中国科学: 物理学 力学 天文学 2025 年 第 55 卷 第 9 期: 294501
SCIENTIA SINICA Physica, Mechanica & Astronomica physcn.scichina.com
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS
评 述 先进航天器动力学与控制专题II

连续方程与高斯和框架下轨道不确定性传播方法综述

孙盼[1*], 李爽[2]

1. 常州信息职业技术学院智能装备学院, 常州 213164
2. 南京航空航天大学航天学院, 南京 210016
*联系人, E-mail: sunpan@czcit.edu.cn

收稿日期: 2024-07-29; 接受日期: 2024-12-02; 网络出版日期: 2025-05-28
常州信息职业技术学院科研启动基金(编号: SGA070300020395)资助项目

摘要 本文综述了连续方程与高斯和模型框架下轨道不确定性传播方法研究进展. 首先, 从连续方程、插值方法、分箱方法三方面梳理了连续方程框架下不确定性传播方法研究现状. 其次, 从高斯和模型、高斯和模型框架下的混合方法两方面分析了高斯和模型框架下不确定性传播方法发展脉络. 然后, 比较了两种框架下求解轨道不确定性传播问题的数学本质、精度与效率差异. 最后, 总结了基于两种框架求解轨道不确定性传播问题的主要特征与优势, 并展望了未来研究工作.

关键词 连续方程, 高斯和模型, 轨道不确定性传播, 研究进展

PACS: 02.50.Cw, 02.50.Fz, 02.60.Ed

1 引言

不确定性传播问题(简称密度传播问题)在航天轨道动力学领域许多任务中具有重要作用[1]. 国内的不确定性传播研究主要以我国的月球探测[2,3]、空间目标碰撞预警[4]、交会对接[5,6]等工程项目需求为牵引展开, 研究工作主要集中在轨道确定[7]、相对运动、碰撞评估、轨迹关联与预报、月球探测中转移轨道误差分析等方向. 《2021中国的航天》[8]白皮书显示, 我国未来将继续实施行星探测工程, 发射小行星探测器, 完成近地小行星采样和主带彗星探测, 完成火星采样返回、木星系探测等关键技术攻关. 为了保证所涉项目仿真结果的可靠性, 有必要开展相关研究方向下的轨道不确定性传播研究工作. 不确定性传播的主要思想是获得对应于状态空间或增广状态空间(除了状态空间不确定性, 还考虑了与动力学参数或观测量相关的不确定性)演变的不确定性空间演变.

目前已有文献为求解非线性不确定性传播问题开发了许多解析或半解析非线性方法. Luo和Yang[1]综述了轨道动力学领域内的各种不确定性传播方法. 对于诸如线性协方差分析[9]的解析方法, 该方法会使用线性化模型, 特征是计算量较小. 值得注意的是, 对于高

引用格式: 孙盼, 李爽. 连续方程与高斯和框架下轨道不确定性传播方法综述. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2025, 55: 294501
Sun P, Li S. A review of uncertainty propagation methods within continuity equation and Gaussian mixture model frameworks (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2025, 55: 294501, doi: 10.1360/SSPMA-2024-0300

© 2025《中国科学》杂志社

维与强非线性动力学下的不确定性传播问题，由于违背模型线性化假设，会导致不确定性传播精度低，因此解析方法不再适用. 蒙特卡罗技术是用于非线性不确定性传播的基本方法. 该方法可以提供“真实的”不确定性传播结果，但是计算量很大；对于高维与强非线性动力学下的不确定性传播问题, 这点尤其明显.

为了减小蒙特卡罗方法下的计算量，文献中提出了许多非线性方法. Haler和Bhattacharya[10]的研究将所有的非线性不确定性传播方法分成两类：参数型方法与非参数型方法. 参数型方法通过传播统计矩实现不确定性传播；非参数型方法通过近似或者直接求解概率密度函数的动力学演变方程实现不确定性传播.

