 之一趋近于尖点时, 该函数趋近于 0, 同时沿着对角线, 有对数奇点. 事实上, 这些性质可用于唯一地刻画该函数. 利用作用于

z_1 或 z_2 上的 Hecke 算子, 可定义

$$\begin{aligned} G_s^{\Gamma_0(N),m}(z_1, z_2) &:= \sum_{\gamma \in \Gamma_0(N) \backslash R_{N,m}} G_s^{\Gamma_0(N)}(z_1, \gamma z_2) \\ &= G_s^{\Gamma_0(N)}(z_1, z_2) | T_{m,z_1} \\ &= G_s^{\Gamma_0(N)}(z_1, z_2) | T_{m,z_2}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

其中 $R_{N,m} := \{ \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - Nbc = m \}$. 则有 $G_s^{\Gamma_0(N),m}$ 沿着第 m 阶 Hecke 对应除子 $T_m \subset X_0(N)^2$ 有对数奇点 (参见文献 [24, 第 II 章, (1.2)]).

设 $M_{-2r}^{1,\infty}(\Gamma_0(N))$ 为由 $\Gamma_0(N)$ 上权为 $-2r < 0$ 且仅在尖点 ∞ 处有奇点的弱全纯模形式构成的空间. 特别地, 它在 ∞ 处有 Fourier 展开式

$$f(\tau) = \sum_{m \gg -\infty} c(m)q^m, \quad q = e^{2\pi i\tau}. \quad (1.7)$$

称如下高次 Green 函数的线性组合为 f 对应的高次主 Green 函数:

$$G_{r+1,f}^{\Gamma_0(N)}(z_1, z_2) := \sum_{m \in \mathbb{N}} c(-m)m^{k-1} G_{r+1}^{\Gamma_0(N),m}(z_1, z_2). \quad (1.8)$$

沿着除子

$$Z_f := \sum_{m \geq 1, c(-m) \neq 0} T_m,$$

函数 $G_{r+1,f}^{\Gamma_0(N)}$ 有对数奇点. 该函数与文献 [24, V.4 节] 中所定义的高次 Green 函数完全相同. 若 f 在尖点 ∞ 处非正项 Fourier 系数都是有理数, 则称其为有理的. 尽管不能像在自守 Green 函数的情形时那样直接应用复乘理论, 但高次有理主 Green 函数 $G_{r+1,f}^{\Gamma_0(N)}$ 在 $X_0(N) \times X_0(N)$ 上单个复乘点上的值仍为代数数的对数. 以上陈述可归纳为如下猜想 (参见文献 [33, 39]).

猜想 1.1 ^[33, 39] 设 $f \in M_{-2r}^{1,\infty}(\Gamma_0(N))$ 在尖点 ∞ 处有有理 Fourier 系数. 则对于 $X_0(N)^2 \setminus Z_f$ 上的任意满足 $d_j < 0$ 的复乘点 (z_1, z_2) , 总存在 $\alpha = \alpha(z_1, z_2) \in \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$, 使得

$$G_{r+1,f}^{\Gamma_0(N)}(z_1, z_2) = |d_1 d_2|^{-r/2} \log |\alpha|.$$

此猜想有着大量的研究并在各种情形下得到了部分成果 (参见文献 [7, 28, 35, 40, 54]). Bruinier 等^[11] 完全证明了如上猜想, 并将之推广至正交型 $(n, 2)$ Shimura 簇的情形.

本文的主要目的在于不完整地讨论定理 1.1 和猜想 1.1 的相关工作. 本文将关注于复乘值部分, 而暂时搁置其在算术相交上的应用和 Gross-Zagier 公式的推广. 第 2 节回顾正交型 Shimura 簇的基础内容, 包括特殊圈和复乘圈, 正则 theta 提升和 Borcherds 提升, 以及正则 theta 提升的复乘值公式. 第 3 节将第 2 节的结果应用于经典模函数, 如 λ -函数、Weber 函数和亏格为 0 模曲线上的主模 (hauptmodul), 并且得到这些函数类似于定理 1.1 的精美分解公式. 第 4 节阐述证明猜想 1.1 并将其推广至正交型 Shimura 簇的基本想法.

2 正则 theta 提升及其复乘值

2.1 Shimura 簇、复乘圈和特殊除子

设 (V, Q) 是 $\mathbb{Q}$ 上惯性指数为 $(n, 2)$ 的二次空间, 存在一个偶的整格 L , 即对于所有的 $x \in L$, 有

$Q(x) \in \mathbb{Z}$, 并且其对偶满足

$$L' = \{x \in V : (x, L) \subset \mathbb{Z}\} \supset L.$$

设 $H = \mathrm{GSpin}(V)$ 为其对应的一般旋量群, 而 $\mathrm{SO}(V)$ 为其特殊正交群. 则存在如下正合列:

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow H \rightarrow \mathrm{SO}(V) \rightarrow 1. \quad (2.1)$$

设

$$\mathcal{L} = \{z \in V_{\mathbb{C}} : (z, z) = 0, (z, \bar{z}) < 0\}, \quad (2.2)$$

并令 $\mathbb{D} = \mathcal{L}/\mathbb{C}^\times$ 为对应的 Hermite 对称区域, 同时也是由 $V_{\mathbb{R}}$ 上带定向的负二次平面全体构成的集合. 注意到 $\mathcal{L}$ 是 $\mathbb{D}$ 上的逻辑 (tautological) 线丛. 设

$$K_L = \{h \in \mathrm{SO}(V)(\mathbb{A}_f) : hL = L, h(x + \hat{L}) = x + \hat{L} \text{ 对于任意 } x \in L'/L \text{ 成立}\}$$

为 $\mathrm{SO}(V)(\mathbb{A}_f)$ 上的紧开子群, 其中 $\hat{L} = L \otimes \hat{\mathbb{Z}}$. 设 K 为 $H(\mathbb{A}_f)$ 上满足 $K \cap \mathbb{A}_f^\times = \hat{\mathbb{Z}}^\times$ 的紧开子群 (其在 $\mathrm{SO}(V)(\mathbb{A}_f)$ 中的像为 K_L). 再设 $X = X_L$ 是 L 对应的定义在 $\mathbb{Q}$ 上的 Shimura 簇, 满足 $X_L(\mathbb{C}) = H(\mathbb{Q}) \backslash \mathbb{D} \times H(\mathbb{A}_f)/K$.

设 E 是次数为 $2d+2$ 的复乘域, 其极大全实子域为 F , 再设 $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_d\}$ 为 F 的 $d+1$ 个不同的实嵌入. 对于 $\alpha \in F^\times$, 若满足 $\sigma_0(\alpha) < 0$ 且 $\sigma_j(\alpha) > 0$ 对 $j \geq 1$ 成立, 则得到一个惯性指数为 $(0, 2), (2, 0), \dots, (2, 0)$ 的 F -二次空间:

$$W = W_\alpha = E, \quad Q_F(x) = \alpha x \bar{x}. \quad (2.3)$$

令 $W_{\mathbb{Q}} = W$, 并带有 $\mathbb{Q}$ -二次型 $Q_{\mathbb{Q}}(x) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}} Q_F(x)$, 则 $W_{\mathbb{Q}}$ 的惯性指数为 $(2d, 2)$. 从现在起, 假定 $2d \leq n$ 且存在维数为 $n-2d$ 的正定子空间 V_0 , 使得 $V = V_0 \oplus W_{\mathbb{Q}}$ 是 V_0 和 $W_{\mathbb{Q}}$ 的正交和. 设 T 是 H 的满足如下正合列和交换图的环面:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \rightarrow & \mathbb{G}_m & \rightarrow & T & \rightarrow & \mathrm{SO}(W) \rightarrow 1 \\ & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \rightarrow & \mathbb{G}_m & \rightarrow & H & \rightarrow & \mathrm{SO}(V) \rightarrow 1. \end{array} \quad (2.4)$$

注意到 $W_{\sigma_0} = W \otimes_{F, \sigma_0} \mathbb{R}$ 是 $V_{\mathbb{R}}$ 上的负二次平面, 因而给出了两个点 $z_{\sigma_0}^\pm$. 其对应的 $Z(W, \sigma_0)$ 定义在 $\sigma_0(F)$ 上, 其 $\mathbb{C}_{\sigma_0} = E \otimes_{F, \sigma_0} \mathbb{R}$ -点可由

$$Z(W, \sigma_0)(\mathbb{C}_{\sigma_0}) = \{\sigma_0^\pm\} \times T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A}_f)/K_T$$

给出, 其中 $K_T = K \cap T(\mathbb{A}_f)$. 之后, 将 $Z(W, \sigma_0)(\mathbb{C}_{\sigma_0})$ 简写为 $Z(W, \sigma_0)$. 设

$$Z(W) = \sum_{j=0}^d \sigma_j \circ \sigma_0^{-1} Z(W, \sigma_0) \quad (2.5)$$

为 X_L 的定义在 $\mathbb{Q}$ 上的复乘圈. $d=0$ (小复乘点) 的情形最早由 Schofer^[37] 所研究, $d = \frac{n}{2} - 1$ (大复乘点) 的情形由 Bruinier 等^[10] 所研究, 而一般的情形由 Yu^[51] 所研究 (也可参见文献 [52]).

设 $x \in V(\mathbb{Q})$ 为具有正范数的向量. 记 x 在 V 中的正交补空间为 V_x , x 在 H 中的稳定子群为 H_x . 自然有 $H_x \cong \mathrm{GSpin}(V_x)$. 则 Grassmann 子流形

$$\mathbb{D}_x = \{z \in \mathbb{D}; z \perp x\} \quad (2.6)$$

定义了 $\mathbb{D}$ 上的一个解析除子. 对于 $h \in H(\mathbb{A}_f)$, 考虑自然的映射

$$H_x(\mathbb{Q}) \backslash \mathbb{D}_x \times H_x(\mathbb{A}_f) / (H_x(\mathbb{A}_f) \cap hKh^{-1}) \rightarrow X_L, \quad (z, h_1) \mapsto (z, h_1 h). \quad (2.7)$$

其像定义了一个 X_L 上的在 $\mathbb{Q}$ 上有理的除子 $Z(x, h)$. 对于 $m \in \mathbb{Q}_{>0}$, 令

$$\Omega_m = \{x \in V; Q(x) = m\} \quad (2.8)$$

为 V 中对应的二次子空间. 若 $\Omega_m(\mathbb{Q})$ 非空, 则由 Witt 定理知, 存在一个固定的 $x_0 \in \Omega_m(\mathbb{Q})$, 使得 $\Omega_m(\mathbb{Q}) = H(\mathbb{Q})x_0$, 且 $\Omega_m(\mathbb{A}_f) = H(\mathbb{A}_f)x_0$. 设 $S(V(\mathbb{A}_f))$ 为由 $V(\mathbb{A}_f)$ 上的 Schwartz 函数 (具有紧支集的局部常值函数) 全体构成的空间, 再设 S_L 为由支撑于 $\hat{L}'$ 且 $\hat{L}$ -不变的 Schwartz 函数 ϕ 全体构成的子空间. 该子空间有一组标准基 $\phi_\mu = \mathrm{Char}(\mu + \hat{L})$, 其中 $\mu \in L'/L$. 对于 Schwartz 函数 $\varphi \in S_L$, 可将

$$\mathrm{Supp}(\varphi) \cap \Omega_m(\mathbb{A}_f) = \coprod_j K \xi_j^{-1} x_0 \quad (2.9)$$

写为如上有限的不交并, 其中 $\xi_j \in H(\mathbb{A}_f)$. 这一结论可由 $\mathrm{Supp}(\varphi)$ 是紧的以及 $\Omega_m(\mathbb{A}_f)$ 是 $V(\mathbb{A}_f)$ 的闭子集这两个事实得到. 由此便可定义一个加权的特殊除子

$$Z(m, \varphi) = \sum_j \varphi(\xi_j^{-1} x_0) Z(x_0, \xi_j). \quad (2.10)$$

此定义不依赖于 x_0 和代表元 ξ_j 的选取. 对于 $\mu \in L'/L$, 简记 $Z(m, \mu) := Z(m, \phi_\mu)$. 若 $\Omega_m(\mathbb{Q})$ 是空集, 则约定 $Z(m, \mu) = 0$.

2.2 正则 theta 提升和 Borchers 积 (提升)

对应于约化对偶对 $(\mathrm{SL}_2, O(V))$ 和典则非分歧加性特征 $\psi: \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{C}^\times$, 存在 $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{A})$ ($\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ 的二重复叠 (metaplectic cover)) 在 $S(V(\mathbb{A}))$ 上的 Weil 表示 $\omega = \omega_{V, \psi}$. 当 n 为偶数时, 该表示可经由 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ 分解. 为简单起见, 即便对于 n 为奇数的情形, 也假定 Weil 表示可经由 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ 分解. 严格的叙述可参见文献 [12]. 注意到 $h \in H(\mathbb{A})$ 经由它在 $\mathrm{SO}(V(\mathbb{A}))$ 下的像线性地作用在 $S(V(\mathbb{A}))$ 上: $h \cdot \phi(x) = \phi(h^{-1}x)$. 对于 $\tau = u + iv \in \mathbb{H}$, 记 $g_\tau = n(u)m(\sqrt{v}) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, 则 $g_\tau(i) = \tau$. 这里,

$$n(u) = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

对于任意 $z \in \mathbb{D}$, 作分解

$$V_{\mathbb{R}} = z \oplus z^\perp, \quad x = x_z + x_{z^\perp},$$

并考虑对应的强函数 (majorant)

$$(x, x)_z = (x_{z^\perp}, x_{z^\perp}) - (x_z, x_z),$$

其为线性空间 $V(\mathbb{R})$ 上的正定二次型. Gauss 函数

$$\varphi_\infty(x, z) = \exp(-\pi(x, x)_z)$$

便属于 $S(V(\mathbb{R}))$, 且具有如下的不变性: $\varphi_\infty(hx, hz) = \varphi_\infty(x, z)$ 对于任意 $h \in H(\mathbb{R})$ 成立. 进一步地, 它在极大紧子群 $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的作用下权为 $n/2 - 1$.

对于 $(\tau, z, h) \in \mathbb{H} \times X(\mathbb{C})$, 令

$$\theta_L(\tau, z, h) = \sum_{\mu \in L'/L} \theta(\tau, z, h, \phi_\mu) \phi_\mu, \quad \tau \in \mathbb{H}, \quad h \in H(\mathbb{A}_f) \quad (2.11)$$

为 theta 核函数, 其中, 对于 $\varphi \in S(V(\mathbb{A}_f))$, 有

$$\theta(\tau, z, h, \varphi) = v \sum_{x \in V(\mathbb{Q})} e(Q(x_{z^\perp})\tau + Q(x_z)\bar{\tau}) \otimes \varphi(h^{-1}x). \quad (2.12)$$

这里的 $e(z) = e^{2\pi iz}$. $\theta(\tau, z, h, \cdot)$ 是取值于 $S_L^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(S_L, \mathbb{C})$ 的 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上权为 $\frac{n}{2} - 1$ 的模形式, 同时也是 X_L 上的自守函数.

通过自然地嵌入 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_f)$, 得到了 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 在 S_L 上的 Weil 表示 ω . 一个取值于 S_L 的全纯函数 $f: \mathbb{H} \rightarrow S_L$ 称为弱全纯模形式, 若满足

$$f|_{k, \omega} \gamma(\tau) := (c\tau + d)^{-k} \omega(f(\gamma\tau)) = f(\tau), \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad (2.13)$$

且具有 Fourier 级数展开式

$$f(\tau) = \sum_{\mu \in L'/L} \sum_{n \geq n_0, n \in \mathbb{Q}} c(n, \mu) q^n \phi_\mu = \sum_{\mu \in L'/L} f_\mu(\tau) \phi_\mu. \quad (2.14)$$

令 $M_{k, \omega}^! = M_{k, S_L}^!$ 为由 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上如上定义的权为 k 、取值于 S_L 弱全纯模形式全体构成的空间.

给定 $f \in M_{1-\frac{n}{2}, S_L}^!$, 其对应的正则 theta 提升可由下式给出 (参见文献 [4, 8]):

$$\Phi(z, h, f) = \int_{\mathcal{F}}^{\mathrm{reg}} \langle f, \theta_L \rangle d\mu(\tau), \quad (2.15)$$

即定义为如下函数在 $s = 0$ 处 Laurent 级数展开式的常数项:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}_T} \langle f(\tau), \theta_L(\tau, z, h) \rangle v^{-s} d\mu(\tau), \quad (2.16)$$

其中,

$$\mathcal{F} = \left\{ \tau = u + iv \in \mathbb{C} : |u| \leq \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1 \right\}, \quad \mathcal{F}_T = \{ \tau = u + iv \in \mathcal{F} : v < T \},$$

而

$$\langle f, \theta_L \rangle = \sum_{\mu \in L'/L} f_\mu(\tau) \theta(\tau, z, h, \phi_\mu).$$

如下定理是文献 [4, 定理 13.3] (也可参见文献 [5, 定理 3.22]) 的第一部分在当前情形下的表述.

定理 2.1 令 $f(\tau) = \sum c(m, \mu) q^m \phi_\mu \in M_{1-\frac{n}{2}, \omega_L}^1$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上权为 $1 - \frac{n}{2}$ 、表示为 ω_L 的弱全纯模形式, 并且假设 $c(m, \mu) \in \mathbb{Z}$ 对 $m < 0$ 均成立. 则存在 X_L 上 (可能带有特征的) 权为 $k = c(0, 0)/2$ 的亚纯模形式 $\Psi(z, h, f)$, 使得

(1)

$$\mathrm{div}(\Psi(z, h, f)^2) = Z(f) = \sum_{m>0, \mu \in L'/L} c(-m, \mu) Z(m, \mu),$$

这里当 $2\mu \in L$ 时, $Z(m, \mu)$ 的重数取为 2; 否则, 取为 1.

(2)

$$-\log \|\Psi(z, h, f)\|_{\mathrm{Pet}}^4 = \Phi(z, h, f).$$

其中 $\|\cdot\|_{\mathrm{Pet}}$ 是规范化的 Petersson 范数, 即

$$\|\Psi(z, h, f)\|_{\mathrm{Pet}} = |\Psi(z, h, f)(2\pi e^{-\gamma} \det y)^{k/2}|,$$

这里, $\gamma = -\Gamma'(1)$ 是 Euler 常数, 且 $y = \mathrm{Im}(z)$.

