与 Schrödinger 算子相关的等价集合及应用

乔蕾

河南财经政法大学数学与信息科学学院, 郑州 450046

E-mail: leiquiao@163.com

收稿日期: 2019-06-21; 接受日期: 2019-12-19; 网络出版日期: 2020-11-13

河南省高等学校青年骨干教师培养计划 (批准号: 2017GGJS085) 和河南财经政法大学青年拔尖人才资助项目

摘要 本文不仅给出了锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关等价集合的定义而且证明了相应的判定准则. 作为应用, 本文得到一个定义在锥中的点列是无穷远点处与 Schrödinger 算子相关等价集合的充要条件.

关键词 Schrödinger 算子 等价集合 锥

MSC (2020) 主题分类 34C25, 34L30, 35J05, 35J10, 35J20

1 引言

在经典位势论中, 与 Laplace 算子相关的等价点列及判定准则在研究定义在无界区域中调和函数和次调和函数边界性质时起到了重要的作用 (参见文献 [1–8]). 受此启发, 本文给出锥形区域中与 Schrödinger 算子相关等价集合的定义, 并建立相应的判定准则. 这将有助于我们对锥形区域中 Schrödinger 方程解和弱解渐近性质的研究并拓展上述定义和判定准则的进一步应用. 为了方便后续的介绍, 我们先叙述以下相关的基本记号和概念.

设 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}_+$ 分别表示所有实数和正实数组成的集合. $\mathbb{R}^n$ 是 n - 维 Euclid 空间, 其中 $n \geq 2$. 记 $P = (X, y) \in \mathbb{R}^n$, 其中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. $|P - Q|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中两点 P 和 Q 的 Euclid 距离. 特别地, $|P - O|$ 表示 P 到 $\mathbb{R}^n$ 中原点 O 的距离, 简记为 $|P|$. $B(P, r)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中以 $P (\in \mathbb{R}^n)$ 为球心、 $r (> 0)$ 为半径的开球.

如果集合 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则 ∂E 表示 E 的边界, $\bar{E}$ 表示 E 的闭包, $\text{int} E$ 表示 E 的内部, $\text{diam} E$ 表示 E 的直径. 如果集合 $E_1 \subset \mathbb{R}^n$ 且 $E_2 \subset \mathbb{R}^n$, 则 $\text{dist}(E_1, E_2)$ 表示集合 E_1 与 E_2 的距离.

引入球面坐标系 $(r, \Theta) \in \mathbb{R}^n$, 其中 $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$, 它与 Descartes 坐标 (X, y) 相对应, 记为

$$x_1 = r \left(\prod_{j=1}^{n-1} \sin \theta_j \right) \quad (n \geq 2), \quad y = r \cos \theta_1,$$

英文引用格式: Qiao L. Equivalent sets with respect to the Schrödinger operator and their application (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 685–696, doi: 10.1360/N012019-00162

且如果 $n \geq 3$, 则

$$x_{n-k+1} = r \left(\prod_{j=1}^{k-1} \sin \theta_j \right) \cos \theta_k \quad (2 \leq k \leq n-1),$$

其中 $0 \leq r < +\infty$, $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta_{n-1} < \frac{3}{2}\pi$, 且如果 $n \geq 3$, 则 $0 \leq \theta_j \leq \pi$ ($1 \leq j \leq n-2$).

分别记 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球和上半单位球为 $\mathbb{S}^{n-1}$ 和 $\mathbb{S}_+^{n-1}$. 为了方便起见, $(1, \Theta) \in \mathbb{S}^{n-1}$ 被记为 Θ . $\{\Theta; (1, \Theta) \in \Omega \subset \mathbb{S}^{n-1}\}$ 被记为 Ω . 如果 $\Xi \subset \mathbb{R}_+$ 且 $\Omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$, 则 $\{(r, \Theta) \in \mathbb{R}^n; r \in \Xi, (1, \Theta) \in \Omega\}$ 被简记为 $\Xi \times \Omega$. 锥 $C_n(\Omega) = \mathbb{R}_+ \times \Omega$, 其中 $\Omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$. 如果 $\Omega = \mathbb{S}_+^{n-1}$, 则 T_n 是一个特殊的锥.

记 $[c]$ 表示对实数 c 进行取整运算. 对于两个正函数 h_1 和 h_2 , $h_1 \lesssim h_2$ 表示存在一个正常数 c , 使得 $h_1 \leq ch_2$. 若 $h_1 \lesssim h_2$ 且 $h_2 \lesssim h_1$, 则称 $h_1 \approx h_2$.

定义 1 对于任意的 $P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega)$, 有 $0 \leq a(P) = a(r)$, 使得 $a \in L_{\text{loc}}^b(C_n(\Omega))$, 其中当 $n \geq 4$ 时, $b > n/2$; 当 $n = 2$ 或 $n = 3$ 时, $b = 2$. 将锥中满足上述条件的非负径向位势 $a(P)$ ($P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega)$) 的全体组成的集合记为 $\mathcal{A}_a$.

若记 Δ_n 是 Laplace 算子且 I 是恒等算子, 则锥中稳态的 Schrödinger 算子可定义为 $\text{Sch}_a = -\Delta_n + a(P)I$ (参见文献 [9, 第 323 页]), 其中 $P \in C_n(\Omega)$ 且 $a \in \mathcal{A}_a$. 该算子可以按通常的方法从 $C_0^\infty(C_n(\Omega))$ 空间延拓到 $L^2(C_n(\Omega))$ 空间上的自伴算子 (参见文献 [9, 第 326 页]), 记其为 Schrödinger 算子. 后者在锥中的 Green 函数, 记为 $G_\Omega^a(\cdot, \cdot)$, 称其为 Green-Sch 函数. 由文献 [9, 第 345 页] 知, $G_\Omega^a(\cdot, \cdot)$ 在 D 上为正且其内法向导数 $\partial G_\Omega^a(P, Q)/\partial n_Q \geq 0$, 其中 $\partial/\partial n_Q$ 是在 Q 点沿着指向 $C_n(\Omega)$ 的内法线的方向导数. 关于 $G_\Omega^a(\cdot, \cdot)$ 性质的研究及相关的应用, 可参见文献 [10–15].

