

矩形悬臂板弯扭耦合非线性振动建模及分布式吸振控制¹⁾

毛晓晔^{*,†,2)} 吴安东^{*} 丁虎^{*,†}

^{*} (上海大学力学与工程科学学院, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200444)

[†] (上海飞行器动力学与控制研究院, 上海 200092)

摘要 平直机翼和卫星太阳能帆板等结构通常简化为矩形悬臂板, 在实际应用中, 这些结构通常会面临复杂的弯曲和扭转耦合振动问题, 尤其在共振情况下, 可能导致结构损伤甚至失效. 目前, 针对这类结构的共振抑制研究大多集中于弯曲振动的控制, 对于弯扭耦合振动的研究相对较少. 文章探索了分布式非线性能量汇 (nonlinear energy sink, NES) 对这类结构弯扭两种共振模式及多个共振模态耦合的抑振效果. 首先, 基于广义哈密顿原理和牛顿法, 建立了含分布式 NES 胞元的矩形悬臂板弯扭耦合振动的动力学模型. 然后, 采用伽辽金截断法得到弯扭耦合振动离散方程, 并使用谐波平衡法计算稳态响应, 利用龙格库塔法进行验证. 最后, 通过对比不同 NES 胞元参数的控制效果, 讨论了参数对悬臂板结构减振效果的影响规律. 研究结果表明, 相同 NES 质量下提高吸振器非线性刚度和恰当阻尼条件下, 可以显著提高弯扭耦合振动控制效果. 这些结果为矩形悬臂板类结构的弯扭耦合振动抑制提供了新的思路 and 理论依据, 也为该类结构的被动控制策略的优化设计提供了有价值的参考.

关键词 弯扭耦合振动, 非线性能量汇, 分布式吸振, 谐波平衡法

中图分类号: O322

文献标识码: A

DOI: 10.6052/0459-1879-24-569

CSTR: 32045.14.0459-1879-24-569

MODELING AND DISTRIBUTED VIBRATION CONTROL OF BENDING-TORSION COUPLED VIBRATIONS IN RECTANGULAR CANTILEVER PLATES¹⁾

Mao Xiaoye^{*,†,2)} Wu Andong^{*} Ding Hu^{*,†}

^{*} (Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, School of Mechanics and Engineering Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

[†] (Shanghai Institute of Aircraft Mechanics and Control, Shanghai 200092, China)

Abstract Rectangular cantilever plates, commonly employed in aerospace structures such as straight wings and satellite solar panels, are susceptible to complex coupled bending-torsional vibrations under dynamic loads. These vibrations, particularly under resonance conditions, pose significant risks of structural damage or failure. While existing studies on resonance suppression for such systems have primarily addressed bending vibrations, the control of coupled

2024-12-11 收稿, 2025-03-03 录用, 2025-03-05 网络版发表.

1) 国家自然科学基金资助项目(12372015, 12421002 和 12025204).

2) 通讯作者: 毛晓晔, 副教授, 主要研究方向为连续体非线性振动及控制. E-mail: xmao3@shu.edu.cn

引用格式: 毛晓晔, 吴安东, 丁虎. 矩形悬臂板弯扭耦合非线性振动建模及分布式吸振控制. 力学学报, 2025, 57(4): 987-996

Mao Xiaoye, Wu Andong, Ding Hu. Modeling and distributed vibration control of bending-torsion coupled vibrations in rectangular cantilever plates. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2025, 57(4): 987-996

bending-torsional interactions remains underexplored. This study investigates the efficacy of distributed nonlinear energy sinks (NES) in mitigating multi-modal coupled bending-torsional resonances, aiming to advance vibration control strategies for such geometrically flexible systems. A dynamic model for the coupled bending-torsional vibration of rectangular cantilever plates with distributed NES cells was developed using the generalized Hamilton's principle and Newtonian mechanics. The governing equations incorporate nonlinear energy transfer mechanisms inherent to NES devices, enabling analysis of their energy dissipation effects. The Galerkin truncation method was applied to discretize the coupled partial differential equations into a reduced-order system, while the harmonic balance method was employed to compute steady-state responses. Numerical validation via the fourth-order Runge-Kutta method ensured solution accuracy and robustness. Parametric studies highlighted critical relationships between NES design parameters and vibration suppression performance. Under constant NES mass conditions, increasing the nonlinear stiffness coefficient significantly enhanced energy dissipation efficiency, particularly in higher-order resonance modes. Optimal damping ratios were identified to balance transient energy absorption and steady-state stability. Comparative analyses revealed that distributed NES configurations outperformed localized arrangements, achieving up to 60% reduction in resonance amplitudes across multiple coupled modes. Frequency-response curves demonstrated a broadening of effective vibration attenuation bandwidths, confirming the NES's adaptability to multi-modal excitations. The results establish that strategically designed distributed NES systems can effectively decouple bending-torsional interactions and suppress multi-resonance phenomena. By leveraging nonlinear stiffness and optimized damping, the proposed approach addresses limitations of conventional linear absorbers in handling mode coupling and broadband excitations. This work provides a theoretical foundation for passive control strategies in lightweight aerospace structures, where simultaneous mass constraints and multi-axis vibration challenges exist. The findings offer practical guidelines for tuning NES parameters in applications ranging from satellite deployable mechanisms to high-aspect-ratio aircraft wings, paving the way for enhanced reliability in resonance-critical environments. Future research will explore transient vibration scenarios and stochastic loading effects to further validate the robustness of distributed NES configurations.

Key words coupled flexural and torsional vibration, nonlinear energy sink, distributed vibration absorption, harmonic balance method

引 言

在航空航天、机械和海洋等领域中, 矩形悬臂板结构是广泛存在的. 矩形悬臂板结构的振动通常简化为弯曲和扭转的耦合振动, 如平直机翼、尾翼和舱壁等. 这些部件通常处于高速气流和强烈振动的环境下, 特别是在飞行过程中, 机体结构会产生复杂的弯曲和扭转振动. 这种振动可能会导致局部结构疲劳, 甚至在长期使用过程中造成材料破损或断裂, 影响飞行器的安全性. 悬臂板的弯扭耦合振动对飞行器的稳定性和安全性有着直接影响. 因此, 悬臂板弯扭耦合振动的振动特性以及振动抑制研究是有工程应用价值的.