2.3 Eisenstein 级数和复乘值公式

固定 ψ 为 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ 的典则非分歧加性特征, 并满足 $\psi_{\infty}(x) = e^{2\pi i x}$ 对于 $x \in \mathbb{R}$ 成立. 令 $\psi_F = \psi \circ \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}$, 则存在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_F)$ 在 $S(W(\mathbb{A}_F))$ 上唯一的 Weil 表示 $\omega = \omega_{W, \psi_F}$ 与二次空间 (W, Q_F) 和特征 ψ_F 对应.

设 $\chi: F^{\times} \backslash \mathbb{A}_F^{\times} \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ 为 E/F 对应的二次 Hecke 特征. 令 B 为 SL_2 的 Borel 子群, 则 B 有分解式 $B = NM$, 满足对于任意 F -代数 R , 有 $N(R) = \{n(b) \mid b \in R\}$, $M(R) = \{m(a) \mid a \in R^{\times}\}$, 其中,

$$n(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

则 χ 也是 W 对应的二次 Hecke 特征, 且存在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_F)$ -等价映射

$$\lambda = \prod \lambda_v: S(W(\mathbb{A}_F)) \rightarrow I(0, \chi), \quad \lambda(\varphi)(g) = \omega(g)\varphi(0), \quad (2.17)$$

这里的 $I(s, \chi) = \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{A}_F)}^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_F)}(\chi \cdot |s)$ 是主序列, 其截面是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_F)$ 上满足

$$\Phi(n(b)m(a)g, s) = \chi(a)|a|^{s+1}\Phi(g, s) \quad (2.18)$$

对于任意 $a \in \mathbb{A}_F^{\times}$ 、 $b \in \mathbb{A}_F$ 和 $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_F)$ 成立的光滑函数 Φ .

若 $\Phi|_K$ 不依赖于 s , 则 Φ 称为标准的, 其中 $K = \mathrm{SL}_2(\hat{\mathcal{O}}_F)\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})^{d+1}$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_F)$ 的极大紧子群. 若 $\Phi = \otimes \Phi_v$, 则 Φ 称为可分解的, 其中 $\Phi_v \in I(s, \chi_v)$.

对于标准截面函数 $\Phi \in I(s, \chi)$, 其对应的 Eisenstein 级数定义为

$$E_W(g, s, \Phi) = \sum_{\gamma \in B(F) \backslash \mathrm{SL}_2(F)} \Phi(\gamma g, s). \quad (2.19)$$

为简单起见, 将 E_W 简写为 E .

由 Eisenstein 级数的一般理论, 当 $\operatorname{Re}(s)$ 足够大时, $E(g, s, \Phi)$ 定义中的级数是绝对收敛的, 且可亚纯延拓至整个复平面, 并带有有限多个极点. 该亚纯延拓沿着 $\operatorname{Re}(s) = 0$ 方向是全纯的, 并满足 $s \mapsto -s$ 的函数方程. 进一步地, 有 Fourier 级数展开式

$$E(g, s, \Phi) = \sum_{t \in F} E_t(g, s, \Phi), \quad (2.20)$$

其中

$$E_t(g, s, \Phi) = \int_{F \backslash \mathbb{A}_F} E(n(b)g, s, \Phi) \cdot \psi_F(-bt)db, \quad (2.21)$$

这里 db 是 $F \backslash \mathbb{A}_F$ 上关于 ψ_F 自对偶的 Haar 测度. 若 $\Phi = \otimes \Phi_v$ 是可分解的, 则对于 $t \in F^\times$, 存在分解式

$$E_t(g, s, \Phi) = \prod_v W_{t,v}(g_v, s, \Phi_v), \quad (2.22)$$

其中

$$W_{t,v}(g_v, s, \Phi_v) = \int_{F_v} \Phi_v(w^{-1}n(b)g_v, s) \cdot \psi_{F_v}(-bt)db, \quad (2.23)$$

且

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

对于 $\varphi \in S(W_f)$, 令 Φ_f 为 $\lambda_f(\varphi) \in I(0, \chi_f)$ 对应的标准截面函数. 对于每一个实嵌入 $\sigma_i : F \hookrightarrow \mathbb{R}$, 极大紧子群 $K_{\sigma_i} \cong \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ 都是交换的, 且有以 $k \in \mathbb{Z}$ 为指标的特征 $k_\theta \mapsto e^{ik\theta}$. 利用分解式 $\mathrm{SL}_2(F_{\sigma_i}) = B(F_{\sigma_i}) \cdot K_{\sigma_i}$ 以及 χ 为奇特征的事实, 可得

$$I(s, \chi_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}) = I(s, \chi_{E_{\sigma_i}/F_{\sigma_i}}) = \bigoplus_{k \text{ 为奇数}} \mathbb{C} \Phi_{\sigma_i}^k, \quad (2.24)$$

其中 $\Phi_{\sigma_i}^k \in I(s, \chi_{\mathbb{C}/\mathbb{R}})$ 是满足

$$\Phi_{\sigma_i}^k(n(b)m(a)k_\theta) = \chi_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(a)|a|^{s+1}e^{ik\theta} \quad (2.25)$$

对于任意 $a \in \mathbb{R}^\times$, $b \in \mathbb{R}$ 和 $k_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ 成立的唯一的标准截面函数. 对于 $\vec{\tau} = \vec{u} + i\vec{v} \in \mathbb{H}^{d+1}$ 和标准截面函数 $\Phi_f \in I(s, \chi_f)$, 可定义

$$E(\vec{\tau}, s, \varphi, \mathbf{1}) = N_{F/\mathbb{Q}}(v)^{-\frac{1}{2}} E(g_{\vec{\tau}}, s, \Phi_f \otimes \Phi_\infty^{\mathbf{1}}), \quad (2.26)$$

其中, $\Phi_\infty^{\mathbf{1}} = \bigotimes_{i=0}^d \Phi_{\sigma_i}^{\mathbf{1}}$, 且 $g_{\vec{\tau}} = n(\vec{u})m(\vec{v}^{1/2})$ 可看作 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_F)$ 中有限位部分平凡的元素.

该函数是平行权 (parallel weight) 均为 1 的非全纯 Hilbert 模形式. 可进一步地将其标准化为 $E^*(\vec{\tau}, s, \varphi, \mathbf{1}) = \Lambda(s+1, \chi)E(\vec{\tau}, s, \varphi, \mathbf{1})$, 其中,

$$\Lambda(s, \chi) = N_{F/\mathbb{Q}}^{\frac{s}{2}} (\partial_F d_{E/F}) \left(\pi^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \right)^{d+1} L(s, \chi), \quad (2.27)$$

而 ∂_F 是 F 上的差异 (different) 理想, $d_{E/F}$ 是 E/F 的相对判别式.

在除 Φ_{σ_0} 之外其余 Φ_v 均来自于某个 $\lambda(\varphi_v)$ 的意义下, 这个 Eisenstein 级数是不一致的 (incoherent). 这就自动地使得 $E^*(\vec{\tau}, 0, \varphi, \mathbf{1}) = 0$ 成立.

命题 2.1 (参见文献 [10, 命题 4.6]) 设 $\varphi \in S(W(\hat{F}))$. 对于全正元 $t \in F_+^\times$, 令 $a(t, \varphi)$ 为 $E_W^{*,'}(\vec{\tau}, 0, \varphi, \mathbf{1})$ 的 t -次 Fourier 系数, 并将 $E_W^{*,'}(\vec{\tau}, 0, \varphi, \mathbf{1})$ 的常数项写为

$$\varphi(0)\Lambda(0, \chi) \log N(\vec{v}) + a_0(\varphi).$$

令

$$\mathcal{E}_W(\tau, \varphi) = a_0(\varphi) + \sum_{m \in \mathbb{Q}_+} a_m(\varphi) q^m,$$

其中

$$a_m(\varphi) = \sum_{t \in F_+^\times, \text{Tr}_{F/Q} t = m} a(t, \varphi).$$

最后, 记 $\tau^\Delta = (\tau, \dots, \tau)$ 为 $\tau \in \mathbb{H}$ 在 $\mathbb{H}^{d+1}$ 下的对角线像, 则当 v 趋于无穷时,

$$E_W^{*,'}(\tau^\Delta, 0, \varphi, \mathbf{1}) - \mathcal{E}_W(\tau, \varphi) - \varphi(0)(d+1)\Lambda(0, \chi) \log v$$

指数性衰减. 进一步地,

$$a_n(\varphi) = \sum_p a_{n,p}(\varphi) \log p$$

满足 $a_{n,p}(\varphi) \in \mathbb{Q}(\varphi)$, 其中 $\mathbb{Q}(\varphi)$ 是由 $\varphi(x)$ ($x \in W(\hat{F}) = V(\mathbb{A}_f)$) 的值生成的 $\mathbb{C}$ 的子域.

现在准备陈述复乘值公式的主定理. 在正交分解 $V = V_0 \oplus W_{\mathbb{Q}}$ 下, 可得对应的子格

$$L_0 = L \cap V_0, \quad L_1 = L \cap W_{\mathbb{Q}}. \quad (2.28)$$

则 $L_0 \oplus L_1 \subset L$ 是指标有限的子格. 注意到对于 $(z_0^\pm, h) \in Z(W)$, 也有 theta 核函数的分解

$$\theta(\tau, z, h) = \theta_0(\tau) \otimes \theta_W(\tau, z_0^\pm, h),$$

其中 θ 、 θ_0 和 θ_W 分别是 V 、 V_0 和 $W_{\mathbb{Q}}$ 对应的 theta 核函数. 如下两个引理因其关联了 $W_{\mathbb{Q}}$ 对应的 theta 核函数和 W 对应的 Eisenstein 级数而有着重要意义.

引理 2.1 (参见文献 [10, 引理 4.3]) 令 $E_W(\vec{\tau}, s, \mathbf{1})$ 为定义于 (2.19) 的 Eisenstein 级数, 则有

$$-2\bar{\partial}_j(E'_W(\vec{\tau}, 0, \mathbf{1})d\tau_{\sigma_j}) = E_W(\vec{\tau}, 0, \mathbf{1}(j))d\mu(\tau_{\sigma_j}).$$

引理 2.2 (参见文献 [10, 命题 4.5], Siegel-Weil 公式)

$$\theta_W(\tau, Z(T(j), h_0^\pm(j), g_j)) = \frac{1}{2} \deg(Z(T, h_0^\pm)) \cdot E_W(\tau^\Delta, 0, \mathbf{1}(j)).$$

令 $\phi_{\mu_i, L_i} = \text{Char}(\mu_i + \hat{L}_i)$, $\mu_i \in L'_i/L_i$, $i = 1, 2$. 现在将

$$\theta_0 = \sum_{\mu_0 \in L'_0/L_0} \theta_0(\phi_{\mu_0, L_0}) \phi_{\mu_0, L_0}^\vee, \quad \mathcal{E}_W = \sum_{\mu_1 \in L'_1/L_1} \mathcal{E}_W(\phi_{\mu_1, L_1}) \phi_{\mu_1, L_1}^\vee$$

分别写为 $S(V(\mathbb{A}_f))$ 上的线性泛函.

易知 $L_0 \oplus L_1 \subset L \subset L' \subset L'_0 \oplus L'_1$, 并由此可得

$$L'/(L_0 \oplus L_1) \subset (L'_0 \oplus L'_1)/(L_0 \oplus L_1),$$

且存在满射 $\varpi: L'/(L_0 \oplus L_1) \rightarrow L'/L$.

因此, 对于 $\mu \in L'/L$, 有

$$\varpi^{-1}(\mu) \subset L'/(L_0 \oplus L_1) \subset (L'_0 \oplus L'_1)/(L_0 \oplus L_1) \quad (2.29)$$

并且

$$\begin{aligned} \phi_{\mu, L} &= \sum_{(\mu_0, \mu_1) \in \varpi^{-1}(\mu)} \phi_{\mu_0, L_0} \otimes \phi_{\mu_1, L_1}, \\ \langle f, \theta_0 \otimes \mathcal{E}_W \rangle &= \sum_{\mu \in L'/L} \sum_{(\mu_0, \mu_1) \in \varpi^{-1}(\mu)} f_{\mu, L} \theta_0(\phi_{\mu_0, L_0}) \mathcal{E}_W(\phi_{\mu_1, L_1}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

定理 2.2 (参见文献 [52, 定理 8.2]) 设 $f \in M_{1-\frac{n}{2}, \bar{\omega}}^!$ 为取值于 S_L 的弱全纯模形式, 沿用前面的记号, 有

$$\Phi(Z(W), f) = \frac{\deg(Z(T, z_0^\pm))}{\Lambda(0, \chi)} \cdot \text{CT} \left[\sum_{\mu \in L'/L} \sum_{(\mu_0, \mu_1) \in \varpi^{-1}(\mu)} f_{\mu, L} \theta_0(\phi_{\mu_0, L_0}) \mathcal{E}_W(\phi_{\mu_1, L_1}) \right].$$

证明 下面将按照 Schofer^[37] 的思路进行简要证明. 一般的结果以及到调和模形式的推广 (参见文献 [14]), 皆受 Schofer 观点的启发.

首先, 由引理 2.1 和 2.2 知

$$\begin{aligned} \Phi(Z(W), f) &= \int_{\mathcal{F}}^{\text{reg}} \left\langle f(\tau), \theta \left(\tau, \sum_{j=0}^d Z(T(j), z_0(j), g_j) \right) \right\rangle d\mu(\tau) \\ &= \int_{\mathcal{F}}^{\text{reg}} \left\langle f(\tau), \theta_0(\tau) \otimes \theta_W \left(\tau, \sum_{j=0}^d Z(T(j), z_0(j), g_j) \right) \right\rangle d\mu(\tau) \\ &= \frac{1}{2} \deg(Z(T, z_0^\pm)) \int_{\mathcal{F}}^{\text{reg}} \left\langle f(\tau), \theta_0(\tau) \otimes \sum_{j=0}^d E_W(\tau^\Delta, 0, \mathbf{1}(j)) d\mu(\tau) \right\rangle \\ &= -\deg(Z(T, z_0^\pm)) \int_{\mathcal{F}}^{\text{reg}} \left\langle f(\tau), \theta_0(\tau) \otimes \sum_{j=0}^d \bar{\partial}_j(E'_W(\tau^\Delta, 0, \mathbf{1}) d\tau) \right\rangle \\ &= -\deg(Z(T, z_0^\pm)) \int_{\mathcal{F}}^{\text{reg}} \langle f(\tau), \theta_0(\tau) \otimes \bar{\partial}(E'_W(\tau^\Delta, 0, \mathbf{1}) d\tau) \rangle \\ &= -\deg(Z(T, z_0^\pm)) \int_{\mathcal{F}}^{\text{reg}} d(\langle f(\tau), \theta_0(\tau) \otimes E'_W(\tau^\Delta, 0, \mathbf{1}) d\tau \rangle) \\ &\quad + \deg(Z(T, z_0^\pm)) \int_{\mathcal{F}}^{\text{reg}} \langle \bar{\partial} f(\tau), \theta_0(\tau) \otimes E'_W(\tau^\Delta, 0, \mathbf{1}) d\tau \rangle \\ &= -\frac{\deg(Z(T, z_0^\pm))}{\Lambda(0, \chi)} I_1 + \frac{\deg(Z(T, z_0^\pm))}{\Lambda(0, \chi)} I_2, \end{aligned}$$

其中,

$$I_1 = \int_{\mathcal{F}}^{\text{reg}} d(\langle f(\tau), \theta_0(\tau) \otimes E_W^{*,'}(\tau^\Delta, 0, \mathbf{1}) d\tau \rangle), \quad I_2 = \int_{\mathcal{F}}^{\text{reg}} \langle \bar{\partial} f(\tau), \theta_0(\tau) \otimes E_W^{*,'}(\tau^\Delta, 0, \mathbf{1}) d\tau \rangle.$$

由于 f 是弱全纯的, 所以有 $\xi(f) = 0$. 因此,

$$\bar{\partial} f(\tau) = -\frac{1}{2i} v^{\frac{n}{2}-1} \overline{\xi(f)} d\bar{\tau} = 0.$$

这使得 $I_2 = 0$.

其次, 由 Stokes 定理和一些分析工具, 可得

$$I_1 = -\text{CT}[\langle f(\tau), \theta_0 \otimes \mathcal{E}_W(\tau) \rangle].$$

最终, 代入 (2.30), 便完成了证明. $\square$

当 f 只是调和而不是弱全纯时, $I_2 \neq 0$ 会产生某些 Rankin-Selberg L -函数的中心导数值, 这可以用于证明 Gross-Zagier 公式和它的高维推广 (参见文献 [9, 14]).

3 在经典模函数上的应用

3.1 模曲线之积与复乘点对

本小节将确定部分记号, 并回顾在文献 [44] 中是如何将模曲线之积视为惯性指数为 $(2, 2)$ 的正交型 Shimura 簇以及如何将复乘点对 (τ_1, τ_2) 视为其上大复乘点的. 令 N 为正整数, $V = M_2(\mathbb{Q})$, 并带有二次型 $Q(X) = N \det X$. 设 H 是 $\mathbb{Q}$ 上的代数群

$$H = \{(g_1, g_2) \in \text{GL}_2 \times \text{GL}_2 : \det g_1 = \det g_2\}.$$

则 $H \cong \text{GSpin}(V)$, 且通过如下方式作用在 V 上:

$$(g_1, g_2)X = g_1 X g_2^{-1}.$$

由此可得正合序列

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow H \rightarrow \text{SO}(V) \rightarrow 1.$$

关于管域, 取迷向矩阵

$$\ell = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V \quad \text{和} \quad \ell' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix} \in V$$

满足 $(\ell, \ell') = 1$. 则对应的管域为

$$\mathcal{H}_{\ell, \ell'} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & -z_2 \end{pmatrix} : y_1 y_2 > 0 \right\}, \quad y_i = \text{Im}(z_i),$$

伴随有映射

$$w : \mathcal{H}_{\ell, \ell'} \rightarrow \mathcal{L}, \quad w \left(\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & -z_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} z_1 & -N z_1 z_2 \\ \frac{1}{N} & -z_2 \end{pmatrix}.$$

显然, 有如下命题成立.

