中国科学: 数学 2021 年 第 51 卷 第 1 期: 87～96
SCIENTIA SINICA Mathematica
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

综 述

Orlicz Brunn-Minkowski 理论

献给张景中、杨路教授 85 华诞

徐赟[1*], 吴尉迟[2,3], 冷岗松[1]

1. 上海大学理学院数学系, 上海 200444;
2. 华东师范大学数学科学学院, 上海 200241;
3. 上海市核心数学与实践重点实验室, 上海 200241
E-mail: xuyunll@163.com, wuyuchi1990@126.com, gleng@staff.shu.edu.cn

收稿日期: 2019-12-31; 接受日期: 2020-03-18; 网络出版日期: 2020-07-14; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11671249) 和中国博士后科学基金 (批准号: 2019TQ0097) 资助项目

摘要 本文主要介绍 Orlicz Brunn-Minkowski 理论, 并从下面 3 个方面介绍该理论: Orlicz 投影体和 Orlicz 质心体、Orlicz 加法与其相关体积不等式、Orlicz Minkowski 问题.

关键词 Orlicz 投影体 Orlicz 质心体 Orlicz 加法 Orlicz Minkowski 问题

MSC (2010) 主题分类 52A40

1 引言

凸几何是以凸体 (有限维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中内部非空的紧凸集) 为主要研究对象的几何学科. 该理论的创始人是 Minkowski. 他将空间的向量加法这一代数结构同凸体的体积这一几何结构联系在一起, 提出混合体积的概念, 同时证明了著名的 Brunn-Minkowski 不等式, 奠定了 Brunn-Minkowski 理论的基础.

随后, Blaschke [1] 证明了著名的选择定理: 对于 $\mathbb{R}^n$ 中任何紧凸集的有界序列, 都存在一个子序列在 Hausdorff 度量下收敛到一个紧凸集. A. Aleksandrov 引进了表面积测度, 把测度理论带进了凸几何研究领域. W. Fenchel、H. Busemann、C. Petty、L. Santaló 和 H. Hadwiger 等对等周问题和积分运动不变量的研究大大丰富了凸几何的内容, 使得凸几何成为几何学的一个有影响的独立分支.

20 世纪八九十年代, Ball [2] 和 Ball 等 [3] 关于逆等周不等式的研究, Bourgain 和 Milman [4]、Milman [5] 及 Bourgain 等 [6] 关于凸体之极体的 Mahler 体积下界问题的研究, 以及 Lutwak [7,8] 建立的对偶 Brunn-Minkowski 理论, 为著名的 Busemann-Petty 问题提供了新的证明思想. 与此同时, Lutwak [9] 还建立了 L_p Brunn-Minkowski 理论.

英文引用格式: Xu Y, Wu Y C, Leng G S. Orlicz Brunn-Minkowski theory (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 87–96, doi: 10.1360/SSM-2019-0332

在凸几何发展历史中十分有意义的事情是 Busemann-Petty 问题的解决. 为这一问题作出贡献的数学家有 D. Larman、C. Rogers、K. Ball、A. Giannopoulos、M. Papadimitrakis、J. Bourgain、R. Gardner、G. Zhang 和 A. Koldobsky 等. 在解决这个问题的过程中, Fourier 分析、调和分析、渐近与摄动理论等分析工具被引进到凸几何中, 使得凸几何称为了现代几何分析的一个分支. 关于 Busemann-Petty 问题有 5 篇文章被发表在国际顶级杂志 *Annals of Mathematics* 上, 这大大提升了人们对凸几何的关注度.

Brunn-Minkowski 理论是凸几何的核心, 该理论主要包含两部分: 关于凸体的等周型不等式和 Minkowski 问题. Minkowski 问题是近期关于凸几何的研究热点之一. 它的研究对偏微分方程, 特别是对完全非线性方程产生了极大的推动作用. 关于 Minkowski 型问题存在大量的文献, 其中最为重要的有 Cheng 和 Yau [10]、Huang 等 [11]、Böröczky 等 [12]、Chou 和 Wang [13]、Guan 和 Lin [14]、Guan 和 Ma [15]、Jerison [16]、Zhu [17–20]、Chen 等 [21]、Henk 和 Pollehn [22]、Haberl 等 [23]、Stancu [24, 25]、Zhao [26, 27] 和 Xiong [28] 等.

