具有测度值系数的椭圆算子及扩散过程

献给严加安院士 80 华诞

张土生¹, 魏茸^{2*}, 杨赛赛¹

1. School of Mathematics, University of Manchester, Manchester M13 9PL, UK;

2. 中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026

E-mail: Tusheng.Zhang@manchester.ac.uk, rongw@mail.ustc.edu.cn, yangss@mail.ustc.edu.cn

收稿日期: 2020-11-16; 接受日期: 2021-01-15; 网络出版日期: 2021-12-02; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11971456, 11671372 和 11721101) 和中国博士后科学基金 (批准号: BH0010000027) 资助项目

摘要 本文介绍一类系数是测度值的椭圆算子及其对应的扩散过程, 这里考虑的测度值系数属于 Kato 类 $K_{d,1}$. 首先, 介绍漂移项为测度值 μ 的 Brown 运动及反射 Brown 运动的弱解的存在唯一性以及弱解的转移概率密度函数估计. 然后, 给出关于无穷小算子 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Delta + \mu \cdot \nabla$ 的二阶椭圆方程的 Dirichlet 边界值问题和 Neumann 边界值问题的弱解的存在唯一性及概率表示. 最后, 介绍漂移项为测度值 μ 的 Brown 运动的小时间渐近性和大偏差原理.

关键词 椭圆算子 扩散过程 Kato 类 Dirichlet 边界值问题 Neumann 边界值问题 小时间渐近性 大偏差

MSC (2020) 主题分类 60H10, 60J35, 47D07, 60J60

1 引言

本文介绍 d 维测度值系数的椭圆算子及其对应的扩散过程 (详细的论述和证明可参见文献 [1–5]). 本文叙述的所有结果都是在 $d \geq 3$ 的情形下考虑的.

首先观察 $\mathbb{R}^d$ 上的随机微分方程

$$dX_t = dW_t + f(X_t)dt, \quad X_0 = x \quad (1.1)$$

和有界区域 $D \subset \mathbb{R}^d$ 上的反射随机微分方程

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t f(X_s)ds + W_t + L_t, \\ L_t = \int_0^t \mathbf{n}(X_s) \mathbf{1}_{\partial D}(X_s) d|L|_s, \end{cases} \quad (1.2)$$

英文引用格式: Zhang T S, Wei R, Yang S S. Diffusion processes associated with elliptic operators with measure-valued coefficients (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1955–1974, doi: 10.1360/SSM-2020-0321

这里 W 是标准 Brown 运动, $\mathbf{n}$ 是边界 ∂D 上的单位内法向量, $|L|_t$ 是 L 在 $[0, t]$ 上的全变差. 如果 f 是有界可测函数, 利用 Girsanov 变换容易证明方程 (1.1) 和 (1.2) 存在唯一的弱解 (此时方程 (1.1) 和 (1.2) 的强解也存在且唯一, 参见文献 [6, 7]).

令 f^i 表示 f 的第 i 个分量,

$$A_t^i = \int_0^t f^i(X_s) ds, \quad A_t = (A_t^1, \dots, A_t^d).$$

于是方程 (1.1) 和 (1.2) 可表示为

$$dX_t = dW_t + dA_t, \quad (1.3)$$

$$dX_t = dW_t + dA_t + dL_t. \quad (1.4)$$

根据 Markov 过程的相关理论, 上述方程的解是强 Markov 过程, A_t^i 是一个连续可加泛函, 其对应的 Revuz 测度是 $f^i(x)dx$, 其对应的无穷小生成元分别是 $\mathbb{R}^d$ 上的椭圆算子

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Delta + f \cdot \nabla \quad (1.5)$$

和 D 上带边界条件 $\frac{\partial \cdot}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial D} = 0$ 的椭圆算子 $\mathcal{L}$.

具有奇异系数的随机微分方程解的适定性, 一直是随机分析领域的热门问题. 我们知道, Kato 类是偏微分方程、位势论和 Dirichlet 型理论中一个非常重要的概念 (参见文献 [8, 9]). 因此本文第 2 节主要介绍当漂移项系数 μ 是测度值, 且属于合适的 Kato 类 $K_{d,1}$ 时, 随机微分方程 (1.3) 和反射随机微分方程 (1.4) 的弱解的定义以及存在唯一性. 为此先引入 Kato 类测度的定义. 具体地, 对于 $2 \geq \alpha > 0$ 以及 $\mathbb{R}^d$ 上的符号测度 π , 定义 Kato 类

$$K_{d,\alpha} = \left\{ \pi(dx) : \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y| \leq r} |x-y|^{\alpha-d} |\pi|(dy) = 0 \right\},$$

其中 $|\pi|$ 表示 π 的全变差测度. 如果 $f(x)dx \in K_{d,\alpha}$, 则称函数 $f \in K_{d,\alpha}$. 关于 Kato 类 $K_{d,1}$ 的例子, 可参见文献 [1]. 因为 $K_{d,1}$ 中的测度可能关于 Lebesgue 测度不绝对连续, 因此方程 (1.3) 和 (1.4) 中的连续可加泛函 A 没有显式的表示. 即使 μ 关于 Lebesgue 测度绝对连续, 记 $f(x) = \frac{\mu(dx)}{dx}$. 由文献 [1] 知, 对于可测函数 f , 条件 $|f|^2 \in K_{d,2}$ 与 $f \in K_{d,1}$ 之间没有必然关系. 当 $|f|^2$ 属于 Kato 类 $K_{d,2}$ 时, 由 Dirichlet 型理论知, 无穷小生成元 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Delta + f \cdot \nabla$ 对应于一个半 Dirichlet 型, 因此存在一个与生成元 $\mathcal{L}$ 相联系的扩散过程. 然而当 f 属于 Kato 类 $K_{d,1}$ 时, 很难验证如下 Kato 类型的不等式是否成立: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $A_\varepsilon > 0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) \nabla \phi(x) \cdot f(x) dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \phi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \psi(x)|^2 dx + A_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.6)$$

对于任意 $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 成立 (参见文献 [10]). 因此不清楚算子 $\mathcal{L}$ 是否对应一 Dirichlet 型. 另一方面, 我们也不能利用 Girsanov 变换构造与算子 $\mathcal{L}$ 相联系的扩散过程, 因为 Girsanov 变换

$$M_t = \exp \left(\int_0^t f(W_s) \cdot dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |f(W_s)|^2 ds \right), \quad t \geq 0 \quad (1.7)$$

也不是良定的.

本文第 3 节主要考虑当测度 $\mu, \nu \in K_{d,1}$ 时, 椭圆算子 $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\Delta + \mu \cdot \nabla + \nu$ 对应的 Dirichlet 边界值问题和 Neumann 边界值问题. 利用概率方法证明偏微分方程解的存在唯一性已经有很长的历史, 最早可以追溯到 Kakutani^[11] 利用 Brown 运动表示关于 Dirichlet 边界条件的 Laplace 方程的解. 当 $|f|^2$ 属于 Kato 类 $K_{d,2}$ 时, Gerhard^[12] 证明了 (1.5) 中 $\mathcal{L}$ 对应的 Dirichlet 边界值问题存在唯一的连续弱解. 之后, 文献 [13–18] 考虑了散度形式的二阶微分算子对应的 Dirichlet 问题以及非线性问题. 对于 Neumann 边界值问题, Hsu^[19] 证明了位势项属于 Kato 类 $K_{d,2}$ 的 Laplace 方程弱解的存在唯一性. Chen 和 Zhang^[20] 证明了当 $(|f|^2 + |q|) \in L^p(D)$ ($p > \frac{d}{2}$) 时, 算子 $\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\Delta + f \cdot \nabla + q$ 对应的 Neumann 边界值问题存在唯一的连续弱解. 随后, 文献 [21] 利用倒向随机微分方程把上述结果推广到非线性条件.

注意到上述文献的方法非常依赖于 $|f|^2 \in K_{d,2}$, $|f|^2$ 满足 Kato 类型的不等式 (1.6). 此时可以利用二次型理论证明椭圆方程的弱解的存在唯一性. 然而, 当 $|f| \in K_{d,1}$ 时, 不等式 (1.6) 不一定成立. 另一方面, 我们知道最大值原理在证明椭圆方程解的唯一性时起着重要的作用. 然而, 即使算子 $\mathcal{A}$ 中的系数 $\nu = 0$ 时, Trudinger^[22] 给出的最大值原理的判断准则在本文中也不能应用, 这些都给测度值系数的椭圆方程解的存在唯一性的证明带来了极大的困难.

本文第 4 节主要考虑当测度 $\mu \in K_{d,1}$ 时漂移项为 μ 的随机微分方程 (1.3) 的解 X (其对应的无穷小算子是 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Delta + \mu \cdot \nabla$) 的转移概率密度函数的小时间渐近性, 并建立过程 X 的小时间大偏差原理. Varadhan^[23] 证明了对于有界、对称和一致椭圆矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))$, 如果矩阵中每一项都是一致 Hölder 连续的, 则非散度形式的椭圆算子 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ 对应的热核 $p(t, x, y)$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \log p(t, x, y) = -\frac{d(x, y)^2}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (1.8)$$

其中 $d(x, y)$ 是由 $A(x)^{-1}$ 诱导的 Riemann 度量. 之后, Norris^[24] 把上述结果推广到 Lipschitz 流形上的散度形式椭圆算子, 文献 [25] 在对称局部 Dirichlet 型框架下证明与之联系的半群也具有类似 (1.8) 的性质. 进一步的相关文献参见文献 [26–28].

大偏差原理描述了一族概率的渐近性, 它在应用概率、统计、工程和统计力学中都有着重要的应用 (参见文献 [29]). 另一方面, 我们知道一个 Markov 过程的转移概率密度函数的小时间渐近性 (1.8) 与过程的小时间大偏差原理有密切相关性, 因此在最后我们将试图证明漂移项为 μ 的 Brown 运动 X 满足小时间渐近性 (1.8), 同时建立它的小时间大偏差原理.

2 具有奇异系数的扩散过程

本节的主要结果可参见文献 [1, 4]. 给定 $\mathbb{R}^d$ -值的符号测度 $\mu = (\mu^1, \dots, \mu^d)$, 本节主要介绍漂移项系数是测度值 μ 的随机微分方程和反射随机微分方程. 为此, 先介绍一些基本的概念.