将 $\frac{1}{s_n} \frac{\partial G_\Omega^a(P, Q)}{\partial n_Q}$ 称为锥中的 Poisson-Sch 核, 记为 $\text{PI}_\Omega^a(P, Q)$, 其中

$$s_n = \begin{cases} 2\pi, & n = 2, \\ (n-2)w_n, & n \geq 3. \end{cases}$$

定义 2 如果定义锥中的函数 u 同时满足下面 3 条性质, 则称 u 是锥中与 Schrödinger 算子相关的次调和函数, 简称为次函数 (参见文献 [9, 第 327 页, 定义 11.2.1]).

- (1) $u \not\equiv -\infty$ 是区域锥中的上半连续函数;
- (2) $u \in [-\infty, \infty)$;
- (3) 对于任意的点 $P \in C_n(\Omega)$, 有

$$u(P) \leq \int_{\partial B(P, r)} u(Q) \frac{\partial G_{B(P, r)}^a(P, Q)}{\partial n_Q} d\sigma(Q),$$

其中 $0 < r < r(P)$, $G_{B(P, r)}^a(P, Q)$ 是定义在 $B(P, r)$ 的 Green-Sch 函数且 $d\sigma(Q)$ 是在球面 $\partial B(P, r)$ 的曲面测度. 关于次函数更多的性质, 可参见文献 [9, 第 327–329 页, 定理 11.2.2]. 若 $-u$ 是次函数, 则称 u 是超函数. 若 u 既是次函数又是超函数, 则称 u 是与 Schrödinger 算子相关的调和函数, 简称为广义调和函数.

注 1 当 $a = 0$ 时, 定义 2 中的次函数、超函数和广义调和函数分别为 Riesz 定义的次调和函数、上调和函数和调和函数 (参见文献 [16, 第 119 页]).

设 $\Omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$ 有光滑的边界. 考虑 Dirichlet 问题 (参见文献 [17] 和 [18, 第 41 页])

$$\begin{aligned} (\Lambda_n + \lambda)\varphi &= 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \varphi &= 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \end{aligned}$$

其中 Λ_n 是 Δ_n 的球面部分 (参见文献 [7, 8]), Δ_n 的定义如下:

$$\Delta_n = \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\Lambda_n}{r^2}.$$

记上述边界值问题的最小特征值为 λ , 与其相对应正规化后正的特征函数为 $\varphi(\Theta)$,

$$\int_{\Omega} \varphi^2(\Theta) d\sigma_{\Theta} = 1,$$

其中 $d\sigma_{\Theta}$ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的曲面面积元素.

为了方便起见, 我们假定, 如果 $n \geq 3$, 则 $\Omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$ 是 $C^{2,\varsigma}$ -区域 ($0 < \varsigma < 1$), 它能被有穷个互不相交的闭超曲面所覆盖 (关于 $C^{2,\varsigma}$ -区域的定义, 可参见文献 [19, 第 88 和 89 页]).

对于任意的 $P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega)$, 令

$$\delta(\Omega, P) = \inf_{Q \notin C_n(\Omega)} |P - Q|.$$

若 $P = (1, \Theta) \in \Omega$, 则有 (参见文献 [20])

$$\delta(\Omega, P) \approx \varphi(\Theta). \quad (1.1)$$

设 $E \subset C_n(\Omega)$ 且 $\tau \in (0, 1)$, 定义

$$E(\Omega, \tau) = \bigcup_{P \in E} B(P, \tau \delta(\Omega, P)).$$

若 $a \in \mathcal{A}_a$, 则微分方程 (参见文献 [21])

$$-Q''(r) - \frac{n-1}{r} Q'(r) + \left(\frac{\lambda}{r^2} + a(r) \right) Q(r) = 0, \quad 0 < r < \infty \quad (1.2)$$

有一组正基础解系 $\{V, W\}$, 使得 V 是非减函数, 满足 (参见文献 [9, 11])

$$0 \leq V(0+) \leq V(r) \nearrow \infty, \quad \text{当 } r \rightarrow +\infty,$$

且 W 是单调减函数, 满足

$$+\infty = W(0+) > W(r) \searrow 0, \quad \text{当 } r \rightarrow +\infty.$$

定义 3 若 $a \in \mathcal{A}_a$, $\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 a(r) = k \in [0, \infty)$ 且 $r^{-1} |r^2 a(r) - k| \in L(1, \infty)$, 则将满足上述条件的位势 a 的全体组成的集合记为 $\mathcal{B}_a$.

注 2 若 $a \in \mathcal{B}_a$, 则次 (超) 函数连续 (参见文献 [22]). 若无特殊说明, 本文此后一直假定 $a \in \mathcal{B}_a$. 若令

$$\iota_k^{\pm} = \frac{2 - n \pm \sqrt{(n-2)^2 + 4(k+\lambda)}}{2},$$

则方程 (1.2) 的解 V 和 W 具有下列渐近性质 (参见文献 [9, 19]):

$$V(r) \approx r^{\iota_k^+}, \quad W(r) \approx r^{\iota_k^-}, \quad \text{当 } r \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

若 $a = 0$ 且 $\Omega = \mathbb{S}_+^{n-1}$, 则 $\iota_0^+ = 1$, $\iota_0^- = 1 - n$ 且 $\varphi(\Theta) = (2ns_n^{-1})^{1/2} \cos \theta_1$, 其中 s_n 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的曲面面积 $2\pi^{n/2} \{\Gamma(n/2)\}^{-1}$.