典型的参数型方法有线性协方差分析、无迹变换、状态转移张量、多项式混沌展开、微分代数等. 线性协方差分析方法的基本原理可简要表述为: $\dot{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}, \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, 其中$\mathbf{x}$是状态矢量, A是由泰勒级数展开取一阶项获得的真实状态相对于标称状态的一阶状态转移矩阵, n是状态空间维度; 假定初始时刻的高斯型密度分布(均值$\bar{\mathbf{x}}$, 协方差矩阵P), 然后基于均值与协方差矩阵的微分方程完成数值传播：$\dot{\bar{\mathbf{x}}}=A\mathbf{x}$, $\dot{P}=A^{\mathrm{T}}P+PA$[9]. 尽管该方法的计算量较小，具有潜在的星上应用价值，但是对于强非线性系统或者长期密度传播问题，往往存在较大的计算误差，因此线性协方差分析方法不再适用. 无迹变换方法最早是由Julier和Uhlmann[11]提出，用于非线性传播密度分布的均值与协方差矩阵. 基于无迹变换方法，需要从密度分布中选取一系列确定的样本点(即sigma点)来近似非线性传播后的密度分布均值与协方差矩阵. Tenne和Singh[12]的研究工作证实了基于无迹变换方法对统计矩的非线性传播至多可以达到第三阶. 因此对于长期非线性不确定性传播问题，仅基于无迹变换方法无法实现精确的密度传播. 不同于无迹变换方法，Park和Scheeres[13]基于高阶泰勒级数展开的思想，将线性协方差分析方法拓展到两阶以上非线性项，提出了基于状态转移张量的不确定性传播方法. 状态转移张量方法的主要思想是通过将真实状态相对于标称状态进行泰勒级数展开, 保留高阶非线性项, 推导出不确定性传播的各阶状态转移张量. 值得注意的是, 这些状态转移张量可以基于标称状态经非线性动力学传播求解；当求解出各阶状态转移张量后，基于代数运算就可以获得传播后密度的统计矩(例如均值与协方差矩阵)，因此该方法是半解析的，求解效率较高. 基于状态转移张量方法实现不确定性传播需要保证非线性动力学系统连续可微, 且需要推导动力学方程的高阶偏导数(高阶偏导数推导复杂，计算难度大). 尽管状态转移张量方法相比于无迹变换方法可以实现对更高阶统计矩的传播，但是基于状态转移张量方法无法传播概率密度函数, 因此对于强非线性系统或者长期密度传播问题, 仅基于状态转移张量方法无法实现精确的密度传播. 基于多项式混沌展开方法[14]实现不确定性传播的主要思想是：基于特定的正交多项式来近似非线性动力学系统对输入不确定性的响应，用少量样本点的响应结果来求解多项式逼近的系数，建立输出不确定性与输入不确定性的映射关系. 相比于无迹变换方法，多项式混沌展开方法可以计算非线性传播后不确定性分布的高阶矩或完整的概率密度函数. 值得注意的是, 基于多项式混沌展开方法实现不确定性传播的关键[14]在于求解多项式级数展开的系数. 尽管多项式混沌展开方法及其变体方法(例如任意多项式混沌展开[15]、多元广义多项式混沌展开[16])相比于无迹变换方法可以实现对高阶统计矩或概率密度函数的非线性传播, 但是多项式混沌展开方法的系数会随着不确定性维度与多项式阶数呈指数型增长(即维数灾难). 对于高维与强非线性问题，自动阈值分割方法[17,18]能够通过减小对应于初始高斯分布的协方差矩阵所描绘的不确定性区域, 提高不确定性传播技术的精度. 基于微分代数实现密度传播需要依赖以下前提，即基于单次泰勒展开积分可以实现对初始时刻较小不确定性阈值的精确传播(即针对初始时刻的较小不确定性阈值, 泰勒展开式具有良好的收敛性能). Armellin等人[19]在考虑观测不确定性的条件下，基于微分代数技术高效完成了Apophis小行星交会与潜在碰撞概率分析. 孙振江[20]基于微分代数方法，研究建立了一套非线性轨道偏差高阶演变分析方法体系. 值得注意的是，针对长期传播后且在强非线性动力学作用下呈现的较大不确定性阈值，很难保证基于微分代数方法求解长期密度传播问题的适用性与稳定性.

典型的非参数型方法有基于连续方程(或密度演变方程)框架的混合方法、基于高斯和模型框架的混合方法(例如高斯和模型-无迹变换方法). 前者将概率密度的传播看作具有连续介质的流体来直接传播概率

密度函数, 能够基于特征方法[21]同时传播状态空间动力学与概率密度函数. 后者利用所有子高斯分量前两阶统计矩(均值与协方差矩阵)的加权和来近似非高斯型概率密度函数, 能够实现解析计算密度. 由于所有的统计矩都能够由概率密度函数推导出, 基于非参数型方法, 可以利用概率密度函数的演变得到任意时刻的所有不确定性信息.

图1分类总结了不同非线性不确定性传播方法, 包括用于求解常规非线性问题的常规非线性不确定性传播方法(参数型、非参数型方法)、求解长期不确定性传播问题的长期非线性不确定性传播方法(主要包括非参数型方法)以及高维或强非线性问题下引入不同方法框架的实用技术.

连续方程方法最初是在流体力学中提出的, 作为质量守恒定律在流体力学中的表达形式. 不同于蒙特卡罗方法(即需要对大量的随机样本完成同样大量次数的仿真), 连续方程方法下只需要对有限少量的随机样本进行同样有限少量次数的仿真, 就可以得到整体目标的概率密度演变结果. 相比于蒙特卡罗方法, 连续方程方法的计算量小得多. 连续方程方法的精度主要取决于动力学非线性程度、插值方法与分箱方法的性能. 插值方法用于对传播后随机样本的密度权值进行插值, 分箱方法用于处理插值结果并计算密度. 非参数型方法中, 除了连续方程框架下的不确定性传播方法, 近些年高斯和模型框架下的不确定性传播方法也被广泛研究. 高斯和模型方法的主要思想是由有限的子高斯概率密度函数的加权和来近似任意的概率密度函数. 理论上来说, 当子高斯分量数目足够大时, 组合的概率密度函数能够表征真实的概率密度函数.