要确保结构的安全性, 就少不了对结构动力学的关注, 而许多学者也对悬臂板结构进行了大量的研究. Revenko^[1] 在三维弹性理论基础上, 求解了复合材料悬臂板在自由端受横向力作用时的弯曲问

题, 得到了三维情况下切应力分布的新的定性特征. Tian 等^[2] 采用二重有限积分的方法, 导出了任意载荷作用下矩形悬臂薄板弯曲问题的解析解. 吕书锋等^[3] 提出了一种抑制功能梯度材料悬臂板振动的鲁棒控制方法. 祁武超等^[4] 基于假设模态法和一阶活塞理论得到带集中质量的矩形悬臂板的颤振模型, 分析了其颤振特性. 王森林等^[5] 基于辛叠加方法研究了正交各向异性矩形悬臂薄板在谐载载荷作用下的受迫振动问题. 薛坚等^[6] 针对二元复合材料板, 提出结构自由振动的半解析模型, 并对其振动特性进行了研究. 王卓等^[7] 对于工程广泛存在的大展弦比结构, 首次研究了大展弦比板弯扭耦合受迫振动响应. Sheng 等^[8] 提出了一种强非线性声学超材料 (NAM) 来减轻超音速机翼板中的气动弹性振动. Kumar 等^[9] 研究了非线性能量汇对不同温度及湿度下复合层压板 (CCLP) 的减振情况. 上述内容是对悬臂板结构的研究, 讨论了板的振动特性以及求解各

类响应的方法.

想要对悬臂板的振动响应进行控制, 仅仅研究其本身是不够的. 而利用非线性能量汇 (nonlinear energy sink, NES) 来对悬臂板进行振动控制是一个好的选择. NES 作为一种非线性被动减振装置, 具有减振频带宽、减振效果好及附加质量小等优点^[10]. Geng 等^[11] 提出用非线性非接触磁力来限制 NES 的大振动. 研究了带磁力非线性能量汇的瞬态响应和稳态响应. Zeng 等^[12] 在夹紧预压梁的中间固定一块磁铁, 并在固定磁铁的两侧各设置一块磁铁构建成了三稳态 NES. Zhang 等^[13] 提出了一种结合非线性能量汇和压电能量采集器的减振器 (NES-PEH) 来抑制二自由度翼型的颤振. 此外, 还设计和测试了 NES-PEH 抑制翼型颤振的效果. 莫帅等^[14] 提出了基于弹簧几何非线性 NES, 具备可控的线性与非线性刚度. 马凯等^[15] 研究了调谐质量阻尼器 (TMD) 和 NES 对曲轴的多惯量非线性闭环自激耦合振荡模型扭振减振的影响规律. 李猛等^[16] 探究了在偏心转子激励下, 多个 NES 胞元对远大于单个 NES 自身重量的振动结构的减振效果, 分析了多个 NES 胞元耦合主结构组成的系统的整体响应特征. 陈建恩等^[17] 对比研究了冲击和扫频激励下不同类型非线性能量汇的减振效能的差异和随激励增大的变化规律, 并分析了串联 NES 中各级纯立方振子的能量耗散能力的不同. 这些研究表明 NES 是一种应用范围广且效果好的振动抑制装置.

非线性能量汇因其广泛的应用范围和优异的减振效果, 在板的振动控制应用领域具有较高的研究价值. Wang 等^[18] 研究了外谐波载荷作用下, NES 对斜拉桥结构振动的影响. Kang 等^[19] 研究了 NES 对斜拉索的面内振动问题的影响. Guo 等^[20] 研究了 NES 对控制面翼型气动弹性的影响. Tian 等^[21] 研究了含 NES 的三维梯形机翼在高超声速流动中的非线性气动弹性行为. 陈洋洋等^[22] 提出设置含负刚度特性的 NES 来实现结构地震响应控制. 闫旭等^[23] 构造出一种新型弹磁强化 NES, 通过实验研究了该能量汇的瞬态动力学响应. Zhang 等^[24] 比较了 NES 对非线性板和线性板减振效果的差异, 重点分析了非线性板上的 NES 减振效果. 姚红良等^[25] 研发了一种可调的双稳态 NES. Zhang 等^[26] 采用数值模拟的方法研究了具有两个 NES 的二维翼型的振动问题. 孙敏等^[27] 针对并联和串联 NES 的选用及优化问题, 对

比研究了两种 NES 的吸振效能. Tian 等^[28] 提出用超磁致伸缩材料能量收集器来提高 NES 的减振性能. Fasihi 等^[29] 利用 NES 和压电能量收集器对二自由度翼型进行能量的吸收和收集. 严浩等^[30] 研究了 NES 装置对管道的非线性动力学特性与振动控制的影响. He 等^[31] 研究了声黑洞和 NES 相结合的非线性悬臂梁的动力学问题. 刘艮等^[32] 研究了悬臂薄板结构附加 NES 附件的瞬态振幅抑制问题. 上述研究说明 NES 能够很好对板进行控制. 但缺少对板的弯扭耦合振动抑制的研究.

本文通过哈密顿原理建立了弯扭耦合振动的非线性悬臂板模型, 得到了板弯曲振动和扭转振动的固有频率. 使用谐波平衡法对自由端一侧角点受到简谐激励的弯扭耦合板进行非线性动力学研究. 在弯曲和扭转固有频率相近的情况下, 板的弯曲响应和振动响应会发生耦合变得更加复杂. 研究了附加 NES 的悬臂板的振动响应. 通过与未控板比较, 附加 NES 悬臂板的弯曲和扭转响应都得到了有效的控制. 分析了 NES 参数对减振效率的影响.

1 矩形悬臂板弯扭耦合动力学建模

如图 1 所示, 板的长度为 L , 宽度为 b , 左端固定约束, 其展向位移为 $w(x, t)$, 绕中轴线的转角为 $\varphi(x, t)$. ρ 为板的质量密度, A 为横截面面积, h 为截面高度, E 为弹性模量, c_1 和 c_2 分别为板弯曲和扭转的线性阻尼, I_b 是板关于中心轴的横截面惯性矩, I_p 是悬臂板抗扭惯性矩, ν 为泊松比, G 为剪切模量. NES 胞元的布置位置对减振效果有重要影响. 相较于板的轴线, 板边缘处的扭转振幅较大. 尤其是悬臂端两角点处的振幅, 这里的弯曲振幅和扭转振幅同时达到最大, 因此, 选择在悬臂端两个角点布置 NES 胞元可以增强吸振器与主结构耦合作用, 以便更好地抑制弯扭耦合振动. 如图 1, 两个 NES 胞元分别加装在

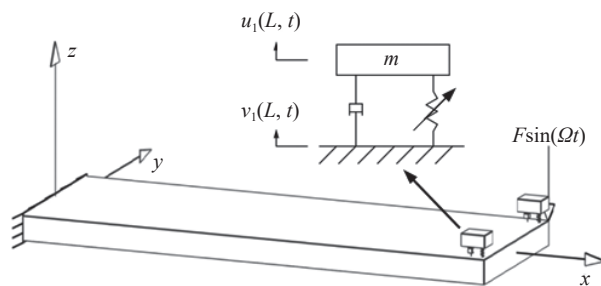


图 1 弯扭耦合悬臂板模型

Fig. 1 Model of bent-torsion coupled cantilever plate

板自由端的前沿和后沿处;如图 1 中放大图所示, NES 胞元由质量块 m 、非线性弹簧 k_N 以及阻尼器 c_N 组成. 表 1 为矩形悬臂板的参数.