命题 3.1 映射

$$w_N : \mathbb{H}^2 \cup (\mathbb{H}^-)^2 \rightarrow \mathcal{L}, \quad w_N(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} \frac{z_1}{N} & \frac{-z_1 z_2}{N} \\ \frac{1}{N} & \frac{-z_2}{N} \end{pmatrix} = w \left(\begin{pmatrix} \frac{z_1}{N} & 0 \\ 0 & -\frac{z_2}{N} \end{pmatrix} \right)$$

诱导了 $\mathbb{H}^2 \cup (\mathbb{H}^-)^2$ 和 $\mathbb{D}$ 之间的一个同构, 并且 w_N 是 $\mathcal{L}$ 上的一个处处不消失的 H -不变截面. 这里的 $H \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 通过如下常规的线性分式变换作用在 $\mathbb{H}^2 \cup (\mathbb{H}^-)^2$ 上:

$$(g_1, g_2)(z_1, z_2) = (g_1(z_1), g_2(z_2)),$$

且通过其在 V 上的作用自然地作用于 $\mathcal{L}$. 进一步地, 有

$$(g_1, g_2)w_N(z_1, z_2) = \frac{(c_1 z_1 + d_1)(c_2 z_2 + d_2)}{\nu(g_1, g_2)} w_N(g_1(z_1), g_2(z_2)), \quad (3.1)$$

其中 $\nu(g_1, g_2) = \det g_1 = \det g_2$ 是 $H = \mathrm{GSpin}(V)$ 的自旋特征. 因此,

$$j(g_1, g_2, z_1, z_2) = (c_1 z_1 + d_1)(c_2 z_2 + d_2).$$

对于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的同余子群 Γ , 令 X_Γ 为其对应的 $\mathbb{Q}$ 上的开模曲线, 使得 $X_\Gamma(\mathbb{C}) = \Gamma \backslash \mathbb{H}$. 假设 $\Gamma \supset \Gamma(M)$ 对某个 $M \geq 1$ 成立. 设

$$\nu: \mathbb{A}^\times \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}), \quad \nu(d) = \mathrm{diag}(1, d).$$

再设 $K(\Gamma)$ 为 $\nu(\hat{\mathbb{Z}}^\times)$ 与 $\Gamma/\Gamma(M)$ 在 $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}})$ 下的原像之积 (在映射 $\mathrm{GL}_2(\hat{\mathbb{Z}}) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/M)$ 下). 令 $K = (K(\Gamma) \times K(\Gamma)) \cap H(\mathbb{A}_f)$, 则由强逼近定理, 有

$$X_K \cong X_\Gamma \times X_\Gamma.$$

通过这种方式, 可将一条模曲线 X_Γ 和它自身的直积视同为 Shimura 簇 X_K . 逻辑线丛 $\mathcal{L}$ 通过 (3.1) 降为 X_K 上权为 $(1, 1)$ 的双变量模形式的线丛 $\mathcal{L}_K$.

对于 $j = 1, 2$, 令 $E_j = \mathbb{Q}(\sqrt{d_j})$ 为判别式为 $d_j < 0$ 的二次域, 其整数环为 $\mathcal{O}_j = \mathbb{Z}[\frac{d_j + \sqrt{d_j}}{2}]$ 且满足 $(d_1, d_2) = 1$. 下面将描述在文献 [10] 中是如何将一对对应于 E_1 和 E_2 的复乘点 $(\tau_1, \tau_2) \in X_\Gamma \times X_\Gamma$ 视为 X_K 上大复乘点的. 为此, 令 $E = E_1 \otimes_{\mathbb{Q}} E_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$, 其整数环为 $\mathcal{O}_E = \mathcal{O}_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_2$. 则 E 是双二次复乘数域, 其二次实子域为 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, 其中 $D = d_1 d_2$.

定义 $W = E$, 为带有 F -二次型 $Q_F(x) = \frac{N_{x\bar{x}}}{\sqrt{D}}$ 的 F -二次空间. 令 $W_{\mathbb{Q}} = W$, 为带有 $\mathbb{Q}$ -二次型 $Q_{\mathbb{Q}}(x) = \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}} Q_F(x)$ 的 $\mathbb{Q}$ -二次空间. 令 $\sigma_1 = 1$ 和 $\sigma_0 = \sigma$ 为 F 的两个实嵌入, 且满足 $\sigma_j(\sqrt{D}) = (-1)^{j-1} \sqrt{D}$. 则 W 在 σ_0 处的惯性指数为 $(0, 2)$, 在 σ_1 处的惯性指数为 $(2, 0)$, 因而, $W_{\mathbb{Q}}$ 的惯性指数为 $(2, 2)$. 取定 $\mathcal{O}_E$ 的 $\mathbb{Z}$ -基如下:

$$e_1 = 1 \otimes 1, \quad e_2 = \frac{-d_1 + \sqrt{d_1}}{2} = \frac{-d_1 + \sqrt{d_1}}{2} \otimes 1, \quad e_3 = \frac{d_2 + \sqrt{d_2}}{2} = 1 \otimes \frac{d_2 + \sqrt{d_2}}{2}, \quad e_4 = e_2 e_3.$$

下文中若不产生歧义, 将会略去 $\otimes$. 易验证有

$$(W_{\mathbb{Q}}, Q_{\mathbb{Q}}) \cong (V, Q) = (M_2(\mathbb{Q}), N \det), \quad \sum x_i e_i \mapsto \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ x_4 & x_2 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

将 $(W_{\mathbb{Q}}, Q_{\mathbb{Q}})$ 看作二次空间 $(V, Q) = (M_2(\mathbb{Q}), N \det)$. 在这个意义下, 格 $L = M_2(\mathbb{Z})$ 即为 $\mathcal{O}_E$. 同样地, 可验证对于 $\mathbb{Q}$ -代数 R , (2.4) 中的极大环面 T 可视同为 (参见文献 [25] 和 [10, 第 6 节])

$$T(R) = \{(t_1, t_2) \in (E_1 \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \times (E_2 \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times : t_1 \bar{t}_1 = t_2 \bar{t}_2\},$$

且从 T 到 $\mathrm{SO}(W)$ 的映射可由 $(t_1, t_2) \mapsto t_1/\bar{t}_2$ 给出. 而从 T 到 H 的映射可以显式地按如下方式给出. 定义嵌入

$$\iota_j : E_j \rightarrow M_2(\mathbb{Q}), \quad \iota_j(r)(e_{j+1}, e_1)^T = (re_{j+1}, re_1)^T, \quad (3.3)$$

其中 T 表示矩阵的转置, 则 $\iota = (\iota_1, \iota_2)$ 便给出了从 T 到 H 的嵌入.

将 F 的两个实嵌入按如下方式扩充为 E 的复乘类 $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_0\}$:

$$\sigma_1(\sqrt{d_i}) = \sqrt{d_i} \in \mathbb{H}, \quad \sigma_0(\sqrt{d_1}) = \sqrt{d_1}, \quad \sigma_0(\sqrt{d_2}) = -\sqrt{d_2}.$$

由于 $W_{\sigma_0} = W \otimes_{F, \sigma_0} \mathbb{R} \subset V_{\mathbb{R}}$ 的惯性指数为 $(0, 2)$, 所以它给出了 $\mathbb{D}$ 中的两个点 $z_{\sigma_0}^{\pm}$. 在这种情形下, 第 2.1 小节中的大复乘圈变为

$$Z(W, z_{\sigma_0}^{\pm}) = \{z_{\sigma_0}^{\pm}\} \times T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A}_f) / K_T \in Z^2(X_K). \quad (3.4)$$

记

$$Z(W) = Z(W, z_{\sigma_0}^{\pm}) + \sigma(Z(W, z_{\sigma_0}^{\pm})).$$

为简单起见, 将 $z_{\sigma_0}^{\pm}$ 简写为 z_{σ_0} .

引理 3.1 在 $\mathbb{H}^{\pm, 2}$ 上, 有 $z_{\sigma_0} = (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{H}^2$ 且 $z_{\sigma_0}^- = (\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2) \in (\mathbb{H}^-)^2$, 其中

$$\tau_j = \frac{d_j + \sqrt{d_j}}{2}.$$

引理 3.2 令 $K_j = \iota_j^{-1}(K(\Gamma))$, 设 $\mathrm{Cl}(K_j) = E_j^{\times} \backslash E_{j,f}^{\times} / K_j$ 为对应的 E_j 的类群. 则存在单射

$$p' : T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A}_f) / K_T \rightarrow \mathrm{Cl}(K_1) \times \mathrm{Cl}(K_2),$$

其像为

$$\begin{aligned} \mathrm{IM}(p') &= \{(C_1, C_2) \in \mathrm{Cl}(K_1) \times \mathrm{Cl}(K_2) : \text{存在 } t_j \in E_{j,f}^{\times} \text{ 满足 } C_j = [t_j] \text{ 和 } t_1 \bar{t}_1 = t_2 \bar{t}_2\} \\ &= \{(C_1, C_2) \in \mathrm{Cl}(K_1) \times \mathrm{Cl}(K_2) : \text{存在分式理想 } \mathfrak{a}_i \text{ 满足 } C_j = [\mathfrak{a}_j] \text{ 和 } N(\mathfrak{a}_1) = N(\mathfrak{a}_2)\}. \end{aligned}$$

令 H_j 为对应于 K_j 的 E_j 的类群, 而 $H = H_1 H_2$ 为 H_1 和 H_2 的复合. 由复乘理论知, 点 $[z_{\sigma_0}] \in X_K$ 可定义在 H 上. 进一步地, 根据类域论, (3.3) 中的 ι_j 诱导了自然映射

$$\iota_j : \mathrm{Cl}(K_j) \rightarrow X_{\Gamma} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \mathbb{H}^{\pm} \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_f) / K(\Gamma), \quad \iota_j([t^{-1}]) = [\tau_j, \iota_j(t^{-1})] = \tau_j^{\sigma_t}, \quad (3.5)$$

其中 $\sigma_t \in \mathrm{Gal}(H_j/E_j)$ 对应于 $[t]$. 最后的等式是 Shimura 互反律 (参见文献 [43]). 在 Idele 语言下, 可写作 $\tau_j^{\sigma_t} = \tau_j^{\sigma_{\mathfrak{a}}}$, 其中 $[\mathfrak{a}_j] \in \mathrm{Cl}(K_j)$ 对应于 t 的 Idele 类. 显然, 有如下两个命题成立.

命题 3.2 令 $(t_1, t_2) \in T(\mathbb{A}_f)$, 设 $\sigma_{t_j} \in \mathrm{Gal}(H_j/E_j)$ 为经由 Artin 映射对应 (于 t_j) 的 Galois 元素. 则

$$[z_{\sigma_0}, (t_1^{-1}, t_2^{-1})] = [\tau_1^{\sigma_{t_1}}, \tau_2^{\sigma_{t_2}}].$$

命题 3.3 设 $(d_1, d_2) = 1$, 则

$$Z(W, z_{\sigma_0}) = \sum_{([\mathfrak{a}_1], [\mathfrak{a}_2]) \in \mathrm{IM}(p')} [\tau_1^{\sigma_{\mathfrak{a}_1}}, \tau_2^{\sigma_{\mathfrak{a}_2}}],$$

$$Z(W, z_{\sigma_0}^-) = \sum_{([\mathbf{a}_1], [\mathbf{a}_2]) \in \text{IM}(p')} [(-\bar{\tau}_1)^{\sigma_{\mathbf{a}_1}}, (-\bar{\tau}_2)^{\sigma_{\mathbf{a}_2}}],$$

$$Z(W) = \sum_{([\mathbf{a}_1], [\mathbf{a}_2]) \in \text{IM}(p')} ([\tau_1^{\sigma_{\mathbf{a}_1}}, \tau_2^{\sigma_{\mathbf{a}_2}}] + [(-\bar{\tau}_1)^{\sigma_{\mathbf{a}_1}}, \tau_2^{\sigma_{\mathbf{a}_2}}] + [\tau_1^{\sigma_{\mathbf{a}_1}}, (-\bar{\tau}_2)^{\sigma_{\mathbf{a}_2}}] + [(-\bar{\tau}_1)^{\sigma_{\mathbf{a}_1}}, (-\bar{\tau}_2)^{\sigma_{\mathbf{a}_2}}]).$$

此时, 定理 2.2 变为如下定理.

定理 3.1 令 L 为 $M_2(\mathbb{Q})$ 中的整格. 对于一个取值于 S_L 的弱全纯模形式 $f \in M_{0, \bar{\omega}}^!$, 有

$$\Phi(Z(W), f) = \frac{\deg(Z(T, z_{\sigma_0}^\pm))}{\Lambda(0, \chi)} \cdot \text{CT} \left[\sum_{\mu \in L'/L} f_{\mu, L} \mathcal{E}_W(\phi_{\mu, L}) \right].$$

3.2 经典模函数的复乘值

现在可利用定理 3.1 来证明 Gross 和 Zagier 著名的分解公式 (定理 1.1) 并推广到其他模函数上. 这里需要说明的是, 在文献 [23] 中有两种不同的证明方式: 一种算术的, 一种解析的. 下面的简要证明自然是解析的, 但又与该文献的原证明不同. 证明分为 3 步.

(1) 将 $j(z_1) - j(z_2)$ 与对应于 $(M_2(\mathbb{Z}), \det)$ 的 Borchers 积相关联. 在这种情形下, 最早是由 Borchers^[3] 在证明 Moonshine 猜想时发现的, 现已被熟知, 即 $j(z_1) - j(z_2) = \Psi(j(z) - 744)$.

(2) 将复乘点对 (τ_1, τ_2) 视为 Shimura 簇 (如前一节所述, 为模曲线之积) 上的大复乘点, 再应用定理 3.1. 为了使公式更显式化, 我们需要理解 p' 在引理 3.2 下的像. 文献 [44, 引理 3.8] 证明了, 在这一特殊情形下, p' 的像恰好为 $\text{CL}(d_1) \times \text{CL}(d_2)$.

(3) 计算第 2 步中 $\mathcal{E}_W$ 的 Fourier 系数并得出公式. 注意这里都是局部计算, 详细证明可参见文献 [44, 第 4 节].

考虑 λ -不变量

$$\lambda(\tau) = -\frac{1}{16} q^{-\frac{1}{2}} \prod_{n \geq 1} \left(\frac{1 - q^{n-\frac{1}{2}}}{1 + q^n} \right)^8, \quad q = e(\tau) = e^{2\pi i \tau}. \quad (3.6)$$

它实际上给出了 $X(2)$ 与 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ 之间以及 $Y(2)$ 与 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$ 之间的同构. 这里的 $Y(2)$ 指的是对 $(E, E[2])$ 的模空间, 其中 E 是椭圆曲线, 而 $E[2]$ 为 E 的 2-扭子群. 对于 $\tau \in \mathbb{H}$, 其对应的椭圆曲线为

$$E_\tau : y^2 = x(x-1)(x-\lambda(\tau)) \quad (3.7)$$

且其 2-扭子群 $E[2] = \{\infty, (0, 0), (1, 0), (\lambda(\tau), 0)\}$. 取 $N = 2$, 即 $L = M_2(\mathbb{Z})$ 时, $Q(X) = 2 \det X$, 可得文献 [45, 定理 1.4] 中的下列定理.

定理 3.2 令 $E_j = \mathbb{Q}(\sqrt{d_j})$, 其整数环为 $\mathcal{O}_{d_j} = \mathbb{Z}[\tau_j]$, 其中 $\tau_j = \frac{d_j + \sqrt{d_j}}{2}$ ($j = 1, 2$). 设 w_j 为 E_j 中单位根的个数, $h_j = h(E_j)$ 为 E_j 的类数. 令 $E = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$, 且 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, 其中 $D = d_1 d_2$. 对于 F 的分式理想 $\mathfrak{a}$, 令 $\rho_{E/F}(\mathfrak{a})$ 为 E 中相对范数为 $\mathfrak{a}$ 的整理想的个数, 而 $\chi = \chi_{E/F}$ 为 F 的对应于 E/F 的二次 Hecke 特征. 对于整数 $m \equiv D \pmod{2}$, 取 $c(m) = \frac{d_1^2 + d_2^2 - (d_1 + d_2)}{4} - \frac{m + D}{2} \in \mathbb{Z}$. 假设 $(d_1, d_2) = 1$.

(1) 当 $d_1 \equiv d_2 \equiv 5 \pmod{8}$ 时,

$$\log |N(\lambda(\tau_1) - \lambda(\tau_2))|$$

$$= 6 \sum_{\substack{t=\frac{m+\sqrt{D}}{2} \in \mathcal{O}_F \\ |m| < \sqrt{D} \\ c(m) \in 2\mathbb{Z}}} \sum_{\chi_{E/F}(\mathfrak{p})=-1} \left(\frac{1 + \text{ord}_{\mathfrak{p}_t}(t\mathfrak{p}_t^{-2})}{2} + \frac{\text{ord}_{\mathfrak{p}_t}(\mathfrak{p})}{3} \right) \rho_{E/F}(t\mathfrak{p}\mathfrak{p}_t^{-2}) \log N(\mathfrak{p}),$$

其中 $\mathfrak{p}_t$ 为 F 在 2 上的素理想, 使得 $t \in \mathfrak{p}_t$.

