中国科学 : 数学　2021 年　第 51 卷　第 10 期 : 1485 ～ 1494
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
自然科学基金项目进展专栏　综　述

Birch-Goldbach 定理

献给冯克勤教授 80 华诞

刘建亚, 赵立璐*

山东大学数学学院, 济南 250100
E-mail: jyliu@sdu.edu.cn, zhaolilu@sdu.edu.cn

收稿日期: 2020-12-16; 接受日期: 2021-03-12; 网络出版日期: 2021-03-29; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 12031008) 资助项目

摘要　素数分布问题是数论领域的一个重要问题. 涉及线性方程的素数分布有着丰富的研究历史, 而一般代数簇上的素数分布理论近些年才有所进展. Birch-Goldbach 定理研究的是代数曲面或者代数簇上的素数分布. 本文概述 Birch-Goldbach 定理的研究背景、研究内容以及所涉及的研究方法.

关键词　素数分布　代数簇　圆法

MSC (2020) 主题分类　11P55, 11P32, 11D45

1　引言

素数分布和不定方程是数论的两个古老的研究领域, 也是推动现代数论发展的两类基本问题. 千禧年大奖难题的七大数学问题中 Riemann 假设涉及的是素数分布, Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想 (简称 BSD 猜想) 涉及的是不定方程, 而这两个问题都与 L- 函数 1) 紧密联系.

线性方程的素数解有着很长的研究历史. 1937 年, Vinogradov [1] 发明了处理素数变量指数和的方法, 并在充分大意义下解决了三元 Goldbach 猜想. 华罗庚 [2] 系统研究了高次对角方程的素数解问题. 陈景润 [3] 和张益唐 [4] 分别在 Goldbach 猜想和孪生素数猜想上作出了举世瞩目的成就. Green-Tao 定理 [5] 研究的是线性空间上的素数分布问题, 该定理也是 Tao 获得菲尔兹奖的主要工作之一.

Birch [6,7] 于 20 世纪五六十年代在系列文献中研究了齐次多项式的零点问题. Birch 证明的关于高次形零点的存在性相关定理被称为 Birch 定理. Birch 定理的发展是近年来数论的重要研究课题之一, 包括在一般数域上和函数域上发展 Birch 定理. 这些研究涉及 Hardy-Littlewood 方法、数的几何以及指数和估计等若干重要数论方法. 虽然线性方程的素数解和高次方程的整数解有着悠久且丰富的

1) Riemann zeta- 函数是特殊的 L- 函数.

英文引用格式: Liu J Y, Zhao L L. Birch-Goldbach theorems (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1485–1494, doi: 10.1360/SSM-2020-0344

　

研究历史, 但是一般高次方程的素数解的研究直到近些年才有所突破. Birch-Goldbach 定理研究的是代数曲面或者代数簇上的素数分布, 即高次方程或者高次方程组的素数解.

本文简要介绍近些年 Birch-Goldbach 定理的发展以及相关的研究背景和研究方法. 第 2 节介绍 Goldbach 猜想等素数变量线性方程的研究. 第 3 节介绍圆法和 Hardy-Littlewood 渐近公式. 第 4 节介绍 Birch 定理的发展. 第 5 节详细介绍 Birch-Goldbach 定理方面的工作.

2 Goldbach 猜想和孪生素数猜想

著名的 Goldbach 猜想断言, 每一个大于 4 的偶数 n 都可以表示成两个素数的和, 即 n 可以表示成

$$n = p_1 + p_2,$$

其中, p_1 和 p_2 都是素数. 本文的小写字母 p, 无论含有下标或者不含有下标, 都将表示素数. 对于大于 7 的奇数 n, Goldbach 猜想断言 n 可以表示成 $n = p_1 + p_2 + p_3$. 后者断言是前者的推论, 有时后者被称为奇数 Goldbach 猜想或者三元 Goldbach 猜想.

Hardy 和 Littlewood 在广义 Riemann 假设的前提下, 证明了充分大的奇数可以表示成 3 个素数的和. Vinogradov 利用他发明的处理素数变量指数和的方法取代了证明中对广义 Riemann 假设的依赖性. 因而成功地无条件解决了充分大意义下奇数 Goldbach 猜想.

与 Goldbach 猜想对偶的另一个涉及素数变量线性方程的问题是孪生素数猜想. Goldbach 猜想和孪生素数猜想作为素数分布的两个基本问题, 被列在著名的 Hilbert 第 8 问题中. 孪生素数猜想断言有无穷多个素数对相差为 2. 用方程的语言可以将孪生素数猜想描述成 $p_1 - p_2 = 2$ 有无穷多组素数解.