板的动能为

$$T = \int_0^L \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{2} \rho (w_{,t}^2 + \varphi_{,t}^2 \cdot y^2) dy dz dx = \int_0^L \frac{1}{2} \rho A_b \left(w_{,t}^2 + \frac{1}{12} b^2 \cdot \varphi_{,t}^2 \right) dx \quad (1)$$

板的势能为

$$U = \int_0^L \frac{1}{24} E A b^2 \varphi^2 w_{,xx}^2 dx + \int_0^L \frac{1}{24} h^2 \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) w_{,xx}^2 dx + \int_0^L \frac{1}{2} G I_p \varphi_{,x}^2 dx + \int_0^L \frac{1}{2} E A \left(\frac{1}{4} w_{,x}^4 \right) dx \quad (2)$$

采用受力分析与哈密顿原理, 建立矩形悬臂板-NES 胞元的力学模型.

对 NES 胞元采用受力分析得到动力学方程

$$m u_{i,tt} + k_N (u_i - v_i)^3 + c_N (u_{i,t} - v_{i,t}) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

令 u_1 和 u_2 分别为前后两 NES 胞元质量块位移, v_1 和 v_2 分别为板自由端前沿、后沿处的位移

$$v_i = w_L \pm \frac{b}{2} \varphi_L, \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

NES 胞元作用到板上的力为

$$F_{ni} = k_N (v_i - u_i)^3 + c_N (v_{i,t} - u_{i,t}), \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

外力对板所做功

$$\int_0^L [\delta(x-L) F_{n1} v_1 + \delta(x-L) F_{n2} v_2] dx + \int_0^L \delta(x-L) F \sin(\Omega t) v_2 dx \quad (6)$$

此处的 δ 为狄拉克函数.

根据哈密顿变分原理

表 1 板的材料参数

Table 1 Material parameters of the plate

Parameter	Value	Parameter	Value
E/GPa	200	G/GPa	45
$\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	7850	$c_1/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	50
ν	0.3	$c_2/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1})$	0.3
h/m	0.01	A/m^2	2.343×10^{-3}
b/m	0.234 3	L/m	1
I_p/m^4	$1.952 5 \times 10^{-8}$	I_p/m^4	7.81×10^{-8}

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta Q dt = 0 \quad (7)$$

为了考虑弹性板横向振动和扭转的能量耗散, 引入线性阻尼项 c_1 和 c_2 , 并假设纵向运动的加速度与横向的加速度相比不显著. 结合式 (3) 得到板-NES 系统的动力学方程

$$m u_{i,tt} + k_N \left(u_i - w_L \pm \frac{b}{2} \varphi_L \right)^3 + c_N \left(u_{i,t} - w_{L,t} \pm \frac{b}{2} \varphi_{L,t} \right) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} & \rho A w_{,tt} + E I_b w_{,xxxx} + E A \left(\frac{1}{3} b^2 - \frac{1}{6} h^2 \right) \varphi \varphi_{,x} - \\ & E A \left[\frac{3}{2} w_{,x}^2 w_{,xx} - \left(\frac{1}{12} b^2 - \frac{1}{24} h^2 \right) \varphi^2 w_{,xxx} \right] w_{,xxx} + \\ & E A \left(\frac{1}{6} b^2 - \frac{1}{12} h^2 \right) (\varphi_{,x}^2 + \varphi \varphi_{,xx}) w_{,xx} + c_1 w_{,t} - \\ & \delta(x-L) F_{n1} - \delta(x-L) F_{n2} - \delta(x-L) F \sin(\Omega t) = 0 \\ & - \frac{1}{12} \rho A b^2 \varphi_{,tt} + E A_b \left(-\frac{1}{12} b^2 \varphi + \frac{1}{24} h^2 \varphi \right) w_{,xx}^2 + \\ & c_2 \varphi_{,t} + G I_p \varphi_{,xx} - \frac{b}{2} \delta(x-L) F_{n1} - \\ & \frac{b}{2} \delta(x-L) F_{n2} - \frac{b}{2} \delta(x-L) F \sin(\Omega t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

忽略边界条件中的阻尼项和非线性项, 可以得到对应的边界条件

$$\left. \begin{aligned} & w(0, t) = 0, \quad w_{,x}(0, t) = 0 \\ & w_{,xx}(L, t) = 0, \quad w_{,xxx}(L, t) = 0 \\ & \varphi(0, t) = 0, \quad \varphi_{,x}(L, t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

2 矩形悬臂板弯扭固有特性分析

首先基于线性派生系统, 求得满足边界的模态函数, 因此忽略控制方程的非线性项、阻尼项和外激励项, 得到系统的线性派生方程

$$-E I_b w_{,xxxx} - \rho A w_{,tt} = 0 \quad (11)$$

$$- \frac{1}{12} \rho A b^2 \varphi_{,tt} + G I_p \varphi_{,xx} = 0 \quad (12)$$

假设系统的振动是多个主振动的叠加

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \phi_i(x) \quad (13)$$

$$\varphi(x, t) = \sum_{j=1}^N Q_j(t) \Phi_j(x) \quad (14)$$

式中, $q_i(t)$ 和 $\Phi_i(x)$ 分别代表系统横向弯曲振动的第 i 阶模态的广义坐标和模态函数, $Q_j(t)$ 和 $\Phi_j(x)$ 分别代表系统轴向扭转振动的第 j 阶模态的广义坐标和模态函数. 模态函数的通解分别写为

$$\phi_i(x) = C_1 \cos(\beta_i x) + C_2 \sin(\beta_i x) + C_3 \operatorname{ch}(\beta_i x) + C_4 \operatorname{sh}(\beta_i x) \quad (15)$$

$$\Phi_j(x) = C_5 \cos(\gamma_j x) + C_6 \sin(\gamma_j x) \quad (16)$$

式中, C_K ($K = 1, 2, \dots, 6$) 为待定系数, 由对应的边界条件确定, β_i 和 γ_j 分别为对应的特征值.