由文献 [23, 第 208 页] 知, 锥的 Martin 边界是 $\partial C_n(\Omega) \cup \{\infty\}$. 对于任意的 $P \in C_n(\Omega)$ 和 $Q \in \partial C_n(\Omega) \cup \{\infty\}$, 与 Schrödinger 算子相关的 Martin 函数称为 Martin-Sch 函数, 简记为 $M_\Omega^a(P, Q)$. 若参照点 $P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega)$ 选择适当, 则有 (参见文献 [13])

$$M_\Omega^a(P, \infty) = V(r)\varphi(\Theta).$$

注 3 若 $a = 0$, 则 $M_\Omega^0(P, \infty) = r\varphi(\Theta)$, 其中 $P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega)$. 若 $a = 0$ 且 $\Omega = \mathbb{S}_+^{n-1}$, 则 $M_{\mathbb{S}_+^{n-1}}^0(P, \infty)$ 即为 Riesz 定义的半空间中 (与 Laplace 算子相关) 的 Martin 函数且 $M_{\mathbb{S}_+^{n-1}}^0(P, \infty) = y$, 其中 $P = (X, y) \in T_n$ (详见文献 [24]).

定义 4 设 $\hat{R}_{M_\Omega^a(\cdot, Q)}^H$ 是 $M_\Omega^a(\cdot, Q)$ 关于集合 $H (\subset C_n(\Omega))$ 的正则约化函数. 若存在点 $P \in C_n(\Omega)$, 使得 (参见文献 [25, 定理 1.2.7])

$$\hat{R}_{M_\Omega^a(\cdot, Q)}^H(P) \neq M_\Omega^a(P, Q),$$

则称锥中集合 $H (\subset C_n(\Omega))$ 是在点 $Q \in \partial C_n(\Omega) \cup \{\infty\}$ 处与 Schrödinger 算子相关的极细集.

在经典位势理论中, 为研究半空间中调和函数的边界性质, Beurling 给出了无穷远点处与 Laplace 算子相关的等价点列的定义和相应的判定准则 (参见文献 [1, 定理 2.1]).

定义 5 设 $h(X, y)$ 是定义在 T_n 中的正调和函数, $\{P_m\}$ 是定义在 T_n 中的点列且满足

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |P_m| = +\infty,$$

其中 $P_m = (X_m, y_m) \in T_n$. 若

$$\inf_{(X, y) \in T_n} \frac{h(X, y)}{y} = \inf_m \frac{h(P_m)}{y_m},$$

则称点列 $\{P_m\}$ 是无穷远点处与 Laplace 算子相关的等价点列.

定理 1 设 $\{P_m\}$ 是定义在 T_n 中的点列, $P_m = (r_m, \Theta_m)$, $\Theta_m = (\theta_{1m}, \theta_{2m}, \dots, \theta_{(n-1)m})$ 且满足 $cr_m \leq r_{m+1}$, 其中 $c > 1$, 则点列 $\{P_m\}$ 是无穷远点处与 Laplace 算子相关的等价点列当且仅当

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\cos \theta_{1,m})^n = +\infty.$$

2001 年, Armitage 和 Gardiner 将定义 1 中的点列推广到集合, 给出了无穷远点处与 Laplace 算子相关的等价集合的定义 (参见文献 [5, 定义 5.1.4]).

定义 6 设 $h(X, y)$ 是定义在 T_n 中的正调和函数且 $E \subset T_n$. 若

$$\inf_{(X, y) \in T_n} \frac{h(X, y)}{y} = \inf_{(X, y) \in E} \frac{h(X, y)}{y},$$

则称集合 E 是无穷远点处与 Laplace 算子相关的等价集合.

相应的判定准则 (参见文献 [5, 定理 6.3.7]) 如下.

定理 2 设 $E \subset T_n$, 则下列结论等价.

- (1) 集合 E 是无穷远点处与 Laplace 算子相关的等价集合;
- (2) 对任意 $\tau \in (0, 1)$, 有

$$\int_{E(\mathbb{S}_+^{n-1}, \tau)} (1 + |P|)^{-n} dP = +\infty; \quad (1.4)$$

- (3) 存在 $\tau \in (0, 1)$, 使得 (1.4) 成立.

受到以上结论的启发, 本文作者很自然地想到下面的问题:

(I) 上述定义和结论在锥中是否成立?

(II) 针对 Schrödinger 算子和广义的调和函数是否有类似的定义和结论?

众所周知, 半空间是一个特殊的锥形区域. 半空间有一个光滑的边界且没有隅角, 而锥中边界有隅角存在. 半空间中的 Green 函数具备清晰的表达式, 而锥中的 Green 函数只是一个记号, 仅仅其边界性质是已知的. 同时, 由于算子从 Laplace 算子到 Schrödinger 算子的变化, 这些都造成在半空间中处理调和函数的方法无法使用于在锥中处理广义调和函数.

本文将致力于解决上述两个问题. 本文剩余部分的结构如下: 第 2 节给出本文的主要结论. 第 3 节证明锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关极细集的一个新的性质. 第 4 节证明基础的判定准则. 第 5 节给出主要结论的证明. 第 6 节给出主要结论的应用.

2 主要结论

受定义 5 和 6 的启发, 利用文献 [26] 中所定义的 Martin-Sch 函数, 首先给出无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的等价集合的定义.

定义 7 设 h 是定义在锥中正的广义调和函数且 $E \subset C_n(\Omega)$. 若

$$\inf_{P \in C_n(\Omega)} \frac{h(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)} = \inf_{P \in E} \frac{h(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)},$$

则称集合 E 是无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的等价集合.

注 4 当 $a = 0$ 且 $\Omega = \mathbb{S}_+^{n-1}$ 时, 由注 1 和 3 可知, 定义 7 即为定义 6.

接着, 应用文献 [26] 中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的极细集的判定准则来得到等价集合的判定准则.