本文将关注于非参数型不确定性传播方法, 综述连续方程框架与高斯和模型框架下的轨道不确定性传播方法研究进展. 首先, 从连续方程、插值方法、分箱方法三方面梳理连续方程框架下不确定性传播方法研究现状, 总结连续方程下的密度计算流程. 其次, 从高斯和模型、基于高斯和模型框架的混合方法两方面分析高斯和模型框架下不确定性传播方法发展脉络, 总结高斯和模型框架下的密度计算流程. 然后, 比较两种框架下求解轨道不确定性传播问题的数学本质、精度与效率差异. 最后, 总结基于两种框架求解轨道不确定性传播问题的主要特征与优势, 给出未来研究工作展望.

2　连续方程框架下不确定性传播方法

为了分析连续方程框架下不确定性传播方法研究现状, 本节将依次介绍连续方程、插值方法、分箱方法的数学模型、物理意义与研究进展, 最后给出连续方程框架下的密度计算流程.

2.1　连续方程

假设n是特定问题下需要求解的密度, 其密度演变方程可以写为如下形式[22]:

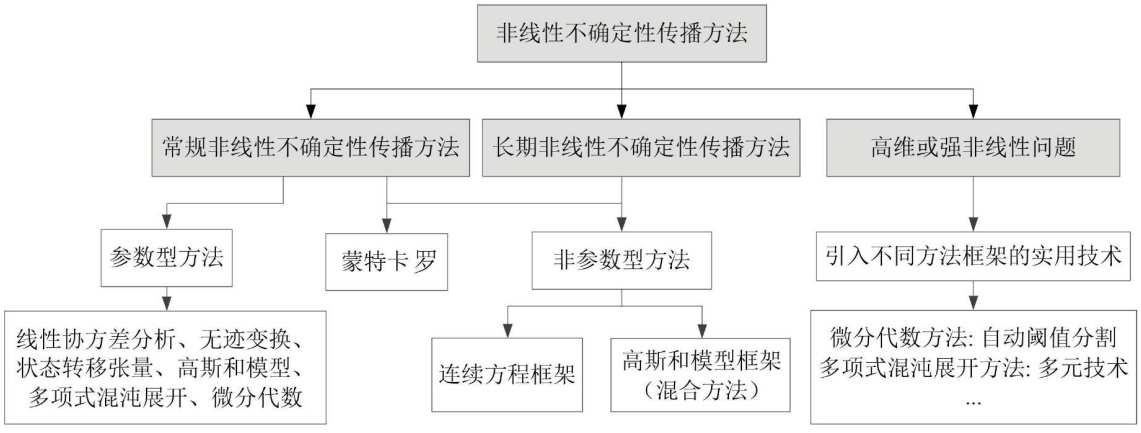

图 1　不确定性传播方法分类图解: 常规非线性不确定性传播方法、长期非线性不确定性传播方法以及高维或强非线性问题下引入不同方法框架的实用技术

Figure 1　Illustration of uncertainty propagation methods: conventional uncertainty propagation methods, long-term uncertainty propagation methods, and practical techniques introduced for different method frameworks for high-dimensional or highly nonlinear problems.

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{f}=\dot{n}^{+}-\dot{n}^{-}, \tag{1}$$

其中$\nabla\cdot\mathbf{f}$表示动力学系统下要考虑的连续型加速度项(例如地球扁率、太阳辐射压力), $\dot{n}^{+}-\dot{n}^{-}$表示要考虑的非连续型加速度项(例如脉冲推力). 基于密度演变方程实现密度传播的主要思想是将密度视为具有连续属性的流体, 在所考虑的动力学下会发生变化. 如式(1)所示, 密度演变方程表征了连续体的全导等于进出该区域的变化率, 在流体力学中它描述了连续体的质量守恒.

给定m个广义变量α_i, $i\in\{1,\cdots,m\}$, 假设密度n对所有的广义变量处处可微[23], 式(1)可在广义坐标下重写为如下形式:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial n}{\partial\alpha_1}v_1+\cdots+\frac{\partial n}{\partial\alpha_m}v_m\\&+\left[\frac{\partial v_1}{\partial\alpha_1}+\cdots+\frac{\partial v_m}{\partial\alpha_m}\right]n=\dot{n}^{+}-\dot{n}^{-},\end{aligned} \tag{2}$$

其中v_i是连续型加速度项$\nabla\cdot\mathbf{f}$的第i个分量. 如果不考虑非连续型加速度项, 即$\dot{n}^{+}-\dot{n}^{-}=0$, 在这种情况下, 通过应用特征方法[24], 可以得到如下所示的常微分方程[23]:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=1,\\ \dfrac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}s}=v_1(\alpha_1,\cdots,\alpha_m),\\ \vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}\alpha_m}{\mathrm{d}s}=v_m(\alpha_1,\cdots,\alpha_m),\\ \dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}=-\left[\dfrac{\partial v_1}{\partial_{\alpha_1}}+\ldots+\dfrac{\partial v_m}{\partial_{\alpha_m}}\right]n(\alpha_1,\ldots,\alpha_m,t),\end{cases} \tag{3}$$

其中s表示对特征线的参数化. 从式(3)可以看出, 给定所研究问题的特定运动方程, 即给定v_i的实际表达式, 通过数值积分, 可以同时得到密度$n(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,t)$与状态变量$\alpha_i$的传播结果. 除了通过数值方法求解密度演变方程, 还可以找到特定问题下的解析解[25].