(2) 当 $d_1 \equiv 5 \pmod{8}$ 且 $d_2 \equiv 0, 4 \pmod{8}$ 时,

$$\log |N(\lambda(\tau_1) - \lambda(\tau_2))| = \sum_{\substack{t=\frac{m+\sqrt{D}}{2} \in \mathcal{O}_F \\ |m| < \sqrt{D} \\ c(m) \in 2\mathbb{Z}}} \sum_{\chi_{E/F}(\mathfrak{p})=-1} \frac{1 + \text{ord}_{\mathfrak{p}}(t)}{2} \rho_{E/F}(t\mathfrak{p}) \log N(\mathfrak{p}).$$

(3) 当 $d_1 \equiv 1 \pmod{8}$ 且 $d_2 \equiv 5 \pmod{8}$ 时,

$$\log |N(\lambda(\tau_1) - \lambda(\tau_2))| = 2 \sum_{\substack{t=\frac{m+\sqrt{D}}{2} \in \mathcal{O}_F \\ |m| < \sqrt{D} \\ c(m) \in 2\mathbb{Z}}} \sum_{\chi_{E/F}(\mathfrak{p})=-1} \frac{1 + \text{ord}_{\mathfrak{p}}(t)}{2} \rho_{E/F}(t\mathfrak{p}) \log N(\mathfrak{p}).$$

(4) 当 $d_1 \equiv 1 \pmod{8}$ 且 $d_2 \equiv 0, 4 \pmod{8}$ 时,

$$\begin{aligned} & \log |N(\lambda(\tau_1) - \lambda(\tau_2))| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{t=\frac{m+\sqrt{D}}{2} \in \mathcal{O}_F \\ |m| < \sqrt{D} \\ c(m) \in 2\mathbb{Z}}} \sum_{\chi_{E/F}(\mathfrak{p})=-1} \frac{1 + \text{ord}_{\mathfrak{p}}(t)}{2} \rho_{E/F}(t\mathfrak{p}) \log N(\mathfrak{p}) + 2^3 \frac{h_1 h_2}{w_1 w_2} \log 2. \end{aligned}$$

(5) 当 $d_1 \equiv 1 \pmod{8}$ 且 $d_2 \equiv 1 \pmod{8}$ 时,

$$\begin{aligned} & \log |N(\lambda(\tau_1) - \lambda(\tau_2))| \\ &= 2 \sum_{\substack{t=\frac{m+\sqrt{D}}{2} \in \mathcal{O}_F \\ |m| < \sqrt{D} \\ c(m) \in 2\mathbb{Z}}} \sum_{\chi_{E/F}(\mathfrak{p})=-1} \frac{1 + \text{ord}_{\mathfrak{p}}(t\mathfrak{p}_t^{-2})}{2} \rho_{E/F}(t\mathfrak{p}\mathfrak{p}_t^{-2}) \log N(\mathfrak{p}) + 2^5 \frac{h_1 h_2}{w_1 w_2} \log 2, \end{aligned}$$

其中 $\mathfrak{p}_t$ 为 F 在 2 上的素理想, 使得 $t \in \mathfrak{p}_t$.

这里需要说明的是, 对于上述公式中外层和的每个 $t = \frac{m+\sqrt{D}}{2} \in \mathcal{O}_F$, 其对应的内层和 $\sum_{\chi_{E/F}(\mathfrak{p})=-1}$ 至多只有一个非零项, 因为 F 的两个素理想 $\mathfrak{p}_1$ 和 $\mathfrak{p}_2$ 不可能同时满足在 E/F 中惯性, 且对于任意一个分式理想 $\mathfrak{a}$, 都有 $\rho_{E/F}(\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1)$ 和 $\rho_{E/F}(\mathfrak{a}\mathfrak{p}_2)$ 总是非零.

(寻找 Borchers 提升为 $\lambda(z_1) - \lambda(z_2)$ 的弱全纯形式的) 第一步是非常有趣的, 且值得多费些笔墨. 实际上, 若令 $L = M_2(\mathbb{Z})$, $Q(X) = 2 \det X$, 则对应的开 Shimura 簇为 $X_K = Y(2) \times Y(2)$, 其紧化为 $X = X(2) \times X(2)$. 在这种情形下, $L'/L = \frac{1}{2}M_2(\mathbb{Z})/M_2(\mathbb{Z}) = \{\mu_j + L : 0 \leq j \leq 15\}$, 其中,

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mu_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mu_2 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mu_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mu_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & \mu_5 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mu_6 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, & \mu_7 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_8 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, & \mu_9 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & \mu_{10} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & \mu_{11} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\ \mu_{12} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & \mu_{13} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & \mu_{14} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, & \mu_{15} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

对所需的弱全纯形式的一个直觉上的猜测是 $\lambda(\tau)$ 的从 $\Gamma(2)$ 到 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的相对于 L'/L 中某元素的诱导. 经过尝试, Yang 等^[45] 发现了

$$f_1(\tau) = -8 \sum_{\gamma \in \Gamma(2) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \lambda \mid \gamma \omega(\gamma)^{-1} \phi_{\mu_7} = q^{-\frac{1}{2}} \phi_{\mu_7} + O(1) \quad (3.8)$$

在 $X_K = Y(2) \times Y(2)$ 上满足如下性质:

$$\mathrm{Div} \Psi(z_1, z_2, f_1) = \mathrm{Div}(\lambda(z_1) - \lambda(z_2)) = Y(2)^\Delta.$$

但是, 这还不足以说明 $\frac{\lambda(z_1) - \lambda(z_2)}{\Psi(z_1, z_2, f_1)}$ 是常数, 因为边界也是一个除子. 不难发现除子支撑于边界的模函数与 $\lambda(\tau)$ 和 $\Delta(\tau)$ 相关, 而这些函数恰为 S_L 上一些常值函数的 Borchers 提升, 且是 ω_L -不变的. 如下命题的证明可参见文献 [45, 推论 3.5 和命题 3.6].

定理 3.3 令 $\lambda(z)$ 为定义于 (3.6) 的 λ -不变量, 则有

$$\begin{aligned}\lambda(z_1) &= \Psi(z_1, z_2, -8(\phi_{\mu_1} + \phi_{\mu_2} - \phi_{\mu_3} - \phi_{\mu_4} + \phi_{\mu_5} - \phi_{\mu_{10}})), \\ 1 - \lambda(z_1) &= \Psi(z_1, z_2, -8(\phi_{\mu_1} + \phi_{\mu_2} + \phi_{\mu_5} - \phi_{\mu_6} - \phi_{\mu_9} - \phi_{\mu_{15}})), \\ \lambda(z_2) &= \Psi(z_1, z_2, 8(\phi_{\mu_1} - \phi_{\mu_2} + \phi_{\mu_3} - \phi_{\mu_4} + \phi_{\mu_6} - \phi_{\mu_9})), \\ 1 - \lambda(z_2) &= \Psi(z_1, z_2, -8(\phi_{\mu_2} + \phi_{\mu_4} - \phi_{\mu_5} + \phi_{\mu_9} - \phi_{\mu_{10}} - \phi_{\mu_{15}})), \\ \lambda(z_1) - \lambda(z_2) &= \Psi(z_1, z_2, f),\end{aligned}$$

其中, $\phi_\mu = \mathrm{Char}(\mu + \hat{L}) \in S_L$, 且

$$f(\tau) = f_1 + f_2 = q^{-\frac{1}{2}} \phi_{\mu_7} + \sum_{m \geq 0, \mu \in L'/L} c_f(m, \mu) q^m \phi_\mu \in M_{0, \omega}^1,$$

f_1 由 (3.8) 给出, 而

$$f_2 = -4(\phi_{\mu_0} + \phi_{\mu_1} + 3\phi_{\mu_2} - \phi_{\mu_3} + \phi_{\mu_4} + \phi_{\mu_5} + \phi_{\mu_9} - 2\phi_{\mu_{10}} - \phi_{\mu_{15}}).$$

这里需要说明的一个有趣的点是, $\lambda(z_1)$ 是 $X(2) \times X(2)$ 上的 Borchers 提升. 而下面关于 λ -不变量的另一个有趣事实的证明可参见文献 [45, 定理 1.1].

定理 3.4 令 $d < 0$ 为虚二次数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 的基本判别式. 则 $\lambda_0 = \lambda(\frac{d+\sqrt{d}}{2})$ 是代数整数. 进一步地, 有

- (1) 当 $d \equiv 5 \pmod{8}$ 时, λ_0 和 $1 - \lambda_0$ 都是单位;
- (2) 当 $d \equiv 4 \pmod{8}$ 时, λ_0 是单位;
- (3) 当 $d \equiv 0 \pmod{8}$ 时, $1 - \lambda_0$ 是单位;
- (4) 当 $d \equiv 1 \pmod{8}$ 时, $\frac{16}{\lambda_0(1-\lambda_0)}$ 是单位.

尽管对于任意一个复乘点 $\tau = \frac{b+\sqrt{d}}{2a}$, $j(\tau)$ 均为代数整数, 但换作 $\lambda(\tau)$, 结果不再成立. 例如,

$$\lambda\left(\frac{-7+\sqrt{-7}}{4}\right) = \frac{1+3\sqrt{-7}}{32}$$

就不是代数整数. 所以, 上述定理中的结论并非是显然的. 它在某种程度上显示出 $\lambda(\tau)$ 的经典表示式可能是“正确的”那个.

Ye^[49] 利用类似的方法将 $j(z_1) - j(z_2)$ 和 $\lambda(z_1) - \lambda(z_2)$ 的结果推广至亏格为 0 模曲线 $X_0(N)$ 上的主模. 回顾 $X_0(N)$ 的亏格为 0 当且仅当 $1 \leq N \leq 10$ 或 $N = 12, 13, 16, 18, 25$. 在每种情形下, 都存在主模 $\pi_N(z)$, 并可由 η -函数的商给出 (参见文献 [49, 注释 1.3]). 具体而言, 对于一个与 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 相称的 (commensurable) 同余子群 Γ , 若其模曲线 $X(\Gamma)$ 的亏格为 0, 则 Γ 的一个主模指的是 $X(\Gamma)$ 上在 $i\infty$ 处有简单奇点且留数为 1 的模函数的函数域的生成函数. Ye 证明了对所有这样的 N , $\pi_N(z_1) - \pi_N(z_2)$ 都是 Borcherds 提升 (参见文献 [49, 定理 1.4]), 并给出了类似于定理 1.1 和 3.2 的分解公式 (参见文献 [49, 定理 1.11]).

Ye^[46] 还考虑了 Fricke 群 $\Gamma_0^*(p)$ (p 为素数), 由 $\Gamma_0(p)$ 和 Fricke 对合 $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{p}} \\ \frac{1}{\sqrt{p}} & 0 \end{pmatrix}$ 生成. 其对应模曲线 $X_0^*(p)$ 的亏格为 0 当且仅当

$$p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59, 71.$$

令 $j_p^*(\tau)$ 为对应的主模. 为复乘理论所熟知的是, $j_p^*(\tau)$ 在某些特殊虚二次点 (Heegner 点) 上的取值生成了对应虚二次域的 Hilbert 类域^[15]. 按照文献 [46] 中的说法, 很难将 $j_p^*(z_1) - j_p^*(z_2)$ 像上面那样写为 Borcherds 积. 该文献因此转而考虑惯性指数为 $(1, 2)$ 的格

$$L = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{c}{p} & -a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}, \quad Q(X) = p \det X$$

和对应的 Shimura 簇, 结果发现后者即为文献 [27] 中的 $X_0^*(p)$. 对于使得 p 在 K_{d_i} ($i = 1, 2$) 中分裂的虚二次域 $K_{d_i} = \mathbb{Q}(\sqrt{d_i})$, 选取嵌入 $\alpha_i : \mathrm{CL}(K_{d_i}) \rightarrow X_0^*(p)$ (相当于选取一个范数为 p 的理想 $\mathfrak{p}_i$) 和模函数

$$j_{p,d_1}(z) = \prod_{[\mathfrak{a}] \in \mathrm{CL}(K_{d_1})} (j_p^*(z) - j_p^*(\alpha_1([\mathfrak{a}]))).$$

Kim^[27] 证明了该模形式是某个权为 $1/2$ 的弱全纯模形式的 Borcherds 提升. Ye 将定理 2.2 应用在对应于 $\alpha_2(\mathrm{CL}(K_{d_2}))$ 的复乘圈上, 便得到了 $\prod_{[\mathfrak{b}] \in \mathrm{CL}(K_{d_2})} j_{p,d_1}(\alpha_2([\mathfrak{b}]))$ 的分解公式 (具体可参见文献 [46, 定理 1.1]). 这个方法还可以应用于计算 $j(\frac{d+\sqrt{d}}{2})$ 的最小多项式的判别式. 我们会在第 3.4 小节中作详细讨论.

如果能将以上结果推广至亏格为 0 的 Shimura 曲线的主模上就更有意思了. 此时, 由于没有尖点, 所以会产生一些新的问题. 首先, 对于一个主模 f , 差值 $f(z_1) - f(z_2)$ 不再是某些弱全纯模形式的 Borcherds 提升. 对于酉型 Shimura 曲线来说也是如此. 这一点有时可以利用前面讲述的 Ye 的方法来解决. 另一个问题在于想要构造的弱全纯模形式与 f 之间不再显著相关, 因为它们来自不同的曲线 (f 在 Shimura 曲线上, 而我们需要构造的函数则是在模曲线上). 郭家玮和本文三位作者正在计算一些例子. 注意到 Shimura 曲线 (不同于前面小节中讨论的模曲线之积的情形) 上 Borcherds 提升的复乘值公式的相关研究可参见文献 [20]. 除此之外, 酉型 Shimura 曲线的情形也同样令人感兴趣. 值得

注意的是, Daas^[17] 利用 p 进一致化的方法, 已经将以上推广至亏格为 0 的 Shimura 曲线的主模 $f(z)$ 上, 并得到类似 Gross-Zagier 公式的表达式. 虽然如此, 能否利用 Borcherds 提升得到等价于 Daas 公式的结果也是一个非常值得研究的问题.

3.3 Yui-Zagier 猜想

本小节将陈述 Li 和 Yang^[31] 以及 Yang 和 Yin^[44] 在 Yui 和 Zagier^[53] 关于 Weber 函数复乘值猜想方面的工作. 回顾 3 个层为 48 的经典 Weber 函数, 可由如下 η - 函数的商定义:

$$\begin{aligned} f(\tau) &:= \zeta_{48}^{-1} \frac{\eta(\frac{\tau+1}{2})}{\eta(\tau)} = q^{-\frac{1}{48}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-\frac{1}{2}}), \\ f_1(\tau) &:= \frac{\eta(\frac{\tau}{2})}{\eta(\tau)} = q^{-\frac{1}{48}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n-\frac{1}{2}}), \\ f_2(\tau) &:= \sqrt{2} \frac{\eta(2\tau)}{\eta(\tau)} = \sqrt{2} q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n). \end{aligned} \quad (3.9)$$

它们三者一起构成了 $SL_2(\mathbb{Z})$ 上的一个 3 维向量值模函数. 实际上, 同样的结果对于这些模函数的整数幂次同样成立 (参见文献 [34, 第 50 页]). 而且, f_2 是 $\Gamma_0(2)$ 上特征为 χ 的 24 阶模函数:

$$f_2(\gamma\tau) = \chi(\gamma)f_2(\tau), \quad \gamma \in \Gamma_0(2). \quad (3.10)$$

特征 χ 的核, 记为 $\Gamma_\chi \subset \Gamma_0(2)$, 是包含 $\Gamma(48)$ 的同余子群. Yui 和 Zagier^[53] 研究了这些模函数的复乘值. 他们工作的出发点源于以下结果.

命题 3.4 (参见文献 [53, 命题]) 令 $d < 0$ 是满足如下条件的判别式:

$$d \equiv 1 \pmod{8}, \quad 3 \nmid d. \quad (3.11)$$

记 $\varepsilon_d := (-1)^{(d-1)/8}$. 对于序 $\mathcal{O}_d := \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ 中的每个真理想 $\mathfrak{a} = [a, \frac{-b+\sqrt{d}}{2}]$, 其中 $a > 0$, 设 $\tau_{\mathfrak{a}} = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a}$ 为对应的复乘点, 且

$$f(\mathfrak{a}) = \begin{cases} \zeta_{48}^{b(a-c-ac^2)} f(\tau_{\mathfrak{a}}), & \text{若 } 2 \mid (a, c), \\ \varepsilon_d \zeta_{48}^{b(a-c-ac^2)} f_1(\tau_{\mathfrak{a}}), & \text{若 } 2 \mid a, \quad 2 \nmid c, \\ \varepsilon_d \zeta_{48}^{b(a-c+a^2c)} f_2(\tau_{\mathfrak{a}}), & \text{若 } 2 \nmid a, \quad 2 \mid c. \end{cases} \quad (3.12)$$

则 $f(\mathfrak{a})$ 是仅依赖于 $\mathfrak{a}$ 在 $\mathcal{O}_d$ 的类群 $Cl(d)$ 中所在类的代数整数, 即它是一个类不变量. 进一步地, $H_d := K_d(f(\mathfrak{a})) = K_d(j(\tau_{\mathfrak{a}}))$ 是对应于 $\mathcal{O}_d$ 的 K_d 的环类域.

注 3.1 $f(\mathfrak{a})$ 定义中的符号 ε_d 确保了类不变量在 Galois 群的作用下是良好的. 尤其当 $d < 0$ 为基本判别式时,

$$\sigma_{\mathfrak{a}_2}(f(\mathfrak{a}_1)) = f(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2^{-1}) \quad (3.13)$$

对于任意 $\mathcal{O}_d$ -理想 $\mathfrak{a}_1$ 和 $\mathfrak{a}_2$ 成立, 其中, $\sigma_{\mathfrak{a}} \in \text{Gal}(H_d/K_d)$ 按 Artin 映射对应于 $[\mathfrak{a}] \in Cl(d)$. 这一点最早由文献 [53] 所猜测, 并于文献 [21, 命题 22] 中证明.

这一类不变量, 在最小多项式 (类多项式) 的系数要小得多的意义上, 比奇异模数要好得多. 它给出了 Hilbert 类域的一个高度较小的生成元, 而这一点在椭圆曲线质性测试的速度中十分重要 (参见文献 [1]). 例如, 根据文献 [53], $j(\frac{1+\sqrt{-55}}{2})$ 的最小多项式为

$$x^4 + 3^3 5^3 29 \cdot 134219 x^3 - 3^7 5^3 23 \cdot 101 \cdot 32987 x^2 + 3^9 5^7 11^2 83 \cdot 101 \cdot 110641 x - 3^{12} 5^6 11^3 29^3 41^3,$$

而 $f(\mathcal{O}_{-55})$ 的最小多项式则仅为

$$x^4 + x^3 - 2x - 1.$$

受 Gross 和 Zagier 的精美公式 (定理 1.1) 的启发, Yui 和 Zagier^[53] 对于如上定义的 Weber 类不变量最小多项式的结式给出了一个猜测性公式, 并提供了数值证据. 这一猜想最早的叙述用到了 48 个参数的两张表格 (参见文献 [53, 第 1653 页]), 但现在可以用如下优雅的方式简单地给出 (对于 $d_1 \equiv d_2 \equiv 1 \pmod{24}$ 的情形可参见文献 [53] 的公式 (14_?)).