Lutwak [9] 在 Firey [29] 的工作基础上, 定义了凸体的 L_p 加法, 建立了关于 L_p 加法的变分公式, 重新证明了 L_p Brunn-Minkowski 不等式, 提出并部分解决了 L_p Minkowski 问题. 这标志着 L_p Brunn-Minkowski 理论的建立.

Ludwig [30, 31] 给出 Minkowski 赋值的刻画时引进了一种 “非对称” 投影体/质心体算子, 而后, Haberl 和 Schuster [32] 对这种新投影体/质心体建立了 L_p Busemann-Petty 不等式. 这种 “非对称” 算子适用于一般凸体的研究, 这强烈暗示着存在更一般的 Brunn-Minkowski 理论—Orlicz Brunn-Minkowski 理论.

2010 年, Lutwak 等定义了 Orlicz 投影体 [33] 和 Orlicz 质心体 [34], 建立了 Orlicz Petty 投影不等式和 Orlicz Busemann-Petty 质心体不等式. 这标志着 Orlicz Brunn-Minkowski 理论的开端.

本文从以下几点介绍 Orlicz Brunn-Minkowski 理论: Orlicz 质心体与 Orlicz 投影体、Orlicz 加法与相关体积不等式、Orlicz Minkowski 问题. 本文中涉及的概念, 可参见文献 [35].

2 Orlicz 质心体与 Orlicz 投影体

质心体是由 Blaschke 在 Dupin 的工作 [33,34] 基础上引进的, 最初只是对中心对称凸体定义的, 以所有方向上过对称中心的超平面把该凸体分割成的小凸体的质心所组成的集合为边界的凸体就是这个对称凸体的质心体. Blaschke 猜想对称凸体体积与它的质心体体积之比当且仅当这个对称凸体是椭球时取得最大值. Petty [36] 在 1961 年推广了质心体的定义, 并证明了 Blaschke 猜想, 即 Busemann-Petty 质心体不等式.

投影体起源于 19 世纪末 20 世纪初, 是由 Minkowski 引进的, 它基于这样一个观察: 对于任意一个凸体 K, 存在一个关于原点对称的凸体 ΠK 使得对于 $\mathbb{R}^n$ 的 1 维线性空间 l, ΠK 到 l 上正交投影的长度与凸体 K 到 $l^{\perp}$ 的投影的 $n-1$ 维体积的比值与 l 的取法无关. 与投影体有关的不等式是 Petty [37] 于 1971 年所建立的 Petty 投影体不等式: 在固定体积的凸体中, 它的投影体的极体体积最大值当且仅当这个凸体是椭球体时取得. Petty 投影体不等式是由 Busemann-Petty 质心体不等式推导得出的. 直至 1986 年 Lutwak [38] 证明 Busemann-Petty 质心体不等式也能从 Petty 投影体不等式推出, 因此, 这两个不等式是等价的. 事实上, 之后引进的 L_p 投影体和质心体对应的不等式依然是等价的 (参见文献 [39]), 可惜的是, 对于之后的推广—Orlicz 投影体和质心体, 这个结论不正确 (参见文献 [33,34]). 值

得注意的是, Zhang [40] 于 1991 年使用限制弦技术建立了反向的 Petty 投影体不等式: 在固定体积的凸体中, 它的投影体的极体体积最小值当且仅当这个凸体是单形时取得.

有关 L_p 质心体和 L_p 投影体的系统性研究始于 Lutwak 等 [39]. 他们定义 K 的 L_p 质心体和 L_p 投影体的支撑函数分别为

$$h_{\Gamma_p K}(u)=\left\{\frac{1}{V(K)}\int_K |x\cdot u|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}},$$
$$h_{\Pi_p K}(u)=\left\{\int_{S^{n-1}} |u\cdot v|^p dS_p(K,v)\right\}^{\frac{1}{p}},$$

其中 $S_p(K,\cdot)$ 是指 K 的 L_p 表面积测度. 其主要结果如下: 在固定体积的凸体中, 它的 L_p 投影体的极体体积最大值当且仅当这个凸体是椭球体时取得; 在固定体积的关于原点的星体中, 它的 L_p 质心体的极体体积最小值当且仅当这个星体是椭球体时取得. 当 $p=1$ 时, 上述两个不等式将分别退化为经典 Petty 质心体和投影体不等式.