定理 3 设 $E \subset C_n(\Omega)$, 则下面结论等价.

- (1) 集合 E 是无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的等价集合;
- (2) 对任意 $\tau \in (0, 1)$, 有

$$\int_{E(\Omega, \tau)} V(1 + |P|)W(1 + |P|)(1 + |P|)^{-2} dP = +\infty; \quad (2.1)$$

- (3) 存在 $\tau \in (0, 1)$, 使得 (2.1) 成立.

若 $a = 0$, 则由文献 [26, (1.3)] 可知下面的结论将定理 2 推广到了锥中.

推论 1 设 $E \subset C_n(\Omega)$, 则下列结论等价.

- (1) 集合 E 是无穷远点处与 Laplace 算子相关的等价集合;
- (2) 对任意 $\tau \in (0, 1)$, 有

$$\int_{E(\Omega, \tau)} (1 + |P|)^{-n} dP = +\infty; \quad (2.2)$$

- (3) 存在 $\tau \in (0, 1)$, 使得 (2.2) 成立.

3 极细集及性质

本节将证明锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关极细集的一个新的性质. 为此, 我们需要下面的引理.

引理 1 (参见文献 [9, 第 350 页, 推论 11.4.4]) 锥中 Poisson-Sch 核 $PI_\Omega^a(P, Q)$ 的增长性质如下:

$$PI_\Omega^a(P, Q) \lesssim t^{-1}V(t)W(r)\varphi(\Theta)\frac{\partial\varphi(\Phi)}{\partial n_\Phi} \quad (3.1)$$

$$\left(\text{或者 } PI_\Omega^a(P, Q) \lesssim t^{-1}V(r)W(t)\varphi(\Theta)\frac{\partial\varphi(\Phi)}{\partial n_\Phi} \right), \quad (3.2)$$

其中 $P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega)$ 且 $Q = (t, \Phi) \in C_n(\Omega)$ 满足 $r \geq 2t$ (或者 $t \geq 2r$).

下面的引理是关于锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关极细集的性质, 详见文献 [25, 定理 4.2.2] 和 [27, 定理 2].

引理 2 设 E 是锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的极细集, 则

$$\int_E V(1+|P|)W(1+|P|)(1+|P|)^{-2}dP < +\infty. \quad (3.3)$$

记 S_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 是具有下列形式的 Whitney (闭) 立方体 (参见文献 [28, 29]):

$$[l_1 2^{-k}, (l_1 + 1) 2^{-k}] \times \dots \times [l_n 2^{-k}, (l_n + 1) 2^{-k}],$$

其中 $l_1, l_2, \dots, l_n$ 为整数.

设 $\tau \in (0, \frac{1}{2}]$. 从 $\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} S_k$ 中选取 Whitney 立方体组成的方体族 $\{Z_i\}_{i \geq 1}$, 若族中的方体满足下列性质 (参见文献 [29, 第 16 页和第 168 页, 定理 1]):

- (1) $\bigcup_i Z_i = C_n(\Omega)$;
- (2) $\text{int} Z_i \cap \text{int} Z_j = \emptyset$ ($i \neq j$);
- (3) $[8/3\tau] \text{diam}(Z_i) \leq \text{dist}(Z_i, \mathbb{R}^n \setminus C_n(\Omega)) \leq 2([8/3\tau] + 1) \text{diam}(Z_i)$,

则称 $\{Z_i\}_{i \geq 1}$ 为锥中关于 τ 的 Whitney 立方体族.

下面的引理是关于锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关极细集的判定准则 (参见文献 [25, 定理 4.2.3]).

引理 3 设锥中的集合 E 是 Whitney 立方体的并而这些立方体属于锥中关于 τ 的 Whitney 立方体族. 若 (3.3) 成立, 则集合 E 是锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的极细集.

引理 4 设 $E \subset C_n(\Omega)$ 且 $\{Z_i\}_{i \geq 1}$ 为锥中关于 $\tau \in (0, \frac{1}{2}]$ 的 Whitney 立方体族, 则存在 $\{Z_i\}_{i \geq 1}$ 的子族 $\{Z_{i_j}\}_{j \geq 1}$, 使得

- (1) $\bigcup_j Z_{i_j} \subset E(\Omega, \tau)$;
- (2) $Z_{i_j} \cap E(\Omega, \tau/4) \neq \emptyset$ ($j = 1, 2, \dots$) 且 $E(\Omega, \tau/4) \subset \bigcup_j Z_{i_j}$.

证明 令 k 为整数. 令 $A = [\frac{8}{3\tau}] + 1$ 并定义集合

$$I_k = \left\{ P \in C_n(\Omega) : \frac{A\sqrt{n}}{2^k} < \text{dist}(P, \partial C_n(\Omega)) \leq \frac{A\sqrt{n}}{2^{k-1}} \right\}.$$

设 $\{Z_{i_j}\}_{j \geq 1}$ 为 $\{Z_i\}_{i \geq 1}$ 的子族且满足 $Z_{i_j} \cap E(\Omega, \frac{\tau}{4}) \neq \emptyset$ ($j = 1, 2, \dots$), 则可知性质 (2) 成立. 下面来证明性质 (1) 成立.