猜想 3.1 (参见文献 [53, 公式 (14_?)]) 设 d_1 和 d_2 是互素的满足 (3.11) 的基本判别式, 而 $s \mid 24$. 定义常数

$$\kappa_3(s) := \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{若 } \left(\frac{d_1}{3}\right) = \left(\frac{d_2}{3}\right) = -1 \text{ 且 } 3 \mid s, \\ 1, & \text{否则,} \end{cases} \quad (3.14)$$

其仅依赖于 d_1 、 d_2 和 s , 则

$$f_s(d_1, d_2) := \prod_{[a_j] \in \text{Cl}(d_j), j=1,2} |f(a_1)^{24/s} - f(a_2)^{24/s}| = \prod_{\substack{m, a \in \mathbb{N}, r \mid s \\ a^2 + 16mr^2 = d_1 d_2 \\ m \equiv 19(d_1 + d_2 - 1) \pmod{s/r}}} \mathfrak{F}(m)^{\kappa_3(s)}. \quad (3.15)$$

定理 3.5 (参见文献 [44, 定理 1.3] 和 [31, 定理 1.7]) 猜想 3.1 对于任意 $s \mid 24$ 成立.

当 $s = 1$ 时,

$$\omega_2(z) = \mathfrak{f}_1(z)^{24} = 2^{12} \cdot \frac{\Delta(2\tau)}{\Delta(\tau)}$$

是 $\Gamma_0(2)$ 的模函数. 此时, 猜想的证明与第 3.2 小节中的相同. 特别地, 可找到一个向量值的模函数 $\tilde{F}_1$, 并将 $\mathfrak{f}_2(z_1)^{24} - \mathfrak{f}_2(z_2)^{24}$ 视同为对应于 $\tilde{F}_1$ 的 Borchers 积 $\Psi(z_1, z_2, \tilde{F}_1)$.

然而, 以上结论对于 $s > 1$ 不再成立. 当 L'/L 越来越大时, 寻找向量值模函数 $\tilde{F}_s$ 使得

$$\Psi(z_1, z_2, \tilde{F}_s) = (\mathfrak{f}_2(z_1)^{24/s} - \mathfrak{f}_2(z_2)^{24/s})^s \quad (3.16)$$

成立的任务越来越困难. Li 和 Yang^[31] 曾用表示论来简化计算, 然后吃惊地发现与 $s = 1$ 的情形完全相反, 对于 $s > 1$, 找到 (3.16) 是不可能的. 为了补救这个问题, 他们发现了如下漂亮的结果.

定理 3.6 (参见文献 [31, 定理 1.8]) 对于任意 $d \mid 24$, 存在向量值模函数 $\tilde{F}_d$ 及其对应的 Borchers 积 $\Psi_d(z_1, z_2) := \Psi(z_1, z_2, \tilde{F}_d)$, 满足

$$(\mathfrak{f}_2(z_1)^{24/s} - (\varepsilon \mathfrak{f}_2(z_2))^{24/s})^s = \prod_{d \mid s} \Psi_d(z_1, z_2)^{(\varepsilon \frac{24}{d})} \quad (3.17)$$

对于任意 $s \mid 24$ 和 $\varepsilon = \pm 1$ 成立.

这里需要注意的是, $\tilde{F}_d$ 和 Borchers 提升对应于不同的二次空间. 然后应用第 3.2 小节中的方法和少量额外工作, Li 和 Yang^[31] 证明了猜想 3.1. 但定理 3.6 又引发了如下在某种意义上是 Borchers 提升逆问题的问题, 且仍旧没有解决.

问题 3.1 假设 Ψ 是正交型 $(n, 2)$ 或酉型 $(n, 1)$ Shimura 簇上的亚纯自守形式, 若满足 $\text{Div}(\Psi)$ 是特殊除子的线性组合, 则 Ψ 是 Borchers 提升 (Borchers 积) 之积. 换言之, 存在 $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上权为 $1 - n/2$ (正交型时) 或 $1 - n$ (酉型时) 的弱全纯的向量值模形式 F_i , 使得

$$\Psi(z, h) = c \prod_{i=1}^r \Psi(z, h, F_i),$$

其中 $c \neq 0$ 为非零常量. 这里的 Borchers 提升可能对应于不同的二次 (酉) 空间 (其对应的 Shimura 簇仍是同构的).

3.4 Gross-Zagier 判别式公式

前几小节主要探讨了差值 $f(z_1) - f(z_2)$ 范数的计算公式, 其中 z_1 和 z_2 对应于两个不同的虚二次域 (大复乘点). 但定理 3.1 中的主要公式也适用于 z_1 和 z_2 有相同自同态环 (小复乘点) 的情形. 接下来, 将用 Gross-Zagier 判别式公式来加以说明.

首先回顾, 对于一个基本判别式 $d < 0$, $j(\frac{d+\sqrt{d}}{2})$ 的 $\mathbb{Q}$ -Galois 共轭恰好为 $\{j(\tau_c)\}$, 其中 $[c]$ 跑遍 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 理想类群 $\text{Cl}(d)$ 中的所有代表元. 特别需要指出的是 $j(\tau_{\mathcal{O}_d}) = j(\frac{d+\sqrt{d}}{2})$. 显然, $j(\frac{d+\sqrt{d}}{2})$ 的极小多项式的判别式, 记为 $\text{disc}(j(z), d)$, 恰好为

$$\text{disc}(j(z), d) = \prod_{\substack{[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}_{\mathcal{K}} \\ [\mathfrak{a}] \neq [\mathcal{O}_{\mathcal{K}}]}} \prod_{[\mathfrak{b}] \in \text{Cl}_{\mathcal{K}}} |j(\tau_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}) - j(\tau_{\mathfrak{b}})|. \quad (3.18)$$

利用这一点可以显式地计算 $j(\frac{d+\sqrt{d}}{2})$ 极小多项式的判别式. 例如, 对于 $d = -71$ 的情形, 文献 [26, 第 349 页] 发现了

$$\text{disc}(j(z), -71) = 7^{42} 11^{21} 13^{21} 17^{13} 23^8 31^6 41^3 47^3 53^2 59^3 61^2 67.$$

有趣的是, 类似于 $j(\frac{d_1+\sqrt{d_1}}{2}) - j(\frac{d_2+\sqrt{d_2}}{2})$ 的范数, 判别式也仅有非常小的素因子. 这激发了 Gross 和 Zagier 将他们的 $j(\frac{d_1+\sqrt{d_1}}{2}) - j(\frac{d_2+\sqrt{d_2}}{2})$ 范数的分解公式推广到判别式 $\text{disc}(j(z), d)$ 的情形. 故在文献 [23] 中, 除了计算差值 $j(z_1) - j(z_2)$ 范数的素因子分解之外, Gross 和 Zagier^[23] 也对 $|d|$ 为素数情形的 $\text{disc}(j(z), d)$ 的素因子分解建立了公式, 用以解释 McKay 和 Ford 的观察. 这个称为 Gross-Zagier 判别式公式的公式可被叙述为如下定理.

定理 3.7 (参见文献 [23, 推论 4.8]) 记号同上, 并假定 $d = -p$, 且 $p \equiv 3 \pmod{4}$ 为素数, 则有

$$|\text{disc}(j(z), -p)| = \prod_{q \text{ 为素数}} q^{e_q},$$

其中,

- (1) 若 q 在 $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ 中分裂, 则 $e_q = 0$;
- (2) 若 q 在 $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ 中惯性, 则

$$e_q = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{\substack{[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}(d) \\ [\mathfrak{a}] \neq [\mathcal{O}_d]}} R_{\mathfrak{a}}(n) \sum_{k \geq 1} R\left(\frac{p-n}{q^k}\right),$$

这里,

$$R_{\mathfrak{a}}(n) = \left| \left\{ x \in \mathfrak{a} \mid \frac{N(x)}{N(\mathfrak{a})} = n \right\} \right|, \quad R(n) = \frac{1}{2} \sum_{[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}(d)} R_{\mathfrak{a}}(n);$$

(3) 若 $q = p$, 则 $e_p = \frac{h(-p)-1}{2}$.

与前面几小节中的情形相同, 本公式可由定理 2.2 加以证明. 如同第 3.2 小节中所描述的, Hilbert 模函数 $-2 \log |j(z_1) - j(z_2)|^2$ 可被看作对应于 $(M_2(\mathbb{Z}), \det)$ 的定义在 Shimura 簇 X_K 上的 Borchers 提升 $\Phi(z, j(\tau) - 744)$, 其中 $K = H(\hat{\mathbb{Z}})$ (定义见第 3.1 小节). 再与 (3.18) 相结合, 可得

$$\begin{aligned} \log |\text{disc}(j(z), d)| &= \log \left(\prod_{\substack{[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}_{\mathcal{K}} \\ [\mathfrak{a}] \neq [\mathcal{O}_{\mathcal{K}}]}} \prod_{[\mathfrak{b}] \in \text{Cl}_{\mathcal{K}}} |j(\tau_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}) - j(\tau_{\mathfrak{b}})| \right) \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{\substack{[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}(d) \\ [\mathfrak{a}] \neq [\mathcal{O}_d]}} \sum_{[\mathfrak{b}] \in \text{Cl}(d)} -2 \log |j(\tau_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}) - j(\tau_{\mathfrak{b}})|^2 \\ &= -\frac{1}{8} \sum_{\substack{[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}(d) \\ [\mathfrak{a}] \neq [\mathcal{O}_d]}} \sum_{z \in Z_{\mathfrak{a}}} \Phi(z; j - 744), \end{aligned} \quad (3.19)$$

其中, $Z_{\mathfrak{a}}$ 是 X_K 上的 0- 圈 (0-cycle), 并可与

$$\sum_{\mathfrak{b} \in \text{Cl}(d)} \{(\tau_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}, \tau_{\mathfrak{b}})\} + \sum_{\mathfrak{b} \in \text{Cl}(d)} \{(\tau_{\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}}, \tau_{\mathfrak{b}})\} \quad (3.20)$$

在同构 $X_K \cong X_{\Gamma} \times X_{\Gamma}$ 的意义下等同, 这里 $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$. 现在整个问题就化归为计算 Borchers 提升 $\Phi(z; j - 744)$ 在 0- 圈 $Z_{\mathfrak{a}}$ 上的平均值. 如果可以将 $Z_{\mathfrak{a}}$ 实现为一个小复乘 0- 圈 $Z(U_{\mathfrak{a}})$, 这是在第 2.1 小节中所讨论的 $d = 0$ 的特例, 则可以将定理 2.2 中的公式应用于 (3.19), 从而得到 $|\text{disc}(j(z), d)|$ 素因子分解的一个公式. 接下来, 将说明这确实是可行的, 即 $Z_{\mathfrak{a}}$ 可与 X_K 中的某些小复乘 0- 圈 $Z(U_{\mathfrak{a}})$ 相等同.

取一个理想类 $[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}(d) - \{[\mathcal{O}_d]\}$, 其中 $\mathfrak{a} = [A, \frac{B+\sqrt{d}}{2}]$, 这里 $A > 0$, $d = (B^2 - 4AC) < 0$, 而 $0 < C \in \mathbb{Z}$. 总可取适当的 $\mathfrak{a}$ 使得 $(A, d) = 1$. 现在可将 $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \mathbb{Q}A + \mathbb{Q}\frac{B+\sqrt{d}}{2}$ 视为一个惯性指数为 $(2, 0)$ 的有理二次空间, 其二次型为 $Q_{\mathfrak{a}}(x) = \frac{N(x)}{N(\mathfrak{a})} = \frac{N(x)}{A}$. 并且通过

$$xA + y\frac{B + \sqrt{-d}}{2} \mapsto x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & C \\ -1 & B \end{pmatrix},$$

可将 $(\mathbb{Q}(\sqrt{d}), Q_{\mathfrak{a}})$ 等同为 V 的一个 $(2, 0)$ 子空间 $(V_{\mathfrak{a}} = \mathbb{Q}e_1^{(\mathfrak{a})} + \mathbb{Q}e_2^{(\mathfrak{a})}, \det(x))$, 其中,

$$e_1^{(\mathfrak{a})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad e_2^{(\mathfrak{a})} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ -1 & B \end{pmatrix}.$$

其正交补空间 $U_{\mathfrak{a}} = V_{\mathfrak{a}}^{\perp} = \mathbb{Q}f_1^{(\mathfrak{a})} + \mathbb{Q}f_2^{(\mathfrak{a})}$, 其中,

$$f_1^{(\mathfrak{a})} = \begin{pmatrix} -1 & B \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad f_2^{(\mathfrak{a})} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

恰好为 V 的 $(0, 2)$ 子空间, 且可视同为 $(\mathbb{Q}A + \mathbb{Q}\frac{B+\sqrt{-d}}{2}, -\frac{N(x)}{A})$, 并给出了 $\mathbb{D}$ 的一个两点子集 $\{z_0^\pm\}$. 回顾在命题 3.1 中, $z_0^\pm$ 有形式

$$z_0^\pm = \begin{pmatrix} z_1 & -z_1 z_2 \\ 1 & -z_2 \end{pmatrix}, \quad \text{且满足 } \pm \text{Im}(z_i) > 0.$$

则必有 $(z_0^\pm, e_1) = (z_0^\pm, e_2) = 0$, 这又蕴含了

$$(z_1, z_2)^\pm = \left(\frac{B \pm \sqrt{-d}}{2A}, \frac{B \pm \sqrt{-d}}{2} \right) = (\tau_a, \tau_{O_d}) \cup (\tau_{\bar{a}}, \tau_{\bar{O}_d}).$$

再由文献 [38, 引理 25.2], 可以看出 $T_a = \text{GSpin}(U_a) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{d})^\times$ 通过映射

$$x + y(f_1^{(a)} \otimes f_2^{(a)}) \mapsto x + y \frac{-B + \sqrt{d}}{2}.$$

除此之外, 依据文献 [38, 25.3 节], 可计算出 T_a 到 $H = \text{GSpin}(V) = \{(g_1, g_2) \in \text{GL}_2 \times \text{GL}_2 \mid \det(g_1) = \det(g_2)\}$ 的嵌入, 即为

$$x + y(f_1^{(a)} \otimes f_2^{(a)}) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x - By & Cy \\ -Ay & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - By & ACy \\ -y & x \end{pmatrix} \right).$$

在这个嵌入和同构 $T_a \cong \mathcal{K}^\times$ 下, 可得 $K_{T_a} = T_a(\mathbb{A}_f) \cap K \cong (\hat{\mathbb{Z}} + \hat{\mathbb{Z}}\frac{-B+\sqrt{-d}}{2})^\times = \hat{O}_d^\times$, 因此,

$$T_a(\mathbb{Q}) \backslash T_a(\mathbb{A}_f) / K_{T_a} \cong \mathbb{Q}(\sqrt{d})^\times \backslash \mathbb{Q}(\sqrt{d})^\times / \hat{O}_d^\times \cong \text{Cl}(d).$$

最后, 可将对应于 $\mathfrak{a}$ 的小复乘 0- 圈 $T_a(\mathbb{Q}) \backslash (\{z_0^\pm\} \times T_a(\mathbb{A}_f) / K_{T_a})$ 视同为

$$\sum_{\mathfrak{b} \in \text{Cl}(d)} \{(\tau_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}, \tau_{\mathfrak{b}})\} + \sum_{\mathfrak{b} \in \text{Cl}(d)} \{(\tau_{\bar{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}}, \tau_{\mathfrak{b}})\},$$

而后者恰好为 (3.20) 中定义的 Z_a . 现在便可以将定理 2.2 中的公式应用于 (3.19), 并取 $Z(W) = Z(U_a)$. 相关的局部计算在文献 [37] 中已由 Schofer 完成, 而从 (3.19) 到如下 $|\text{disc}(j(z), d)|$ 的素因子分解公式则由本文的第二位作者完成.

定理 3.8 (参见文献 [47, 定理 1.1]) 记号同上, 有

$$\begin{aligned} & \log |\text{disc}(j(z), d)| \\ &= -\frac{1}{4}h(d) \sum_{\substack{[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}(d) \\ [\mathfrak{a}] \neq [O_d]}} \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{X, Y=-\infty}^{\infty} \kappa \left(1 - \frac{d(2AX + BY)^2 + (dY - 2Al)^2}{4Ad}, \frac{Bl}{d} f_1^{(a)} - \frac{2Al}{d} f_2^{(a)} + L^{(a)} \right), \end{aligned}$$

其中,

$$\mathfrak{a} = \left[A, \frac{B + \sqrt{-d}}{2} \right], \quad f_1^{(a)} = \begin{pmatrix} -1 & B \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad f_2^{(a)} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$L^{(a)}$ 代表格 $\mathbb{Z}f_1^{(a)} + \mathbb{Z}f_2^{(a)}$, 而

$$\kappa(m, \mu) = -\frac{1}{h(d)} \left(\sum_{q \text{ 惯性}} \xi_q(m, \mu) (\text{ord}_q(m) + 1) \rho_d \left(\frac{md}{q} \right) \log q + \rho_d(md) \sum_{q|d} \xi_q(m, \mu) \text{ord}_q(md) \log q \right),$$

其中,

$$\xi_q(m, \mu) = \begin{cases} 0, & \text{若 } (d, -m)_l = -1 \text{ 且 } \mu \in L^{(\mathfrak{a})} \otimes \mathbb{Z}_l \text{ 对两个素数 } l \mid d \text{ 成立,} \\ 2^{o(\mu)}, & \text{其他情形, 其中 } o(\mu) = |\{l \mid \text{素数 } l \mid d \text{ 且 } \mu \in L^{(\mathfrak{a})} \otimes \mathbb{Z}_l\}|, \end{cases}$$

而 $\rho_d(n) = \{\mathfrak{b} \subset \mathcal{O}_d \mid N(\mathfrak{b}) = n\}$ 可由 $\rho_d(n) = \prod_{q < \infty} \rho_{d,q}(n)$ 简单计算得到, 其中

$$\rho_{d,q}(n) = \begin{cases} 1, & \text{若 } q \mid d, \text{ 即 } q \text{ 在 } \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \text{ 中分歧,} \\ \frac{1 + (-1)^{\text{ord}_q(n)}}{2}, & \text{若 } q \text{ 在 } \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \text{ 中惯性,} \\ \text{ord}_q(n) + 1, & \text{若 } q \text{ 在 } \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \text{ 中分裂.} \end{cases} \quad (3.21)$$

初看之下, 定理 3.8 中的公式与 Gross-Zagier 判别式公式完全不同. 下面简要阐述前者在 $d = -p$ 且 $p \equiv 3 \pmod{4}$ 为素数的情形下是如何与后者等价的.