本节关注于在连续方程框架下的不确定性传播方法. 值得注意的是, 基于连续方程框架, 我们可以在给定状态空间初始条件与密度空间初始概率密度函数的情况下, 通过直接传播密度的演变方程得到在任意时刻t的非线性传播后的非高斯型概率密度函数(见式(3)).

基于连续方程框架求解轨道不确定性传播问题的思想最早由Heard[26]提出, 他将连续方程方法从恒星动力学领域搬到空间碎片建模领域, 以空间目标解体后碎片云整体的密度分布为研究对象, 提高了碎片云密度演变求解效率. 在行星际尘埃演变领域, 为了高效分析行星际尘埃云团的转移及长期动力学演变, 相比于传统的蒙特卡罗方法, Gor'kavyi等人[22]基于连续方程框架, 在轨道要素(半长轴a与偏心率e)表征的平面空间下增加考虑了引力散射效应, 提高了对行星际尘埃演变问题的求解精度与求解效率. 在低地球轨道研究领域, McInnes[27]先是基于连续方程框架研究了多种摄动项作用下碎片密度的长期演变特征. 之后, 为了研究大规模纳米卫星星座数量密度的长期演变特征, McInnes[25]基于连续方程框架, 同时考虑大气阻力、星上卫星失效与新卫星布置的影响, 在物理空间下(卫星到中心天体距离r与时间t)推导出了表征星座数量密度长期演变的解析方程, 提高了对纳米卫星星座长期动力学演变的研究效率. 为了研究成群高面质比航天器的长期动力学演变特征, Colombo和McInnes[28]主要考虑太阳辐射压力与地球扁率的半解析耦合摄动影响, 基于连续方程推导出了成群"Smart Dust"航天器数量密度的长期演变方程, 在平面哈密顿相空间(由轨道要素表征的状态空间)下给出了成群"Smart Dust"航天器数量密度关于不同动力学模型与不同初始条件(半长轴a, 太阳角ϕ与偏心率e; 同时包括不存在相空间分岔与存在相空间分岔两种情况)的演变结果, 初步实现了对成群高面质比航天器相空间哈密顿动力学及其数量密度分布的表征. 基于Colombo和McInnes[28]的研究工作, Letizia等人[23,29,30]在连续方程框架下对低地球轨道小型(< 10 cm)碎片云的长期密度演变进行了多维扩展研究, 包括考虑大气阻力对低地球轨道空间的影响[29], 增加考虑地球扁率对低地球轨道空间的影响[23], 额外考虑碎片面质比与偏心率的影响提高对大气阻力摄动项的建模精度[23]. 为了评估空间碎片解体后果, Frey[31]结合连续方程与高斯和代理模型高效完成了空间目标碰撞概率分析. 针对火星大气再入不确定性传播问题, Trisolini和Colombo[32]基于连续方程框架同时考虑了初始状态变量不确定性与动力学模型参数(包括卫星的弹道系数参数与大气密度参数)不确定性, 有效提高了再入不确定性表征精度. 针对大面质比卫星被动离轨背景下的相空间长期密度传播问题, 为了进一步提高连续方程框架下的密

度传播精度，Sun等人[33]先是提出了强非线性密度传播的形状插值方法，准确表征了高度变形与延长的非线性密度分布，提高了密度传播精度与计算效率. 之后，针对分岔型相空间长期密度传播问题，Sun等人[34]提出了多分支插值方法，准确表征了分岔情况下呈现更强变形与延长特征的非线性密度分布，提高了对该问题的求解精度与效率.

表1总结了基于连续方程框架求解轨道不确定性传播问题的主要研究方向与特点, 从中可以看出, 随着连续方程方法在不同研究方向的深入应用，为了提高轨道不确定性传播精度与求解效率，相关文献研究特点主要体现在以下三个方面:

(1) 非线性动力学模型, 简单模型→涵盖多种摄动项的高精度模型;

(2) 不确定性类型，状态空间不确定性→状态空间、动力学参数、控制参数不确定性;

(3) 插值方法与分箱方法, 传统插值方法与分箱方法→改进型插值方法与分箱方法.

通过提高非线性动力学模型精度、增加不确定性类型、改进插值方法与分箱方法性能，可以获得更高的轨道不确定性传播精度，从而保证相关任务仿真结果的可靠性. 值得注意的是，当增加动力学模型非线性与不确定性类型时，将不可避免地导致动力学传播效率降低与不确定性计算难度增加的问题. 为了提高非线性动力学求解效率，半解析方法[28,33–35]提供了一种高效方式来分析轨道摄动的影响. 此外，为了提高强非线性动力学下的不确定性计算精度，还需要继续改进插值方法与分箱方法性能[32–34].