任取 Z_{i_j} ($j = 1, 2, \dots$). 因为 $Z_{i_j} \cap E(\Omega, \tau/4) \neq \emptyset$, 故存在 $P_j \in E$, 使得

$$B\left(P_j, \frac{\tau}{4}\delta(\Omega, P_j)\right) \cap Z_{i_j} \neq \emptyset. \quad (3.4)$$

若存在一点 $P \in I_m$, 使得 $Z_{i_j} \cap B(P, (\tau/4)\delta(\Omega, P_j)) \neq \emptyset$, 则 $Z_{i_j} \in S_{m+1} \cup S_m \cup S_{m-1}$. 若存在整数 k 满足 $Z_{i_j} \in S_k$, 则必有 $P_j \in I_{k-1} \cup I_k \cup I_{k+1}$. 若 $P_j \in I_{k+1}$, 则

$$\frac{3}{4}\tau\delta(\Omega, P_j) > \frac{3}{4}\tau\frac{A\sqrt{n}}{2^{k+1}} > \frac{\sqrt{n}}{2^k}.$$

又因为 $\text{diam}(Z_{i_j}) = \sqrt{n}/2^k$, 故由 (3.4) 知 $Z_{i_j} \subset B(P_j, \tau\delta(\Omega, P_j))$, 从而可得

$$Z_{i_j} \subset E(\Omega, \tau). \quad (3.5)$$

当 $P_j \in I_k$ 或者 $P_j \in I_{k+1}$ 时, 也可知 (3.5) 成立. 从而可知性质 (1) 成立. $\square$

定理 4 设 $0 < \tau < 1$, $E \subset C_n(\Omega)$ 且 $\bar{E} \cap \partial C_n(\Omega) = \emptyset$. 若 $E(\Omega, \tau)$ 是锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的极细集, 则存在定义在锥中正的广义调和函数 $h(P)$, 使得

$$\inf_{P \in C_n(\Omega)} \frac{h(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)} < \inf_{P \in E} \frac{h(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)}.$$

证明 若 E 为锥中的有界子集, 则 $h(P)$ 为常数即可. 下面假定 E 为无界.

设点 P_j 为引理 4 中所定义的 Whitney 立方体 Z_{i_j} 的中心点, 则由集合 E 的定义可知, 点列 $\{P_j\}$ 不可能收敛于锥中有限的边界点, 故 $|P_j| \rightarrow \infty$ ($j \rightarrow +\infty$). 由引理 4(1) 可知 $P_j \in E(\Omega, \tau)$.

又因为 $E(\Omega, \tau)$ 是锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的极细集, 故可得

$$\int_{Z_{i_j}} V(1 + |P|)W(1 + |P|)(1 + |P|)^{-2}dP \approx V\left(\frac{|P_j|}{\delta(\Omega, P_j)}\right)W\left(\frac{|P_j|}{\delta(\Omega, P_j)}\right)\left(\frac{\delta(\Omega, P_j)}{|P_j|}\right)^2,$$

其中 $j = 1, 2, \dots$

由引理 2 和 4(1) 知,

$$\sum_{j=1}^{\infty} V\left(\frac{|P_j|}{\delta(\Omega, P_j)}\right)W\left(\frac{|P_j|}{\delta(\Omega, P_j)}\right)\left(\frac{\delta(\Omega, P_j)}{|P_j|}\right)^2 < +\infty. \quad (3.6)$$

故存在正整数 J , 使得对于任意的 $j \geq J$, 都有 $|P_j| \geq 2\delta(\Omega, P_j)$. 取 $Q_j = (t_j, \Phi_j) \in \partial C_n(\Omega) \setminus \{O\}$ 满足 $|P_j - Q_j| = \delta(\Omega, P_j)$, 其中 $j = J, J+1, \dots$. 注意到 $2|Q_j| \geq |P_j|$, 故 $|Q_j| \rightarrow +\infty$ ($j \rightarrow +\infty$).

设 $P \in C_n(\Omega)$, 定义

$$h_1(P) = \sum_{j=J}^{\infty} \frac{\text{PI}_\Omega^a(P, Q_j)V(|P_j|)(\delta(\Omega, P_j))^2}{|P_j|V(\delta(\Omega, P_j))W(\delta(\Omega, P_j))},$$

则由 (3.2) 可知 $h_1(P)$ 是定义在锥中正的广义调和函数.

为了便于读者的阅读, 我们将证明分为 4 步.

第 1 步 证明

$$\inf_{P \in E} \frac{h_1(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)} > 0. \quad (3.7)$$

设 $B_j = B(P_j, \delta(\Omega, P_j))$. 对于任意的 $P \in B_j$ 和 $Q \in \partial B_j$, 定义球 B_j 中的 Poisson-Sch 核为

$$\text{PI}_j^a(P, Q) = \frac{\partial G_{B_j}^a(P, Q)}{\partial n_Q},$$

则 $\text{PI}_\Omega^a(P, Q_j) \geq \text{PI}_j^a(P, Q_j)$, 其中 $P \in B_j$ 且 $j = J, J+1, \dots$ 从而可得

$$\text{PI}_\Omega^a(P_j, Q_j) \geq \text{PI}_j^a(P, Q_j) \gtrsim \frac{V(\delta(\Omega, P_j))W(\delta(\Omega, P_j))}{\delta(\Omega, P_j)},$$

其中 $j = J, J+1, \dots$

由 (1.1) 和文献 [26, (1.3)] 可得

$$h_1(P_j) \geq \frac{\text{PI}_\Omega^a(P_j, Q_j)V(|P_j|)(\delta(\Omega, P_j))^2}{|P_j|V(\delta(\Omega, P_j))W(\delta(\Omega, P_j))} \gtrsim M_\Omega^a(P_j, \infty), \quad (3.8)$$

其中 $j = J, J+1, \dots$

任取 $P \in E$. 由引理 4(2) 可知, 存在点 P_j , 使得

$$|P - P_j| < \frac{1}{2} \text{diam}(Z_{i_j}) \leq B\delta(\Omega, P_j),$$

其中 $B = \frac{1}{2}[\frac{8}{3\tau}]^{-1}$.

再由 Harnack-Sch 不等式 (参见文献 [9, 第 11 章, 定理 11.4]), 得

$$h_1(P) \geq \frac{1-B}{(1+B)^{n-1}} h_1(P_j), \quad (3.9)$$

$$M_\Omega^a(P, \infty) \leq \frac{1+B}{(1-B)^{n-1}} M_\Omega^a(P_j, \infty). \quad (3.10)$$

由 (3.8)–(3.10) 可知 (3.7) 成立.