边界条件分别为

$$\left. \begin{aligned} w(0, t) = 0, \quad w'(0, t) = 0 \\ w''(L, t) = 0, \quad w'''(L, t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\varphi(0, t) = 0, \quad \varphi'(L, t) = 0 \quad (18)$$

将式 (15) 和式 (16) 代入边界条件式 (17) 和式 (18) 得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\cos(\beta_i L) & -\sin(\beta_i L) & \operatorname{ch}(\beta_i L) & \operatorname{sh}(\beta_i L) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin(\beta_i L) & -\cos(\beta_i L) & \operatorname{sh}(\beta_i L) & \operatorname{ch}(\beta_i L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sin(\gamma_i L) & \cos(\gamma_i L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_5 \\ C_6 \end{pmatrix} = 0 \quad (20)$$

为使得原方程有非零解, 则方程式 (19) 和式 (20) 的系数矩阵行列式必须等于 0

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -C_3 \\ C_2 &= -C_4 \\ C_1 [\cos(\beta_i L) + \operatorname{ch}(\beta_i L)] + C_2 [\sin(\beta_i L) + \operatorname{sh}(\beta_i L)] &= 0 \\ C_1 [\sin(\beta_i L) - \operatorname{sh}(\beta_i L)] - C_2 [\cos(\beta_i L) + \operatorname{ch}(\beta_i L)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$C_5 = 0, \quad C_6 \cos(\gamma_i L) = 0 \quad (22)$$

由此可得模态特征值以及对应模态固有频率.

代入表 1 中参数, 得到固有频率如表 2 所示, 可见在该参数集下, 板的二阶弯曲固有频率与一阶扭转频率极为接近, 可能会发生比较显著的耦合共振.

将 C_1 取作 1, 弯曲振型函数为

$$\left. \begin{aligned} \phi_i(x) &= \frac{1}{2} \{ \cos(\beta_i x) - \operatorname{ch}(\beta_i x) + \xi_i [\sin(\beta_i x) - \operatorname{sh}(\beta_i x)] \} \\ \xi_i &= -\frac{\cos(\beta_i L) + \operatorname{ch}(\beta_i L)}{\sin(\beta_i L) + \operatorname{sh}(\beta_i L)} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

表 2 板的弯曲与扭转固有频率

Table 2 Natural frequencies of bending and torsional of plates

	Bending/(rad·s ⁻¹)	Torsional/(rad·s ⁻¹)
1st-order	51.226 191 08	321.032 508 7
2nd-order	321.052 249 3	963.097 526 4
3rd-order	899.046 024 7	1 605.162 543
4th-order	1 761.489 317	2 247.227 562

将 C_6 取作 1, 扭转振型函数为

$$\Phi_j(x) = \sin(\gamma_j x) \quad (24)$$

矩形悬臂板前四阶弯曲模态和前四阶扭转模态分别如图 2 以及图 3 所示. 根据振型图可知, 弯曲和扭转的各阶振型的最大位移都位于悬臂端, 所以在悬臂端布置 NES 可以增强吸振器与板的耦合, 以对多个模态进行更高效的控制.

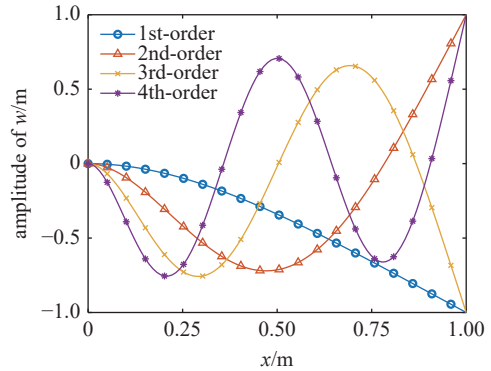


图 2 弯曲振型图

Fig. 2 Bending mode diagram

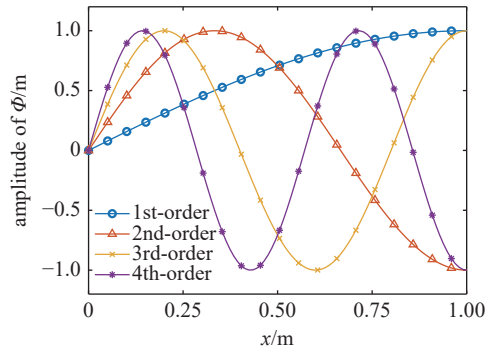


图 3 扭转振型图

Fig. 3 Torsion mode diagram

3 矩形悬臂板弯扭耦合振动分析

3.1 谐波平衡法及伪弧长法过程

首先进行伽辽金截断, 取其振型函数为试函数

及权函数, 将假设解式 (13) 和式 (14) 代入控制方程, 得到包含板弯曲振动和扭转振动广义位移 $q_i(t)$ 和 $Q_j(t)$ 的方程 $H(x,t)$ 和 $G(x,t)$, 将方程两端同时乘以权函数, 并在 $[0, L]$ 上积分得到关于 $q_i(t)$ 和 $Q_j(t)$ 的 $2n$ 个常微分方程组, 再对时间函数作出如下假设

$$\left. \begin{aligned} q_i(t) &= a_{w,0} + \sum_{j=1}^N a_{w,j} \sin(j\omega t) + \sum_{j=1}^N b_{w,j} \cos(j\omega t) \\ Q_j(t) &= a_{\varphi,0} + \sum_{j=1}^N a_{\varphi,i} \sin(j\omega t) + \sum_{j=1}^N b_{\varphi,j} \cos(j\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

其中, j 为模态阶数, m 为谐波阶数.

将式 (25) 及其导函数代入伽辽金截断后得到的 $2n$ 个常微分方程组, 可以得到含 t 的各阶谐波为未知变量的 $2n$ 个方程组. 由于 t 的任意性, 方程中各谐波项的系数和常数项均为 0, 所以需要提取方程组中 $(2m+1) \times 2n$ 项谐波系数, 并使它们都等于 0, 此时可以得到 $(2m+1) \times 2n$ 个非线性代数方程组, 记为

$$F(a_{w,0}, a_{w,1}, b_{w,1}, \dots, a_{w,m}, b_{w,m}, \Omega) = 0 \quad (26)$$

$$F(a_{\varphi,0}, a_{\varphi,1}, b_{\varphi,1}, \dots, a_{\varphi,m}, b_{\varphi,m}, \Omega) = 0 \quad (27)$$

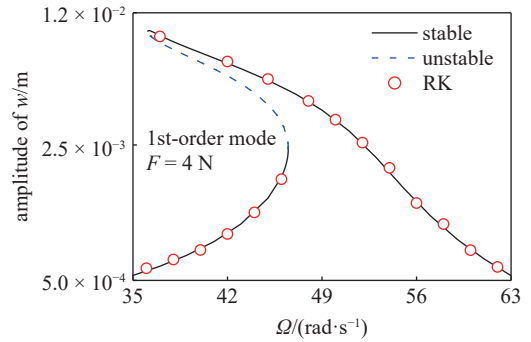
通过方程组式 (26) 和式 (27), 可以得到式中各系数与激励频率 Ω 的关系, 由于方程组式 (26) 和式 (27) 很难直接求解, 而只用牛顿迭代数值方法求解会遇到转折点的奇异性问题. 故此处采用伪弧长延伸法中的预报-修正进行求解, 基于伪弧长法^[7], 解出谐波系数, 得到平板弯扭耦合振动的位移响应.