前面提到的 Hardy、Littlewood 和 Vinogradov 在三元 Goldbach 猜想上的工作基于圆法. 而对二元 (即两个变量的) 方程的研究则涉及解析数论的另一个重要方法—筛法. 使用筛法, 人们可以得到方程存在殆素数解. 关于 Goldbach 猜想在殆素数解方面的研究, 陈景润 [3] 证明了充分大的偶数都可以表示成一个素数和一个不超过两个素因子的正整数的和. 该结论有时被简称为 “$1+2$”. 陈景润的这个结果目前仍然是关于偶数 Goldbach 猜想方面的最好结果. 作为一个平行结论, 陈景润的证明也可以得到有无穷多个素数 p 使得 $p+2$ 最多含有两个素数因子. 值得一提的是, 到 20 世纪 80 年代, 关于孪生素数猜想的殆素数结论可以利用 Fouvry 和 Iwaniec [8] 及 Bombieri 等 [9] 所发展的素数在算术级数中分布的均值定理来给出一个新的证明. 陈景润在 Goldbach 猜想上 “$1+2$” 结论的证明虽然被学者们简化, 但是本质上仍是目前唯一的证明方式.

使用筛法研究孪生素数猜想的另一个方向是关注素数差的可能最小间距, 这里指的是能无穷多次出现的最小间距. 孪生素数猜想等价于这个最小间距是 2. 由素数定理可以容易得到

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{q_n - q_{n-1}}{\log n} \leqslant 1,$$

其中 q_n 表示第 n 个素数. 虽然由孪生素数猜想可以得到这个下极限应当是 0, 但是在相当长的一段时间内, 人们不知道如何无条件地证明这个下极限是 0. 直到 2009 年, Goldston 等 [10] 证明了

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{q_n - q_{n-1}}{\log n} = 0.$$

上面结论的证明中所发展的方法被称为 GPY 筛法. 2013 年, 张益唐[4] 成功证明了

$$\liminf_{n\to\infty}(q_n-q_{n-1})\leqslant 7\cdot 10^7.$$

这是对孪生素数猜想的决定性贡献. 此后, $7\cdot 10^7$ 这个数值被大幅度地改进. 目前的最好上界是 246 (参见文献 [11]). 关于多个素数之间的小间距的研究参见文献 [12].

3 圆法与 Hardy-Littlewood 渐近公式

Hardy 和 Littlewood 在 20 世纪 20 年代的一系列工作中深入研究了 Waring 问题等堆垒数论问题. 在此过程中发展出来的方法被称为 Hardy-Littlewood 方法, 又称圆法. 圆法处理不定方程时, 往往考虑方程或方程组在一个有限盒子里的解的个数, 并期望求出解的个数的渐近公式. 下面以齐次形零点问题来解释圆法意义下的渐近公式. 设 $f_i(x_1,\dots,x_n)$ $(1\leqslant i\leqslant r)$ 是 r 个整系数 d 次形. 本文中, d 次形指 d 次齐次多项式, 并且大部分情形下讨论的都是整系数 d 次形. 本文用黑体字母表示向量, 如 $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$ 和 $\boldsymbol{f}=(f_1,\dots,f_r)$. 向量的维数在文中容易判断. 为了刻画 $f_1,\dots,f_r$ 在一个有限盒子里公共零点的个数, 我们引入

$$\mathcal{N}(X)=\sum_{\substack{-X\leqslant x_1,\dots,x_n\leqslant X\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}}}1. \tag{3.1}$$

上述求和是对整数 $x_1,\dots,x_n$ 求和. 引入记号 $e(\alpha)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha}$. 圆法的出发点是下面的正交关系:

$$\int_0^1 e(m\alpha)d\alpha=\begin{cases}1, & \text{如果 } m=0,\\ 0, & \text{如果 } m \text{ 是非零整数.}\end{cases}$$

利用这个正交关系并引入指数和

$$S(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{-X\leqslant x_1,\dots,x_n\leqslant X} e\bigg(\sum_{i=1}^r \alpha_i f_i(x_1,\dots,x_n)\bigg), \tag{3.2}$$

可以得到

$$\mathcal{N}(X)=\int_{[0,1]^r} S(\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{\alpha}.$$

用圆法研究上式, 主要是通过研究指数和 $S(\boldsymbol{\alpha})$ 的性质, 从而得出 $\mathcal{N}(X)$ 的渐近公式. 下面介绍 Hardy-Littlewood 渐近公式. 首先引入推广形式的 Gauss 和

$$S(q,a_1,\dots,a_r)=\sum_{1\leqslant b_1,\dots,b_r\leqslant q} e\bigg(\frac{\sum_{i=1}^r a_i f_i(b_1,\dots,b_r)}{q}\bigg) \tag{3.3}$$

以及

$$\mathcal{A}(q)=\frac{1}{q^r}\sum_{\substack{1\leqslant a_1,\dots,a_r\leqslant q\\ (a_1,\dots,a_r,q)=1}} S(q,a_1,\dots,a_r). \tag{3.4}$$

在已知 $\mathcal{A}(q)$ 的很好的上界前提下, 对每个素数 p, 可以引入局部密度 (local density)

$$\sigma_p = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}(p^k).$$

在无穷位置的局部密度 σ_∞ 如下定义:

$$\sigma_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{[-T,T]^r} \left(\int_{[-1,1]^n} e\left(\sum_{i=1}^{r} \beta_i f_i(x_1,\dots,x_n) \right) d\boldsymbol{x} \right) d\boldsymbol{\beta}.$$

称下面的式子为 $f_1,\dots,f_r$ 对应的 Hardy-Littlewood 渐近公式:

$$\mathcal{N}(X) = \left(\prod_p \sigma_p \right) \cdot \sigma_\infty X^{n-d} + o(X^{n-d}). \tag{3.5}$$

下面举一个关于对角 d 次形的例子, 参见文献 [13, (8.3)].