第 2 步 令

$$g_j(P) = \frac{\text{PI}_\Omega^a(P, Q_j)}{M_\Omega^a(P, \infty)} \frac{|P_j|}{W(|P_j|)},$$

其中 $P \in C_n(\Omega)$ 且 $j = J, J+1, \dots$ 设 L 是锥中以 O 为起点的任意射线, 下面证明

$$|g_j(P)| \leq M, \quad (3.11)$$

其中 $P \in L$, $j = J, J+1, \dots$ 且 M 是与 j 无关的常数.

对于任意的 $P = (r, \Theta) \in C_n(\Omega)$ 且 $j = J, J+1, \dots$, 当 $t_j \geq 2r$ 和 $r \geq 2t_j$ 时, 分别由 (3.1) 和 (3.2) 可知 (3.11) 成立.

因为 $u^{n-2}G_\Omega^a((uR_1, \Theta_1), (uR_2, \Theta_2)) = G_\Omega^a((R_1, \Theta_1), (R_2, \Theta_2))$, 其中 $(R_1, \Theta_1), (R_2, \Theta_2) \in C_n(\Omega)$, 故令 $R_1 = r/t_j$, $u = t_j$ 且 $\Theta_1 = \Theta$, 并当 (R_2, Θ_2) 沿着内法线方向趋于 $(1, \Phi_j)$ 时, 可得

$$\text{PI}_\Omega^a(P, Q_j) = \frac{V(t_j)W(t_j)}{t_j} \frac{G_\Omega^a((\frac{r}{t_j}, \Theta), (1, \Phi_j))}{\partial n_{Q_j}}.$$

从而对于任意的 $P = (r, \Theta) \in L$ 且 $j = J, J+1, \dots$, 当 $\frac{1}{2}t_j \leq r \leq 2t_j$ 时, 存在常数 M' , 使得

$$t_j \text{PI}_\Omega^a(P, Q_j) \leq M'V(t_j)W(t_j),$$

从而再由文献 [26, (1.3)] 可得 (3.11) 成立.

第 3 步 证明

$$\lim_{|P| \rightarrow +\infty, P \in L} \frac{h_1(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)} = 0. \quad (3.12)$$

由第 2 步中 $g_j(P)$ 的定义可得

$$\frac{h_1(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)} = \sum_{j=J}^{\infty} g_j(P) V\left(\frac{|P_j|}{\delta(\Omega, P_j)}\right) W\left(\frac{|P_j|}{\delta(\Omega, P_j)}\right) \left(\frac{\delta(\Omega, P_j)}{|P_j|}\right)^2 \quad (3.13)$$

且对于任意的 $j (\geq J)$, 有

$$\lim_{|P| \rightarrow +\infty, P \in L} g_j(P) = 0. \quad (3.14)$$

再由 (3.6)、(3.13)、(3.14) 和 Lebesgue 控制收敛定理得 (3.12) 成立.

第 4 步 设 $\gamma = \max_{1 \leq j < J} M_\Omega^a(P_j, \infty)$. 令

$$h(P) = h_1(P) + \gamma \quad (P \in C_n(\Omega)),$$

则由 (3.7) 和 (3.12) 知 $h(P)$ 即为定理 4 中所要找的定义在锥中正的广义调和函数. $\square$

4 基础的判定准则及证明

本节将给出一个无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的等价集合的基础判定准则及其证明过程.

定理 5 设 $E \subset C_n(\Omega)$, 则下面结论等价.

- (1) 集合 E 是无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的等价集合;
- (2) 对任意 $\tau \in (0, 1)$, 集合 $E(\Omega, \tau)$ 不是锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的极细集;
- (3) 存在 $\tau \in (0, 1)$, 使得集合 $E(\Omega, \tau)$ 不是锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的极细集.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 c_1 为正常数. 令 $E_1 = \{P \in E; M_\Omega^a(P, \infty) > c_1\}$, 则 $\bar{E}_1 \cap \partial C_n(\Omega) = \emptyset$.

假若集合 E_1 不是无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的等价集合, 则存在一个定义在锥中正的广义调和函数 $h(P)$, 使得

$$c_2 = \inf_{P \in C_n(\Omega)} \frac{h(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)} < \inf_{P \in E_1} \frac{h(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)} = c_3.$$

若令 $h_2(P) = h(P) + c_1 c_3$ ($P \in C_n(\Omega)$), 则对于任意的 $P \in E$, 有 $h_2(P) \geq c_3 M_\Omega^a(P, \infty)$ 且

$$\inf_{P \in C_n(\Omega)} \frac{h_2(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)} = c_2 < c_3 \leq \inf_{P \in E} \frac{h_2(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)}.$$

这与定理 5(1) 矛盾.

故由集合 E 是无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的等价集合可知, 集合 E_1 也是无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的等价集合.

若存在 $\tau \in (0, 1)$, 使得 $E_1(\Omega, \tau)$ 为锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的极细集, 则由定理 4 可知, 存在定义在锥中正的广义调和函数, 使得

$$\inf_{P \in C_n(\Omega)} \frac{h(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)} < \inf_{P \in E_1} \frac{h(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)},$$

这与集合 E_1 是无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的等价集合相矛盾.

故对于任意的 $\tau \in (0, 1)$, $E_1(\Omega, \tau)$ 不是锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的极细集, 从而可得 $E(\Omega, \tau)$ 也不是锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的极细集.