3.2 解析结果验证及弯扭耦合振动分析

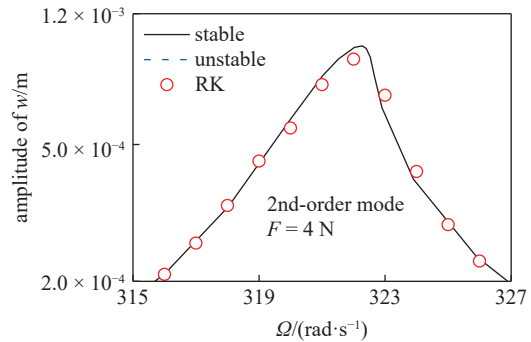
谐波平衡法作为一种常用的近似解析法, 对于解决带有 NES 的强非线性问题有着较强的针对性. 故本文运用谐波平衡法求解, 为了验证解析法的准确性, 可采用龙格-库塔法与之对比, 初值设为 0. 外激励是悬臂板自由端内侧集中力 $F = 4\sin(\Omega t)$. 图 4 所示是板弯曲稳态幅频响应曲线. 图中实线和短虚线为谐波平衡法求解的板受迫振动近似解, 实线表示稳定稳态解, 短虚线表示稳态不稳定解. 红色空心圆表示龙格-库塔法计算得到的数值解, 但是数值法不能追踪到非稳态周期解. 从对比可见, 谐波平衡法得到的近似解析结果具有较好的精度, 后续将采用谐波法进行分析.

图 5 和图 6 所示为谐波平衡法求解的板幅频特性曲线. 弯曲第一阶主共振曲线向左偏转, 呈现非线性软化特性, 而第二阶主共振曲线向右偏转, 呈现非

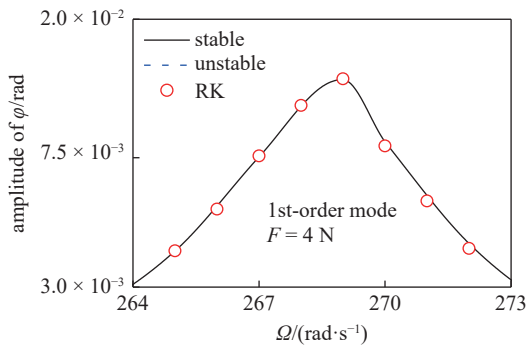
线性硬化特性. 此外, 由于弯曲的第二阶固有频率与扭转的第一阶固有频率极为接近, 这时弯曲和扭转



(a) Bending 1st order main resonance



(b) Bending 2nd order main resonance



(c) Torsional 1st order main resonance

图 4 共振响应幅频特性曲线数值法解析法对比

Fig. 4 Comparison of numerical method and analytical method

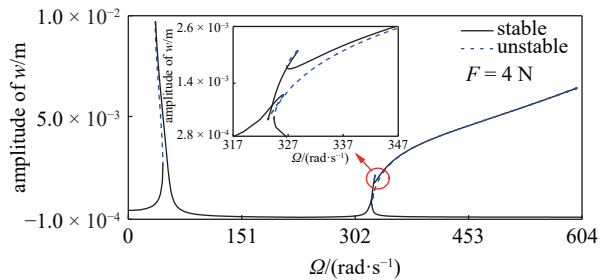


图 5 板自由端弯曲幅频特性曲线

Fig. 5 Bending amplitude-frequency characteristic curve of free end of plate

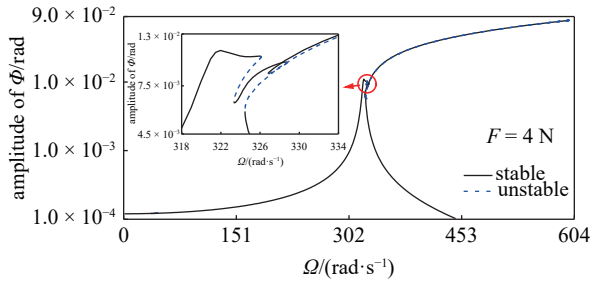


图 6 板自由端扭转幅频特性曲线

Fig. 6 Torsional amplitude-frequency characteristic curve of free end of plate

耦合程度高. 可以看到弯曲第二阶主共振曲线与第一阶主共振曲线相比会多出两次转折, 第二阶主共振曲线会先向右偏转后往回发生转折, 经历小段不稳定解后再向右偏转, 这次偏转后还会发生一次转折, 并且会经历更小段的不稳定解后才向右偏转. 扭转的第一阶主共振曲线也有类似的现象, 不同的是它们第二次转折的方向相反.

引入板边缘应力

$$\sigma = \frac{1}{2} E w_{,xx}^2 + \frac{1}{4} E (b\varphi + h \cos \varphi) w_{,xx} \quad (28)$$

计算板固定端边缘处的应力得到应力-频率曲线, 如图 7, 可以看到, 应力的变化情况基本符合弯曲幅频响应的变化. 但是弯曲响应在第一阶主共振处最大, 应力在第二阶主共振处最大, 因为板的弯曲第二阶固有频率和扭转第一阶固有频率相近, 此时弯曲振动和扭转振动耦合叠加导致板固定端边缘的应力最大.

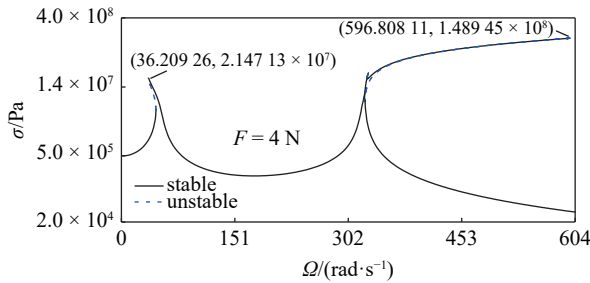


图 7 板自由端边缘处应力-频率曲线

Fig. 7 Stress-frequency curve at the free edge of plate

综上所述, 当弯曲和扭转的固有频率相近时, 板的响应会急剧增大, 幅频特性曲线变得复杂, 应力也会急剧增大.