更一般地, Lutwak 等 [33, 34] 定义 K 的 Orlicz 投影体 $\Pi_\phi K$ 和 Orlicz 质心体 $\Gamma_\phi K$ 的支撑函数分别为

$$h_{\Pi_\phi K}(x)=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\partial K}\phi\left(\frac{x\cdot\nu(y)}{\lambda y\cdot\nu(y)}\right)y\cdot\nu(y)d\mathcal{H}^{n-1}(y)\leqslant n|K|\right\}$$

和

$$h_{\Gamma_\phi K}(x)=\inf\left\{\lambda>0:\frac{1}{|K|}\int_K\phi\left(\frac{x\cdot y}{\lambda}\right)dy\leqslant 1\right\},$$

这里的函数 $\phi:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ 是凸函数, 满足 $\phi(0)=0$, 且对所有 $t\neq 0$ 有 $\phi(t)+\phi(-t)>0$.

实际上, 当 $\phi(t)=|t|^p$ $(p\geqslant 1)$ 时, Orlicz 投影体和 Orlicz 质心体均退化为 L_p 投影体和 L_p 质心体.

Lutwak 等 [33, 34] 的主要结果如下:

定理 2.1 (Orlicz Busemann-Petty 质心体不等式) 若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点在内部的凸体, 那么体积比

$$\frac{|\Gamma_\phi K|}{|K|}$$

当 K 为中心在原点的椭球时取得最小值. 进一步, 当 ϕ 为严格凸函数时, 当且仅当 K 为中心在原点的椭球时体积比分别取得最小值.

定理 2.2 (Orlicz Petty 投影体不等式) 若 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点在内部的凸体, 那么体积比

$$\frac{|\Pi_\phi^* K|}{|K|}$$

当 K 为以原点为中心的椭球时取得最大值. 进一步, 当 ϕ 为严格凸函数时, 当且仅当 K 为中心在原点的椭球时体积比分别取得最大值.

经典和 L_p 型的 Busemann-Petty 质心体不等式都可以把定义域扩展成包含原点在内部的星体族, 可惜的是文献 [33] 没有得到关于星体族的结论. Lutwak 等 [33] 猜想这种推广在 Orlicz 型也适用, 2012 年 Zhu [41] 完成了这个猜想.

Böröczky [42] 对 Orlicz Petty 投影体不等式的稳定性进行研究, 从而得到实际上对任意凸函数 ϕ, 而不必是严格凸函数, 凸体为椭球体是不等式等号成立的充要条件.

有关 Orlicz 质心体的不等式还可见 Chen 等[43]. 他们引进了泛函

$$
\begin{aligned}
&\varphi_\phi(K,x)=\frac{\Gamma_\phi(K-x)}{|K|},\\
&M_\phi(K)=\max_{x\in\partial K}\varphi_\phi(K,x),\\
&m_\phi(K)=\min_{x\in K}\varphi_\phi(K,x),\\
&C_\phi(K)=\varphi_\phi(K,c_k),\\
&c_k=\frac{1}{|K|}\int_K xdx.
\end{aligned}
$$

通过阴影系统技术, 他们得到以下结论: 当且仅当 K 是椭球体时, $M_\phi(K)$ 取得最小值. 在二维 Euclid 空间情形下, 当 K 是三角形时, $M_\phi(K)$ 取得最大值; K 限制在中心对称凸体子类时, 当 K 是平行多面体时, $M_\phi(K)$ 取得最大值. 而上面的性质对于 $m_\phi(K)$ 也成立 (将 $M_\phi(K)$ 替换成 $m_\phi(K)$). 在二维空间以及 K 取中心对称假设下, 当 K 是平行多面体时, $C_\phi(K)$ 取得最大值.

2018 年, Nguyen[44] 在某种程度上推广了 Orlicz 质心体, 定义了 Orlicz Lorentz 质心体, 并给出了相应的仿射等周不等式.

3 Orlicz 加法与相关体积不等式

回顾经典 Brunn-Minkowski 理论, 以下结论是有关 Minkowski 加法与体积关系的一些最为重要的结论 (参见文献 [35]):

定理 3.1 (Brunn-Minkowski 不等式) 设 K 和 L 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧凸集, 有

$$V_n(K+L)^{\frac{1}{n}}\geqslant V_n(K)^{\frac{1}{n}}+V_n(L)^{\frac{1}{n}},$$

等号当且仅当 K 与 L 位似时成立.

定理 3.2 (混合体积变分公式) 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体, 则存在非负有限 Borel 测度 S_K, 对任意 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体 L, 下式成立:

$$
\begin{aligned}
V_1(K,L)&:=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0+}V(K+tL)\\
&=\int_{S^{n-1}}h_L(u)dS_K(u),
\end{aligned}
$$

其中, $V_1(K,L)$ 称为 K 和 L 的混合体积.