从现在开始, 始终假设 D 是 $\mathbb{R}^d$ 上的有界光滑区域, 并且对于任意 $1 \leq i \leq d$, 有 $\mu^i \in K_{d,1}$.

记 $\mathbf{n}(x) = (\mathbf{n}^1(x), \dots, \mathbf{n}^d(x))$ 是边界 ∂D 的单位内法向量. 令 $\psi(x)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上具有紧支撑的光滑函数, 满足 $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) dx = 1$. 定义

$$\psi_n(x) = 2^{dn} \psi(2^n x). \quad (2.1)$$

构造一系列向量值的光滑函数 $G_n = (G_n^1, \dots, G_n^d)$, 其中对于任意 $1 \leq i \leq d$, 有

$$G_n^i(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_n(x - y) \mu^i(dy). \quad (2.2)$$

令 E 是 $\mathbb{R}^d$ 上的闭集. 定义 $\Omega = C([0, \infty), E)$ 为 $[0, \infty) \rightarrow E$ 的全体连续函数构成的集合, 坐标过程 $X(t, \omega) = \omega(t)$, $\mathcal{F}_t$ 和 $\mathcal{F}_\infty$ 分别是由 $\{X_s : s \leq t\}$ 和 $\{X_s : s < \infty\}$ 生成的柱集 σ 代数. 记 $\theta_t : \Omega \rightarrow \Omega$ 是漂移算子, 满足 $\theta_t(\omega)(\cdot) = \omega(t + \cdot)$. 给定一族强 Markov 过程 $\{\Omega, X, P_x, E\}$, 称一个连续 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -适应过程 $C = (C_t)_{t \geq 0}$ 是关于 X 的连续可加泛函, 如果对于任意 $x \in E$, 有 $C_0 = 0$, P_x -a.e., 且

$$C_{s+t} = C_s + C_t \circ \theta_s, \quad \forall s, t \geq 0, \quad P_x\text{-a.e.}$$

称 Markov 过程 $\{\Omega, X, P_x, x \in E\}$ 是强 Feller 的, 如果对于任意有界可测函数 f 和 $t > 0$, $P_t f(x) = E_x[f(X_t)]$ 是 E 上的连续函数, 这里 E_x 表示关于概率 P_x 的期望.

对于常数 $\lambda > 0$, 定义 $P_{\lambda, t} f(x) = E_x[e^{-\lambda t} f(X_t)]$. 称有界正函数 f 是一个 λ -位势函数, 如果 $P_{\lambda, t} f(x) \leq f(x)$ 对于任意 $(t, x) \in (0, \infty) \times E$ 成立, 且有

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{x \in E} |P_{\lambda, t} f(x) - f(x)| = 0.$$

给定有界变差过程 A_t , 令 A_t^+ 和 A_t^- 分别为 A_t 的正部和负部.

引理 2.1 ^[1] 假定 X 是强 Markov 过程, A_t^1 和 A_t^2 是具有有界变差的连续可加泛函, $B_t = A_t^1 - A_t^2$. 如果 $\sup_x E_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} d((A_t^j)^+ + (A_t^j)^-) \leq N$, $j = 1, 2$, 且 $\sup_x |E_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} dB_t| \leq \varepsilon$, 则有

$$E_x \left[\sup_t \left| \int_0^t e^{-\lambda s} dB_s \right|^2 \right] \leq c_1 \varepsilon N.$$

2.1 带奇异漂移系数的 Brown 运动

本小节令 $E = \mathbb{R}^d$. 首先给出漂移项系数是 μ 的 Brown 运动的定义:

定义 2.1 称 $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ 上的概率测度 P 是漂移项系数为 μ 的 Brown 运动的弱解, 如果存在 d 维 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -适应的标准 Brown 运动 $W = (W_t)_{t \geq 0}$ 和连续有界变差过程 $A = (A_t)_{t \geq 0}$ 使得

$$X_t = x_0 + W_t + A_t, \quad (2.3)$$

这里 (i) $A_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t G_n(X_s) ds$, 此处收敛表示以概率在有限时间区间关于 t 一致收敛; (ii) 存在子列 $\{n_k\}$ 使得 $\sup_k \int_0^t |G_{n_k}(X_s)| ds < \infty$ a.s., $\forall t > 0$.

也称漂移项系数为 μ 的 Brown 运动的弱解是随机微分方程 (2.3) 的弱解. 对于任意 $1 \leq i \leq d$, $\mu^i \in K_{d,1}$. 有下面的结果:

定理 2.1 (i) 对于任意 $x_0 \in \mathbb{R}^d$, 随机微分方程 (2.3) 存在唯一的弱解, 且该弱解是保守的.

(ii) 令 (X, P_x) 表示随机微分方程 (2.3) 中初值 $X_0 = x$ 的弱解, 则 $(X, P_x, x \in \mathbb{R}^d)$ 是一个强 Markov 过程. 此外, 过程 A 的每个分量 A^i 是具有有界变差的连续可加泛函.

下面只给出证明的思想, 详细的证明参见文献 [1]. 利用标准的拼接技术可知, 只需要证明对于足够小的 r , 当 μ 的支撑在某一小球 $B(x, r)$ 上时, 方程 (2.3) 弱解存在且唯一.

首先说明弱解的存在性. 令 $p_t(x) = (2\pi t)^{-d/2} \exp(-|x|^2/(2t))$, $R^\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_t(x) dt$. 定义

$$R^\lambda f(x) = \int f(y) R^\lambda(x-y) dy = \int_0^t e^{-\lambda t} \int f(y) p_t(x-y) dy dt,$$

$$Bf(dx) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \mu^i(dx) \quad \text{和} \quad B_n f(dx) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) G_n^i(dx).$$

如果 $\int R^\lambda(x-y)|\mu|(dy) < \infty$, 也记 $R^\lambda\mu(x) = \int R^\lambda(x-y)\mu(dy)$. 当 r 足够小时, 对于任意 $\lambda > 0$, $R^\lambda\mu \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$, 并且算子 $B_n R^\lambda$ 在空间 $C_b(\mathbb{R}^d)$ 上关于一致范数是压缩的. 令 $P_{x_0}^n$ 是无穷小生成元 $\mathcal{L}_n = \frac{1}{2}\Delta + G_n \cdot \nabla$ 对应的扩散过程在空间 $C([0, \infty); \mathbb{R}^d)$ 上关于给定初值 x_0 下的条件分布. 定义

$$S_n^\lambda f(x) = E_x^n \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(X_t) dt.$$

利用 Itô 公式观察到:

引理 2.2 如果 g 有界, 则 $S_n^\lambda g(x) = \sum_{j=0}^\infty R^\lambda(B_n R^\lambda)^j g(x)$.

利用引理 2.2、 $R^\lambda g \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$ 以及 $B_n R^\lambda$ 是 $C_b(\mathbb{R}^d)$ 上的压缩算子, 易证如下定理成立:

定理 2.2 函数集 $\{S_n^\lambda g : n \geq 1, \|g\|_\infty \leq 1\}$ 是等度连续的.

另一方面, 利用引理 2.2 和 Chebyshev 不等式可知如下定理成立:

定理 2.3 对于任意 $\beta, \varepsilon, T > 0$, 存在不依赖 x 和 n 的常数 $\delta > 0$ 使得

$$P_x^n \left(\sup_{s, t \leq T, |t-s| < \delta} |X_t - X_s| > \beta \right) < \varepsilon.$$

定理 2.3 表明, 对于任意的 $x \in \mathbb{R}^d$, $\{P_x^n\}_{n \geq 1}$ 是胎紧的. 又由于 $\sum_{j=0}^\infty R^\lambda(B_n R^\lambda)^j g$ 一致收敛到 $\sum_{j=0}^\infty R^\lambda(BR^\lambda)^j g$, 因此, 对于任意 $x \in \mathbb{R}^d$, $\{P_x^n\}_{n \geq 1}$ 存在唯一的极限点 P_x . 因此, (X_t, P_x) 是一个具有强 Feller 性的强 Markov 过程, 并且对于任意有界可测函数 g 和 $\lambda > 0$, 有

$$E_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(X_t) dt = \sum_{j=0}^\infty R^\lambda(BR^\lambda)^j g(x).$$

最后, 利用 BR^λ 是 $C_b(\mathbb{R}^d)$ 上的压缩算子可知, λ -位势函数 $\sum_{j=0}^\infty R^\lambda(BR^\lambda)^j G_n$ 一致收敛到

$$H^\lambda = \sum_{j=0}^\infty R^\lambda(BR^\lambda)^j \mu.$$

因此 H^λ 也是 λ -位势函数. 故利用 Markov 过程理论^[30] 可知, 存在连续可加泛函 A 使得对于任意 $x \in \mathbb{R}^d$, 有

$$H^\lambda(x) = E_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} dA_t.$$

特别地, 利用引理 2.1 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_x \left[\sup_{s \leq t} \left| A_s - \int_0^s G_n(X_u) du \right|^2 \right] = 0.$$

由此可知, 过程 $M_t = X_t - X_0 - A_t$ 是一个鞅并且二次变差过程是 t , 利用 Lévy 准则易知 M 是标准 Brown 运动, 因此 (X_t, P_x) 是随机微分方程 (2.3) 的一个弱解.

接下来说明随机微分方程 (2.3) 的弱解唯一. 注意到只需在如下条件下考虑弱解的唯一性: 存在一个子列 n_k 使得

$$E_P \sum_{i=1}^d \int_0^\infty e^{-\lambda t} d|A^i|_t < \infty, \quad E_P \sum_{i=1}^d \int_0^\infty e^{-\lambda t} |G_{n_k}^i(X_t)| dt < \infty. \quad (2.4)$$

否则, 定义停时 T_N :

$$T_N = \inf \left\{ t : \sum_{i=1}^d \int_0^t d|A^i|_s + \sum_{i=1}^d \sup_{k \leq 1} \int_0^t |G_{n_k}^i(X_s)| ds \leq N \right\}.$$

则利用截断技术可知, 弱解 X 的分布在 $\mathcal{F}_{T_N}$ 上唯一. 则利用 $\lim_{N \rightarrow \infty} T_N = \infty$ 可知 X 的分布在 $\mathcal{F}_\infty$ 上唯一.