2.2　插值方法

(1) Delaunay三角网线性插值

对于常规的非线性密度传播问题，通常采用基于Delaunay三角网[36]的线性插值技术. 该方法的主要优势在于能够保留三角网结点处的离散样本数据. 通常情况下，随着离散样本数量的增加，线性插值结果的质量也会更高. 值得注意的是, 对于基于Delaunay三角网的线性插值方法，插值是在离散样本数据的整个凸包内完成的. 对于呈现非凸型形状的强非线性密度分布, 该方法的插值结果较差[32,33,37].

(2) Alpha形状三角网线性插值

对于呈现非凸型形状的强非线性密度分布，已有文献主要通过引入Alpha形状的概念来在包含所有样本的非凸包内获得精确的密度插值结果. 不同于Delaunay三角网线性插值方法，基于Alpha形状插值方法[38]可以跟随状态空间真实分布形状的演变，从而提高插值精度. 值得注意的是，对于Alpha半径r_a的数值的选择非常重要, 因为它决定了Alpha形状三角网对真实密度分布形状的表征精度. Trisolini和Colombo[32]基于微分进化搜索算法确定Alpha半径值, 尽管可以快速收敛，但解的最优性仍然依赖于特定测试集的选取.

表 1　基于连续方程框架求解轨道不确定性传播问题的主要研究方向与研究特点

Table 1　Main research directions and features for uncertainty propagation within continuity equation framework

研究作者	研究单位	研究方向	研究特点
Heard[26]	美国海军研究实验室	空间碎片建模	首次将连续方程方法从恒星动力学领域搬到空间碎片建模领域
Gor'kavyi等人[22]	克里米亚天体物理观测台	行星际尘埃云团演变	动力学模型扩展: 增加考虑引力散射效应
McInnes[25]	格拉斯哥大学	纳米卫星星座数量密度的长期演变	推导出数量密度演变的解析方程
Colomb和McInnes[28]	思克莱德大学	成群"Smart Dust"航天器数量密度的长期演变	初步研究高面质比航天器相空间哈密顿动力学及其数量密度分布特征
Letizia等人[23,29,30]	南安普顿大学	低地球轨道小型碎片云的长期密度演变	动力学模型扩展: 增加考虑大气阻力、地球扁率影响, 且考虑动力学模型参数影响
Frey[31]	米兰理工大学	空间目标碰撞概率分析	结合连续方程与高斯和代理模型完成碰撞概率分析
Trisolini和Colombo[32]	米兰理工大学	火星大气再入不确定性传播问题	同时考虑初始状态变量不确定性与动力学模型参数不确定性
Sun等人[33,34]	南京航空航天大学、米兰理工大学	大面质比卫星被动离轨背景下的相空间长期密度传播问题	改进插值方法与分箱方法, 分别求解非分岔与分岔问题下呈现高度变形与延长特征的密度分布

Sun等人[33,34]通过二分法对不同的r_a数值进行测试, 来确定最适合研究案例的Alpha半径r_a, 但是这同样难以保证所选数值的最优性. 理论上而言, 样本数量$N_{\rm sam}$越大, 所得到的Alpha形状三角网对密度空间演变形状的表征精度会越高. 值得注意的是, 对样本数量$N_{\rm sam}$与网格数量$N_{\rm grid}$的选择非常重要, 因为它们影响插值后的密度精度与计算效率. Sun等人[33,34]的研究通过权衡密度精度与计算效率, 选择合适的样本数量$N_{\rm sam}$与网格数量$N_{\rm grid}$.

图2展示了文献[33]中基于场景1样本分布(见图2(a))给出的Delaunay三角网插值方法与Alpha形状三角网插值方法下线性插值的对比结果(预定义Alpha半径值r_a = 2). 从中可以看出, 对于呈现高度变形与延长特征的非凸型密度分布, 基于Delaunay三角网插值方法, 得到的插值结果局限于离散样本的整个凸型形状内(见图2(b)). 对比之下, 基于Alpha形状三角网插值方法, Sun等人[33]获得了包含样本的紧凑的Alpha形状三角网(见图2(c)), 提高了插值精度.

(3) 多分支Alpha形状线性插值

为了提高分岔型问题下呈现更强变形与延长特征的密度分布表征精度, Sun等人[34]提出了多分支插值方法, 该方法由多分支技术与Alpha形状插值方法结合而成, 主要思想是将整体高度变形与延长的密度分布分割成多个密度分布分支, 然后依次对每个分支执行基于Alpha形状三角网的线性插值.

类似地, Sun等人[34]将多分支技术引入到Delaunay三角网插值方法中, 构成基于多分支Delaunay三角网的线性插值方法.

图3展示了文献[34]中基于分岔场景下样本分布(见图3(a))分割出的4个密度分布分支(见图3(b)), 同时给出了多分支Delaunay三角网插值方法与多分支Alpha形状三角网插值方法下线性插值的对比结果(预定义Alpha半径矢量$\mathbf{r}_a$ = {1, 0.03, 15, 15}). 可以看出, 对于分岔场景下整体高度变形与延长的密度分布, 基于多分支Alpha形状插值方法可以获得更高的插值密度精度.