定理 3.3 (Minkowski 不等式) 设 K 和 L 为 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体, 则

$$V_1(K,L)^n\geqslant V_n(K)^{n-1}V_n(L),$$

等号当且仅当 K 与 L 位似时成立.

众所周知, 假设 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个凸体, 且 $\alpha,\beta\geqslant 0$, 根据 Minkowski 存在定理[35], $\alpha\cdot K+\beta\cdot L$ 也可以通过定义支撑函数的方式进行:

$$h_{\alpha\cdot K+\beta\cdot L}(u)=\alpha h_K(u)+\beta h_L(u),\quad u\in S^{n-1}.$$

Lutwak [9] 定义凸体 L_p 运算时也利用了相似的方法, 假设 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点在内部的两个凸体, $\alpha,\beta\geqslant 0$, $p\geqslant 1$, 则定义 $\alpha\cdot_p K+_p\beta\cdot_p L$ 如下:

$$h_{\alpha\cdot_p K+_p\beta\cdot_p L}(u)^p=\alpha h_K(u)^p+\beta h_L(u)^p,\quad u\in S^{n-1}.$$

以下是文献 [9] 中的一些主要结果:

定理 3.4 (L_p Brunn-Minkowski 不等式)　设 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点在内部的两个凸体, 实数 $n\neq p\geqslant 1$, 则

$$V(K+_p L)^{\frac{n-p}{n}}\geqslant V(K)^{\frac{n-p}{n}}+V(L)^{\frac{n-p}{n}},$$

等号当且仅当 K 是 L 的膨胀时成立.

定理 3.5 (L_p 混合体积变分公式)　设 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个凸体, 实数 $p\geqslant 1$, 则

$$\begin{aligned}V_p(K,L)&:=\frac{p}{n}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{V(K+_p\varepsilon\cdot_p L)-V(K)}{\varepsilon}\\&=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}h(L,u)^p dS_p(K,u),\end{aligned}$$

其中测度 $S_p(K,\cdot)$ 关于表面积测度 $S(K,\cdot)$ 绝对连续, 且其 Radon-Nikodym 导数满足

$$\frac{dS_p(K,\cdot)}{dS(K,\cdot)}=h(K,\cdot)^{1-p}.$$

定理 3.6 (L_p Minkowski 不等式)　设 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点在内部的两个凸体, 实数 $p\geqslant 1$, 那么

$$V_p(K,L)^n\geqslant V(K)^{n-p}V(L)^p,$$

等号当且仅当 K 是 L 的膨胀时成立.

可以看出, 当 $p=1$ 时, 上述 3 个定理分别退化为相应的经典形式.

L_p Brunn-Minkowski 理论的产生基于 Minkowski 加法的推广, 人们很自然地想到, Orlicz Brunn-Minkowski 理论应该也是如此. 但事实上, Orlicz Brunn-Minkowski 理论的产生却基于 Orlicz 投影体不等式和 Orlicz 质心体不等式的建立. 可是混合体积、Minkowski 不等式和 Brunn-Minkowski 不等式都与加法密切相关, 所以这进一步暗示人们对 Minkowski 加法的推广是问题的关键所在. 最终, Gardner 等 [45] 和 Xi 等 [46] 分别独立提出了 Orlicz 加法的概念. 这是对 Minkowski 加法更进一步的推广, 并为 Orlicz Brunn-Minkowski 理论补上了极为关键的部分. 下面按照 Xi 等 [46] 的定义介绍 Orlicz Brunn-Minkowski 理论. 本节假设 $\phi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是某个预先选定的严格单调递增的凸函数, 且满足 $\phi(0)=0$.

定义 3.1 (Orlicz 组合)　若 $\alpha>0$, $\beta\geqslant 0$, K 和 L 为内部包含原点的紧致凸集, 定义 Orlicz 组合 $M_\varphi(\alpha,\beta;K,L)$ 如下:

$$h_{M_{\phi(\alpha,\beta;K,L)}}(u)=\inf\left\{\tau>0:\alpha\phi\left(\frac{h_K(u)}{\tau}\right)+\beta\phi\left(\frac{h_L(u)}{\tau}\right)\leqslant 1\right\}.$$

特别地, 记 $K+_\phi L:=M_\phi(1,1;K,L)$, 称为 K 与 L 的 Orlicz 和.