若 P 是随机微分方程 (2.3) 的弱解且满足 (2.4), 定义线性算子

$$V^\lambda h = E \int_0^\infty e^{-\lambda t} h(X_t) dt.$$

则由 Itô 公式可知, 对于任意有界可测函数 g , 有

$$V^\lambda g = R^\lambda g(x_0) + E \int_0^\infty e^{-\lambda t} \nabla R^\lambda g(X_t) \cdot dA_t.$$

同时利用 (2.4) 有

$$V^\lambda g = \sum_{j=0}^{\infty} R^\lambda (BR^\lambda)^j g(x_0).$$

注意到右边的表达式只与 μ 有关, 由 Laplace 变换的唯一性知, 弱解的分布唯一.

称 X^D 为 X 在 D 上的杀死过程, 如果对于任意 Borel 集 $A \subset D$, $t > 0$, $P_x(X_t^D \in A) = P_x(X_t \in A; t < \tau_D)$, 其中 τ_D 是过程 X 首次离开区域 D 的时刻. 之后, 文献 [31] 证明了随机微分方程 (2.3) 的弱解 X 以及 X 在区域 D 上的杀死过程 X^D 具有连续的转移概率密度函数, 即如下定理.

定理 2.4 假设 $\partial D \in C^{1,1}$. 则过程 X 和 X^D 分别具有连续的转移概率密度 $p(t, x, y)$ 和 $p^D(t, x, y)$, 存在正常数 M_i ($1 \leq i \leq 10$), 其中 M_7-M_{10} 依赖于常数 $T > 0$, 使得

$$\begin{aligned} M_1 e^{-M_2 t} t^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{M_3 |x-y|^2}{2t}} &\leq p(t, x, y) \leq M_4 e^{M_5 t} t^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{M_6 |x-y|^2}{2t}}, \quad (t, x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \\ |\nabla_x p(t, x, y)| &\leq M_4 e^{M_5 t} t^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{M_6 |x-y|^2}{2t}}, \quad (t, x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \\ M_7 t^{-\frac{d}{2}} \left(1 \wedge \frac{\rho(x)}{\sqrt{t}}\right) \left(1 \wedge \frac{\rho(y)}{\sqrt{t}}\right) e^{-\frac{M_8 |x-y|^2}{2t}} \\ &\leq p^D(t, x, y) \\ &\leq M_9 t^{-\frac{d}{2}} \left(1 \wedge \frac{\rho(x)}{\sqrt{t}}\right) \left(1 \wedge \frac{\rho(y)}{\sqrt{t}}\right) e^{-\frac{M_{10} |x-y|^2}{2t}}, \quad (t, x, y) \in (0, T) \times D \times D, \\ |\nabla_x p^D(t, x, y)| &\leq M_9 t^{-\frac{d+1}{2}} \left(1 \wedge \frac{\rho(y)}{\sqrt{t}}\right) e^{-\frac{M_{10} |x-y|^2}{2t}}, \quad (t, x, y) \in (0, T) \times D \times D, \end{aligned}$$

其中 $\rho(x)$ 表示 x 与 ∂D 的距离.

2.2 带奇异漂移系数的反射 Brown 运动

本小节始终假设 D 是有界光滑区域, 令 $E = D$. 首先给出漂移项系数是 μ 的反射 Brown 运动的定义:

定义 2.2 给定 $x \in \overline{D}$, 称 $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ 上的概率测度 P 是漂移项系数为 μ 的反射 Brown 运动的弱解, 如果存在 d 维 $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -适应的标准 Brown 运动 $W = (W_t)_{t \geq 0}$ 、连续有界变差过程 $A = (A_t)_{t \geq 0}$ 和 $L = (L_t)_{t \geq 0}$ 使得

(i)

$$\begin{cases} X_t = x + A_t + W_t + L_t, \\ L_t = \int_0^t \mathbf{n}(X_s) \mathbf{1}_{\partial D}(X_s) d|L|_s, \end{cases} \quad (2.5)$$

其中 $|L|_t$ 为 L 在 $[0, t]$ 上的全变差;

(ii) $A_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t G_n(X_s) ds$ 在有限时间区间关于 t 是一致的, 这里收敛是概率意义下的;

(iii) 存在子列 $\{n_k\}_{k \geq 1}$ 使得 $\sup_{k \geq 1} \int_0^t |G_{n_k}(X_s)| ds < \infty$ a.e. 对于任意 $t > 0$ 成立.

也称漂移项为 μ 的反射 Brown 运动的弱解是反射随机微分方程 (2.5) 的弱解.

定理 2.5 (i) 对于任意 $x \in \bar{D}$, 反射随机微分方程 (2.5) 存在唯一的弱解.

(ii) 记 (X, P_x) 为反射随机微分方程 (2.5) 中初值 $X_0 = x$ 的弱解, 则 $(X, P_x, x \in \bar{D})$ 是一个具有强 Feller 性的 Feller 过程, 且其在 $(0, \infty) \times \bar{D} \times \bar{D}$ 上联合连续转移概率密度 $q(t, x, y)$ 满足: 对 $(t, x, y) \in (0, \infty) \times \bar{D} \times \bar{D}$, 有

$$q(t, x, y) = q_0(t, x, y) + \int_0^t \int_D q_0(t-s, x, z) \langle \nabla_z q(s, z, y), \mu(dz) \rangle ds, \quad (2.6)$$

其中 $q_0(t, x, y)$ 为反射 Brown 运动在 $\bar{D}$ 上的转移概率密度.

(iii) 存在正常数 C_i ($1 \leq i \leq 3$), 使得

$$\begin{aligned} q(t, x, y) &\leq C_1 e^{C_2 t} t^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{C_3 |x-y|^2}{2t}}, \quad \forall (t, x, y) \in (0, \infty) \times \bar{D} \times \bar{D}, \\ |\nabla_x q(t, x, y)| &\leq C_1 e^{C_2 t} t^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{C_3 |x-y|^2}{2t}}, \quad \forall (t, x, y) \in (0, \infty) \times \bar{D} \times \bar{D}. \end{aligned}$$

此外, A 的分量 A^i 和 $|L|$ 均为 X 的连续可加泛函, 其对应的 Revuz 测度分别为 μ^i 和 $\frac{1}{2}\sigma$, 即对于任意 $T > 0$ 和 $[0, T] \times \bar{D}$ 上连续函数 f , 有

$$\begin{aligned} E_x \left[\int_0^T f(s, X_s) dA_s^i \right] &= \int_0^T \int_D q(s, x, y) f(s, y) \mu^i(dy) ds, \quad \forall x \in \bar{D}, \\ E_x \left[\int_0^T f(s, X_s) d|L|_s \right] &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial D} q(s, x, y) f(s, y) \sigma(dy) ds, \quad \forall x \in \bar{D}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中 $1 \leq i \leq d$, σ 是 ∂D 上 $d-1$ 维面测度, E_x 是关于概率 P_x 的期望.

为了说明上述定理, 先构造带测度值漂移系数的反射 Brown 运动的转移概率密度函数. 为此, 先对漂移系数为 G_n 的反射随机微分方程的转移概率密度函数 $q_n(t, x, y)$ 建立一致的 Gauss 型估计, 这里 $n \geq 1$, 并证明 $q_n(t, x, y)$ 满足 (2.6), 其中 $\mu(dz)$ 被 $G_n(z)dz$ 替代. 随后说明 $q_n(t, x, y)$ 和 $\nabla_x q_n(t, x, y)$ 在 $(0, \infty) \times \bar{D} \times \bar{D}$ 的紧集上一致地收敛到 $q(t, x, y)$ 和 $\nabla_x q(t, x, y)$. 之后证明 $p(t, x, y)$ 就是以 μ 为漂移系数的反射 Brown 运动的转移概率密度函数.

令 $\tilde{W} = (\tilde{W}_t)_{t \geq 0}$ 是概率空间 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}_\infty, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}, \tilde{P})$ 上的 d 维 Brown 运动. 根据文献 [32] 知, 对于任意 $n \geq 1$, 下面反射随机微分方程存在唯一的强解 $X^n = (X_t^n)_{t \geq 0}$:

$$\begin{cases} X_t^n = x + \int_0^t G_n(X_s^n) ds + \tilde{W}_t + L_t^n, \\ X_t^n \in \bar{D}, \\ L_t^n = \int_0^t \mathbf{n}(X_s^n) \mathbf{1}_{\partial D}(X_s^n) d|L^n|_s, \end{cases}$$

这里 L^n 是连续适应有界变差过程, $|L^n|_t$ 为 L^n 在 $[0, t]$ 上的全变差.

令 $q_n(t, x, y)$ 为 X^n 的转移概率密度. 观察到 q_n 满足 (参见文献 [33])

$$q_n(t, x, y) = q_0(t, x, y) + \int_0^t \int_D q_0(t-s, x, z) \phi_n(s, z, y) dz ds,$$

其中 $q_0(t, x, y)$ 为 $\bar{D}$ 上的反射 Brown 运动的转移概率密度函数, ϕ_n 满足

$$\phi_n(t, x, y) = \langle G_n(x), \nabla_x q_0(t, x, y) \rangle + \int_0^t \int_D \langle G_n(x), \nabla_x q_0(t-s, x, z) \rangle \phi_n(s, z, y) dz ds. \quad (2.8)$$

定义如下函数列 $\{\Lambda_{n,k}\}_{k \geq 0}$:

$$\begin{aligned} \Lambda_{n,0}(t, x, y) &= q_0(t, x, y), \\ \Lambda_{n,k+1}(t, x, y) &= \int_0^t \int_D q_0(t-s, x, z) \langle \nabla_z \Lambda_{n,k}(s, z, y), G_n(z) \rangle dz ds. \end{aligned}$$

通过对 (2.8) 迭代, 容易看出

$$q_n(t, x, y) = \sum_{k \geq 0} \Lambda_{n,k}(t, x, y). \quad (2.9)$$

另一方面, 利用 $q_0(t, x, y)$ 有 Gauss 类型上界估计 (参见文献 [34, 35]): 存在正常数 C_4 和 C_5 使得对于任意 $t \in (0, 1)$, $x, y \in \bar{D}$, 有

$$\begin{aligned} q_0(t, x, y) &\leq C_4 t^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{C_5 |x-y|^2}{2t}}, \\ |\nabla_x q_0(t, x, y)| &\leq C_4 t^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{C_5 |x-y|^2}{2t}} \end{aligned}$$