定理 3.1 设 $d \geqslant 2$ 为正整数. 设 $f(x_1,\dots,x_n) = a_1x_1^d + \cdots + a_nx_n^d$, 其中 $a_1,\dots,a_n$ 是固定的非零整系数. 若 $n \geqslant 2^k+1$, 则 f 对应的 Hardy-Littlewood 渐近公式 (3.5) 成立.

需要注意的是, 上面的 Hardy-Littlewood 渐近公式 (3.5) 不是总成立的. 以单个二次形为例. 定理 3.1 告诉我们, 不少于 5 个变量的对角二次形对应的 Hardy-Littlewood 渐近公式 (3.5) 成立. 下面考虑 4 个变量的二次形. 设 $f(x_1,\dots,x_4)$ 是四元整系数二次形, 即系数矩阵是元素为整数的对称矩阵. 又设二次形 f 是不定的, 则有以下两种情形.

定理 3.2 若 f 的系数矩阵的行列式不是完全平方数, 则 f 对应的 Hardy-Littlewood 渐近公式 (3.5) 成立.

定理 3.3 若 f 的系数矩阵的行列式是完全平方数, 则 f 对应的渐近公式 (3.5) 不成立.

定理 3.2 可参见文献 [14, 定理 6]. 当 $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2$ 时, $N(X)$ 的阶为 $X^2\log X$. 由此可知渐近公式 (3.5) 不是总成立.

定理 3.2 和 3.3 表明, 对于四元二次形, 渐近公式 (3.5) 有时成立有时不成立. 事实上, 在定理 3.3 的条件下, (3.5) 右边的无穷乘积是发散的. 当然, 在定理 3.3 的条件下, 有另一个不同表达式的渐近公式成立. 关于定理 3.3 及此时对应的渐近公式可参见文献 [14, 定理 7].

以上讨论的是整点分布的 Hardy-Littlewood 渐近公式. 对素数分布理论, 有类似讨论. 令

$$\mathcal{N}^*(X) = \sum_{\substack{p_1,\dots,p_n\leqslant X\\ \boldsymbol{f}(p_1,\dots,p_n)=\boldsymbol{0}}} 1, \tag{3.6}$$

其中上式中求和是对素数 $p_1,\dots,p_n$ 求和. 引入

$$S^*(q,a_1,\dots,a_r) = \sum_{\substack{1\leqslant b_1,\dots,b_r\leqslant q\\ (b_i,q)=1(1\leqslant i\leqslant r)}} e\left(\frac{\sum_{i=1}^r a_i f_i(b_1,\dots,b_r)}{q} \right) \tag{3.7}$$

以及

$$\mathcal{A}^*(q) = \frac{1}{\phi^r(q)} \sum_{\substack{1\leqslant a_1,\dots,a_r\leqslant q\\ (a_1,\dots,a_r,q)=1}} S^*(q,a_1,\dots,a_r), \tag{3.8}$$

其中 $\phi(q)$ 是 Euler 函数. 在已知 $\mathcal{A}^*(q)$ 的很好的上界前提下, 对每个素数 p 可定义

$$\sigma_p^* = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}^*(p^k).$$

定义 σ_∞^* 如下:

$$\sigma_\infty^* = \lim_{T\to\infty} \int_{[-T,T]^r} \bigg(\int_{[0,1]^n} e\bigg(\sum_{i=1}^{r} \beta_i f_i(x_1, \ldots, x_n) \bigg) d\boldsymbol{x} \bigg) d\boldsymbol{\beta}.$$

称下面的式子为 $f_1, \ldots, f_r$ 的素数坐标零点分布对应的 Hardy-Littlewood 渐近公式:

$$\mathcal{N}^*(X) = \bigg(\prod_p \sigma_p^* \bigg) \cdot \sigma_\infty^* \frac{X^{n-d}}{\log^n X} + o\bigg(\frac{X^{n-d}}{\log^n X} \bigg). \tag{3.9}$$

我们也将上式简称为 $f_1, \ldots, f_r$ 对应的 Hardy-Littlewood 渐近公式. 在素数分布理论中, 方程解个数的量级对比 (3.5) 右边多一个因子 $(\log X)^{-n}$. 这是由于素数在自然数中分布的密度为 $(\log X)^{-1}$. 在上述记号中, 我们使用了类似于整数分布理论里对应的记号. 而我们用星号暗示所讨论的是素数分布问题. 这里需要注意 (3.1)、(3.3) 和 (3.4) 中记号的定义与 (3.6)–(3.8) 中定义的区别.

类似于定理 3.1, 我们有如下结论.