定理 3.7 的证明 由定理 3.8, 首先有

$$\begin{aligned} & \log |\text{disc}(j(z), -p)| \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}(-p) \\ [\mathfrak{a}] \neq [\mathcal{O}_{-p}]}} \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{x \in \frac{Bl}{d} e_1^{(\mathfrak{a})} - \frac{2Al}{d} e_2^{(\mathfrak{a})} + L_+^{(\mathfrak{a})}} -h(-p) \cdot \kappa \left(1 - \det(x), \frac{Bl}{d} f_1^{(\mathfrak{a})} - \frac{2Al}{d} f_2^{(\mathfrak{a})} + L_-^{(\mathfrak{a})} \right), \end{aligned}$$

其中 $L_+^{(\mathfrak{a})} = \mathbb{Z}e_1^{(\mathfrak{a})} + \mathbb{Z}e_2^{(\mathfrak{a})}$. 两个内层的和合并为一个在 $L_+^{(\mathfrak{a})'} \cong \mathfrak{a}' = \frac{1}{\sqrt{-p}}\mathfrak{a}$ 上单独的和, 因此, 进一步地有

$$\begin{aligned} & \log |\text{disc}(j(z), -p)| \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}(-p) \\ [\mathfrak{a}] \neq [\mathcal{O}_{-p}]}} \sum_{x \in \frac{1}{\sqrt{-p}}\mathfrak{a}} -h(-p) \cdot \kappa(1 - Q_{\mathfrak{a}}(x), \mu_-(x)) \quad (\text{其中 } \mu_-(x) \text{ 代表 } x \text{ 的正交补}) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}(-p) \\ [\mathfrak{a}] \neq [\mathcal{O}_{-p}]}} \sum_{x \in \mathfrak{a}} -h(-p) \cdot \kappa \left(\frac{p - Q_{\mathfrak{a}}(x)}{p}, \mu_- \left(\frac{x}{\sqrt{-p}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}(-p) \\ [\mathfrak{a}] \neq [\mathcal{O}_{-p}]}} \sum_{x \in \mathfrak{a}} \left(\sum_{q \text{ 惯性}} \xi_q \left(\frac{p - Q_{\mathfrak{a}}(x)}{p}, \mu_- \left(\frac{x}{\sqrt{-p}} \right) \right) (\text{ord}_q(p - Q_{\mathfrak{a}}(x)) + 1) \rho_{-p} \left(\frac{p - Q_{\mathfrak{a}}(x)}{q} \right) \log q \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{\substack{[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}(-p) \\ [\mathfrak{a}] \neq [\mathcal{O}_{-p}]}} \sum_{x \in \mathfrak{a}} \left(\rho_{-p}(p - Q_{\mathfrak{a}}(x)) \xi_p \left(\frac{p - Q_{\mathfrak{a}}(x)}{p}, \mu_- \left(\frac{x}{\sqrt{-p}} \right) \right) \text{ord}_p(p - Q_{\mathfrak{a}}(x)) \log p \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{\substack{[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}(-p) \\ [\mathfrak{a}] \neq [\mathcal{O}_{-p}]}} \sum_{\substack{x \in \mathfrak{a} \\ Q_{\mathfrak{a}}(x)=n}} \sum_{q \text{ 惯性}} \xi_q \left(\frac{p-n}{p}, \mu_- \left(\frac{x}{\sqrt{-p}} \right) \right) (\text{ord}_q(p-n) + 1) \rho_{-p} \left(\frac{p-n}{q} \right) \log q \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{p-1} \sum_{\substack{[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}(-p) \\ [\mathfrak{a}] \neq [\mathcal{O}_{-p}]}} \sum_{\substack{x \in \mathfrak{a} \\ Q_{\mathfrak{a}}(x)=n}} \rho_{-p}(p-n) \xi_p \left(\frac{p-n}{p}, \mu_- \left(\frac{x}{\sqrt{-p}} \right) \right) \text{ord}_p(p-n) \log p \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{\substack{[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}(-p) \\ [\mathfrak{a}] \neq [\mathcal{O}_{-p}]}} R_{\mathfrak{a}}(n) \sum_{q \text{ 惯性}} (\text{ord}_q(d-n) + 1) \rho_{-p} \left(\frac{p-n}{q} \right) \log q + \frac{1}{2} \sum_{\substack{[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}(-p) \\ [\mathfrak{a}] \neq [\mathcal{O}_{-p}]}} \log p \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{q \text{ 惯性}} \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{\substack{[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}(-p) \\ [\mathfrak{a}] \neq [\mathcal{O}_{-p}]}} R_{\mathfrak{a}}(n) \frac{(\text{ord}_q(p-n)+1)}{2} R\left(\frac{p-n}{q}\right) \log q + \frac{h(-p)-1}{2} \log p,$$

其中, 最后一个等号成立是基于

$$R(n) = \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a} \in \text{Cl}(-p)} R_{\mathfrak{a}}(n) = \sum_{\mathfrak{a} \in \text{Cl}(-p)} r_{\mathfrak{a}}(n) = \rho_{-p}(n)$$

和 $R_{\mathfrak{a}}(n) = 2r_{\mathfrak{a}}(n)$ 的事实所得, 其中 $r_{\mathfrak{a}}(n) = \{\text{整理理想 } \mathfrak{b} \in [\mathfrak{a}] \mid N(\mathfrak{b}) = n\}$. 除此之外, 注意到 q 在 $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ 中惯性, $R(\frac{p-n}{q}) \neq 0$ 仅可能发生于 $\text{ord}_q(p-n)$ 为奇的情形. 若是如此, 则 $R(\frac{p-n}{q^k}) \neq 0$ 对于所有奇数 $k \leq \text{ord}_q(p-n)$ 都是完全一样的, 因此, 有

$$\frac{\text{ord}_q(p-n)+1}{2} R\left(\frac{p-n}{q}\right) = \sum_{k \geq 1} R_{\mathcal{K}}\left(\frac{p-n}{q^k}\right).$$

综上所述, 便得到了 Gross-Zagier 判别式公式

$$\log |\text{disc}(j(z), -p)| = \frac{1}{2} \sum_{q \text{ 惯性}} \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{\substack{[\mathfrak{a}] \in \text{Cl}(-p) \\ [\mathfrak{a}] \neq [\mathcal{O}_{-p}]}} R_{\mathfrak{a}}(n) \sum_{k \geq 1} R_{\mathcal{K}}\left(\frac{p-n}{q^k}\right) \log q + \frac{h(-p)-1}{2} \log p.$$

证毕. □

最后, 与复乘值的情形类似, 需要指出定理 3.8 可被推广至某些亏格为 0 的模曲线上, 而对于 p 为素数的 $\Gamma_0(p)$ 和 $\Gamma_0^*(p)$ 的情形最近已被 Ye^[48,50] 解决. 事实上, 如上方法仍可广泛地应用于复合层数的情形, 只不过局部计算变得异常复杂.

3.5 Hilbert 模曲面上的 Borchers 提升及其复乘值

定理 2.2 的另外两个应用在于 Hilbert 模曲面和 Siegel 3 维流形 (Siegel 3-fold) 上的大复乘圈. Hilbert 模曲面的情形最早由 Bruinier 和 Yang^[12] 所发现, 早于文献 [10] 中一般的大复乘值公式的结果, 而 Siegel 3 维流形的情形则是 Yu^[51] 工作的一部分.

令 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 为基本判别式为 D 的实二次数域, $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ 为对应于 $\Gamma = \text{SL}_2(\mathcal{O}_F)$ 的 Hilbert 模曲面, 它可被视为对应于

$$L = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & \lambda \\ \lambda' & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathcal{O}_F \right\}, \quad Q(A) = \det A = ab - \lambda\lambda'$$

的正交型 (2, 2) Shimura 簇. 其中, $\sigma : \lambda \mapsto \lambda'$ 是 $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ 中非平凡的 Galois 元素, A^T 是 A 的转置. 设 $E = F(\sqrt{\Delta})$ 为 F 的纯虚二次扩张, 且不是双二次的. 特别地, $\Delta = a + b\sqrt{D}$ 是全负的, 且 $b \neq 0$. 我们仍用 σ 代表 σ 的到 E 的复嵌入的扩展, 设 $\Phi = \{1, \sigma\}$ 为 E 的一个复乘类. 令

$$\tilde{E} = \mathbb{Q}(\text{Tr}_{\Phi}(r) : r \in E), \quad \text{Tr}_{\Phi}(r) = r + \sigma(r)$$

为 (E, Φ) 的反射域 (reflex field), 其实二次子域为 $\tilde{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{\tilde{D}})$, 其中 $\tilde{D} = \Delta\Delta' \in Q_{>0}$. 令 $W = \tilde{E}$, 且带有二次型 $Q(x) = \frac{x\bar{x}}{\sqrt{\tilde{D}}}$, 则可以证明 $(W_{\mathbb{Q}}, \text{Tr}_{\tilde{F}/\mathbb{Q}}) \cong (L_{\mathbb{Q}}, Q)$ (可能差一个正的有理数), 从而给出了对应于 $(\tilde{E}, \tilde{F})$ (而非 (E, F)) 的大复乘圈 $Z(W)$. 如下定理便是文献 [12] 中的一个主要结果.

定理 3.9 (参见文献 [12, 定理 1.4]) 假设 $D = p$ 和 $\tilde{D} = q$ 都是素数. 令 Ψ 为 Γ 上权为 $c(0)$ 的“典则化”整系数半纯 Hilbert 模形式, 使得

$$\mathrm{Div}(\Psi) = \sum_{m>0} \tilde{c}(-m)T_m,$$

其中系数 $\tilde{c}(-m) \in \mathbb{Z}$ 均为整数. 则

$$\log \|\Psi(Z(W))\|_{\mathrm{Pet}} = \frac{W_{\tilde{E}}}{4} \sum_{m>0} \tilde{c}(-m)b_m - \frac{W_{\tilde{E}}}{4} c(0) \alpha\left(\frac{\tilde{E}}{\tilde{F}}\right),$$

其中,

$$\alpha\left(\frac{\tilde{E}}{\tilde{F}}\right) = \Lambda(0, \chi) \left(\Gamma'(1) - \frac{\Lambda'(0, \chi)}{\Lambda(0, \chi)} - \log 4\pi \right),$$

$W_{\tilde{E}}$ 为 E 中单位根的个数, 而

$$\|\Psi\|_{\mathrm{Pet}}(z_1, z_2) = |\Psi(z_1, z_2)(16\pi^2 y_1 y_2)^{\frac{c(0)}{2}}|$$

代表的是 Ψ 的典则化 Petersson 测度, χ 为 $\tilde{F}$ 的对应于 $\tilde{E}/\tilde{F}$ 的二次 Hecke 特征, 而 $\Lambda(s, \chi)$ 是 χ 的完备化 L -函数. 最终, 有

$$b_m = \sum_{\mathfrak{l}} a(\mathfrak{l}) \log(|\mathfrak{l}|),$$

这里的和取遍 $\tilde{F}$ 的在 $\tilde{E}$ 中不分裂且 $|\mathfrak{l}| \leq \frac{Mq}{4p}$ 的所有素理想 $\mathfrak{l}$, 其中 $|\mathfrak{l}| = N_{\tilde{F}/\mathbb{Q}} \mathfrak{l}$, 而 $a(\mathfrak{l})$ 是文献 [12] 序言部分中给出的一个显式的整数.

该定理是 Yang^[41, 42] 在证明非交换 Colmez 猜想的第一种情形时所用到的主要工具. 文献 [12] 还对实二次域 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ 和 $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$ 分别显式地构造了 Hilbert 模函数, 并显式地计算了其复乘值的范数. 特别地, 有别于 j -不变量, 这种情形下的有些复乘值仅是代数数, 而非代数整数.

问题 3.2 一个自然的问题是, 对于其他小判别式的实二次域, 如何通过 Borchers 提升构造显式的 Hilbert 模函数 (模形式), 并研究其性质, 尤其是其复乘值和这些复乘值生成的数域?

Bruinier 和 Yang^[13] 通过具体例子构造了扭曲 Borchers 提升, 并研究其复乘值. 这些例子都有着令人感兴趣的研究价值.

3.6 Siegel 3 维流形上的 Borchers 提升及其复乘值

本小节介绍 Siegel 3 维流形上的应用, 并将亏格为 2 曲线的 Rosenhain 不变量视为亏格为 2 的 Siegel 模形式和 Borchers 提升. 其复乘值在计算有限域上亏格为 2 曲线的曲线密码学上有着重要意义 (参见文献 [16]). 首先回顾如何将 Siegel 3 维流形视同为第 2.1 小节中定义的正交型 (3, 2) 的 Shimura 簇. 这里将沿用第 2 节的记号.

取

$$V = \left\{ A = \begin{pmatrix} r & -c & 0 & -a \\ d & -r & a & 0 \\ 0 & -b & r & d \\ b & 0 & -c & -r \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d, r \in \mathbb{Q} \right\}$$

并带有二次型

$$Q_V(A) = \frac{1}{2} \text{Tr}(A^2) = 2r^2 - 2ab - 2cd$$

和格 $L = (a, b, c, d, r) \in \mathbb{Z}^5 \subset V$. 因此, $L'/L \cong (\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^4 \oplus (\frac{1}{4}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$.

取

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Dt & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & Dt & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

并带有二次型 $Q_{V_0} = 2Dt^2$ 和格 $L_0 = (t) \in \mathbb{Z} \subset V_0$. 因此, $L'_0/L_0 \cong \frac{1}{4D}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$.

取

$$W_{\mathbb{Q}} = \left\{ \begin{pmatrix} r - Ds & 0 & -a \\ s & -r & a & 0 \\ 0 & -b & r & s \\ b & 0 & -Ds & -r \end{pmatrix} \right\}$$

并带有二次型 $Q_{W_{\mathbb{Q}}} = 2r^2 - 2ab - 2Ds^2$ 和格 $L_1 = (a, b, r, s) \in \mathbb{Z}^4 \subset W_{\mathbb{Q}}$. 因此, $L'_1/L_1 \cong (\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^2 \oplus (\frac{1}{4}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \oplus (\frac{1}{4D}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$.

取

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \sigma_1(u) & a \\ b & \sigma_0(u) \end{pmatrix} \middle| u \in F, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

并带有二次型 $Q_W = 2\sigma_1(u)\sigma_0(u) - 2ab$, 其中 $\sigma_1 = 1$ 且 $\sigma_0 = \sigma$. 易见, $W_{\mathbb{Q}} \cong \text{Res}_{F/\mathbb{Q}}W$, 且有 $V = V_0 \oplus W_0$, $L_0 = L \cap V_0$, $L_1 = L \cap W_{\mathbb{Q}}$, 满足 (2.3) 和 (2.28).

将对应的 Shimura 簇记为 $X_2(2)$. 此记号来源于其经典定义中所涉及的同余子群 $\Gamma_2(2) \subseteq \text{Sp}_4(\mathbb{Z})$. 众所周知, $X_2(2)$ 是相对维数为 2 的主极化 (principally polarized) Abel 概形 $\mathbf{A} = (A, \lambda, \psi : A[2] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4)$ 的参数化空间, 其中 ψ 保持 $A[2] \times A^\vee[2]$ 上的 Weil 配对和 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ 上的标准辛配对之间的辛形式不变.

下面描述 $X_2(2)$ 上的复乘点. 令 (E, Σ) 为 4 次复乘域, 并带有全实子域 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ 和复乘型 $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_0\}$, 其中 D 为 F 的基本判别式. 记 F 的整数环为 $\mathcal{O}_F$, 其差异理想为 $\partial_F = \sqrt{D}\mathcal{O}_F$.

设 $\text{CM}_2^\Sigma(E)$ 为相对维数为 2、复乘型为 $(\mathcal{O}_E, \Sigma)$ 的主极化复 Abel 概形 $\mathbf{A} = (A, \kappa, \lambda, \psi : A[2] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4)$ 的同构类全体构成的集合, $\mathbf{A}$ 包含一个复 Abel 概形 A , 并带有 2-扭子群 $A[2]$ 和一个 $\mathcal{O}_E$ -作用 $\kappa : \mathcal{O}_E \hookrightarrow \text{End}(A)$, 以及一个满足下列条件的主极化 $\lambda : A \rightarrow A^\vee$:

- (1) 由 λ 诱导的 Rosati 对合诱导了 E 上的复共轭;
- (2) 存在 A 上的两个平移不变非零复微分形式 ω_0 和 ω_1 , 满足 $\kappa(r)^*\omega_i = \sigma_i(r)\omega_i$ 对任意 $r \in \mathcal{O}_E$ 都成立;

- (3) ψ 保持 $A[2] \times A^\vee[2]$ 上的 Weil 配对和 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ 上的标准辛配对之间的辛形式不变.

则有映射 $j : \text{CM}_2(E) = \coprod_{\Sigma} \text{CM}_2^\Sigma(E) \rightarrow X_2(2)$, 由此即可定义 $X_2(2)$ 上的一个复乘点.