和下面重要的不等式 (参见文献 [4, 36]):

引理 2.3 存在 $C_6 > 0$ 使得对于任意 $(t, x, y) \in (0, 1) \times \bar{D} \times \bar{D}$ 和 $n \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_D (t-s)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{C_5 |x-z|^2}{2(t-s)}} \cdot s^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{C_5 |z-y|^2}{4s}} |G_n(z)| dz ds &\leq C_6 t^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{C_5 |x-y|^2}{4t}} N_\mu(t), \\ \int_0^t \int_D (t-s)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{C_5 |x-z|^2}{2(t-s)}} \cdot s^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{C_5 |z-y|^2}{4s}} |\mu|(dz) ds &\leq C_6 t^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{C_5 |x-y|^2}{4t}} N_\mu(t), \\ \int_0^t \int_D (t-s)^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{C_5 |x-z|^2}{2(t-s)}} \cdot s^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{C_5 |z-y|^2}{4s}} |G_n(z)| dz ds &\leq C_6 t^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{C_5 |x-y|^2}{4t}} N_\mu(t), \\ \int_0^t \int_D (t-s)^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{C_5 |x-z|^2}{2(t-s)}} \cdot s^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{C_5 |z-y|^2}{4s}} |\mu|(dz) ds &\leq C_6 t^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{C_5 |x-y|^2}{4t}} N_\mu(t), \end{aligned}$$

其中 $N_\mu(t)$ 是与 μ 有关的常数, 满足 $\lim_{t \rightarrow 0} N_\mu(t) = 0$.

可以得到如下的估计:

引理 2.4 存在常数 $T_1 \in (0, 1)$ 使得对于任意整数 $n \geq 1$, $k \geq 0$, $(t, x, y) \in (0, T_1] \times \bar{D} \times \bar{D}$, $\Lambda_{n,k}(t, x, y)$ 关于 x 可微且有

$$\begin{aligned} \Lambda_{n,k}(t, x, y) &\leq C_4 t^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{C_5 |x-y|^2}{4t}} \cdot 2^{-k}, \\ |\nabla_x \Lambda_{n,k}(t, x, y)| &\leq C_4 t^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{C_5 |x-y|^2}{4t}} \cdot 2^{-k}. \end{aligned}$$

(2.9) 和引理 2.4 表明 q_n 和 $\nabla_x q_n$ 具有如上的上界估计:

命题 2.1 存在正常数 C_7 、 C_8 和 C_9 使得对于任意 $n \geq 1$, $(t, x, y) \in (0, \infty) \times \bar{D} \times \bar{D}$, 有

$$\begin{aligned} q_n(t, x, y) &\leq C_7 e^{C_8 t} t^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{C_9 |x-y|^2}{2t}}, \\ |\nabla_x q_n(t, x, y)| &\leq C_7 e^{C_8 t} t^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{C_9 |x-y|^2}{2t}}, \\ q_n(t, x, y) &= q_0(t, x, y) + \int_0^t \int_D q_0(t-s, x, z) \langle \nabla_z q_n(s, z, y), G_n(z) \rangle dz ds. \end{aligned}$$

现在, 在上述基础上说明 $q_n(t, x, y)$ 和 $\nabla_x q_n(t, x, y)$ 分别在 $(0, \infty) \times \overline{D} \times \overline{D}$ 的紧子集上一致收敛到某个转移概率密度 $q(t, x, y)$ 和 $\nabla_x q(t, x, y)$. 按如下归纳法定义 $\{\Lambda_k\}_{k \geq 0}$:

$$\begin{aligned}\Lambda_0(t, x, y) &= q_0(t, x, y), \\ \Lambda_{k+1}(t, x, y) &= \int_0^t \int_D q_0(t-s, x, z) \langle \nabla_z \Lambda_k(s, z, y), \mu(dz) \rangle ds.\end{aligned}$$

因为 ∂D 光滑, 因此根据文献 [31, 引理 3.2] 可知 $\mu(\partial D) = 0$. 于是, 类似文献 [31, 引理 3.7 和 3.10] 的证明可给出如下引理:

引理 2.5 存在正常数 T_2 , 使得对于任意 $k \geq 1$, $0 < \delta < T_2$, 有

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(t, x, y) \in [\delta, T_2] \times \overline{D} \times \overline{D}} |\Lambda_{n,k}(t, x, y) - \Lambda_k(t, x, y)| &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(t, x, y) \in [\delta, T_2] \times \overline{D} \times \overline{D}} |\nabla_x \Lambda_{n,k}(t, x, y) - \nabla_x \Lambda_k(t, x, y)| &= 0.\end{aligned}$$

按如下方式在 $(0, \infty) \times \overline{D} \times \overline{D}$ 上定义函数 q : 对 $x, y \in \overline{D}$, 如果 $t \in (0, T_2]$, 定义

$$q(t, x, y) = \sum_{k \geq 0} \Lambda_k(t, x, y),$$

如果对某个整数 $m \geq 2$, 有 $t \in (\frac{mT_2}{2}, \frac{(m+1)T_2}{2}]$, 则定义

$$q(t, x, y) = \int_D q\left(t - \frac{(m-1)T_2}{2}, x, z\right) q\left(\frac{(m-1)T_2}{2}, z, y\right) dz.$$

利用引理 2.4、2.5 和命题 2.1 可知, 上面的函数 q 是良定的, 并且有如下定理:

定理 2.6 $q(t, x, y)$ 是一个在 $(0, \infty) \times \overline{D} \times \overline{D}$ 上连续的转移概率密度函数. 对任意 $0 < \delta < T$, 有

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(t, x, y) \in [\delta, T] \times \overline{D} \times \overline{D}} |q_n(t, x, y) - q(t, x, y)| &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(t, x, y) \in [\delta, T] \times \overline{D} \times \overline{D}} |\nabla_x q_n(t, x, y) - \nabla_x q(t, x, y)| &= 0.\end{aligned}$$

此外, 对于任意 $(t, x, y) \in (0, \infty) \times \overline{D} \times \overline{D}$, 有

$$\begin{aligned}q(t, x, y) &\leq C_7 e^{C_8 t} t^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{C_9 |x-y|^2}{2t}}, \\ |\nabla_x q(t, x, y)| &\leq C_7 e^{C_8 t} t^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{C_9 |x-y|^2}{2t}}, \\ q(t, x, y) &= q_0(t, x, y) + \int_0^t \int_D q_0(t-s, x, z) \langle \nabla_z q(s, z, y), \mu(dz) \rangle ds.\end{aligned}$$

得到带测度值漂移系数的反射 Brown 运动的转移概率密度函数后, 给出带测度值漂移系数的反射随机微分方程 (2.5) 弱解的存在性. 通过下面几步来说明弱解存在: 首先说明存在连续 Feller 过程 $(X, P_x, x \in \overline{D})$, 其转移概率密度函数为 $p(t, x, y)$; 接着利用位势理论构造 X 的可加泛函 A 和 L , 其满足性质 (2.7); 最后利用 (2.7) 和 $p_n(t, x, y)$ 一致收敛到 $p(t, x, y)$ 的事实说明 $W_t = X_t - X_0 - A_t - L_t$ ($t \geq 0$) 是 Brown 运动. 因此, 对任意给定的 $x \in \overline{D}$, P_x 是以 μ 为漂移系数的反射 Brown 运动的弱解.

首先利用 Kolmogorov 相容性定理, 很容易知道在 $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ 上存在一族概率测度 $\{P_x\}_{x \in \overline{D}}$ 使得 $q(t, x, y)$ 为其转移概率密度. 特别地, $(\Omega, X, P_x, x \in \overline{D})$ 是一个具有强 Feller 性的 Feller 过程.

令 μ^+ 和 μ^- 分别表示符号测度 μ 的正部和负部, 固定常数 $\lambda > C_8$. 定义

$$\begin{aligned} G_n^+(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi_n(x-y) \mu^+(dy), \quad G_n^-(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_n(x-y) \mu^-(dy), \\ U_n^+(x) &= \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} G_n^+(X_t) dt \right], \quad U_n^-(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} G_n^-(X_t) dt \right], \\ U^+(x) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_D q(t, x, y) \mu^+(dy) dt, \quad U^-(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_D q(t, x, y) \mu^-(dy) dt. \end{aligned}$$

根据引理 2.3 和定理 2.6, 易知 U_n^+ 和 U_n^- 在 $\bar{D}$ 上分别一致收敛到 U^+ 和 U^- . 因此, U^+ 和 U^- 的每个分量都是连续的 λ -位势函数且满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{\lambda, t} |U^+|(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{\lambda, t} |U^-|(x) = 0, \quad \forall x \in \bar{D}.$$

根据 Markov 过程理论可知, 存在连续可加泛函 $A^+ = (A_t^+)_{t \geq 0}$ 和 $A^- = (A_t^-)_{t \geq 0}$ 使得

$$U^+(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} dA_t^+ \right], \quad U^-(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} dA_t^- \right].$$

令 $A_t = A_t^+ - A_t^-$, 则有

$$\sup_{x \in \bar{D}} \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-\lambda s} d|A|_s \right] < \infty,$$

并且由引理 2.1 知 $\int_0^t G_n(X_s) ds$ 在有限时间区间一致收敛到 A_t . 此外, 存在子列 $\{n_k\}_{k \geq 1}$ 使得

$$\sup_{x \in \bar{D}} \mathbb{E}_x \left[\sup_{k \geq 1} \int_0^\infty e^{-\lambda s} |G_{n_k}(X_s)| ds \right] < \infty.$$

令 σ 表示 ∂D 上 $d-1$ 维面测度, 定义

$$V(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{\partial D} e^{-\lambda t} q(t, x, y) \sigma(dy) dt.$$

则 $V(x)$ 也是一个 λ -位势函数, 因此存在正的连续可加泛函 $K = (K_t)_{t \geq 0}$ 使得 $V(x) = \mathbb{E}_x[\int_0^\infty e^{-\lambda t} dK_t]$. 通过计算可知, 可加泛函 K 和 A 满足下面性质:

(1) 对 $T > 0$, 有

$$\mathbb{E}_x[K_T] = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\partial D} q(t, x, y) \sigma(dy) dt; \quad (2.10)$$

(2) 对 $T > 0$, $f \in C([0, T] \times \bar{D})$, 有

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^T f(s, X_s) dK_s \right] = \int_0^T \int_{\partial D} q(s, x, y) f(s, y) \sigma(dy) ds, \quad (2.11)$$

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^T f(s, X_s) dA_s^i \right] = \int_0^T \int_D q(s, x, y) f(s, y) \mu^i(dy) ds, \quad (2.12)$$

其中 A_s^i 是 A_s 的第 i 个分量.