从上面的定义不难看出, 在 Orlicz 框架下, 独立定义凸体的 “Orlicz” 数量积是不可行的. 这也是建立 Orlicz Brunn-Minkowski 等相关不等式的主要困难. 但为了兼顾传统习惯, 仍记

$$M_{\varphi(\alpha,\beta;K,L)}=\alpha\cdot_\varphi K+_\varphi\beta\cdot_\varphi L,$$

而当 $\alpha=1$ 时, 记

$$\alpha\cdot_{\varphi}K+_{\varphi}\beta\cdot_{\varphi}L=K+_{\varphi}\beta\cdot_{\varphi}L.$$

Xi 等[46] 定义了 K 和 L 的 Orlicz 混合体积如下:

$$V_{\phi}(K,L):=\frac{\phi'_{-}(1)}{n}\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{V(K+_{\phi}\varepsilon\cdot_{\phi}L)-V(K)}{\varepsilon}.$$

定理 3.7 (Orlicz Brunn-Minkowski 不等式) 设 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点在内部的两个凸体, 实数 $n\neq p\geqslant 1$, 则

$$\phi\bigg(\frac{V(K)^{\frac{1}{n}}}{V(K+_{\phi}L)^{\frac{1}{n}}}\bigg)+\phi\bigg(\frac{V(L)^{\frac{1}{n}}}{V(K+_{\phi}L)^{\frac{1}{n}}}\bigg)\leqslant 1,$$

等号当 K 是 L 的膨胀时成立. 进一步, 若 ϕ 是严格凸函数, 则等号仅当 K 是 L 的膨胀时成立.

定理 3.8 (Orlicz 混合体积变分公式) 设 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点在内部的两个凸体, 函数 $\phi(1)=1$, 则

$$\begin{aligned}V_{\phi}(K,L)&:=\frac{\phi'_{-}(1)}{n}\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{V(K+_{\phi}\varepsilon\cdot_{\phi}L)-V(K)}{\varepsilon}\\&=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\phi\bigg(\frac{h_L(u)}{h_K(u)}\bigg)h_K(u)dS_K(u).\end{aligned}$$

定理 3.9 (Orlicz Minkowski 不等式) 设 K 和 L 是 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点在内部的两个凸体, 函数 $\phi(1)=1$, 则

$$V_{\phi}(K,L)\geqslant V(K)\phi\bigg(\frac{V(L)^{\frac{1}{n}}}{V(K)^{\frac{1}{n}}}\bigg),$$

等号当 K 是 L 的膨胀时成立. 进一步假设 ϕ 是严格凸函数, 则等号仅当 K 是 L 的膨胀时成立.

显然, 如果在上述定理中令 $\phi(t)=t^p$, $q\geqslant 1$, 则结论立刻退化到 L_p 型的相应情形.

有关 Orlicz 混合体积的积分表示、Orlicz Brunn-Minkowski 不等式和 Orlicz Minkowski 不等式的推广可参见文献 [47].

4 Minkowski 问题

Minkowski 问题是 Brunn-Minkowski 理论中的奠基石之一. 经典的 Minkowski 问题可以叙述为: 给定一个球面上的 Borel 测度 μ, 是否存在一个凸体 K, 使得 K 的表面积测度就是 μ? 一个多世纪以前, Minkowski 本人完整地回答了这个问题的离散情形, 他找到了这个存在性的充要条件, 并且证明了解的唯一性. 之后, A. Aleksandrov、W. Fenchel 和 B. Jessen 完整地解决了这个问题.

与之相关的是球面上的 Monge-Ampère 型方程: 给定一个函数 $f:S^{n-1}\to(0,\infty)$, 求解下述方程:

$$\det(h_{ij}+h\delta_{ij})=f,$$

其中 h_{ij} 是支撑函数 h 关于 S^{n-1} 上的正交标架的协变导数, δ_{ij} 是 Kronecker 函数. f 是 Minkowski 问题中的测度 μ, 对应于这里的密度函数, 即光滑情形.

作为 L_p Brunn-Minkowski 理论的重要组成部分, Lutwak[9] 提出了 L_p Minkowski 问题: 给定一个球面上的有限 Borel 测度 μ 和实数 p, 是否存在一个凸体 K, 使得 K 的 L_p 表面积测度就是 μ? 即是否存在一个凸体 K, 使得

$$h_K^{1-p}dS(K,\cdot)=d\mu?$$

$p=1$ 的情形即是经典的 Minkowski 问题.