(3) $\Rightarrow$ (1). 假定 E 不是无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的等价集合, 则存在一个定义在锥中正的广义调和函数 $h(P)$, 使得

$$c_4 = \inf_{P \in C_n(\Omega)} \frac{h(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)} < \inf_{P \in E} \frac{h(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)} = c_5.$$

若令 $h_3(P) = h(P) - c_4 M_\Omega^a(P, \infty)$ ($P \in C_n(\Omega)$), 则 $h_3(P)$ 是一个定义在锥中正的广义调和函数且满足

$$\inf_{P \in C_n(\Omega)} \frac{h_3(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)} = 0. \quad (4.1)$$

设 $\tau \in (0, 1)$. 对于任意的 $P \in E(\Omega, \tau)$, 存在 $P' \in E$, 使得 $|P - P'| < \tau \delta(\Omega, P')$. 由 Harnack-Sch 不等式 (参见文献 [9, 第 11 章, 定理 11.4]), 得

$$\left(\frac{1 - \tau}{1 + \tau} \right)^n \frac{h_3(P')}{M_\Omega^a(P', \infty)} \leq \frac{h_3(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)}.$$

故

$$\inf_{P \in E(\Omega, \tau)} \frac{h_3(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)} \geq \left(\frac{1 - \tau}{1 + \tau} \right)^n \inf_{P \in E} \frac{h_3(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)} = \left(\frac{1 - \tau}{1 + \tau} \right)^n (c_5 - c_4) > 0. \quad (4.2)$$

由 (4.1) 和 (4.2) 知,

$$\inf_{P \in C_n(\Omega)} \frac{h_3(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)} < \inf_{P \in E(\Omega, \tau)} \frac{h_3(P)}{M_\Omega^a(P, \infty)},$$

再由文献 [26, 定理 1] 可知 $E(\Omega, \tau)$ 为锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的极细集. 这与定理 5(3) 矛盾. 故定理 5(1) 成立. $\square$

5 定理 3 的证明

(1) $\Rightarrow$ (2). 假定存在 $\tau \in (0, 1)$, 使得 $\int_{E(\Omega, \tau)} V(1 + |P|)W(1 + |P|)(1 + |P|)^{-2} dP < +\infty$. 不妨设 $\tau \in (0, \frac{1}{2}]$. 若引理 4 中所定义 $\{Z_{i_j}\}_{j \geq 1}$ 为 $\{Z_i\}_{i \geq 1}$ 的子族, 则由引理 4(1), 可得

$$\int_{\bigcup_j Z_{i_j}} V(1 + |P|)W(1 + |P|)(1 + |P|)^{-2} dP < +\infty.$$

又因为 $\bigcup_j Z_{i_j}$ 是 Whitney 立方体的并而这些立方体属于锥中关于 τ 的 Whitney 立方体族, 故由引理 3 可知, $\bigcup_j Z_{i_j}$ 是锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的极细集. 再由引理 4(2), 得 $E(\Omega, \tau/4)$ 也是锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的极细集.

另一方面, 因为集合 E 是无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的等价集合, 故由定理 5, 可得 $E(\Omega, \tau/4)$ 不是锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的极细集. 这显然与上面的结论相矛盾. 故定理 3(2) 成立.

(3) $\Rightarrow$ (1). 假定锥中的集合 E 不是无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的等价集合, 则由定理 5 可知, 对于任意的 $\tau \in (0, 1)$, $E(\Omega, \tau)$ 是锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的极细集. 从而再由引理 2 可知, 对于任意的 $\tau \in (0, 1)$, 可得 $\int_{E(\Omega, \tau)} V(1 + |P|)W(1 + |P|)(1 + |P|)^{-2} dP < +\infty$. 这与定理 3(3) 矛盾. 故定理 3(1) 成立.

6 应用

本节将给出定理 3 的应用. 为此, 需要下面的定义.

定义 8 设点列 $\{P_m\} \subset C_n(\Omega)$, 若存在正常数 c , 使得 (参见文献 [30, 第 149 页])

$$|P_i - P_j| \geq c\delta(\Omega, P_i),$$

其中 $i, j = 1, 2, \dots$ 且 $i \neq j$, 则称点列 $\{P_m\}$ 是锥中可分离的点列.

最后, 由定理 3 和定义 8, 可得下面的结论.

定理 6 设点列 $\{P_m\}$ 是锥中可分离的点列且满足 $\inf_m |P_m| > 0$, 则点列 $\{P_m\}$ 是锥中无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的等价集合当且仅当

$$\sum_{m=1}^{\infty} V\left(\frac{|P_m|}{\delta(\Omega, P_m)}\right) W\left(\frac{|P_m|}{\delta(\Omega, P_m)}\right) \left(\frac{\delta(\Omega, P_m)}{|P_m|}\right)^2 = +\infty.$$

证明 因为点列 $\{P_m\}$ 是锥中可分离的点列, 故对于充分小的 $\tau \in (0, 1)$, 有

$$B(P_i, \tau\delta(\Omega, P_i)) \cap B(P_j, \tau\delta(\Omega, P_j)) = \emptyset \quad (i, j = 1, 2, \dots; i \neq j),$$

$$\int_{E(\Omega, \tau)} V(1 + |P|) W(1 + |P|) (1 + |P|)^{-2} dP \approx \sum_{m=1}^{\infty} V\left(\frac{|P_m|}{\delta(\Omega, P_m)}\right) W\left(\frac{|P_m|}{\delta(\Omega, P_m)}\right) \left(\frac{\delta(\Omega, P_m)}{|P_m|}\right)^2.$$

证毕. □

再由定理 3 即可得到定理 6 的结论.

若 $a = 0$, 则由文献 [26, (1.3)] 和定理 6 可知下面的结论将定理 1 推广到了锥中.

推论 2 设点列 $\{P_m\}$ 是锥中可分离的点列且满足 $\inf_m |P_m| > 0$, 则点列 $\{P_m\}$ 是无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的等价集合当且仅当 $\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\delta(\Omega, P_m)}{|P_m|}\right)^n = +\infty$.

致谢 作者对审稿人的仔细审阅深表感谢.