(2.11) 表明, 对 $t \geq 0$, K_t 只有在 $x \in \partial D$ 时增加, 即

$$\int_0^t \mathbf{1}_{\partial D}(X_s) dK_s = K_t, \quad \forall t \geq 0.$$

令 $L_t = \int_0^t \mathbf{n}(X_s) \mathbf{1}_{\partial D}(X_s) dK_s$, 则有

$$|L|(t) = \int_0^t |\mathbf{n}(X_s) \mathbf{1}_{\partial D}(X_s)| dK_s = \int_0^t \mathbf{1}_{\partial D}(X_s) dK_s = K_t,$$

因此

$$L_t = \int_0^t \mathbf{n}(X_s) \mathbf{1}_{\partial D}(X_s) d|L|_s.$$

定义 $W_t = X_t - X_0 - A_t - L_t$. 由于 A 和 L 是连续可加泛函, 易知 W 也是关于 X 的连续可加泛函. 因此利用 Lévy 刻画, 要证明 W 是标准 Brown 运动, 只需要证明对于任意 $1 \leq i, j \leq d$, 有

$$\mathbb{E}_x[W_t^i] = 0 \quad \text{且} \quad \mathbb{E}_x[W_t^i W_t^j] = t \delta_{i,j},$$

其中 W^i 表示 W 的第 i 个分量. 利用过程 X 的 Markov 性以及 (2.11) 和 (2.12) 可知上式自然成立. 因此, 综上所述, $(\Omega, X, \mathbb{P}_x, x \in \bar{D})$ 是漂移系数为 μ 的反射 Brown 运动.

下面说明漂移系数为 μ 的反射 Brown 运动的弱解唯一. 令 $(\Omega, X, \mathbb{P}_x)$ 是漂移系数为 μ 的反射 Brown 运动的弱解, 满足 $X_0 = x$. 令 R_λ 是反射 Brown 运动的预解式, 利用 Itô 公式可知, 对于任意有界可测函数 f 有

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-\lambda s} f(X_s) ds \right] = R_\lambda f(x) + \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-\lambda s} \langle \nabla R_\lambda f(X_s), dA_s \rangle \right]. \quad (2.13)$$

之后与随机微分方程 (2.3) 的弱解唯一性证明类似, 可以得到反射随机微分方程 (2.5) 的弱解唯一性.

3 具有测度值系数的椭圆方程

由上一节的介绍可知, 给定的符号测度 $\mu = (\mu^1, \dots, \mu^d)$ 满足对于任意 $1 \leq i \leq d$, 有 $\mu^i \in \mathbf{K}_{d,1}$, 以及椭圆算子 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Delta + \mu \cdot \nabla$, 则存在一个 Markov 过程 X 与 $\mathcal{L}$ 相联系. 自然地, 会有下面问题: 算子 $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Delta + \mu \cdot \nabla$ 对应的椭圆方程解是否存在唯一, 如果解存在, 是否可以用 Markov 过程 X 来表示?

本节将给出这个问题肯定的回答. 具体地, 分别考虑椭圆算子 $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \Delta + \mu \cdot \nabla + \nu$ 对应的 Dirichlet 边界值问题和 Neumann 边界值问题以及在整个区域 $\mathbb{R}^d$ 上的椭圆方程. 本节的主要结果可参见文献 [2, 3].

3.1 Dirichlet 边界值问题

假定 D 是 $\mathbb{R}^d$ 上的有界区域, 符号测度 μ^i ($1 \leq i \leq d$)、 ν 和 ρ 均属于 $\mathbf{K}_{d,1}$. 本小节主要介绍边界值问题

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = -\rho, & \forall x \in D, \\ u(x)|_{\partial D} = \psi(x), & \forall x \in \partial D \end{cases} \quad (3.1)$$

的弱解的存在唯一性及其概率表示. 首先给出弱解的定义.

定义 3.1 称函数 $u \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ 为 Dirichlet 边界值问题 (3.1) 的弱解, 如果 $\forall \phi \in C_0^\infty(D)$, u 满足

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_D \partial_{x_i} u(x) \partial_{x_i} \phi(x) dx - \sum_{i=1}^d \int_D \partial_{x_i} u(x) \phi(x) \mu^i(dx) - \int_D u(x) \phi(x) \nu(dx) = \int_D \phi(x) \rho(dx),$$

且当 $x \in \partial D$ 时, $u(x) = \phi(x)$.

注 3.1 对于 $1 \leq i \leq d$, 由于 μ^i 、 ν 和 ρ 属于 $K_{d,1}$ 且不关于 Lebesgue 测度绝对连续, 因此不能使用 Soblev 空间 $W^{1,2}(D)$ 中弱解的定义.

与上节一样, 记 $p(t, x, y)$ 是随机微分方程 (2.3) 解 X 的转移概率密度函数. 为了介绍 Dirichlet 边界值问题 (3.1) 弱解的存在唯一性, 先引入下面的概念:

定义 3.2 给定 $\mathbb{R}^d$ 上的符号测度 π , 称关于 X 的连续可加泛函 B_t 与符号测度 π 相对应, 如果

$$B_t = B_t^+ - B_t^-, \quad \forall t > 0,$$

其中 B_t^+ 和 B_t^- 为正连续可加泛函; 对于任意 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $T > 0$ 有

$$\mathbb{E}_x[B_T^+] = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} p(t, x, y) \pi^+(dy) dt \quad \text{且} \quad \mathbb{E}_x[B_T^-] = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} p(t, x, y) \pi^-(dy) dt.$$

利用 Markov 过程理论可知, 对于任意 $\pi \in K_{d,2}$, 存在唯一的连续可加泛函 B_t 与符号测度 π 相对应. 分别记过程 R 和 V 是符号测度 ν 和 ρ 对应的连续可加泛函. τ_D 表示过程 X 首次离开 D 的时刻. 首先给出 Dirichlet 边界值问题 (3.1) 弱解的存在性定理:

定理 3.1 假定 $\partial D \in C^{1,1}$, $\varphi \in C^{1,\alpha_0}(\partial D)$. 若存在 $x_0 \in D$ 使得

$$\mathbb{E}_{x_0}[e^{R_{\tau_D}}] < \infty, \quad (3.2)$$

则 $u(x) = \mathbb{E}_x[e^{R_{\tau_D}} \varphi(X_{\tau_D}) + \int_0^{\tau_D} e^{R_s} dV_s]$ 是 (3.1) 的一个弱解. 此外, $u \in C_b^1(D)$.

假设 $\partial D \in C^{1,1}$ 且 $\varphi \in C^{1,\alpha_0}(\partial D)$, 因为不能使用二次型理论证明上述定理, 一个自然的想法是构造一系列光滑函数收敛到 μ^i ($i = 1, \dots, d$) 和 ρ . 然后利用杀死过程的热核的收敛性证明光滑函数对应的 Dirichlet 边界值问题的解以及解的梯度一致收敛. 为此, 先介绍一些热核的正则性结论.

记 X^D 为 X 在 D 上的杀死过程, $p^D(t, x, y)$ 是 X^D 的转移概率密度函数. 对 $(t, x, y) \in (0, \infty) \times \overline{D} \times \overline{D}$, 当 $y \in \partial D$ 时, 令 $p^D(t, x, y) = 0$, G_n 由 (2.2) 定义, X_t^n 为下面随机微分方程的解:

$$X_t^n = x + W_t + \int_0^t G_n(X_s^n) ds, \quad \mathbb{P}_x\text{-a.e.}$$

令 $p^{n,D}(t, x, y)$ 为 X^n 的杀死过程 $X^{n,D}$ 对应的转移概率密度函数. 由文献 [31] 可知, 存在常数 $c_i > 0$ ($1 \leq i \leq 3$), 使得对于任意 $n \geq 1$, 有

$$|\nabla_x p^D(t, x, y)| \vee |\nabla_x p^{n,D}(t, x, y)| \leq c_1 e^{-c_2 t}, \quad \forall (t, x, y) \in [2, \infty) \times D \times D, \quad (3.3)$$

$$|\nabla_x p^D(t, x, y)| \vee |\nabla_x p^{n,D}(t, x, y)| \leq c_1 t^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{c_3 |x-y|^2}{2t}}, \quad \forall (t, x, y) \in (0, \infty) \times D \times D. \quad (3.4)$$

首先考虑如下边界值问题的弱解:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \Delta \bar{u} + \nabla \bar{u} \cdot \mu = -\rho, & \forall x \in D, \\ \bar{u}(x) |_{\partial D} = \varphi(x), & \forall x \in \partial D. \end{cases} \quad (3.5)$$

回顾 ψ_n 由 (2.1) 定义. 令

$$K_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_n(x-y) \rho(dy), \quad (3.6)$$

τ_D^n 是 X_t^n 首次逃出 D 的时间. 由文献 [15] 知 $\bar{u}_n(x) = E_x[\varphi(X_{\tau_D^n}^n) + \int_0^{\tau_D^n} K_n(X_s^n) ds]$ 是下方程的解:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \Delta \bar{u}_n(x) + \nabla \bar{u}_n(x) \cdot G_n(x) = -K_n(x), & \forall x \in D, \\ \bar{u}_n(x)|_{\partial D} = \varphi(x), & \forall x \in \partial D. \end{cases}$$

利用 X^n 弱收敛到 X 以及 $p^{n,D}$ 收敛到 p^D , 可得 $\bar{u}_n(x)$ 点点收敛到 $\bar{u}(x) = E_x[\varphi(X_{\tau_D}) + V_{\tau_D}]$. 另一方面, 令 u_0 是 D 上的调和函数, 在 ∂D 上等于 φ . 对 $u_0(X_t^n)$ 用 Itô 公式可知

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(x) &= E_x \left[u_0(X_{\tau_D^n}^n) + \int_0^{\tau_D^n} K_n(X_s^n) ds \right] \\ &= u_0(x) + E_x \left[\int_0^{\tau_D^n} \nabla u_0(X_s^n) \cdot G_n(X_s^n) ds + \int_0^{\tau_D^n} K_n(X_s^n) ds \right] \\ &= u_0(x) + \int_0^\infty \int_D p^{n,D}(s, x, y) (\nabla u_0(y) \cdot G_n(y) + K_n(y)) dy ds. \end{aligned}$$

由于 $p^{n,D}$ 和 $\nabla_x p^{n,D}$ 分别一致收敛到 p^D 和 $\nabla_x p^D$, 利用 (3.3) 和 (3.4) 可证明: $\bar{u}_n$ 和 $\nabla_x \bar{u}_n$ 在 D 的内部一致收敛. 因此 $\bar{u}$ 是方程 (3.5) 的解.