定理 3.4　设 d 为正整数. 设 $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1^d + \cdots + a_n x_n^d$, 其中 $a_1, \ldots, a_n$ 是固定的非零整系数. 若 $n \geqslant 2^d + 1$, 则 f 对应的 Hardy-Littlewood 渐近公式 (3.9) 成立.

定理 3.4 是 Waring-Goldbach 问题的对偶问题. 相关渐近公式可参见文献 [15, 定理 3].

4　Birch 定理

先从整系数的三次形谈起. 关于三次形零点问题有如下猜想.

猜想 4.1　设 $n \geqslant 10$ 且 $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个整系数的三次形, 则 f 有一个非平凡的整零点, 即存在不全为 0 的整数 $a_1, \ldots, a_n$, 使得 $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

猜想 4.1 等价于当 $n \geqslant 10$ 时 $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^{n-1}$ 上的三次超曲面上一定有零点. Mordell [16] 的工作表明, 当 $n = 9$ 时猜想 4.1 对应的结论是不成立的.

1957 年, Lewis [17]、Davenport [18] 和 Birch [6] 独立地得到了与猜想 4.1 有关的结论. 他们得到的结果侧重点略有不同, 但都蕴含下面的结论.

定理 4.1　存在正整数 n_0 使得当 $n \geqslant n_0$ 时猜想 4.1 成立.

值得一提的是, Lewis、Davenport 和 Birch 三位学者都各自在的文献中提到另外两位学者独立得到了相关结果. 从文献发表在期刊上的年份看, 文献 [6, 17] 是 1957 年, 而文献 [18] 是 1959 年. 然而工作的优先权顺序上应该是 Lewis、Davenport 和 Birch, 其中 Lewis 和 Birch 的证明基于几何的方法, 证明所蕴含的变量个数 n_0 非常大. 例如, Lewis 在文献 [17] 中指出他的证明方法所给出的 n_0 的值的范围是 $500 \leqslant n_0 \leqslant 1{,}000$. 而 Davenport 的证明基于解析数论方法, 并且该方法能得到一个较小的 n_0 的值. 特别地, Davenport 证明了定理 4.1 中可取 $n_0 = 32$. Davenport 对三次形进行了一系列的研究, 并在文献 [19] 中证明了定理 4.1 中可取 $n_0 = 16$. 关于目前三次形的最好记录, 这里叙述 Heath-Brown 的两个经典结果.

称三次形 f 是非奇异的, 如果梯度向量 $\nabla f(\boldsymbol{x})$ 在非原点处总是非零. 1983 年, 在假设非奇异的条件下, Heath-Brown [20] 证明了猜想 4.1 成立.

定理 4.2 对非奇异的整系数的三次形 f, 猜想 4.1 成立. 换句话讲, 若 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 是一个整系数的非奇异三次形且 $n\geqslant 10$, 则 f 有一个非平凡的整零点.

由于 Mordell [16] 的例子是非奇异的三次形, 因此定理 4.2 中所需的 10 个变量是最优的. 在不假设任何额外条件的前提下, Heath-Brown [21] 证明了定理 4.1 中可取 $n_0=14$.

定理 4.3 设 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 是一个整系数的三次形且 $n\geqslant 14$, 则 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 有一个非平凡整零点.

尽管在三次形时, Birch [6] 的证明能给出的 n_0 的值很大, 但是 Birch 的工作考虑了一般性问题, 而不局限于三次形.

定理 4.4 设 $f_1,\ldots,f_r\in\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ 是齐次多项式且次数都是奇数, 则存在 n_0 使得当 $n\geqslant n_0$ 时 $f_1,\ldots,f_r$ 有一个公共非平凡零点.

上述 Birch 定理对 $f_1,\ldots,f_r$ 的次数没有限制条件. 但是证明中所需要的变量个数 n_0 很大. 即使对一个多项式 f 的零点存在性, 其方法所需的变量个数也是关于 f 的次数 d 的塔 (tower) 函数量级.

设 $\rho_1(d)=2^d$ 且当 $k\geqslant 2$ 时令 $\rho_k(d)=2^{\rho_{k-1}(d)}$. 上述 Birch 定理的证明所需的变量个数的量级形如 $\rho_{k_d}(d)$, 其中 k_d 也与 d 有关. 当 $f_1,\ldots,f_r\in\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ 是次数相同的齐次多项式时, 1961 年 Birch [7] 在变量个数是次数的指数量级时得到方程零点个数的渐近公式.

下面描述具有渐近公式结论的 Birch 定理. 设 $f_1,\ldots,f_r$ 都是 d 次形. 定义 Birch 意义下的奇点集

$$V_{\boldsymbol{f}}^*=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n:\mathrm{rank}J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})<r\},$$

其中 $J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})$ 指的是如下矩阵:

$$J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\1\leqslant j\leqslant n}}. \tag{4.1}$$

这里需要注意的是, Birch 意义下的奇点集与通常意义下的奇点集不一致. 因为 $V_{\boldsymbol{f}}^*$ 不一定包含在 $V_{\boldsymbol{f}}$ 中, 这里 $V_{\boldsymbol{f}}$ 指 $\boldsymbol{f}$ 的零点集, 即 $V_{\boldsymbol{f}}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n:\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}$.