$p>1$ 且 $p \neq n$ 时, 偶 L_p Minkowski 问题被 Lutwak [9] 本人解决. $p>1$ 时光滑情形 (不假设偶性) 的 L_p Minkowski 问题分别被 Guan 和 Lin [14] 及 Chou 和 Wang [13] 独立解决. Hug 等 [48] 给出了 $p>1$ 时离散 L_p Minkowski 问题解的存在性.

$p<1$ 时, L_p Minkowski 问题变得更为复杂. $0<p<1$ 且离散形式的 Minkowski 问题由 Zhu [19] 解决, $p<0$ 时, 当测度不包含本质子空间时, 该问题的存在性由 Chen 等 [21] 解决.

$p=0$ 时, L_0 Minkowski 问题, 又称对数 Minkowski 问题. 平面的情形由 Stancu [24,25,49] 解决. 偶的对数 Minkowski 问题被 Böröczky 等 [12] 解决. 他们证明了如下结果:

定理 4.1 球面 S^{n-1} 上的非零有限偶 Borel 测度是 $\mathbb{R}^n$ 原点对称凸体的锥体积测度当且仅当它满足子空间集中性质.

关于对称多胞形的子空间集中性质由 He 等 [50] 和 Henk 等 [51] 独立证明. 另一个证明可参见文献 [52]. Henk 和 Linke [53] 证明了一般多胞形的锥体积测度也具有子空间集中性质.

非对称的对数 Minkowski 问题由 Zhu [20] 和 Chen 等 [21] 解决. 值得指出的是, 存在性的充要条件是子空间集中性质. 不同于对称的对数 Minkowski 问题, 非对称的对数 Minkowski 问题的解并不具有唯一性.

类似地, 与之相关的是球面上的 Monge-Ampère 型方程: 给定一个函数 $f: S^{n-1} \to (0,\infty)$, 求解下述方程:

$$h^{1-p}\det(h_{ij}+h\delta_{ij})=f.$$

Orlicz Minkowski 问题由 Haberl 等 [23] 提出: 给定一个适当的连续函数 $\varphi:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 和一个球面上的 Borel 测度 μ, 是否存在一个凸体 K, 使得对于某个实数 $c>0$, 满足

$$c\varphi(h_K)dS_K=d\mu?$$

令 $\varphi(t)=t^{1-p}$ $(p\neq n)$, 该问题即为 L_p Minkowski 问题. 同时, Haberl 等 [23] 给出了一类偶的版本的 Orlicz Minkowski 问题的解. 其对应的 Monge-Ampère 型方程为: 给定一个函数 $f: S^{n-1}\to(0,\infty)$, 求解下述方程:

$$\varphi(h)\det(h_{ij}+h\delta_{ij})=f.$$

关于对称测度的 Orlicz Minkowski 问题, 是由 Haberl 等 [23] 证明的. 他们的结果之一如下:

定理 4.2 假设 $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 是一个连续函数,

$$\phi(t)=\int_o^t \frac{1}{\varphi(s)}ds$$

对每个正数 t 都存在且当 $t\to\infty$ 时无界. μ 是 S^{n-1} 上的一个对称的有限 Borel 测度且不集中在 S^{n-1} 的任何一个闭半球面上, 那么存在一个关于原点中心对称的凸体 $K\subset\mathbb{R}^n$ 和 $c>0$ 使得

$$c\varphi(h_K)dS_K=d\mu.$$

取 $\varphi(s)=s^{1-p}$, $p>0$, 我们便发现上述结果推广了 $p>0$ 时对称的 L_p Minkowski 问题存在性结果.

Huang 和 He [54] 证明了如下结果:

定理 4.3 假设 $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 是一个连续函数, 当 $s\to 0^+$ 时, $\varphi(s)$ 趋近于 ∞,

$$\phi(t)=\int_o^t \frac{1}{\varphi(s)}ds$$

对每个正数 t 都存在并且当 $t\to\infty$ 时无界. μ 是 S^{n-1} 上的一个有限 Borel 测度且不集中在 S^{n-1} 的任何一个闭半球面上, 那么存在一个关于原点中心对称的凸体 $K\subset\mathbb{R}^n$ 和 $c>0$, 使得

$$c\varphi(h_K)dS_K=d\mu.$$

该结果推广了 $p>1$ 时的 L_p Minkowski 问题解的存在性.