现在考虑边界值问题 (3.1) 的弱解的存在性及概率表示. 假设 (3.2) 成立, 利用 X^D 的强 Feller 性和 Kahamiskii 不等式, 有 (参见文献 [10])

$$\sup_{x \in D} E_x[e^{R_{\tau_D}}] < \infty \quad \text{且} \quad \sup_{x \in D} E_x \left[\int_0^{\tau_D} e^{R_s} d|V|_s \right] < \infty.$$

定义

$$u(x) = E_x \left[e^{R_{\tau_D}} \varphi(X_{\tau_D}) + \int_0^{\tau_D} e^{R_s} dV_s \right]. \quad (3.7)$$

由于 R 和 V 是连续可加泛函, X 是强 Markov 过程, 因此有

$$u(x) = E_x \left[\varphi(X_{\tau_D}) + V_{\tau_D} + \int_0^{\tau_D} u(X_t) dR_t \right].$$

注意到, 利用上面的证明可知 $\hat{u}(x) = E_x[\int_0^{\tau_D} u(X_t) dR_t]$ 是如下偏微分方程的解:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \Delta \hat{u} + \nabla \hat{u} \cdot \mu = -u\nu, & \forall x \in D, \\ \hat{u}(x)|_{\partial D} = 0, & \forall x \in \partial D. \end{cases}$$

又因为 $\bar{u}$ 是方程 (3.5) 的弱解, 因此 $u = \bar{u} + \hat{u}$ 是方程 (3.1) 的弱解. 定理 3.1 成立.

现在考虑关于边界 ∂D 和边界函数 φ 更弱的条件下, 方程 (3.1) 弱解的存在性. 首先给出杀死过程 X^D 的转移概率密度函数 $p^D(t, x, y)$ 的正则性估计:

命题 3.1 假定 $\partial D \in C^{1,1}$, $1 \leq i \leq d$, $\mu^i \in K_{d,1-\alpha_0}$. 则对于任意 $t > 0$, $y \in D$, 有 $p^D(t, \cdot, y) \in C^{1,\alpha_0}(\bar{D})$. 存在依赖 μ 的常数 $c_4, c_5 > 0$ 使得对于任意凸子集 $D' \subset D$, $(t, x, y), (t, x', y) \in (0, \infty) \times \bar{D}' \times D$, $1 \leq j \leq d$, 有

$$|\partial_{x_j} p^D(t, x, y) - \partial_{x_j} p^D(t, x', y)| \leq M_{14} |x - x'|^{\alpha_0} t^{-\frac{d+1+\alpha_0}{2}} (e^{-\frac{c_{16}|x-y|^2}{2t}} + e^{-\frac{c_{17}|x'-y|^2}{2t}}). \quad (3.8)$$

令 u 由 (3.7) 定义. 利用上面的热核估计可以得到方程 (3.1) 弱解 u 的全局 C^{1,α_0} 估计.

命题 3.2 假定 $1 \leq i \leq d$, $\mu^i, \nu, \rho \in K_{d,1-\alpha_0}$. 若 $\partial D \in C^{1,1}$, $\varphi \in C^{1,\alpha_0}(\partial D)$ 且存在 $x_0 \in D$ 使得

$$E_{x_0}[e^{R_{\tau_D}}] < \infty,$$

则有 $u \in C^{1,\alpha_0}(\overline{D})$. 此外, 存在常数 $C > 0$ (只依赖 D, d 和 α_0) 使得

$$\|u\|_{C^{1,\alpha_0}(\overline{D})} \leq C(\|\varphi\|_{C^{1,\alpha_0}(\partial D)} + M_\rho^{1-\alpha_0}(R_0) + \|u\|_{C(D)}).$$

记 R_0 是区域 D 的半径. 现在给出方程 (3.1) 弱解的一个局部 C^{1,α_0} 估计.

命题 3.3 假定 $1 \leq i \leq d$, $\mu^i, \nu, \rho \in K_{d,1-\alpha_0}$. 若 $v \in C^{1,\alpha_0}(D)$ 是 (3.1) 的弱解, 则存在正常数 C , 只依赖 $R_0, d, \alpha_0, \max_{1 \leq i \leq d} M_{\mu^i}^{1-\alpha_0}(R_0)$ 和 $M_\nu^{1-\alpha_0}(R_0)$, 使得

$$|v|_{1,\alpha_0;D}^* \leq C(M_\rho^{1-\alpha_0}(R_0) + \|v\|_{C(D)}). \quad (3.9)$$

利用命题 3.2 和 3.3, 可以去掉对边界 ∂D 和边界函数 φ 正则性的限制:

命题 3.4 假定区域 D 满足外锥条件, $\varphi \in C(\partial D)$, 且对 $1 \leq i \leq d$, 有 $\mu^i, \nu, \rho \in K_{d,1-\alpha_0}$. 如果存在 $x_0 \in D$ 使得

$$E_{x_0}[e^{R_{\tau_D}}] < \infty,$$

则 (3.7) 中的 $u \in C^{1,\alpha_0}(D)$ 且 u 是方程 (3.1) 的一个弱解.

最后给出方程 (3.1) 弱解的唯一性. 为了证明该结论, 需要如下引理:

引理 3.1 假定 $1 \leq i \leq d$, $\mu^i, \rho \in K_{d,1}$. 则存在 $r_0 > 0$, 对于任意 $r < r_0$, 边界值问题

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta v + \nabla v \cdot \mu = 0, & \forall x \in B_r, \\ v(x)|_{\partial B_r} = 0, & \forall x \in \partial B_r \end{cases} \quad (3.10)$$

在 $C_b^1(B_r)$ 空间中的弱解唯一, 其中 $B_r = B_{x_0}(r)$.

证明梗概 利用 Laplace 方程解的唯一性可知, 若 $v \in C_b^1(B_r)$ 是方程 (3.10) 的解, 则 v 满足

$$\nabla v(x) = \int_0^\infty \int_{B_r} \nabla_x p_0^{B_r}(s, x, y) \nabla v(y) \cdot \mu(dy) ds,$$

其中 $p_0^{B_r}(s, x, y)$ 是 Brown 运动在小球 B_r 上的杀死过程的转移概率密度函数. 然而当 r 充分小时, 利用 $\nabla_x p_0^{B_r}(s, x, y)$ 的 Gauss 上界估计以及 $K_{d,1}$ 的性质可得

$$\sup_{x \in B_r} \int_0^\infty \int_{B_r} |\nabla_x p_0^{B_r}(s, x, y)| |\mu|(dy) ds \leq \frac{1}{2}.$$

因此 $|\nabla v(x)| = 0$. 继而可知 $|v(x)| = 0$. □

利用引理 3.1 和命题 3.4 可得到方程 (3.1) 弱解的唯一性:

定理 3.2 假定区域 D 满足外锥条件, $\varphi \in C(\partial D)$, 且对 $1 \leq i \leq d$, 有 $\mu^i, \nu, \rho \in K_{d,1-\alpha_0}$. 如果存在 $x_0 \in D$ 使得

$$E_{x_0}[e^{R_{\tau_D}}] < \infty,$$

则 $u(x) = E_x[e^{R_{\tau_D}} \varphi(X_{\tau_D}) + \int_0^{\tau_D} e^{R_s} dV_s]$ 是方程 (3.1) 在 $C^{1,\alpha_0}(D)$ 上唯一的弱解, 且存在 $C_1 > 0$ (只依赖 R_0, d 和 α_0)、 $\max_{1 \leq i \leq d} M_{\mu^i}^{1-\alpha_0}(R_0)$ 和 $M_\nu^{1-\alpha_0}(R_0)$ 使得

$$|u|_{1,\alpha_0;D}^* \leq C_1(M_\rho^{1-\alpha_0}(R_0) + \|u\|_{C(D)}).$$

此外, 如果 $\partial D \in C^{1,1}$, $\varphi \in C^{1,\alpha_0}(\partial D)$, 则 $u \in C^{1,\alpha_0}(\overline{D})$ 且存在常数 $C_2 > 0$ (只依赖 D 、 d 和 α_0)、 $\max_{1 \leq i \leq d} M_{\mu^i}^{1-\alpha_0}(\cdot)$ 和 $M_\nu^{1-\alpha_0}(R_0)$ 使得

$$\|u\|_{C^{1,\alpha_0}(\overline{D})} \leq C_2(\|\varphi\|_{C^{1,\alpha_0}(\partial D)} + M_\rho^{1-\alpha_0}(R_0) + \|u\|_{C(\overline{D})}).$$

3.2 $\mathbb{R}^d$ 上的椭圆方程和 Neumann 边界值问题

回顾椭圆算子 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Delta + \mu \cdot \nabla$, $p(t, x, y)$ 是随机微分方程 (2.3) 弱解 X 的转移概率密度函数, M_5 是定理 2.4 中的常数, 本小节始终假设对于任意 $1 \leq i \leq d$, 有 $\nu, \mu^i \in K_{d,1}$, 常数 $\lambda > M_5$, 考虑如下在 $\mathbb{R}^d$ 上的椭圆方程:

$$\lambda u - \mathcal{L}u = \nu. \quad (3.11)$$

首先给出椭圆方程 (3.11) 的定义:

定义 3.3 称函数 u 是椭圆方程 (3.11) 的弱解, 如果 u 属于 $C^1(\mathbb{R}^d)$, 且对于任意 $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$, 有

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\phi(x)dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u(x) \cdot \nabla \phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \nabla u(x) \cdot \mu(dx) + \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \nu(dx).$$

定义

$$u_\nu(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \int_{\mathbb{R}^d} q(t, x, y) \nu(dy). \quad (3.12)$$

定理 3.3 u_ν 是椭圆方程 (3.11) 的弱解. 进一步, 如果存在常数 $0 < \alpha_0 < 1$ 使得对于任意 $1 \leq i \leq d$, 有 $\nu, \mu^i \in K_{d,1-\alpha_0}$, 则 u_ν 是椭圆方程 (3.11) 在 $C^{1,\alpha_0}(\mathbb{R}^d)$ 中唯一有界的弱解.