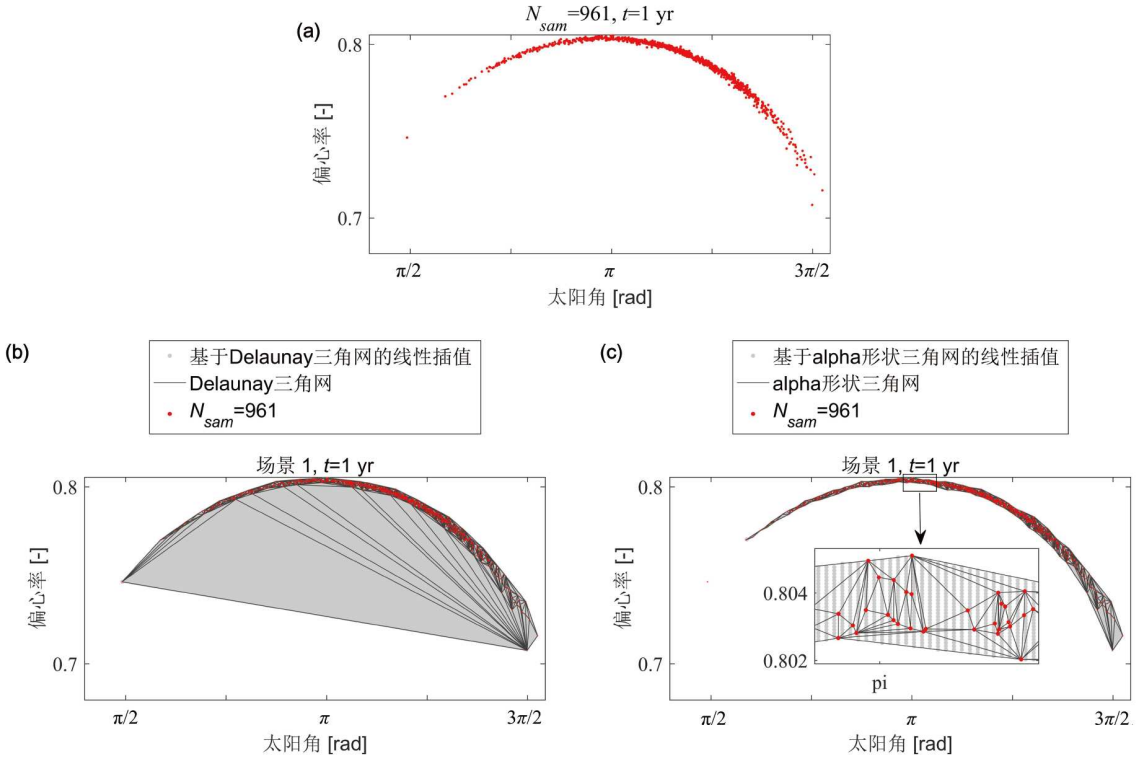

图 2　(网络版彩图)文献[33]场景1下(a) 样本分布(红色实心圆点), $N_{\rm sam}$ = 961; (b) Delaunay三角网线性插值结果; (c) Alpha形状三角网线性插值结果

Figure 2　(Color online) (a) Sample distribution (red solid points), $N_{\rm sam}$ = 961, (b) Delaunay triangulation-based linearly interpolated density, (c) Alpha shape triangulation-based linearly interpolated density, for scenario 1 in ref. [33].