参考文献

- 1 Dahlberg B. A minimum principle for positive harmonic functions. Proc Lond Math Soc (3), 1976, 33: 238–250
- 2 Gardiner S J, Pau J. Approximation on the boundary and sets of determination for harmonic functions. Illinois J Math, 2003, 47: 1115–1136
- 3 Lundh T. Minimally thin sets below a function graph. Complex Var Theory Appl, 2004, 49: 639–645
- 4 Landkof N S. Foundations of Modern Potential Theory. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 180. New York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1972
- 5 Armitage D H, Gardiner S J. Classical Potential Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2001
- 6 Pan G S. Growth estimates and integral representations of harmonic and subharmonic functions (in Chinese). PhD Thesis. Beijing: Beijing Normal University, 2009 [潘国双. 调和及次调和函数的增长估计与积分表示. 博士学位论文. 北京: 北京师范大学, 2009]
- 7 Deng G T, Zhang Y H. Subharmonic Analysis (in Chinese). Beijing: Beijing Normal University Press, 2015 [邓冠铁, 张艳慧. 次调和分析. 北京: 北京师范大学出版社, 2015]
- 8 Zhang Y H, Deng G T. Potential Analysis (in Chinese). Beijing: Science Press, 2018 [张艳慧, 邓冠铁. 位势分析. 北京: 科学出版社, 2018]
- 9 Escassut A, Tutschke W, Yang C C. Some Topics on Value Distribution and Differentiability in Complex and P-Adic Analysis. Beijing: Science Press, 2008
- 10 Qiao L. Asymptotic behaviors of Green-Sch potentials at infinity and its applications. Discrete Contin Dyn Syst Ser B, 2017, 22: 2321–2338

- 11 Qiao L, Pan G. Theorems of the Phragmén-Lindelöf type for subfunctions in a cone. *Proc Edinb Math Soc* (2), 2017, 60: 739–751
- 12 Klein A, Tsang C S S. Quantitative unique continuation principle for Schrödinger operators with singular potentials. *Proc Amer Math Soc*, 2016, 144: 665–679
- 13 Wu G C, Qi J M. Construction of modified Green-Sch energy and its applications (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2016, 46: 1127–1138 [吴国昌, 戚建明. 修正 Green-Sch 能量的构造及应用. *中国科学: 数学*, 2016, 46: 1127–1138]
- 14 Espinar J M. Gradient Schrödinger operators, manifolds with density and applications. *J Math Anal Appl*, 2017, 455: 1505–1528
- 15 Krupchyk K, Uhlmann G. Inverse problems for magnetic Schrödinger operators in transversally anisotropic geometries. *Comm Math Phys*, 2018, 361: 525–582
- 16 Hayman W K, Kennedy P B. *Subharmonic Functions*. London: Academic Press, 1976
- 17 Yoshida H, Miyamoto I. Solutions of the Dirichlet problem on a cone with continuous data. *J Math Soc Japan*, 1998, 50: 71–93
- 18 Rosenblum G V, Solomyak M Z, Shubin M A. Spectral theory of differential operators. In: *Partial Differential Equations-7, Advances of Science and Engineering, Modern Problems of Mathematics, Fundamental Directions*, vol. 64. Moscow: VINITI, 1989, 96–97
- 19 Gilbarg D, Trudinger N S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Berlin: Springer Verlag, 1977
- 20 Courant R, Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics. Vol. II: Partial Differential Equations*. Reprint of the 1962 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. New York: John Wiley & Sons, 1989
- 21 Verzhbinskii G M, Maz'ya V G. Asymptotic behavior of solutions of elliptic equations of the second order close to a boundary. I. *Sib Math J*, 1971, 12: 874–899
- 22 Simon B. Schrödinger semigroups. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1982, 7: 447–526
- 23 Doob J L. *Classical Potential Theory and its Probabilistic Counterpart*. Berlin: Springer-Verlag, 1984
- 24 Miyamoto I, Yoshida H. Two criterions of Wiener type for minimally thin sets and rarefied sets in a cone. *J Math Soc Japan*, 2002, 54: 487–512
- 25 Long P H. The characterizations of exceptional sets and growth properties in classical or nonlinear potential theory (in Chinese). PhD Thesis. Beijing: Beijing Normal University, 2013 [龙品红. 经典位势论或非线性位势论中例外集与增长性的刻画. 博士学位论文. 北京: 北京师范大学, 2013]
- 26 Qiao L, Deng G T. Minimally thin sets at infinity with respect to the Schrödinger operator (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2014, 44: 1247–1256 [乔蕾, 邓冠铁. 无穷远点处与 Schrödinger 算子相关的极细集. *中国科学: 数学*, 2014, 44: 1247–1256]
- 27 Long P H, Gao Z Q, Deng G T. Criteria of wiener type for minimally thin sets and rarefied sets associated with the stationary Schrödinger operator in a cone. *Abstr Appl Anal*, 2012, 2012: 453891
- 28 Qiao L. Growth properties of Green potentials at infinity in a cone (in Chinese). *Acta Math Sinica Chin Ser*, 2014, 57: 785–794 [乔蕾. Green 位势在锥中无穷远点处的增长性质. *数学学报*, 2014, 57: 785–794]
- 29 Stein E M. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton: Princeton University Press, 1979
- 30 Azarin V. *Growth Theory of Subharmonic Functions*. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Basel: Birkhäuser, 2009

Equivalent sets with respect to the Schrödinger operator and their application

Lei Qiao

Abstract In this paper, we not only define an equivalent set at infinity with respect to the Schrödinger operator in a cone but also give its criterion. As an application, we obtain a necessary and sufficient condition for a sequence of points in a cone to be an equivalent set at infinity with respect to the Schrödinger operator.

Keywords Schrödinger operator, equivalent set, cone

MSC(2020) 34C25, 34L30, 35J05, 35J10, 35J20

doi: 10.1360/N012019-00162