4 弯扭耦合振动 NES 胞元减振分析

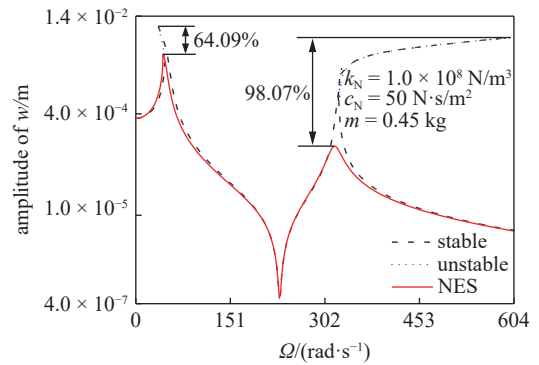
NES 已经被证实具有共振自动俘获特性, 因此

NES 能够有效应对多模态振动, 不受固有频率变化的限制, 因此即使弯曲和扭转频率不同, NES 依然能提供良好的减振效果. 但是, 在相同激励条件下, 不同模态的共振幅值不同, 因此本节也将讨论 NES 参数对本文关注频带内弯曲和扭转模态共振抑振的影响, 以期在同一参数下实现两种振动形式、多个振动模态的抑振优化.

通过减振百分比评价 NES 对悬臂板的稳态响应的减振性能. 未加 NES 控制的悬臂板的各阶主共振最大振幅记为 A_i , 耦合 NES 的悬臂板的各阶主共振最大振幅记为 A_{ci} , 则 NES 的减振百分比为

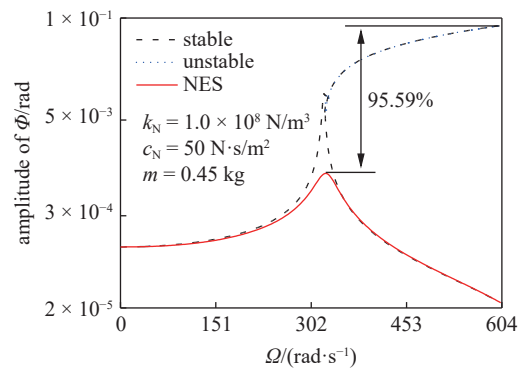
$$\eta = \frac{A_i - A_{ci}}{A_i} \times 100\% \quad (29)$$

分别在板自由端长边前后边缘处各安置一个 NES, 每个 NES 参数为 $k_N = 1.0 \times 10^4 \text{ N/m}^3$, $c_N = 50 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$, $m = 0.45 \text{ kg}$. NES 总质量是系统质量的 4.89%. 图 8 为 $F = 4 \text{ N}$ 时的减振效果, 弯曲的第一阶、第二阶主共振的减振效率分别为 64.09% 和 98.07%; 扭转减振效率为 95.59%. 可以看到, NES 控制下的共



(a) 弯曲响应

(a) Bending response



(b) 扭转响应

(b) Torsional response

图 8 NES 减振效果

Fig. 8 NES damping effect

振曲线不再呈现软化特性和硬化特性。

图 9 所示为 NES 立方非线性刚度对幅频响应的影响。立方非线性刚度的取值为 $0 \sim 5.0 \times 10^8 \text{ N/m}^3$ 。可以看到, 随着立方非线性刚度的增加, 弯曲第一阶主共振的减振效率先提升后下降, 减振效率在 $3.7 \times 10^8 \text{ N/m}^3$ 左右达到最大。但是 NES 立方非线性刚度的变化对弯曲第二阶主共振和扭转第一阶主共振的减振效率几乎没有影响。

图 10 所示为 NES 阻尼参数对幅频响应曲线的影响。阻尼的取值范围为 $0 \sim 40 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, 可以看到, 随着阻尼的增大, 弯曲第一阶主共振减振效率先增加后减小, 减振效率在 $16 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 左右达到最大。弯曲第二阶主共振和扭转第一阶主共振减振效率随着阻尼的增大而增大。

图 11 所示为 NES 惯性参数对幅频响应曲线的影响。质量的取值范围在 $0.09 \sim 0.45 \text{ kg}$ 。惯性参数在 $0.09 \sim 0.36 \text{ kg}$ 之间时, 弯曲第一阶主共振峰值有小幅下降。惯性参数在 $0.36 \sim 0.45 \text{ kg}$ 之间时, 弯曲第一

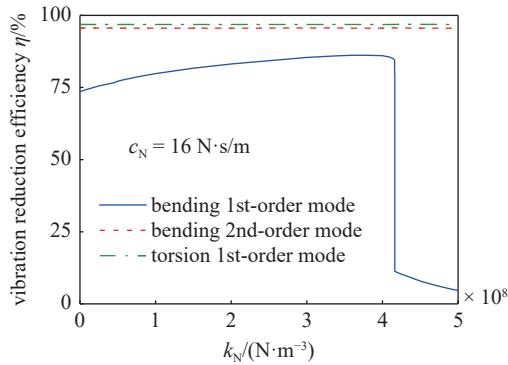


图 9 NES 立方非线性刚度对幅频响应曲线的影响

Fig. 9 Influence of NES cubic nonlinear stiffness on amplitude-frequency response curve