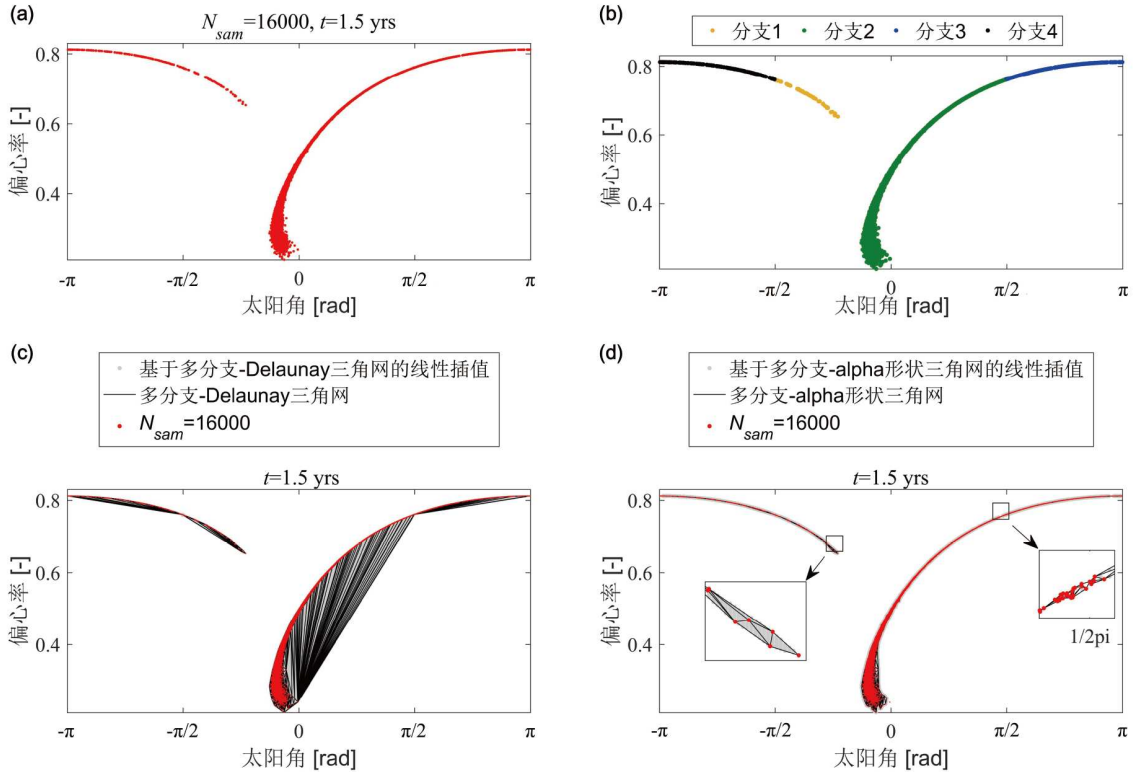

图 3　(网络版彩图)文献[34]分岔场景下的 (a) 样本分布($N_{\rm sam}$ = 1.6×10^4); (b) 多分支技术: 四分支分割结果; (c) 多分支Delaunay三角网线性插值结果; (d) 多分支Alpha形状三角网线性插值结果

Figure 3　(Color online) (a) Sample distribution ($N_{\rm sam}$ = 1.6×10^4), (b) multi-segment method: four-segment division result, (c) multi-segment Delaunay triangulation-based linearly interpolated result, and (d) multi-segment Alpha shape triangulation-based linearly interpolated result, for the bifurcation case in ref. [34].

2.3　分箱方法

假设由两个自变量α_i, $i\in\{1,2\}$定义一个广义二维问题, 给定在特定时刻t以矢量形式 ($\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $n(\alpha_1, \alpha_2, t)$)表征下的插值结果. 分箱方法的主要思想是将插值后的密度权重$n(\alpha_1, \alpha_2, t)$划分到以矢量形式($\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$)表征的二维平面均匀分割的箱格中.

基于定义的平面箱格,联合概率密度可以算作是每个箱格面积下加权的密度权重均值[37]. 当求得联合概率密度后, 一个维度下的边缘概率密度可以通过在另一个维度的整个值域内积分联合概率密度获得(见文献[37]的式(13)). 边缘概率密度表征了每个箱格宽度下加权的密度权重均值[37].

针对相空间呈现高度变形与延长分布特征时难以实现精确密度传播的问题, Sun等人[33,34]提出了一种改进型分箱方法, 该方法将联合与边缘概率密度分别计算成是每个分箱面积与每个分箱宽度下密度权值的加权和(见文献[33]的式(7)和(8)), 该方法通过考虑单个分箱面积下每个Alpha形状三角网的权重与每个Alpha形状三角网下密度权值的非线性变化特征提高了密度计算精度.

值得注意的是, 对于非平面问题, 上述分箱方法仍然适用于计算密度[32].

2.4　连续方程框架下密度计算流程

假定一个平面密度传播问题(包含广义变量α_1与α_2), 仅考虑初始时刻的状态空间不确定性, 为了获得连续方程方法下的密度, 需要完成以下4个步骤, 具体密度计算流程如下.

(1) 基于给定的初始时刻密度分布生成二维空间内预定义样本数量下的随机样本.

(2) 计算初始时刻对应于样本的概率密度权重. 由此可以获得三维增广状态空间(α_1, α_2, n)下由二维空间(α_1, α_2)内样本及其对应密度权重构成的初始时刻增广样本.

(3) 同时积分式(3)最后一行的密度演变方程与非线性动力学系统运动方程，获得三维状态空间下由二维空间(α_1, α_2)内末端时刻样本及其对应密度权重构成的末端时刻增广样本.

(4) 利用线性插值方法(见2.2节)与分箱方法(见2.3节)共同完成密度计算.

图4给出了连续方程框架下的密度计算过程图解，其中主要展示了密度传播、线性插值(密度插值)、分箱方法(密度计算)三个步骤. 针对特定研究问题的密度求解过程可以通过参考McInnes[27]、Letizia[23,30]、Trisolini和Colombo[32]、Sun等人[33,34,37]的研究. 对于非平面问题[32]，尽管计算难度与计算量会显著增加，上述密度计算流程仍然适用.

3　高斯和模型框架下不确定性传播方法

为了分析高斯和模型框架下不确定性传播方法研究现状，本节将依次介绍高斯和模型、基于高斯和模型框架的混合方法，最后给出高斯和模型框架下的密度计算流程.

3.1　高斯和模型

为了在高斯和模型框架下解决密度传播问题，本节依次介绍标准的高斯分布与高斯和模型方法来说明两者之间的关系.