对于一个复乘点 $\mathbf{A} = (A, \kappa, \lambda, \psi) \in \text{CM}_2(E)$, 令 $\mathfrak{a} = H_1(A, \mathbb{Z})$, 并带有诱导的 $\mathcal{O}_E$ - 作用和由 A 的极化诱导而来的非退化辛形式 $\lambda: \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{Z}$. 特别地, λ 定义了 $\mathfrak{a}$ 上满足下式的配对:

$$\lambda(\kappa(r)x, y) = \lambda(x, \kappa(\bar{r})y), \quad r \in \mathcal{O}_E, \quad x, y \in \mathfrak{a},$$

因此, $\mathfrak{a}$ 便成为了一个阶为 1 的射影 $\mathcal{O}_E$ - 模, 而这无非是 E 的一个分式理想. 极化映射 λ 诱导了 $\mathfrak{a}$ 上由下式给出的极化 λ_ξ :

$$\lambda_\xi: \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \lambda_\xi(x, y) = \text{Tr}_{E/\mathbb{Q}} \xi \bar{x}y,$$

其中 $\xi \in E^\times$ 且 $\bar{\xi} = -\xi$. 易通过计算得知 λ 是主极化的当且仅当

$$\xi \partial_{E/F} \mathfrak{a} \bar{\mathfrak{a}} \cap F = \partial_F^{-1}. \quad (3.22)$$

进一步地, $\mathbf{A}$ 的复乘型为 Σ 当且仅当 $\Sigma(\xi) = (\sigma_1(\xi), \sigma_0(\xi)) \in \mathbb{H}^2$. 显然, $\psi: A[2] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ 诱导了映射 $(\frac{1}{2}\mathfrak{a}/\mathfrak{a}) \rightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$, 保持辛形式不变, 或等价地, 给出了 $(\frac{1}{2}\mathfrak{a}/\mathfrak{a})$ 的一组关于 Weil 配对的辛基.

可以证明反过来也是对的. 换言之, 给出一个复乘点 $\mathbf{A}$ 等价于给出满足 (3.22) 的三元组的等价类 $[\mathfrak{a}, \xi, \underline{e}]$, 其中, $\underline{e}$ 是 $(\frac{1}{2}\mathfrak{a}/\mathfrak{a})$ 的一组关于 Weil 配对的辛基, 并且存在 E 的唯一复乘型 Σ , 使得 $\Sigma(\xi) \in \mathbb{H}^2$, 且有

$$\mathbf{A}(\mathfrak{a}, \xi, \underline{e}) := (A = (\mathfrak{a} \otimes 1) \backslash (E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}), \kappa, \lambda_\xi, \underline{e}) \in \text{CM}_2^\Sigma(E).$$

这里通过复乘型 Σ 将 $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ 等同为 $\mathbb{C}^2$.

这些复乘点恰好就是第 2.1 小节中定义的 $z_0^\pm$. 将这个结果归结于如下引理.

引理 3.3 (参见文献 [52, 引理 9.7 和命题 9.8]) 第 2.1 小节中定义的对应用于 W_{σ_0} 的复乘点 $z_0^\pm$ 与本小节定义的对应用于复乘点 $[\mathfrak{a}, \xi, \underline{e}] \in \text{CM}_2^\Sigma(E)$ 的点 $z = \Sigma(\beta/\alpha)$ 一一对应, 其中, 记

$$\mathfrak{a} = \mathcal{O}_F \alpha + \partial_F^{-1} \beta,$$

并要求 $\Sigma(\beta/\alpha) = (\sigma_1(\beta/\alpha), \sigma_0(\beta/\alpha)) \in \mathbb{H}^2$ 且 $\xi(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}) = 1$. 这里的 $W = \tilde{E}$ 是 (E, Σ) 的反射域 (reflex field), 即由类范数 $N_\Sigma(z) = \sigma_1(z)\sigma_0(z)$ ($z \in E$) 生成的 $\mathbb{C}$ 的子域. 进一步地, 若定义 $T = \{z \in E^\times \mid z\bar{z} \in \mathbb{Q}^\times\}$, 则有复乘圈

$$Z(\mathbf{A}) = T(\mathbb{Q}) \backslash \{z_0^\pm\} \times T(\mathbb{A}_f) / K_T,$$

并带有 $C(T) = T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A}_f) / K_T$ - 作用.

定义 3.1 (Siegel theta 常数) 令 $z \in \mathbb{H}_2$, 四元组 $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^4$, 也将其记作 $(\mathfrak{r}, \mathfrak{y}) = ((x_1, x_2), (y_1, y_2))$, 即 $\mathfrak{r}, \mathfrak{y} \in \mathbb{Z}^2$, 则特征为 $(\mathfrak{r}, \mathfrak{y})$ 的 Siegel theta 常数定义为

$$\theta_{\mathfrak{r}, \mathfrak{y}}(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \exp \left(\pi i \left(m + \frac{\mathfrak{r}}{2} \right) z \left(m + \frac{\mathfrak{r}}{2} \right)^T + 2\pi i \left(m + \frac{\mathfrak{r}}{2} \right) \left(\frac{\mathfrak{y}}{2} \right)^T \right).$$

函数 $\theta_{\mathfrak{r}, \mathfrak{y}}(z)$ 是模群 $\Gamma(2)$ 上的一个权为 $\frac{1}{2}$ 的 Siegel 模形式. 注意到 $\theta_{\mathfrak{r}, \mathfrak{y}}(z) = \pm \theta_{\mathfrak{r}', \mathfrak{y}'}(z)$, 若 $(\mathfrak{r}, \mathfrak{y}) \equiv (\mathfrak{r}', \mathfrak{y}') \pmod{2}$. 所以, 只需要考虑 $\mathfrak{r}, \mathfrak{y} \in \{0, 1\}^2$ 的情形. 由于只有 $(\theta_{\mathfrak{r}, \mathfrak{y}})^2$ 出现在本文之后的计算中, 因而这里正负号的不确定性不是问题.

回顾在本小节开头构造了 V 中的格 L , $L'/L \cong (\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^4 \oplus (\frac{1}{4}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$ 有一组包含 64 个元素 $\varphi_1, \dots, \varphi_{64}$ 的基.

对于这个特定的格 L 和每一对 $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, Lippolt^[32] 均构造了一个取值于 S_L 的权为 $-1/2$ 的弱全纯模形式 $f_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}}$, 使得 $\theta_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}}(z) = \Psi(z, f_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}})$ 或 $-\log \|\theta_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}}(z)\|_{\text{Pet}}^2 = \Phi(z, f_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}})$ 是 $f_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}}$ 在定理 2.1 意义下的 Borchers 提升. 这里的 $f_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}} = \sum_{\mu \in L'/L} f_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mu} \varphi_{\mu}$, 其中 $f_{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mu} \in \{0, \pm \mathbf{u}, \pm \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, 而

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= 1 + 4q + 14q^2 + 40q^3 + 100q^4 + 232q^5 + 504q^6 + \cdots, \\ \mathbf{v} &= -2q^{\frac{1}{2}} - 8q^{\frac{3}{2}} - 24q^{\frac{5}{2}} - 64q^{\frac{7}{2}} - 154q^{\frac{9}{2}} - 344q^{\frac{11}{2}} - \cdots, \\ \mathbf{w} &= q^{-\frac{1}{8}} - q^{\frac{7}{8}} + q^{\frac{15}{8}} - 2q^{\frac{23}{8}} + 3q^{\frac{31}{8}} - 4q^{\frac{39}{8}} + 5q^{\frac{47}{8}} - 7q^{\frac{55}{8}} + \cdots, \end{aligned}$$

其中 $q = e^{2\pi i \tau}$.

所谓 Rosenhain 不变量指的是 720 个亏格为 2 的 Siegel 模函数组成的三元组. 三元组的取法之一为

$$\lambda_1(\tau) = -\frac{\theta_{i_1}^2 \theta_{i_3}^2}{\theta_{i_4}^2 \theta_{i_6}^2}, \quad \lambda_2(\tau) = -\frac{\theta_{i_2}^2 \theta_{i_3}^2}{\theta_{i_5}^2 \theta_{i_6}^2}, \quad \lambda_3(\tau) = -\frac{\theta_{i_1}^2 \theta_{i_2}^2}{\theta_{i_4}^2 \theta_{i_5}^2}, \quad (3.23)$$

其中,

$$\begin{aligned} i_1 &= (0, 0, 1, 0), & i_2 &= (1, 0, 0, 0), & i_3 &= (0, 1, 1, 0), \\ i_4 &= (0, 0, 1, 1), & i_5 &= (1, 1, 0, 0), & i_6 &= (1, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

对应于此三元组, 有亏格曲线

$$C_{\lambda} : y^2 = x(x-1)(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3), \quad (3.24)$$

并且 $\lambda_i(\tau)$ 都是同余子群 $\Gamma_2(2)$ 上的 Siegel 模函数. C_{λ} 的 Jacobian 有复乘当且仅当 τ 为复乘点. 则定理 2.2 中的一般复乘值公式可给出 Rosenhain 不变量的如下结果.

定理 3.10 (参见文献 [52, 定理 10.3]) 记号同上. 对于 $l = 1, 2, 3$, 有

$$\begin{aligned} &\log |\lambda_l(Z(\mathbf{A}))| \\ &= C_E \sum_{(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \in S_l} \varepsilon_{l, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}} \sum_{i=1}^2 \left(\delta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, i) \sum_{\substack{t \in F_+^{\times}, \\ \text{Tr}_{F/\mathbb{Q}} t = \frac{1}{8}}} a(t, \varphi_{\mu_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, i)}) + 2\delta'(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, i) \sum_{\substack{t \in F_+^{\times}, \\ \text{Tr}_{F/\mathbb{Q}} t = \frac{1}{8} - \frac{1}{8D}}} a(t, \varphi_{\mu_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, i)}) \right), \end{aligned}$$

其中 $C_E = \frac{4}{w_E} \frac{|C(T)|}{\Lambda(0, \chi)}$, 这里的 w_E 是 E 中单位根的个数, $C(T) = T(\mathbb{Q}) \backslash T(\mathbb{A}_f) / K_T$;

$$\begin{aligned} \delta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, i) &= \begin{cases} 1, & \text{若 } \mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, i) = (a, b, 0, 0, r), \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \\ \delta'(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, i) &= \begin{cases} 1, & \text{若 } \mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, i) = \left(a, b, \frac{1}{2}, 0, r\right), \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \\ \mu_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, i) &= \begin{cases} (a, b, r, 0), & \text{若 } \mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, i) = (a, b, 0, 0, r), \\ \left(a, b, r, \frac{1}{4D}\right), & \text{若 } \mu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, i) = \left(a, b, \frac{1}{2}, 0, r\right). \end{cases} \end{aligned}$$

而 $S_1 = \{i_1, i_3, i_4, i_6\}$, $S_2 = \{i_2, i_3, i_5, i_6\}$, $S_3 = \{i_1, i_2, i_4, i_5\}$, 最后, $\varepsilon_{l, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}}$ 的值可见表 1, 其中 $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = i_j \in S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

表 1 $\varepsilon_{l,r,\eta}$ 的值

$\begin{matrix} (r, \eta) \\ l \end{matrix}$	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6
1	-1	0	-1	1	0	1
2	0	-1	-1	0	1	1
3	-1	-1	0	1	1	0

注 3.2 这里的 $a(t, \varphi)$ 即为命题 2.1 中 $E_W^{*,l}(\bar{\tau}, 0, \varphi, \mathbf{1})$ 的 t -次 Fourier 系数. μ_1 则是 (2.29) 中 $\varpi^{-1}(\mu)$ 分解的 L'_1/L_1 分量.

4 高次 Green 函数及其复乘值

回顾 III 光滑函数上的 Maaß 提升和下降算子可定义为微分算子

$$R_k = 2i \frac{\partial}{\partial \tau} + kv^{-1}, \quad L_k = -2iv^2 \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}}.$$

有时, 为简化记号, 会略去权 k , 并将下降算子简记为 L , 因为其定义实际上并不依赖于 k . 下降算子在全纯函数上的作用均为零作用. 进一步地, 若 g 是 III 上的全纯函数, 则

$$R_{-k}(v^k \bar{g}) = 0. \quad (4.1)$$

回顾第 2.1 小节中的二次空间 V 、格 L 及 Shimura 簇 X_K . 给定

$$f = \sum_{\mu \in L'/L} \sum_m c(m, \mu) q^m \phi_\mu \in M_{1-\frac{n}{2}-2r, \omega}^1,$$

其对应的正则 theta 提升 (参见文献 [7, 式 (5.1)])

$$\Phi_f^r(z, h) = (4\pi)^{-r} \int_{\mathcal{F}}^{\text{reg}} \langle R_\tau^r f, \theta_L \rangle d\mu(\tau) \quad (4.2)$$

被称为 f 对应的高次 Green 函数. 它沿着 X_K 上的特殊除子

$$Z^r(f) := \sum_{m>0, \mu \in L'/L} c(-m, \mu) m^r Z(m, \mu) \quad (4.3)$$

有对数奇点 (参见文献 [7, 式 (5.2)]).

在特殊情形

$$L = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}, \quad Q(X) = \det X = ad - bcN$$

下, 与前面描述的一样, 有 $X_K = Y_0(N) \times Y_0(N)$.

给定 $f \in M_k^1(\Gamma_0(N))$, 其中 $k \in 2\mathbb{Z}$, 可通过如下映射将其提升为 $M_{k,\omega}^1$ 中的向量值模形式:

$$\text{vv} : M_k^1(\Gamma_0(N)) \rightarrow M_{k,\omega}^1, \quad f \mapsto \sum_{\gamma \in \Gamma_0(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} (f|_k \gamma) \omega(\gamma)^{-1} \cdot \phi_0, \quad (4.4)$$

其中 $\phi_0 = \text{Char}(\hat{L})$. 该映射及其推广已有充分的研究 (参见文献 [37]). 在此情形下, 有如下命题 (参见文献 [11, 推论 2.4]):

命题 4.1 在命题 3.1 中同构的意义下, 对于 $f \in M_{-2r}^{1,\infty}(\Gamma_0(N))$, 其中 $r > 0$, 有

$$G_{r+1,f}^{\Gamma_0(N)}(z_1, z_2) = -\Phi_{\text{vv}(f)}^r([w_1(z_1, z_2), 1]), \quad (4.5)$$

其中 $G_{r+1,f}^{\Gamma_0(N)}$ 是 (1.8) 中定义的高次 Green 函数.

一般而言, 类似地, 还可以用超几何函数来表示 $\Phi_f^r(z, h)$ (参见文献 [7, 第 4 节]). 为解决猜想 1.1, 很自然地需要研究这些高次 Green 函数的复乘值.

4.1 高次 Green 函数的小复乘值

沿用第 2 节中的记号. 令 $U \subset V$ 为 V 中的负二次平面 (在前面 $d = 0$ 的情形下即有 $U = W$), 从而给出了两个小复乘点 $z_U^\pm$. 令 $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-\det U})$ 为 U 对应的虚二次域, 则第 2 节中对应的环面恰好为 $T = \text{Res}_{k/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m$. 我们有 $V = V_0 \oplus U$, 其中 $V_0 = U^\perp$ 是正定的. 令 $L_0 = V_0 \cap L$, $L_1 = U \cap L$, 满足 $L_0 \oplus L_1 \subset L$.

在此情形下, 有引理 2.1 的如下 θ - 类比. 这个结果分别由 Duke 和 Li^[18] 及 Ehlen^[19] 独立发现.

定理 4.1 (参见文献 [7, 定理 3.9]) 对于任意一个 $h \in k^\times \backslash k_f^\times / \hat{\mathcal{O}}_k^\times$, 均存在权为 1、取值于 $S_{L_1}^\vee$ 的调和 Maaß 形式 $\mathcal{G}_{L_1}(\tau, h)$, 其全纯部分为

$$\mathcal{G}_{L_1}^+(\tau, h) = \sum_{\mu \in L_1'/L_1} \sum_{m \gg -\infty} c_{L_1}^+(h, m, \mu) e(m\tau) \phi_\mu^\vee,$$

满足如下性质:

- (1) $L(\mathcal{G}_{L_1}(\tau, h)) = \theta_{L_1}(\tau, h)$, 其中 L 是 Maaß 权下降算子;
- (2) 对于任意 $\mu \in L_1'/L_1$ 和任意 $m \in \mathbb{Q}$, 有 $m \equiv Q(\mu) \pmod{\mathbb{Z}}$ 且 $(m, \mu) \neq (0, 0)$, 总存在 $\alpha_{L_1}(h, m, \mu) \in H_k^\times$, 使得

$$c_{L_1}^+(h, m, \mu) = -\frac{1}{r} \log |\alpha_{L_1}(h, m, \mu)|, \quad (4.6)$$

其中, $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ 仅依赖于 L_1 , H_k 指的是 k 的 Hilbert 类域;

- (3) 代数数 $\alpha_{L_1}(h, m, \mu)$ 满足 Shimura 互反律

$$\alpha_{L_1}(h, m, \mu) = \alpha_{L_1}(1, m, \mu)^{\sigma(h)},$$

其中 $\sigma(h) \in \text{Gal}(H_k/k)$ 是 h 在 Artin 映射下的像;

- (4) 除此之外, 存在 $\alpha_{L_1}(h, 0, 0) \in H_k^\times$, 使得 $c_{L_1}^+(h, 0, 0) = \frac{2}{r} \log |\alpha_{L_1}(h, 0, 0)| + \kappa(0, 0)$.

将如上结果与定理 2.2 证明中的想法相结合 (再外加一些微分学的知识), 便可得到 Bruinier 等的如下定理 (参见文献 [7, 定理 5.5]). 该定理的一个特殊情形最早被 Viazovska^[39, 40] 证明.

定理 4.2^[7] 设 $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $f \in M_{1-n/2-2j, S_L}^1$ 使得 $c_f(m, \mu) \in \mathbb{Z}$ 对于 $m \leq 0$ 均成立, 而 $h \in k_f^\times$. 则有

$$\Phi^j(z_U^\pm, h, f) = \text{CT}(\langle f, [\theta_{L_0}, \mathcal{G}_{L_1}^+(\tau, h)]_j \rangle),$$

其中, $[f, g]_j$ 是所谓的 Rankin-Cohen 括号, 定义如下:

$$[f, g]_j = \frac{1}{(-4\pi)^j} \sum_{s=0}^j (-1)^s \binom{k+j-1}{s} \binom{l+j-1}{j-s} (R_k^{j-s} f)(R_l^s g), \quad (4.7)$$

这里 f 和 g 为权分别为 k 和 l 的模形式. 对于向量值模形式 f (取值于 S_L) 和 g (取值于 $S_L^\vee$), 有

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\mu \in L'/L} f_\mu g_\mu.$$

推论 4.1 (参见文献 [7, 推论 5.6]) 记号和假设同上. 对于任意一个 $h \in k^\times \backslash k_f^\times / \hat{O}_k^\times = \text{Cl}(k)$, 总存在 $\alpha_{U,f}(h) \in H_D^\times$, 使得

(1) $A^j \cdot \Phi^j(z_U^\pm, h, f) = -\frac{1}{r} \cdot \log |\alpha_{U,f}(h)|$, 其中, $A \in \mathbb{Z}_{>0}$ 是格 P 和 N 层数的最小公倍数, 而 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ 是仅依赖于 L 和 D 的常数 (但不依赖于 f, h 或 j).