最近, Wu 等 [55] 证明了如下结果:

定理 4.4 假设 $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 连续可微, 严格增. 当 $s\to 0^+$ 时, $\varphi(s)$ 趋近于 0,

$$\phi(t)=\int_o^t \frac{1}{\varphi(s)}ds$$

对每个 t 都存在并且当 $t\to\infty$ 时无界. 如果

$$\mu=\sum_{i=1}^N \alpha_i\delta_{u_i},$$

这里 δ_{u_i} 表示 Kronecker 函数, $\alpha_1,\ldots,\alpha_N>0$ 并且 $u_1,\ldots,u_N\in S^{n-1}$ 不集中在任一闭半球内, 则存在一个多胞形 P 包含原点在其内部并且存在一个常数 $c>0$ 使得

$$\mu=c\varphi(h(P,\cdot))S(P,\cdot). \tag{4.1}$$

令 $\varphi(s)=s^{1-p}$ $(0<p<1)$, 可得 $0<p<1$ 时离散的 L_p Minkowski 问题解的存在性.

定理 4.4 解决了离散测度的情形, 关于一般测度的情形目前没有结果. 另外, 关于 Orlicz Minkowski 问题解的唯一性的研究还比较少.

致谢 感谢审稿人对文章提出的修改建议.

参考文献

1 Blaschke W. Kreis und Kugel, 2nd ed. Berlin: De Gruyter, 1956
2 Ball K. The plank problem for symmetric bodies. Invent Math, 1991, 104: 535–543
3 Ball K, Carlen E A, Lieb E H. Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms. Invent Math, 1994, 115: 463–482
4 Bourgain J, Milman V D. New volume ratio properties for convex symmetric bodies in $\mathbb{R}^n$. Invent Math, 1987, 88: 319–340
5 Milman V. Dvoretzky's theorem—thirty years later. Geom Funct Anal, 1992, 2: 455–479
6 Bourgain J, Lindenstrauss J, Milman V. Approximation of zonoids by zonotopes. Acta Math, 1989, 162: 73–141
7 Lutwak E. Dual mixed volumes. Pacific J Math, 1975, 58: 531–538
8 Lutwak E. Intersection bodies and dual mixed volumes. Adv Math, 1988, 71: 232–261
9 Lutwak E. The Brunn-Minkowski-Firey theory. I: Mixed volumes and the Minkowski problem. J Differential Geom, 1993, 38: 131–150
10 Cheng S Y, Yau S T. On the regularity of the solution of the n-dimensional Minkowski problem. Comm Pure Appl Math, 1976, 29: 495–516
11 Huang Y, Lutwak E, Yang D, et al. Geometric measures in the dual Brunn-Minkowski theory and their associated Minkowski problems. Acta Math, 2016, 216: 325–388