定理 4.5 设 $f_1,\ldots,f_r$ 都是整系数 d 次形. 设

$$n-\dim V_{\boldsymbol{f}}^*>r(r+1)2^{d-1}(d-1),$$

则 $f_1,\ldots,f_r$ 对应的 Hardy-Littlewood 渐近公式 (3.5) 成立.

对定理 4.5 中的变量个数的改进是一个重要的研究方向. 这里仅介绍最近几年的一些工作. 对单个 d 次形 f, 2017 年, Browning 和 Prendiville [22] 证明了 $n-\dim V_f^*>2^d(d-\frac{1}{2}\sqrt{d})$ 时 f 对应的 Hardy-Littlewood 渐近公式 (3.5) 成立. 当 $d=4$ 时, 目前最好的结果是 Marmon 和 Vishe 得到的. 2019 年, Marmon 和 Vishe [23] 证明了 $n-\dim V_f^*>31$ 时 f 对应的 Hardy-Littlewood 渐近公式 (3.5) 成立. 可以看出, 对单个 d 次形, 虽然在 d 较小时定理 4.5 中的变量个数得到了较大改进, 但是当 d 较大时所需的变量个数仍然是 $(1+o(1))2^d(d-1)$ 量级. 如何将变量个数改进到 $c2^d(d-1)$ 量级 (其中 c 是一个小于 1 的常数) 是一个令人期待的结果.

对 r 个二次形 $f_1,\ldots,f_r$, 2018 年, Rydin Myerson [24] 证明了 $n-\dim V_{\boldsymbol{f}}^*>8r$ 时 $f_1,\ldots,f_r$ 对应的 Hardy-Littlewood 渐近公式 (3.5) 成立. 作为对比, 我们指出定理 4.5 中的变量个数是 $2r(r+1)$. 可以看出, 当 $r\geqslant 4$ 时, Rydin Myerson 的结果更强. 特别地, Rydin Myerson 的结果是关于 r 的线性增长.

5 Birch-Goldbach 定理

人们除了关心改进 Birch 定理中的变量个数, 也关心将 Birch 定理发展到其他集合上, 如数域上. 关于在数域方面发展 Birch 定理的工作可参见 Skinner 的系列文献 [25,26] 以及 Browning 和 Vishe [27] 对 Skinner [26] 工作的改进. 然而, 在素数分布问题上如何发展 Birch 定理直到近些年才有了本质进展. 2010 年, Brüdern 等 [28] 得到了一般性的 Birch-Goldbach 定理.

定理 5.1 设 $f_1,\ldots,f_r\in\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$ 是齐次多项式且次数为奇数. 设变量个数 $n>n_0$ 而 n_0 依赖于诸齐次多项式的次数, 则存在满足最大公约数 $(c_1,\ldots,c_n)=1$ 的整数 $c_1,\ldots,c_n$ 使得 $f_1,\ldots,f_r$ 有一个公共非平凡零点 $(c_1p_1,\ldots,c_np_n)\in\mathbb{Z}^n$, 其中 $p_1,\ldots,p_n$ 是不全相同的素数.

由于素数分布的局部障碍, 上述定理在寻找公共素数坐标零点时, 若不引入常数 $c_1,\ldots,c_n$ 对应的结论是不正确的. 下面考虑一个线性形的例子.

例 5.1 设 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1-24x_2+4x_3$. 存在 f 的非平凡整零点, 但是 f 的素数坐标零点是不存在的. 引入常数系数后, 仍然可以期待素数坐标零点的存在性. 例如, f 有无穷多的形如 $(4p_1,p_2,3p_3)\in\mathbb{Z}^3$ 的零点. 事实上, $f(4p_1,p_2,3p_3)=12(p_1-2p_2+p_3)$. 已知素数中存在无穷多组非平凡的 3 项等差数列, 因此, f 有无穷多组形如 $(4p_1,p_2,3p_3)\in\mathbb{Z}^3$ 且 p_1、p_2 和 p_3 不全相等的零点.

定理 5.1 的证明将方程组的整数解存在性理论与 Green-Tao 定理结合起来去寻找素数坐标零点的存在性. 这里简要介绍定理 5.1 的证明思路. 对 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{Z}^n$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{Z}^n$, 引入直线 $\ell_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}=\{u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}:u,v\in\mathbb{C}\}$. 为了与 Green-Tao 定理联系起来并产生素数解, 第 1 步需要在 $V_{\boldsymbol{f}}$ 中找一条非平凡的直线 $\ell_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$, 即需要找到 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{Z}^n$ 使得 $\ell_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\subseteq V_{\boldsymbol{f}}$. 非平凡直线的意思是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 线性无关. 这里仅介绍证明思路, 为了方便, 不妨假设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的所有分量都非零. 上面第 1 步在本质上还是找整数解, 而第 2 步期待直线 $\ell_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$ 经过一个坐标是素数的点. 令 $A=\prod_{i=1}^n a_i$ 和 $A_i=A/a_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. 记 $M=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|A_ib_i|$. 由 Green-Tao 定理知, 素数中存在任意长的等差数列, 特别地, 存在 $2M+1$ 项等差数列. 所以, 不妨假设 $w_j=c+dj$ $(-M\leqslant j\leqslant M)$ 全是素数. 此时, 对 $1\leqslant i\leqslant n$, 令 $k_i=A_ib_i$ 和 $p_i=w_{k_i}$. 于是