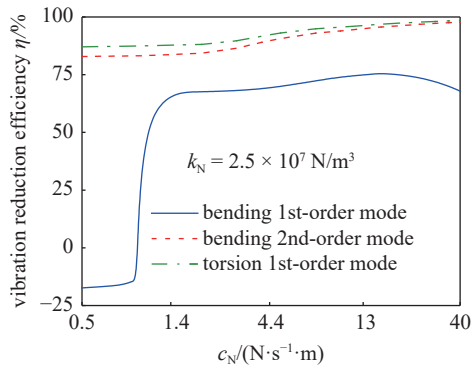
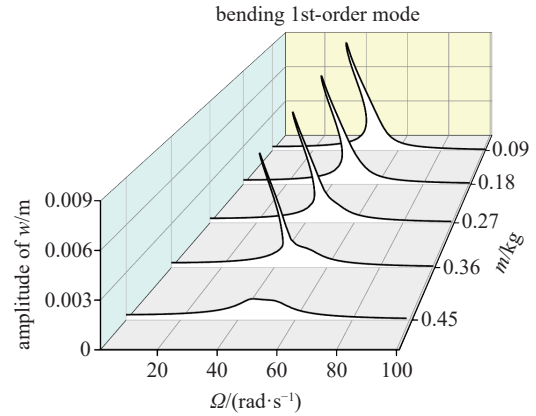
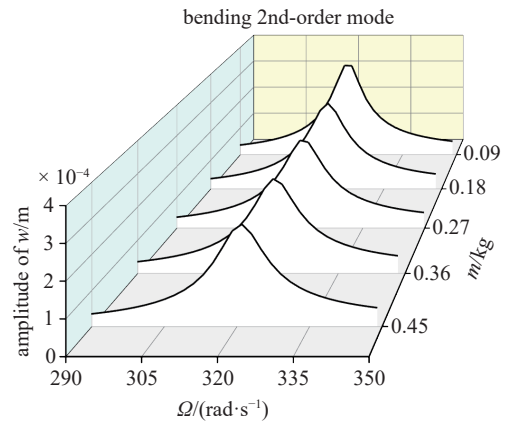


图 10 NES 阻尼参数对幅频响应曲线的影响

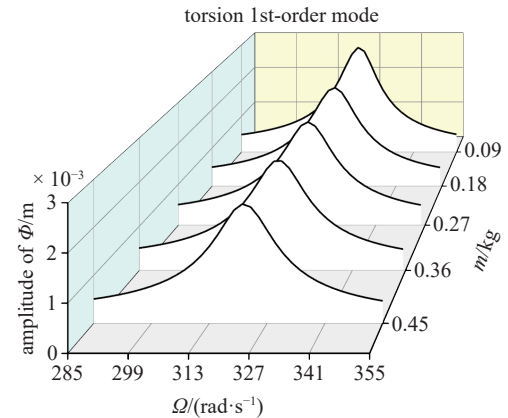
Fig. 10 Influence of NES damping parameters on amplitude-frequency response curve



(a) 弯曲第一阶主共振
(a) Bending the 1st order



(b) 弯曲第二阶主共振
(b) Bending the 2nd order



(c) 扭转第一阶主共振
(c) Twisting the 1st order

图 11 NES 惯性参数对幅频响应曲线的影响

Fig. 11 Effects of NES inertia parameters on amplitude-frequency response curves

阶主共振峰值有明显的下降。随着惯性参数的增大, 弯曲第二阶和扭转第一阶主共振峰值也有下降, 但幅度不明显。

综合刚度和阻尼参数变化对系统减振效果的影响, 最佳参数为 $k_N = 3.7 \times 10^8 \text{ N/m}^3$, $c_N = 16 \text{ N}\cdot\text{s/m}$,

$m = 0.45 \text{ kg}$.

5 结论

本文研究了矩形悬臂板弯扭耦合主共振的振动特性. 研究了 NES 对板的振动控制情况. 基于能量法, 通过广义哈密顿原理建立悬臂板的动力学模型. 当板的弯曲和扭转的固有频率相近时, 弯曲和扭转振动会发生耦合. 耦合时板的共振响应远远大于未耦合时的共振响应. 且发生耦合时幅频特性曲线会有复杂的绕圈现象, 此时悬臂板固定端的应力也会急剧增大.

分析了非线性能量汇对板弯扭耦合振动的吸振控制, 实现了 NES 对全模态的振动控制. NES 在同一参数下对板各阶振动的控制效果不同, 通过参数优化分析得到 NES 参数为 $k_N = 3.7 \times 10^8 \text{ N/m}^3$, $c_N = 16 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $m = 0.45 \text{ kg}$ 时, 板的各阶弯曲和扭转共振减振效果都较为不错. 即虽然板发生弯扭耦合时共振响应会急剧增大, 但 NES 能够消除耦合共振时发生的复杂非线性现象并进行好的吸振控制.