现在给出定理 3.3 的证明概要. 在证明方程 (3.11) 弱解的存在性之前, 需要下面的引理:

引理 3.2 假设 $\pi \in K_{d,2}$.

(i) 对于任意 $r > 0$, 有

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y| \geq r} e^{-\delta|x-y|^2} |\pi|(dy) = 0.$$

(ii) 若 $r \geq 3$, 则对于任意正常数 δ , 有

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y| \geq r} e^{-\delta|x-y|^2} |\pi|(dy) &\leq M(\pi) \sum_{k \in \mathbb{Z}^d: |k| \geq 2r-2} e^{-\frac{\delta}{16}|k|^2}, \\ \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\delta|x-y|^2} |\pi|(dy) &\leq M(\pi) e^\delta \left(\sum_{m=-\infty}^\infty e^{-\frac{\delta}{8}m^2} \right)^d, \end{aligned}$$

其中 $M(\pi) = \sup_{z \in \mathbb{R}^d} |\pi|(B(z, 1))$.

有了上面的引理, 很容易看出, 对于任意 $\delta > 0$, $0 < \alpha \leq 2$ 和 $\pi \in K_{d,\alpha}$, 有

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|y-x|^{d-\alpha}} e^{-\delta|x-y|^2} |\pi|(dy) < \infty.$$

因此 u_ν 是良定的 (即 (3.12) 右边是可积的), 且 $u_\nu \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$. 回顾 G_n 和 K_n 分别由 (2.2) 和 (3.6) 定义, X^n 是随机微分方程 (3.10) 的解, $q^n(t, x, y)$ 为 X^n 的转移概率密度函数. 定义

$$u_n(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \int_{\mathbb{R}^d} q^n(t, x, y) K_n(y) dy.$$

对于任意 $r > 0$, 记 τ_r 是过程 X^n 首次离开 $B(0, r)$ 的时刻, 利用 X^n 的强 Markov 性, 可得

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} K_n(X_t^n) dt \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_r} e^{-\lambda t} K_n(X_t^n) dt \right] + \mathbb{E}_x \left[\int_{\tau_r}^\infty e^{-\lambda t} K_n(X_t^n) dt \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\int_0^{\tau_r} e^{-\lambda t} K_n(X_t^n) dt \right] + \mathbb{E}_x [e^{-\lambda \tau_r} u_n(X_{\tau_r}^n)]. \end{aligned}$$

因此利用文献 [26, 定理 4.1] 易知, u_n 是下面偏微分方程的解:

$$\begin{cases} \lambda u_n(x) - \frac{1}{2} \Delta u_n(x) - G_n(x) \cdot \nabla u_n(x) = K_n(x), & \forall x \in B(0, r), \\ u_n(x) |_{\partial B(0, r)} = u_n(x), & \forall x \in \partial B(0, r). \end{cases}$$

另一方面, 由于 p^n 和 $\nabla_x p^n$ 在紧集上分别一致收敛到 p^D 和 $\nabla_x p^D$, 利用引理 3.2, 容易得到 u_n 和 $\nabla_x u_n$ 在紧集上分别一致收敛到 u_ν 和 $\nabla_x u_\nu$. 因此由弱解的定义很容易看出 u_ν 是椭圆方程 (3.11) 的弱解.

接下来证明解的唯一性. 假设对于任意 $1 \leq i \leq d$, 有 $\nu, \mu^i \in K_{d, 1-\alpha_0}$. 利用引理 3.2 可知 $u_\nu \in C^{1, \alpha_0}(\mathbb{R}^d)$. 假设 $u \in C^{1, \alpha_0}(\mathbb{R}^d)$ 是椭圆方程 (3.11) 的另一个有界的弱解. 令 $v = u_\nu - u$, $\tau_{B(0, r)}$ 是过程 X 首次离开 $B(0, r)$ 的时刻, 其中 r 为任意的正常数, 则 v 是下面椭圆方程的弱解:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \Delta v + \nabla v \cdot \mu - \lambda v = 0, & \forall x \in B(0, r), \\ v(x) |_{\partial B(0, r)} = v(x), & \forall x \in \partial B(0, r). \end{cases}$$

由定理 3.2 可知, v 满足 $v(x) = \mathbb{E}_x [e^{-\lambda \tau_{B(0, r)}} v(X_{\tau_{B(0, r)}})]$. 由于 v 是有界函数且 $\lim_{r \rightarrow \infty} \tau_{B(0, r)} = \infty$, 令上式中 $r \rightarrow \infty$, 可得 $v = 0$.

作为独立的兴趣, 可以得到如下 Zvonkin 变换:

定理 3.4 定义 $u(x) = -\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \int_{\mathbb{R}^d} p(t, x, y) \mu(dy)$, 则有

$$u(X_t) = u(x) + \int_0^t \nabla u(X_s) \cdot dW_s + \lambda \int_0^t u(X_s) ds + A_t.$$

对于带有测度值系数的 Neumann 边界值问题, 也有类似的结论, 其证明将在之后的论文里给出. 回顾 $\mathcal{A}u = \frac{1}{2} \Delta u + \nabla u \cdot \mu + u\nu$.

定义 3.4 称函数 $u(x) \in C^1(\overline{D})$ 是下面边界值问题的弱解:

$$\begin{cases} \mathcal{A}u(x) = -\rho, & \forall x \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) = \varphi(x), & \forall x \in \partial D, \end{cases} \quad (3.13)$$

如果 u 满足

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_D \partial_{x_i} u(x) \partial_{x_i} \phi(x) dx - \sum_{i=1}^d \int_D \partial_{x_i} u(x) \phi(x) \mu^i(dx) - \int_D u(x) \phi(x) \nu(dx) \\ &= \int_D \phi(x) \rho(dx) + \int_{\partial D} \varphi(x) \phi(x) \sigma(dx), \quad \forall \phi \in C^\infty(\overline{D}), \end{aligned}$$

这里 σ 是 ∂D 上的 $d-1$ 维面测度.

定理 3.5 假定 D 是有界光滑区域, 对于任意 $1 \leq i \leq d$, 有 $\mu^i, \nu, \rho \in K_{d,1}$. 令 (X, P_x) 是反射随机微分方程 (2.5) 的弱解, V_t 和 R_t 是关于 X 对应的 Revuz 测度分别为 ν 和 ρ 的连续可加泛函. 如果 $\varphi \in C^{1,1}$, 存在 $x_0 \in \bar{D}$ 使得 $E_{x_0}[\int_0^\infty e^{V_t} d|L|_t] < \infty$, 则 Neumann 边界值问题 (3.13) 存在唯一的弱解 u , 并且 u 具有下面的概率表示:

$$u(x) = E_x \left[\int_0^\infty e^{V_t} \varphi(X_t) dL_t \right] + E_x \left[\int_0^\infty e^{V_t} dR_t \right].$$

4 小时间渐近性和大偏差原理

本节的主要结果可参见文献 [5]. 本节始终假设对于任意 $1 \leq i \leq d$, 有 $\mu^i \in K_{d,1}$, 椭圆算子 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Delta + \mu \cdot \nabla$, $p(t, x, y)$ 是随机微分方程 (2.3) 弱解 $(X, P_x, x \in \mathbb{R}^d)$ 的转移概率密度函数. 对于 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $\varepsilon > 0$, 记 ν_ε^x 是过程 $\{X_{\varepsilon t}; t \in [0, 1]\}$ 关于概率 P_x 在路径空间 $C([0, 1], \mathbb{R}^d)$ 上的分布. 定义

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{f}(t)|^2 dt, & \text{如果 } f \text{ 是绝对连续的,} \\ \infty, & \text{其他,} \end{cases}$$

这里 $\dot{f}$ 表示映射 $t \rightarrow f(t)$ 的导数. 首先介绍关于 $\{\nu_\varepsilon^x, \varepsilon > 0\}$ 的大偏差原理.

定理 4.1 对每个给定的 $x \in \mathbb{R}^d$, $\{\nu_\varepsilon^x, \varepsilon > 0\}$ 满足速率函数为 I 的大偏差原理. 即

(i) 对于任意闭子集 $C \subset C([0, 1], \mathbb{R}^d)$, 有

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \nu_\varepsilon^x(C) \leq - \inf_{f \in C(x)} I(f),$$

其中 $C(x) = \{f \in C : f(0) = x\}$;

(ii) 对于任意开子集 $G \subset C([0, 1], \mathbb{R}^d)$, 有

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \nu_\varepsilon^x(G) \geq - \inf_{f \in G(x)} I(f),$$

其中 $G(x) = \{f \in G : f(0) = x\}$.

为了证明定理 4.1, 需要下面的重要估计:

引理 4.1 对于任意 $\lambda > 0$, 有

$$E_x[e^{\lambda \int_0^t |G_n(X_s)| ds}] \leq 2e^{2\lambda^2 t N_t(\mu)^2},$$

其中 $N_t(\mu)$ 是正的常数满足 $\lim_{t \rightarrow 0} N_t(\mu) = 0$.