$$a_ip_i=a_iw_{k_i}=a_i(c+dk_i)=a_i(c+dA_ib_i)=ca_i+Adb_i.$$

因此, $(a_1p_1,\ldots,a_np_n)\in\ell_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}$, 从而 $(a_1p_1,\ldots,a_np_n)\in V_{\boldsymbol{f}}$. 去掉 $a_1,\ldots,a_n$ 的最大公因子, 则得到满足 $(c_1,\ldots,c_n)=1$ 的公共零点 $(c_1p_1,\ldots,c_np_n)\in\mathbb{Z}^n$.

定理 5.1 基本回答了素数坐标零点的存在性. 但是仍然有两个方面的问题没有解决. 一方面, 定理虽然回答了解的存在性, 但是关于素数坐标零点的个数的信息并不能够给出一个较为满意的答案. 另一方面, 证明方法所需要的变量个数是塔函数级别. 回顾定理 4.5 在变量个数是次数的指数量级时给出了整数解个数的渐近公式. 如何在变量个数是关于多项式次数的指数量级时得到素数解是一个期待解决的问题.

由于素数分布问题的复杂性, 文献 [28] 指出用 Birch [7] 处理整数分布的方法去处理素数分布似乎是不可能实现的.

刘建亚 [29] 解决了 10 个变量二次曲面上的素数分布问题. 也就是说, 对非退化的二次形只需 10 个变量不但能够得到素数坐标零点的存在性, 而且可以得到素数坐标零点个数的渐近公式.

定理 5.2 设 $f(x_1,\ldots,x_n)$ 是非退化的整系数二次形且 $n\geqslant 10$, 则 f 对应的 Hardy-Littlewood 渐近公式 (3.9) 成立.

这里注释一下, 在文献 [29] 中上述定理的叙述需要假设一个额外的技术条件, 详细结论可参见原文. 这个额外技术条件稍加努力便可以去掉. 定理 5.2 的重要性在于能够处理一般的含有复杂交叉项

的素数变量二次形. 定理 5.2 考虑的是单个二次形, 但所发展的方法成为后续许多工作的基础. 赵立璐 [30] 在 9 个变量的情形下证明了定理 5.2 的结论成立.

定理 5.3 设 $f(x_1,\dots,x_n)$ 是非退化的整系数二次形且 $n\geqslant 9$, 则 f 对应的 Hardy-Littlewood 渐近公式 (3.9) 成立.

下面简要介绍定理 5.2 的证明要点. 利用圆法得到素数坐标零点的渐近公式, 关键在于研究指数和

$$T(\alpha)=\sum_{p_1,\dots,p_n\leqslant X} e(\alpha f(p_1,\dots,p_n)).$$

令 $\alpha=\frac{a}{q}+\beta$, 其中 a 是整数, q 是正整数, β 是实数且 $(a,q)=1$. 在假设一个技术条件下 (特别地, $n\geqslant 10$), 刘建亚 [29] 证明了

$$T(\alpha)\ll (X\log X)^n\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{q(1+X^2|\beta|)}+\frac{q(1+X^2|\beta|)}{X^2}\right)^{\frac{5}{2}}, \tag{5.1}$$

其中 $F\ll G$ 表示存在一个仅依赖于 n 的常数 $c>0$ 使得 $|F|\leqslant cG$. 刘建亚证明不等式 (5.1) 的关键在于利用二次形中有充分多的交叉项, 从而去得到指数和的抵消. 值得一提的是, 刘建亚进一步指出 (5.1) 的证明过程不仅对素数变量的指数和可行, 甚至对任意序列都可行. 引入一般的加权指数和

$$T(\alpha;\xi_1,\dots,\xi_n)=\sum_{x_1,\dots,x_n\leqslant X} e(\alpha f(x_1,\dots,x_n))\xi_1(x_1)\cdots\xi_n(x_n),$$

这里对每一个 $1\leqslant i\leqslant n$, 序列 $\{\xi_i(x)\}_{x=1}^{\infty}$ 是一个有界序列, 即 $|\xi_i(x)|\leqslant 1$. 刘建亚指出在同样的条件下, 类似可以得到

$$T(\alpha;\xi_1,\dots,\xi_n)\ll (X\log X)^n\left(\frac{1}{X}+\frac{1}{q(1+X^2|\beta|)}+\frac{q(1+X^2|\beta|)}{X^2}\right)^{\frac{5}{2}}. \tag{5.2}$$

上界估计 (5.2) 不仅在素数分布理论中有重要应用, 而且在加法组合中也有广泛的应用. 关于不等式 (5.2) 及其发展形式在加法组合中的应用可参见文献 [31,32].