参 考 文 献

- 1 Revenko VP. Three-dimensional problem of the theory of elasticity for orthotropic cantilevers and plates subjected to bending by transverse forces. *Materials Science*, 2004, 40(2): 215-222
- 2 Tian B, Zhong Y, Li R. Analytic bending solutions of rectangular cantilever thin plates. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 2011, 11(4): 1043-1052
- 3 吕书锋, 李宏洁, 张伟等. 金属/陶瓷功能梯度悬臂板的振动抑制研究. *振动与冲击*, 2022, 41(20): 185-194 (Lyu Shufeng, Li Hongjie, Zhang Wei, et al. Vibration suppression of a cermet functional gradient cantilevered plate. *Journal of Vibration and Shock*, 2022, 41(20): 185-194 (in Chinese))
- 4 祁武超, 俞浩洋, 田素梅等. 带内埋质量超声速悬臂板的颤振特性. *沈阳航空航天大学学报*, 2024, 41(2): 1-13 (Qi Wuchao, Yu Haoyang, Tian Sumei, et al. Flutter characteristics of supersonic cantilever plate with embedded mass. *Journal of Shenyang Aerospace University*, 2024, 41(2): 1-13 (in Chinese))
- 5 王森林, 李进宝, 马红艳等. 基于辛叠加方法的正交各向异性矩形悬臂薄板受迫振动解析解. *应用数学和力学*, 2024, 45(9): 1117-1132 (Wang Senlin, Li Jinbao, Ma Hongyan, et al. Analytical forced vibration solutions of orthotropic cantilever rectangular thin plates with the symplectic superposition method. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, 45(9): 1117-1132 (in Chinese))
- 6 薛坚, 牛牧青, 张文勇等. 二元复合材料板的自由振动: 半解析法. *力学学报*, 2022, 54(7): 2041-2049 (Xue Jian, Niu Muqing, Zhang Wenying, et al. Free Vibration of a binary composite plate: A semi-analytical approach. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(7): 2041-2049 (in Chinese))
- 7 王卓, 毛晓晔, 丁虎等. 大展弦比板弯扭耦合受迫振动分析. *动力学与控制学报*, 2024, 22(1): 27-36 (Wang Zhuo, Mao Xiaoye, Ding Hu, et al. Analysis of flexural coupled forced vibration of high-aspect ratio plate. *Journal of Dynamics and Control*, 2024, 22(1): 27-36 (in Chinese))
- 8 Sheng P, Fang X, Yu D, et al. Nonlinear metamaterial enabled aeroelastic vibration reduction of a supersonic cantilever wing plate. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, 45(10): 1749-1772
- 9 Kumar RK, Kumar A. Nonlinear vibration control and stability analysis of a cantilever composite laminated plate in hygrothermal environment. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2024, 12: 1521-1544
- 10 Ding H, Chen LQ. Designs, analysis, and applications of nonlinear energy sinks. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 100(4): 3061-3107
- 11 Geng XF, Ding H, Jing XJ, et al. Dynamic design of a magnetic-enhanced nonlinear energy sink. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2023, 185: 109813
- 12 Zeng YC, Ding H. A tristable nonlinear energy sink. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, 238: 1039
- 13 Zhang H, Li ZY, Yang ZC, et al. Flutter suppression of an airfoil using a nonlinear energy sink combined with a piezoelectric energy harvester. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2023, 125: 107350
- 14 莫帅, 黄祖瑞, 刘翊恒等. 具有几何非线性刚度的非线性能量阱振动抑制与动态特性研究. *工程力学*, 2025, DOI: 10.6052/j.issn.1000-4750.2024.03.0222 (Mo Shuai, Huang Zurui, Liu Yiheng, et al. Research on vibration suppression and dynamic characteristics of nonlinear energy sink with geometric nonlinear stiffness. *Engineering Mechanics*, 2025, DOI: 10.6052/j.issn.1000-4750.2024.03.0222 (in Chinese))
- 15 马凯, 杜敬涛, 刘杨等. 调谐质量阻尼器和非线性能量阱抑制内燃机闭环轴系扭转振动的比较研究. *力学学报*, 2024, 56(1): 236-246 (Ma Kai, Du Jingtao, Liu Yang, et al. A Comparative study on the torsional vibration attenuation of closed-loop internal combustion engine shafting using tuned mass damper and nonlinear energy sink. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2024, 56(1): 236-246 (in Chinese))
- 16 李猛, 李孙飏, 丁虎. 非线性能量汇胞元减振效率分析. *力学学报*, 2023, 55(11): 2614-2623 (Li Meng, Li Sunbiao, Ding Hu, et al. Analysis of damping efficiency of nonlinear energy sink cell. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, 55(11): 2614-2623 (in Chinese))
- 17 陈建恩, 张维兴, 刘军等. 多尺度串联非线性能量阱的减振效能及阻尼连接方式研究. *振动与冲击*, 2022, 41(10): 147-153 (Chen Jian'en, Zhang Weixing, Liu Jun, et al. Vibration reduction efficiency and damping connection type of multi-scale series nonlinear energy sinks. *Journal of Vibration and Shock*, 2022, 41(10): 147-153 (in Chinese))
- 18 Wang YF, Kang HJ, Cong YY, et al. Vibration suppression of a cable-stayed beam by a nonlinear energy sink. *Nonlinear Dynamics*, 2023, 111(16): 14829-14849
- 19 Kang HJ, Hu QF, Su XY, et al. Study on vibration suppression of an inclined cable with a nonlinear energy sink under the axial excitation. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2023, 23(10): 2350111

- 20 Guo HL, Cao SQ, Yang TZ, et al. Aeroelastic suppression of an airfoil with control surface using nonlinear energy sink. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 94(2): 857-872
- 21 Tian W, Li YM, Li P, et al. Passive control of nonlinear aeroelasticity in hypersonic 3-D wing with a nonlinear energy sink. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 462: 114942
- 22 陈洋洋, 陈凯, 谭平等. 负刚度非线性能量阱减震控制性能研究. *工程力学*, 2019, 36(3): 149-158 (Chen Yangyang, Chen Kai, Tan Ping, et al. A study on structural seismic control performance by nonlinear energy sinks with negative stiffness. *Engineering Mechanics*, 2019, 36(3): 149-158 (in Chinese))
- 23 闫旭, 陈建恩, 董博康等. 弹磁强化能量阱瞬态动力学响应实验研究. *实验力学*, 2023, 38(1): 131-141 (Yan Xu, Chen Jianen, Dong Bokang, et al. Experimental research on transient dynamic response of elastic magnetism reinforced energy sink. *Experimental mechanics*, 2023, 38(1): 131-141 (in Chinese))
- 24 Zhang WX, Chen JE. Influence of geometric nonlinearity of rectangular plate on vibration reduction performance of nonlinear energy sink. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2020, 34(8): 3127-3135
- 25 姚红良, 刘帅, 王钰玮等. 可调永磁双稳态非线性能量阱及应用研究. *振动与冲击*, 2020, 39(3): 127-133, 41 (Yao Hongliang, Liu Shuai, Wang Yuwei, et al. Adjustable permanent magnet bi-stable nonlinear energy sink and its application. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, 39(3): 127-133, 41 (in Chinese))
- 26 Zhang WF, Fang JQ, He YS, et al. Resonance capture and targeted energy transfer for suppressing aeroelastic instability of 2-D wing. *European Physical Journal-Special Topics*, 2019, 228(9): 1873-1889
- 27 孙敏, 陈建恩, 陈焕林. 并联和串联非线性能量阱的吸振效能对比研究. *哈尔滨工程大学学报*, 2018, 39(10): 1727-1732 (Sun Min, Chen Jianen, Chen Huanlin. Comparison on vibration absorption efficiency of parallel and series nonlinear energy sinks. *Journal of Harbin Engineering University*, 2018, 39(10): 1727-1732 (in Chinese))
- 28 Tian W, Li YM, Yang ZC, et al. Suppression of nonlinear aeroelastic responses for a cantilevered trapezoidal plate in hypersonic airflow using an energy harvester enhanced nonlinear energy sink. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 172: 105417
- 29 Fasihi A, Shahgholi M, Ghahremani S. The effects of nonlinear energy sink and piezoelectric energy harvester on aeroelastic instability of an airfoil. *Journal of Vibration and Control*, 2022, 28(11-12): 1418-1432
- 30 严浩, 熊夫睿, 姜乃斌等. 含非线性能量汇的简支输液管非线性振动控制研究. *固体力学学报*, 2019, 40(2): 127-136 (Hao Yan, Furui Xiong, Naibin Jiang, et al. Nonlinear vibration control of a simply-supported pipe conveying fluid with nonlinear energy sink. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2019, 40(2): 127-136 (in Chinese))
- 31 He MX, Tang Y, Ding Q. Dynamic analysis and optimization of a cantilevered beam with both the acoustic black hole and the nonlinear energy sink. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2022, 33(1): 70-83
- 32 刘艮, 张伟. 非线性能量阱在悬臂薄板振动抑制中的应用研究. *振动工程学报*, 2019, 32(5): 786-792 (Liu Gen, Zhang Wei. Vibration suppression of cantilever thin plates using nonlinear energy sink. *Journal of Vibration Engineering*, 2019, 32(5): 786-792 (in Chinese))