(2) 代数数 $\alpha_{U,f}(h)$ 满足 Shimura 互反律 $\alpha_{U,f}(h) = \alpha_{U,f}(1)^{\sigma(h)}$.

4.2 高次 Green 函数的双二次复乘值

将如上代数性结果推广至其他复乘点其实是十分困难的. 其一是很难将定理 4.1 推广至次数大于 1 的全实域上, 其二是不知道如何将 Rankin-Cohen 括号推广至全实域的情形. 对于双二次复乘点, 如下定理基于一系列文章 (参见文献 [7, 11, 30]).

定理 4.3 设 V 是 $\mathbb{Q}$ 上惯性指数为 $(n, 2)$ 的二次空间, 有整格 L , 令 X_K 为 V 对应的 Shimura 簇. 令 E 为一个双二次复乘域, 其实二次域为 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, 再令 $Z(W)$ 为 (2.5) 中定义的对复乘圈. 设 $f \in M_{1-n/2-2r, \omega}^!$ 为权为 $1 - n/2 - 2r$ ($r \in \mathbb{N}$) 的弱全纯向量值模形式, 使其负项系数均为整数. 则存在 $\kappa \in \mathbb{N}$ 以及 Galois 等价映射 $\alpha_1, \alpha_2 : T_W(\hat{\mathbb{Q}}) \rightarrow E^{\text{ab}}$ (E 的极大 Abel 扩张), 使得

$$\Phi_f^r([z, h]) = \frac{1}{\kappa} (\log |\alpha_1(h)| + \sqrt{D} \log |\alpha_2(h)|)$$

对于所有的 $[z, h] \in Z(W)$ 成立. 进一步地, 在 $n = 2$ 的情形, 对于 $j \equiv r \pmod{2}$, 可取 $\alpha_j(h) = 1$, 即存在 Galois 等价映射 $\alpha : T_W(\hat{\mathbb{Q}}) \rightarrow E^{\text{ab}}$, 使得

$$\Phi_f^r([z, h]) = \frac{1}{\kappa \sqrt{D}^r} \log |\alpha(h)|$$

对于所有的 $h \in T_W(\hat{\mathbb{Q}})$ 成立. 特别地, 猜想 1.1 成立.

本定理的证明有 3 个组成部分. 令 $\sigma_1 = 1$ 和 $\sigma_0 = \sigma$ 为 F 的两个实嵌入, 则

$$Z(W) = Z(W, z_{\sigma_0}^\pm) + \sigma Z(W, z_{\sigma_0}^\pm)$$

且 $Z(W, z_{\sigma_0}^\pm)$ 可定义在 F 上.

第一个组成部分是文献 [7, 定理 5.10], 该定理给出了 $\Phi_f^r(Z(W, z_{\sigma_0}^\pm)) + (-1)^r \Phi_f^r(\sigma(Z(W, z_{\sigma_0}^\pm)))$ 的显式公式, 并可推导出如下定理:

定理 4.4 记号与定理 4.3 中相同. 则

$$\Phi_f^r(Z(W, z_{\sigma_0}^\pm)) + (-1)^r \Phi_f^r(\sigma(Z(W, z_{\sigma_0}^\pm))) = \frac{1}{\kappa} \log |\lambda|$$

对于某 $\lambda \in \mathbb{Q}^\times$ 成立.

本定理是 $r = 0$ 的情形下文献 [10, 52] 类似公式的推广. 这里需要说明的是, 本定理对于所有的 4 次复乘域 E 均成立.

第二个组成部分是如下出人意料的结果, 它实际上是文献 [30, 定理 1.3] 的一个特殊情形.

定理 4.5 存在某个 $\alpha \in E^{ab}$, 使得对于任意 $h_1, h_2 \in T_W(\mathbb{A}_f)$, 均有

$$\kappa(\Phi_f^r(z_{\sigma_0}, h_1) - \Phi_f^r(z_{\sigma_0}, h_2)) = D^{\frac{r}{2}} \log \left| \frac{\sigma_{h_1}(\alpha)}{\sigma_{h_2}(\alpha)} \right|,$$

其中 σ_h 是 $\text{Gal}(E^{ab}/E)$ 中对应 $h \in \text{SO}(W) = E_{\mathbb{A}_f}^1$ 像的 Galois 元素.

下面是证明定理 4.5 的粗略想法. 令 $L_0 = V_0 \cap L$, $N = W \cap L$, 则 $\theta_L(\tau) = \theta_{L_0}(\tau)\theta_N(\tau^\Delta)$, 其中 $\theta_N(\tau_0, \tau_1)$ 是权为 $(-1, 1)$ 的 Hilbert 模形式, 而 $\tau^\Delta = (\tau, \tau)$. 要找到 θ_N 在第一个变量 τ_0 的 Maaß 下降算子下“好的”原像是非常困难的 (因此对于 ξ -算子也是如此). 因此, Li^[30] 改为利用如下的嵌入技巧: 将 N 嵌入至 $N \oplus P^\ell$ 中, 其中 P 为任意一个单位模 (unimodular) 正定格且阶足够大, 再证明 $\theta_P^\ell \theta_N = \theta_{N \oplus P^\ell}$ 在第一个变量的 Maaß 下降算子下有“好的”原像. 从而, 他便有机会利用 Bruinier 对于 Borchers 提升在全实域上的推广 (参见文献 [6]). 但是, 与原始的 Borchers 提升有 Borchers 乘积展开用来作正则化不同, Bruinier 的推广不能控制常数因子. Li^[30] 利用两个复乘值的差异处理这里的歧义, 证明了对于任意一个 τ , 存在某个 P 满足 $\theta_P(\tau^\Delta) \neq 0$, 从而使得嵌入技巧可以顺利施行.

第三个组成部分, 也是最后一个组成部分是如下定理, 它是文献 [11, 定理 5.1] 的一个简化版本.

定理 4.6 记号与定理 4.3 中相同. 则存在某个 $\beta \in F^\times$, 使得

$$\Phi_f^r(Z(W, z_{\sigma_0}^\pm)) - (-1)^r \Phi_f^r(\sigma(Z(W, z_{\sigma_0}^\pm))) = \frac{1}{\kappa} \log \left| \frac{\sigma_1(\beta)}{\sigma_0(\beta)} \right|.$$

本定理是 3 个组成部分中唯一需要假设 E 为双二次的一个. 证明的基本思路与定理 4.4 中的类似. 而定理 4.4 证明最重要的组成部分之一便是如下著名的等式 (为简单起见, 假定 $r = 0$):

$$2(L_0 + L_1)E^{*,'}(\tau_0, \tau_1, 0, \Phi^{(1,1)}) = E^*(\tau_0, \tau_1, 0, \Phi^{(1,-1)}) + E^*(\tau_0, \tau_1, 0, \Phi^{(-1,1)}), \quad (4.8)$$

其中, L_j 是第 j 个变量的下降算子, 而 $\Phi^{(\epsilon_1, \epsilon_2)} = \Phi_f \otimes \Phi_\infty^{(\epsilon_1, \epsilon_2)}$ 是退化的主序列 $I(0, \chi)$ 的 Siegel-Weil 截面, 这里 $\chi = \chi_{E/F}$ 为 F 的对应于 E/F 的二次 Hecke 特征. 特别地, $E^*(g, 0, \Phi^{(\epsilon, -\epsilon)})$ 是权为 $(\epsilon, -\epsilon)$ 、 $\epsilon = \pm 1$ 的一致 (coherent) Eisenstein 级数. 定理证明的主要工作便是找到某些“好的”权为 $(1, 1)$ 的 Hilbert 模形式 (非全纯) $I(\tau_0, \tau_1)$, 使得

$$2(L_0 + L_1)I(\tau_0, \tau_1) = E^*(\tau_0, \tau_1, 0, \Phi^{(1,-1)}) - E^*(\tau_0, \tau_1, 0, \Phi^{(-1,1)}). \quad (4.9)$$

构造该函数比预想得更加复杂. 本文用到表示论来构造涉及的 theta 函数的变形 (deformation), 最后仅得到了差一些干扰项的 (4.9), 但对于证明定理 4.6 这已经足够, 详细证明可参见文献 [11].

对于一般情形, Li 有如下猜想 (参见文献 [30, 猜想 1.7]):

猜想 4.1^[30] 令 V 、 L 、 X_K 和 f 与定理 4.3 中相同. 设 E 为复乘数域, 其极大全实子域 F 次数为 d , 对应的 $\mathbb{Q}$ 上的复乘圈 $Z(W)$ 与第 2 节中定义的相同. 则存在 $\lambda_i \in F$ ($1 \leq i \leq d$) 及 $\alpha_i \in H$, 其中 H 为 E 的类域, 使得

$$\Phi_f^r([z, h]) = \sum_{i=1}^d \lambda_i \log |\sigma_h(\alpha_i)|,$$

其中 $\sigma_h \in \text{Gal}(E^{ab}/E)$ 为 h 在类域论下的像.

对于 $d > 2$ 的情形, Li^[30] 在一定条件下证明了第二个组成部分的类比结论. 但是, 为证明另外两个组成部分的类比结论看起来还需要新的想法才能施行.

注 4.1 Li^[29] 还考虑了高次 Green 函数的平均复乘值及其分解. 这个非常有趣的结果可以看作是前文提到的 Gross-Zagier 分解公式关于高次 Green 函数的推广.

致谢 我们非常荣幸地将本文献给陆洪文教授以祝贺他的 85 岁寿辰. 杨同海衷心感谢陆教授带他入门模形式理论, 以及当他在对中国科技大学对数论一无所知时, 给予他的指导和帮助.

参考文献

- 1 Atkin A O L, Morain F. Elliptic curves and primality proving. *Math Comp*, 1993, 61: 29–68
- 2 Berwick W E H. Modular invariants. *Proc Lond Math Soc* (3), 1927, 28: 53–69
- 3 Borcherds R E. Introduction to the Monster Lie algebra. In: *Groups, Combinatorics and Geometry*. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 165. Cambridge: Cambridge Univ Press, 1992, 99–107
- 4 Borcherds R E. Automorphic forms with singularities on Grassmannians. *Invent Math*, 1998, 132: 491–562
- 5 Bruinier J H. Borcherds Products on $O(2, l)$ and Chern Classes of Heegner Divisors. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1780. Berlin: Springer-Verlag, 2002
- 6 Bruinier J H. Regularized theta lifts for orthogonal groups over totally real fields. *J Reine Angew Math*, 2012, 672: 177–222
- 7 Bruinier J H, Ehlen S, Yang T H. CM values of higher automorphic Green functions for orthogonal groups. *Invent Math*, 2021, 225: 693–785
- 8 Bruinier J H, Funke J. Traces of CM values of modular functions. *J Reine Angew Math*, 2006, 594: 1–33
- 9 Bruinier J H, Howard B, Yang T H. Heights of Kudla-Rapoport divisors and derivatives of L -functions. *Invent Math*, 2015, 201: 1–95
- 10 Bruinier J H, Kudla S S, Yang T H. Special values of Green functions at big CM points. *Int Math Res Not IMRN*, 2011, 2011: 1917–1967
- 11 Bruinier J H, Li Y K, Yang T H. Deformations of theta integrals and a conjecture of Gross-Zagier. *arXiv:2204.10604*, 2022
- 12 Bruinier J H, Yang T H. CM-values of Hilbert modular functions. *Invent Math*, 2006, 163: 229–288
- 13 Bruinier J H, Yang T H. Twisted Borcherds products on Hilbert modular surfaces and their CM values. *Amer J Math*, 2007, 129: 807–841
- 14 Bruinier J H, Yang T H. Faltings heights of CM cycles and derivatives of L -functions. *Invent Math*, 2009, 177: 631–681
- 15 Choi S Y, Koo J K. Class fields from the fundamental Thompson series of level $N = o(g)$. *J Korean Math Soc*, 2005, 42: 203–222
- 16 Costello C, Deines-Schartz A, Lauter K, et al. Constructing abelian surfaces for cryptography via Rosenhain invariants. *LMS J Comput Math*, 2014, 17: 157–180
- 17 Daas M. CM values of p -adic Θ -functions. *arXiv:2309.17251*, 2023
- 18 Duke W, Li Y K. Harmonic Maass forms of weight 1. *Duke Math J*, 2015, 164: 39–113
- 19 Ehlen S. CM values of regularized theta lifts and harmonic weak Maass forms of weight 1. *Duke Math J*, 2017, 166: 2447–2519
- 20 Errthum E. Singular moduli of Shimura curves. PhD Thesis. College Park: University of Maryland, 2007
- 21 Gee A. Class invariants by Shimura’s reciprocity law. *J Théor Nombres Bordeaux*, 1999, 11: 45–72
- 22 Gross B H, Kohnen W, Zagier D B. Heegner points and derivatives of L -series. II. *Math Ann*, 1987, 278: 497–562
- 23 Gross B H, Zagier D B. On singular moduli. *J Reine Angew Math*, 1985, 355: 191–220
- 24 Gross B H, Zagier D B. Heegner points and derivatives of L -series. *Invent Math*, 1986, 84: 225–320
- 25 Howard B, Yang T H. Intersections of Hirzebruch-Zagier Divisors and CM Cycles. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 2041. Heidelberg: Springer-Verlag, 2012
- 26 Jensen C U, Yui N. Polynomials with D_p as Galois group. *J Number Theory*, 1982, 15: 347–375
- 27 Kim C H. Traces of singular values and Borcherds products. *Bull Lond Math Soc*, 2006, 38: 730–740
- 28 Li Y K. Singular units and isogenies between CM elliptic curves. *Compos Math*, 2021, 157: 1022–1035
- 29 Li Y K. Average CM-values of higher Green’s function and factorization. *Amer J Math*, 2022, 144: 1241–1298
- 30 Li Y K. Algebraicity of higher Green functions at a CM point. *Invent Math*, 2023, 234: 375–418
- 31 Li Y K, Yang T H. On a conjecture of Yui and Zagier. *Algebra Number Theory*, 2020, 14: 2197–2238
- 32 Lippolt D. Thetanullwerte zweiten grades als borcherds-produkte. Master Thesis. Heidelberg: Universität Heidelberg, 2008
- 33 Mellit A. Higher Green’s functions for modular forms. *arXiv:0804.318*, 2008
- 34 Milas A. Characters, supercharacters and Weber modular functions. *J Reine Angew Math*, 2007, 608: 35–64
- 35 Milne S J. Canonical models of (mixed) Shimura varieties and automorphic vector bundles. In: *Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L -Functions*, vol. I. *Perspective Mathematics*, vol. 10. Boston: Academic Press, 1990, 283–414
- 36 Schneider T. Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale. *Math Ann*, 1937, 113: 1–13

- 37 Schofer J. Borchers forms and generalizations of singular moduli. *J Reine Angew Math*, 2009, 629: 1–36
- 38 Shimura G. *Arithmetic of Quadratic Forms*. New York: Springer, 2010
- 39 Viazovska M. CM values of higher Green’s functions and regularized Petersson products. In: *Arithmetic and Geometry*. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 420. Cambridge: Cambridge Univ Press, 2015, 493–503
- 40 Viazovska M. Petersson inner products of weight-one modular forms. *J Reine Angew Math*, 2019, 749: 133–159
- 41 Yang T H. An arithmetic intersection formula on Hilbert modular surfaces. *Amer J Math*, 2010, 132: 1275–1309
- 42 Yang T H. The Chowla-Selberg formula and the Colmez conjecture. *Canad J Math*, 2010, 62: 456–472
- 43 Yang T H. Rational structure of $X(N)$ over $\mathbb{Q}$ and explicit Galois action on CM points. *Chin Ann Math Ser B*, 2016, 37: 821–832
- 44 Yang T H, Yin H B. Difference of modular functions and their CM value factorization. *Trans Amer Math Soc*, 2019, 371: 3451–3482
- 45 Yang T H, Yin H B, Yu P. The lambda invariants at CM points. *Int Math Res Not IMRN*, 2021, 2021: 5542–5603
- 46 Ye D X. Gross-Zagier type CM value formulas on $X_0(p)$. *J Number Theory*, 2019, 196: 14–34
- 47 Ye D X. Revisiting the Gross-Zagier discriminant formula. *Math Nachr*, 2020, 293: 1801–1826
- 48 Ye D X. On a conjecture of Chen and Yui: Resultants and discriminants. *Canad J Math*, 2022, 74: 486–526
- 49 Ye D X. Difference of a Hauptmodul for $\Gamma_0(N)$ and certain Gross-Zagier type CM value formulas. *Sci China Math*, 2022, 65: 221–258
- 50 Ye D X. On a conjecture of Chen and Yui: Fricke groups. *J Number Theory*, 2023, 253: 17–68
- 51 Yu P. CM values of Green functions associated to special cycles on Shimura varieties with applications to Siegel 3-fold case. PhD Thesis. Madison: The University of Wisconsin-Madison, 2017
- 52 Yu P. CM values of Green functions associated to special cycles on Shimura varieties with applications to Siegel 3-fold $X_2(2)$. *J Number Theory*, 2019, 203: 155–210
- 53 Yui N, Zagier D B. On the singular values of Weber modular functions. *Math Comp*, 1997, 66: 1645–1662
- 54 Zhang W. Modularity of generating functions of special cycles on Shimura varieties. PhD Thesis. New York: Columbia University, 2009

CM values of special functions

Tonghai Yang, Dongxi Ye & Peng Yu

Abstract In this paper, we survey interesting results on CM values of special functions that come from regularized theta liftings. We focus on modular functions which are Borchers liftings and higher green functions which are regularized theta liftings. We also describe the basic ideas behind these beautiful formulas. They are the generalization of the well-known Gross-Zagier formula on singular moduli and their algebraicity conjecture on the CM value of higher Green functions. We skip the generalization of their most famous Gross-Zagier formula in this survey although the generalization also fits the idea of this paper. The method described in this paper is different from Gross and Zagier’s original idea.

Keywords complex multiplication, Gross-Zagier formula, modular functions, theta liftings, Shimura varieties

MSC(2020) 11G15, 11F41, 14K22

doi: 10.1360/SSM-2023-0260