Bourgain 等 [33] 研究了群作用轨道上的殆素数分布. 关于二次曲面上殆素数分布的研究可参见文献 [34]. 关于三次曲面和一般代数簇上殆素数分布的研究可参见文献 [35,36].

当 $f_1,\dots,f_r$ 是次数相同的齐次形时, 2014 年, Cook 和 Magyar [37] 解决了刻画素数解个数的渐近信息的问题. 特别地, 他们证明了当变量个数充分大时, $f_1,\dots,f_r$ 对应的 Hardy-Littlewood 渐近公式成立.

定理 5.4 设 $f_1,\dots,f_r\in\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ 是 d 次形. 设 $n-\dim V_{\boldsymbol{f}}^*$ 充分大, 则 $f_1,\dots,f_r$ 对应的 Hardy-Littlewood 渐近公式 (3.9) 成立.

定理 5.4 中所需要的变量个数非常大. 特别地, 文献 [37] 指出, 即使对单个 d 次形 f, 证明所需的变量个数已经是关于次数 d 的塔函数量级. 而对 r 个二次形时, 证明所需的变量个数达到 2^{2^r} 量级. 文献 [37] 进一步指出, 得到变量个数关于次数 d 的指数量级是一个被期待的结果.

在此, 作者宣布近期证明的一个结果. 对 r 个整系数 d 次形 $f_1,\dots,f_r\in\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$, 称 $f_1,\dots,f_r$ 是非奇异的, 如果对任意的 $\boldsymbol{x}\in V_{\boldsymbol{f}}\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ 都有 $\operatorname{rank}(J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}))=r$, 其中矩阵 $J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})$ 的定义参见 (4.1).

定理 5.5 设 $f_1,\dots,f_r\in\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ 是 d 次形且非奇异. 设 $n\geqslant 4^{d+1}r^5$, 则 $f_1,\dots,f_r$ 对应的 Hardy-Littlewood 渐近公式 (3.9) 成立.

定理 5.5 在变量个数是关于次数 d 的指数量级时给出了素数坐标零点个数的渐近公式. 不仅如此, 定理 5.5 的证明基于并发展了 Birch [7] 的差分法. 因而定理 5.5 的证明方法解决了文献 [28] 中指出的用 Birch [7] 处理整数分布的方法难以去处理素数分布的技术问题.

作为定理 5.5 的推论, 可以有下面的关于素数坐标零点分布的局部整体原则. 记 $\mathbb{P}$ 为素数集合. 令 $V_{\boldsymbol{f}}(\mathbb{P})$ 为 $V_{\boldsymbol{f}}$ 中素数坐标的点构成的集合, 即 $V_{\boldsymbol{f}}(\mathbb{P})=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{P}^n:\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}$. 对每个素数 p, 用 $\mathbb{U}_p$ 表示 $\mathbb{Z}_p$ 中的 p- 进制可逆元集合. 于是, 定理 5.5 蕴含下面的局部整体原则.

定理 5.6　设 $f_1,\dots,f_r\in\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ 是 d 次形且非奇异. 设 $n\geqslant 4^{d+1}r^5$, 则 $V_{\boldsymbol{f}}(\mathbb{P})$ 在 $V_{\boldsymbol{f}}$ 中 Zariski 稠密, 如果下面的条件成立:

(i) 对每一个素数 p, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{U}_p$ 上有非奇异零点;

(ii) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在 $(0,1)^n$ 中有非奇异零点.

作为本文的结尾, 我们讨论若干值得研究的问题.

定理 4.5 和 5.5 考虑的都是 $f_1,\dots,f_r$ 次数相同的情形. 事实上, Browning 和 Heath-Brown [38] 研究了 $f_1,\dots,f_r$ 次数不必相同时的渐近公式 (参见文献 [38, 定理 1.2]). 当 $f_1,\dots,f_r$ 次数不相同时, 如何在变量个数是次数的指数量级时得到渐近公式是一个值得研究的方向.

当 $f_1,\dots,f_r$ 都是二次形时, Rydin Myerson 问, 文献 [24] 中的证明方法能否用于改进 Cook 和 Magyar [37] 的结果. 如今自然可以问, 是否能够结合 Rydin Myerson 的方法和定理 5.5 的证明方法去改进变量个数与 r 的关系.

高次形局部零点的存在性已经有了大量的研究 (参见文献 [39, 40]). 对于二次形, 刘建亚 [29] 不仅得到了素数坐标零点个数的渐近公式, 而且研究了在 $\mathbb{U}_p$ 上局部解的存在性. 对于高次形 f, 如何判断 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbb{U}_p$ 上有非奇异零点目前尚没有太多研究, 这也是一个值得探索的问题.

致谢　作者对审稿人的仔细审查和修改意见表示感谢.