由文献 [29] 知, 要证明两族概率测度满足相同速率函数的大偏差原理, 只需要证明它们是指数等价的. 故只需证明对于任意 $\delta > 0$, 有

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log P_x \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |A_{\varepsilon t}| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |X_{\varepsilon t} - x - W_{\varepsilon t}| > \delta \right) = -\infty.$$

此时利用引理 4.1 和 Chebyshev 不等式, 有

$$P_x \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |A_{\varepsilon t}| > \delta \right) = P_x \left(\sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} |A_s| > \delta \right) \leq e^{-\lambda \delta} E_x[e^{\lambda \sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} |A_s|}] \leq 2e^{-\lambda \delta} e^{2\lambda^2 \varepsilon N_\varepsilon(\mu)^2}. \quad (4.1)$$

取 $\lambda = \frac{\delta}{4\varepsilon N_\varepsilon(\mu)^2}$, 则

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log P_x \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |A_{\varepsilon t}| > \delta \right) \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\varepsilon \log 2 - \frac{\delta^2}{8N_\varepsilon(\mu)^2} \right) = -\infty.$$

最后给出 Varadhan 的小时间渐近性, 即如下定理:

定理 4.2 假设对任意的 $1 \leq i \leq d$, $\mu^i \in K_{d,1}$, 记 $p(t, x, y)$ 是随机微分方程 (2.3) 弱解的转移概率密度函数. 则有

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \log p(t, x, y) = -\frac{|x - y|^2}{2},$$

并且对任意的 $R > 0$, 上式在集合 F_R 上一致收敛, 其中 $F_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : |x - y| \leq R\}$.

证明 要证明定理 4.2, 只需分别证明

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \log p(t, x, y) \leq -\frac{|x - y|^2}{2}, \quad (4.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \log p(t, x, y) \geq -\frac{|x - y|^2}{2}. \quad (4.3)$$

对于 (4.2), 由文献 [31] 可知

$$p(t, x, y) = \sum_{k \geq 0} I_k(t, x, y), \quad (4.4)$$

其中 $I_0(t, x, y) = p_0(t, x, y)$, $I_{k+1}(t, x, y) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} I_k(t-s, x, z) \nabla_z p_0(s, z, y) \cdot \mu(dz) ds$, $p_0(t, x, y)$ 是标准 Brown 运动的转移概率密度函数. 利用归纳法可以证明, 当 t 充分小时, 对于任意 $\delta \in (0, 1)$, 存在 $C_\delta \in (0, 1)$ 使得

$$I_k(t, x, y) \leq C_\delta^k t^{-\frac{d}{2}} \exp \left(- (1 - \delta) \frac{|x - y|^2}{2t} \right). \quad (4.5)$$

(4.4) 和 (4.5) 可推导出存在

$$p(t, x, y) \leq ct^{-\frac{d}{2}} \exp \left(- (1 - \delta) \frac{|x - y|^2}{2t} \right).$$

因此 (4.2) 成立.

对于 (4.3), 观察到对于任意 $0 < \eta < 1$ 和 $\varepsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} p(t, x, y) &= \int_{\mathbb{R}^d} p((1 - \eta)t, x, z) p(\eta t, z, y) dz \\ &\geq \int_{B(y, \varepsilon)} p((1 - \eta)t, x, z) p(\eta t, z, y) dz \\ &\geq \inf_{z \in B(y, \varepsilon)} p((1 - \eta)t, x, z) P_x(X_{(1 - \eta)t} \in B(y, \varepsilon)). \end{aligned} \quad (4.6)$$

另一方面, 利用 (4.1) 有

$$\begin{aligned} P_x(X_r \in B(y, \varepsilon)) &\geq P_x(W_r + x \in B(y, \varepsilon - \delta)) - P_x(|A_r| \geq \delta) \\ &\geq c_1 r^{-\frac{d}{2}} (\varepsilon - \delta) \exp \left(- \frac{(|x - y| + \varepsilon - \delta)^2}{2r} \right) - 2 \exp \left(- \frac{\delta^2}{8\varepsilon N_\varepsilon(\mu)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

利用 (4.6)、(4.7) 和 $p(t, x, y)$ 具有 Gauss 类型的下界估计, 可以证明 (4.3). 定理 4.2 证毕. $\square$

参考文献

- 1 Bass R F, Chen Z Q. Brownian motion with singular drift. *Ann Probab*, 2003, 31: 791–817
- 2 Yang S S, Zhang T S. Dirichlet boundary value problems for elliptic operators with measure data. *J Differential Equations*, 2021, 303: 42–85
- 3 Yang S S, Wang C, Zhang T S. Elliptic equations associated with Brownian motion with singular drift. *Commun Math Stat*, 2021, doi: 10.1007/s40304-020-00213-8
- 4 Wang C, Yang S S, Zhang T S. Reflected Brownian motion with singular drift. *Bernoulli*, 2021, 27: 866–898
- 5 Chen Z Q, Fang S Z, Zhang T S. Small time asymptotics for Brownian motion with singular drift. *Proc Amer Math Soc*, 2019, 147: 3567–3578
- 6 Zvonkin A K. A transformation of the phase space of a diffusion process that removes the drift. *Math USSR Sb*, 1974, 22: 129–149
- 7 Yang S S, Zhang T S. Strong solutions to reflecting stochastic differential equations with singular drift. *arXiv:2002.12150*, 2020
- 8 Aizenman M, Simon B. Brownian motion and Harnack inequality for Schrödinger operators. *Comm Pure Appl Math*, 1982, 35: 209–273
- 9 Albeverio S, Ma Z M. Additive functionals, nowhere Radon and Kato class smooth measures associated with Dirichlet forms. *Osaka J Math*, 1992, 29: 247–265
- 10 Chung K L, Zhao Z. *From Brownian Motion to Schrödinger's Equation*. Berlin: Springer, 1995
- 11 Kakutani S. Two-dimensional Brownian motion and harmonic functions. *Proc Imp Acad*, 1944, 20: 706–714
- 12 Gerhard W D. The probabilistic solution of the Dirichlet problem for $\frac{1}{2}\Delta + \langle a, \nabla \rangle + b$ with singular coefficients. *J Theoret Probab*, 1992, 5: 503–520
- 13 Peng S. Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations. *Stochastics Stochastic Rep*, 1991, 37: 61–74
- 14 Pardoux E, Peng S. Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations. In: *Stochastic Partial Differential Equations and Their Applications. Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 176. Berlin: Springer, 1992, 200–217
- 15 Chen Z Q, Zhao Z. Diffusion processes and second order elliptic operators with singular coefficients for lower order terms. *Math Ann*, 1995, 302: 323–357
- 16 Chen Z Q, Zhang T S. Time-reversal and elliptic boundary value problems. *Ann Probab*, 2009, 37: 1008–1043
- 17 Zhang T S. A probabilistic approach to Dirichlet problems of semilinear elliptic PDEs with singular coefficients. *Ann Probab*, 2011, 39: 1502–1527
- 18 Yang S S, Zhang T S. Backward stochastic differential equations and Dirichlet problems of semilinear elliptic operators with singular coefficients. *Potential Anal*, 2018, 49: 225–245
- 19 Hsu P. Probabilistic approach to the Neumann problem. *Comm Pure Appl Math*, 1985, 38: 445–472
- 20 Chen Z Q, Zhang T S. A probabilistic approach to mixed boundary value problems for elliptic operators with singular coefficients. *Proc Amer Math Soc*, 2014, 142: 2135–2149
- 21 Yang X, Zhang T S. Mixed boundary value problems of semilinear elliptic PDEs and BSDEs with singular coefficients. *Stochastic Process Appl*, 2014, 124: 2442–2478
- 22 Trudinger N S. Linear elliptic operators with measurable coefficients. *Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci (5)*, 1973, 27: 265–308
- 23 Varadhan S R S. On the behavior of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients. *Comm Pure Appl Math*, 1967, 20: 431–455
- 24 Norris J R. Heat kernel asymptotics and the distance function in Lipschitz Riemannian manifolds. *Acta Math*, 1997, 179: 79–103
- 25 Ariyoshi T, Hino M. Small-time asymptotic estimates in local Dirichlet spaces. *Electron J Probab*, 2005, 10: 1236–1259
- 26 Zhang T S. On the small time asymptotics of diffusion processes on Hilbert spaces. *Ann Probab*, 2000, 28: 537–557
- 27 Hino M, Ramírez J A. Small-time Gaussian behavior of symmetric diffusion semi-groups. *Ann Probab*, 2003, 31: 1254–1295
- 28 Hino M, Matsuura K. An integrated version of Varadhan's asymptotics for lower-order perturbations of strong local Dirichlet forms. *Potential Anal*, 2018, 48: 257–300
- 29 Dembo A, Zeitouni O. *Large Deviations Techniques and Applications*. Berlin-Heidelberg: Springer, 2007
- 30 Blumenthal R M, Gettoor R K. *Markov Processes and Potential Theory*. New York-London: Academic Press, 1968
- 31 Kim P, Song R. Two-sided estimates on the density of Brownian motion with singular drift. *Illinois J Math*, 2006, 50: 635–688
- 32 Lions P L, Sznitman A S. Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions. *Comm Pure Appl*

- Math, 1984, 37: 511–537
- 33 Yang X, Zhang T S. Estimates of heat kernels with Neumann boundary conditions. *Potential Anal*, 2013, 38: 549–572
- 34 Bass R F, Hsu P. Some potential theory for reflecting Brownian motion in Hölder and Lipschitz domains. *Ann Probab*, 1991, 19: 486–508
- 35 Garroni M G, Menaldi J L. Green functions for second order parabolic integro-differential problems. *Pitman Research Notes in Mathematics Series*, vol. 275. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1992
- 36 Zhang Q S. Gaussian bounds for the fundamental solutions of $\nabla(A\nabla u) + B\nabla u - u(t) = 0$. *Manuscripta Math*, 1997, 93: 381–390

Diffusion processes associated with elliptic operators with measure-valued coefficients

Tusheng Zhang, Rong Wei & Saisai Yang

Abstract In this paper, we give a survey on diffusion processes associated with elliptic operators with measure-valued coefficients. We first introduce the existence and uniqueness of Brownian motion and reflected Brownian with measure-valued drifts as well as the Gaussian type estimates of the transition functions. We then study the Dirichlet and Neumann boundary value problems for the associated generators of the diffusion processes and obtain the probabilistic representations for the solutions. we also present the small time asymptotics and large deviations for the Brownian motions with drifts.

Keywords elliptic operator, diffusion process, Kato class, Dirichlet boundary value problem, Neumann boundary value problem, small time asymptotics, large deviation

MSC(2020) 60H10, 60J35, 47D07, 60J60

doi: 10.1360/SSM-2020-0321