12 Böröczky K J, Lutwak E, Yang D, et al. The logarithmic Minkowski problem. J Amer Math Soc, 2013, 26: 831–852
13 Chou K S, Wang X J. The L_p-Minkowski problem and the Minkowski problem in centroaffine geometry. Adv Math, 2006, 205: 33–83
14 Guan P, Lin C. On equation $\det(u_{ij} + \delta_{ij} u) = u^p f$ on s^n. NCTS in Tsing-Hua University. Preprint No. 2000-7, 2000
15 Guan P, Ma X N. The Christoffel-Minkowski problem I: Convexity of solutions of a Hessian equation. Invent Math, 2003, 151: 553–577
16 Jerison D. A Minkowski problem for electrostatic capacity. Acta Math, 1996, 176: 1–47
17 Zhu G. The L_p Minkowski problem for polytopes for $p < 0$. Indiana Univ Math J, 2017, 66: 1333–1350
18 Zhu G. The centro-affine Minkowski problem for polytopes. J Differential Geom, 2015, 101: 159–174
19 Zhu G. The L_p Minkowski problem for polytopes for $0 < p < 1$. J Funct Anal, 2015, 269: 1070–1094
20 Zhu G. The logarithmic Minkowski problem for polytopes. Adv Math, 2014, 262: 909–931
21 Chen S, Li Q, Zhu G. The logarithmic Minkowski problem for non-symmetric measures. Trans Amer Math Soc, 2019, 371: 2623–2641
22 Henk M, Pollehn H. Necessary subspace concentration conditions for the even dual Minkowski problem. Adv Math, 2018, 323: 114–141
23 Haberl C, Lutwak E, Yang D, et al. The even Orlicz Minkowski problem. Adv Math, 2010, 224: 2485–2510
24 Stancu A. The discrete planar L_0-Minkowski problem. Adv Math, 2002, 167: 160–174
25 Stancu A. On the number of solutions to the discrete two-dimensional L_0-Minkowski problem. Adv Math, 2003, 180: 290–323
26 Zhao Y. Existence of solutions to the even dual Minkowski problem. J Differential Geom, 2018, 110: 543–572
27 Zhao Y. The dual Minkowski problem for negative indices. Calc Var Partial Differential Equations, 2017, 56: 18
28 Xiong G, Xiong J, Xu L. The L_p capacitary Minkowski problem for polytopes. J Funct Anal, 2019, 277: 3131–3155
29 Firey W J. p-means of convex bodies. Math Scand, 1962, 10: 17–24
30 Ludwig M. Projection bodies and valuations. Adv Math, 2002, 172: 158–168
31 Ludwig M. Minkowski valuations. Trans Amer Math Soc, 2005, 357: 4191–4213
32 Haberl C, Schuster F E. General L_p affine isoperimetric inequalities. J Differential Geom, 2009, 83: 1–26
33 Lutwak E, Yang D, Zhang G. Orlicz projection bodies. Adv Math, 2010, 223: 220–242
34 Lutwak E, Yang D, Zhang G. Orlicz centroid bodies. J Differential Geom, 2010, 84: 365–387
35 Schneider R. Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory, Second Expanded Edition. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 151. Cambridge: Cambridge University Press, 2014
36 Petty C M. Centroid surfaces. Pacific J Math, 1961, 11: 1535–1547
37 Petty C M. Isoperimetric problems. In: Proceedings of the Conference on Convexity and Combinatorial Geometry. Norman: University of Oklahoma, 1971, 26–41
38 Lutwak E. On some affine isoperimetric inequalities. J Differential Geom, 1986, 23: 1–13
39 Lutwak E, Yang D, Zhang G. L_p affine isoperimetric inequalities. J Differential Geom, 2000, 56: 111–132
40 Zhang G. Restricted chord projection and affine inequalities. Geom Dedicata, 1991, 39: 213–222
41 Zhu G. The Orlicz centroid inequality for star bodies. Adv Appl Math, 2012, 48: 432–445
42 Böröczky K J. Stronger versions of the Orlicz-Petty projection inequality. J Differential Geom, 2013, 95: 215–247
43 Chen F, Zhou J, Yang C. On the reverse Orlicz Busemann-Petty centroid inequality. Adv Appl Math, 2011, 47: 820–828
44 Nguyen V H. Orlicz-Lorentz centroid bodies. Adv Appl Math, 2018, 92: 99–121
45 Gardner R J, Hug D, Weil W. The Orlicz-Brunn-Minkowski theory: A general framework, additions, and inequalities. J Differential Geom, 2014, 97: 427–476
46 Xi D, Jin H, Leng G. The Orlicz Brunn-Minkowski inequality. Adv Math, 2014, 260: 350–374
47 Xiong G, Zou D. Orlicz mixed quermassintegrals. Sci China Math, 2014, 57: 2549–2562
48 Hug D, Lutwak E, Yang D, et al. On the L_p Minkowski problem for polytopes. Discrete Comput Geom, 2005, 33: 699–715
49 Stancu A. The necessary condition for the discrete L_0-Minkowski problem in $\mathbb{R}^2$. J Geom, 2008, 88: 162–168
50 He B, Leng G, Li K. Projection problems for symmetric polytopes. Adv Math, 2006, 207: 73–90
51 Henk M, Schürmann A, Wills J M. Ehrhart polynomials and successive minima. Mathematika, 2005, 52: 1–16

52 Xiong G. Extremum problems for the cone volume functional of convex polytopes. Adv Math, 2010, 225: 3214–3228
53 Henk M, Linke E. Cone-volume measures of polytopes. Adv Math, 2014, 253: 50–62
54 Huang Q, He B. On the Orlicz Minkowski problem for polytopes. Discrete Comput Geom, 2012, 48: 281–297
55 Wu Y, Xi D, Leng G. On the discrete Orlicz Minkowski problem. Trans Amer Math Soc, 2019, 371: 1795–1814

Orlicz Brunn-Minkowski theory

Yun Xu, Yuchi Wu & Gangsong Leng

Abstract In this note, we mainly introduce the Orlicz Brunn-Minkowski theory from three aspects: Orlicz projection bodies and Orlicz centroid bodies, Orlicz addition and related volume inequalities, and Orlicz Minkowski problems.

Keywords Orlicz projection body, Orlicz centroid body, Orlicz addition, Orlicz Minkowski problem

MSC(2010) 52A40

doi: 10.1360/SSM-2019-0332