参考文献

1 Vinogradov I M. Representation of an odd number as a sum of three primes. Dokl Akad Nauk SSSR, 1937, 15: 129–132
2 Hua L K. Additive Theory of Prime Numbers. Providence: Amer Math Soc, 1965
3 Chen J R. On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes. Sci Sin, 1973, 16: 157–176
4 Zhang Y T. Bounded gaps between primes. Ann of Math (2), 2014, 179: 1121–1174
5 Green B, Tao T. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. Ann of Math (2), 2008, 167: 481–547
6 Birch B J. Homogeneous forms of odd degree in a large number of variables. Mathematika, 1957, 4: 102–105
7 Birch B J. Forms in many variables. Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci, 1962, 265: 245–263
8 Fouvry E, Iwaniec H. Primes in arithmetic progressions. Acta Arith, 1983, 42: 197–218
9 Bombieri E, Friedlander J B, Iwaniec H. Primes in arithmetic progressions to large moduli. Acta Math, 1986, 156: 203–251
10 Goldston D A, Pintz J, Yıldırım C Y. Primes in tuples I. Ann of Math (2), 2009, 170: 819–862
11 Polymath D H J. Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes. Res Math Sci, 2014, 1: 88pp
12 Maynard J. Small gaps between primes. Ann of Math (2), 2015, 181: 383–413
13 Davenport H. Analytic Methods for Diophantine Equations and Diophantine Inequalities, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2005
14 Heath-Brown D R. A new form of the circle method, and its application to quadratic forms. J Reine Angew Math, 1996, 481: 149–206
15 Kumchev A V, Tolev D I. An invitation to additive prime number theory. Serdica Math J, 2005, 31: 1–71
16 Mordell L J. A remark on indeterminate equations in several variables. J Lond Math Soc (2), 1937, 12: 127–129
17 Lewis D J. Cubic forms over algebraic number fields. Mathematika, 1957, 4: 97–101

18 Davenport H. Cubic forms in thirty-two variables. Philos Trans R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci, 1959, 251: 193–232
19 Davenport H. Cubic forms in sixteen variables. Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci, 1963, 272: 285–303
20 Heath-Brown D R. Cubic forms in ten variables. Proc Lond Math Soc (3), 1983, 47: 225–257
21 Heath-Brown D R. Cubic forms in 14 variables. Invent Math, 2007, 170: 199–230
22 Browning T D, Prendiville S M. Improvements in Birch's theorem on forms in many variables. J Reine Angew Math, 2017, 731: 203–234
23 Marmon O, Vishe P. On the Hasse principle for quartic hypersurfaces. Duke Math J, 2019, 168: 2727–2799
24 Rydin Myerson S L. Quadratic forms and systems of forms in many variables. Invent Math, 2018, 213: 205–235
25 Skinner C M. Rational points on nonsingular cubic hypersurfaces. Duke Math J, 1994, 75: 409–466
26 Skinner C M. Forms over number fields and weak approximation. Compos Math, 1997, 106: 11–29
27 Browning T D, Vishe P. Cubic hypersurfaces and a version of the circle method for number fields. Duke Math J, 2014, 163: 1825–1883
28 Brüdern J, Dietmann R, Liu J Y, et al. A Birch-Goldbach theorem. Arch Math (Basel), 2010, 94: 53–58
29 Liu J Y. Integral points on quadrics with prime coordinates. Monatsh Math, 2011, 164: 439–465
30 Zhao L L. The quadratic form in nine prime variables. Nagoya Math J, 2016, 223: 21–65
31 Keil K. Translation invariant quadratic forms in dense sets. arXiv:1308.6680, 2013
32 Zhao L L. On translation invariant quadratic forms in dense sets. Int Math Res Not IMRN, 2019, 2019: 961–1004
33 Bourgain J, Gamburd A, Sarnak P. Affine linear sieve, expanders, and sum-product. Invent Math, 2010, 179: 559–644
34 Liu J Y, Sarnak P. Integral points on quadrics in three variables whose coordinates have few prime factors. Israel J Math, 2010, 178: 393–426
35 Wang Y C. On the saturation number for cubic surfaces. J Number Theory, 2015, 156: 52–74
36 Sofos E, Wang Y C. Finite saturation for unirational varieties. Int Math Res Not IMRN, 2019, 2019: 4784–4821
37 Cook B, Magyar A. Diophantine equations in the primes. Invent Math, 2014, 198: 701–737
38 Browning T, Heath-Brown D R. Forms in many variables and differing degrees. J Eur Math Soc (JEMS), 2017, 19: 357–394
39 Brauer R. A note on systems of homogeneous algebraic equations. Bull Amer Math Soc (NS), 1945, 51: 749–755
40 Heath-Brown D R. Zeros of p-adic forms. Proc Lond Math Soc (3), 2010, 100: 560–584

Birch-Goldbach theorems

Jianya Liu & Lilu Zhao

Abstract By Birch-Goldbach theorems we mean the distribution of prime points on algebraic varieties, or prime solutions to the system of polynomial equations with integer coefficients. In this survey, we introduce the background and recent progress in this direction, and describe the ideas and methods used in this kind of problems.

Keywords distribution of prime numbers, algebraic variety, circle method

MSC(2020) 11P55, 11P32, 11D45

doi: 10.1360/SSM-2020-0344