(1) 高斯分布

高斯分布可以由前两阶统计矩完全确定. 给定在任意时刻t的n维连续型高斯随机矢量$x\in\mathbb{R}^n$，及其均值$\mathbf{m}\in\mathbb{R}^n$与协方差矩阵$\mathbf{P}=\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$，该随机矢量的高斯型概率密度函数可确定为[39]

$$p_g(\mathbf{x},t;\mathbf{m},\mathbf{P}) = \frac{1}{|2\pi\mathbf{P}|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\right\}, \tag{4}$$

其中符号$|\cdot|$用于计算矩阵行列式.

(2) 高斯和模型

高斯和概率密度函数(即高斯和模型，GMM)是有限个子高斯分量概率密度函数加权和下的组合结果[40]，即

$$p(\mathbf{x},t;\mathbf{m}_c,\mathbf{P}_c) = \sum_{i=1}^{L}\alpha_i p_g(\mathbf{x},t;\mathbf{m}_i,\mathbf{P}_i), \tag{5}$$

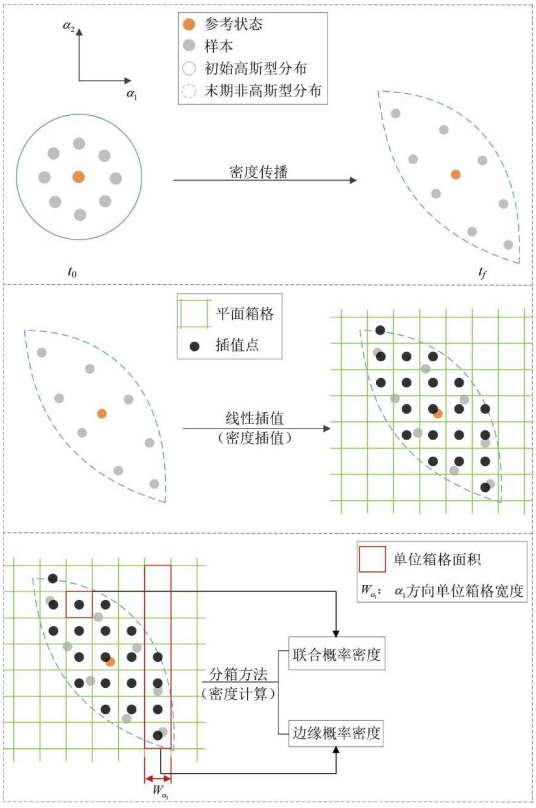

图 4　(网络版彩图)连续方程框架下密度计算图解

Figure 4　(Color online) Illustration for the density calculation within the continuity equation framework.

其中$p(\mathbf{x},t;\mathbf{m}_c,\mathbf{P}_c)$是在任意时刻$t$的组合概率密度函数，$\mathbf{x}$是状态矢量，$\mathbf{m}_c$与$\mathbf{P}_c$分别是组合均值与协方差矩阵，$L$是子高斯分量数目，$\alpha_i$，$\mathbf{m}_i$与$\mathbf{P}_i$分别是第$i$个子高斯分量的权重，均值与协方差矩阵，$\alpha_i>0$，$\sum_{i=1}^{L}\alpha_i=1$(用于保证整个自变量定义域内概率密度函数的正定性与正则性，即概率密度函数曲线下的总面积为单位1[41]).

本节关注于高斯和模型框架下的不确定性传播方法. 值得注意的是，基于高斯和模型框架，我们可以在给定状态空间初始条件与密度空间初始条件的情况下，获得在任意时刻t的非线性传播后的非高斯型概率密度函数的近似结果，即基于所有子高斯分量前两阶统计矩的加权和来近似任意时刻的非高斯型概率密度函数(见式(5)).

3.2　基于高斯和模型框架的混合方法

为了介绍基于高斯和模型框架的混合方法，本节将先介绍高斯分量分割与融合方法，然后介绍前两阶

统计矩的非线性传播方法.

(1) 高斯分量分割与融合方法

为了在高斯和模型框架下近似任意多变量高斯分布，文献[41–43]已经开发了多种单变量分割库，用于提供均值、权重与标准差参数集来近似一维标准高斯分布. 分割结果以由分割数量$N_{1\mathrm{d}}$、均值$m_{i1\mathrm{d}}$、权重$\omega_{i1\mathrm{d}}$与标准差σ组成的参数集的形式提供，即$\{N_{1\mathrm{d}},\ m_{i1\mathrm{d}},\ \omega_{i1\mathrm{d}},\ \sigma\}$, $i\in\{1,\ \cdots,\ N_{1\mathrm{d}}\}$(下标“1d”表征一维；下标“$i$1d”表征第$i$个分量的分割结果，包含权重、均值与协方差矩阵). Alspach和Sorenson[40]最早应用高斯和模型方法解决非线性贝叶斯滤波问题. 其研究证实，对于常规的非线性动力学，利用对应于大量子高斯分量的权重、均值与协方差矩阵，能够精确表征非高斯型不确定性分布. 为了获得最优的分割库参数，通常要求解一个最小化L_2距离(表征真实概率密度函数与高斯和模型框架下组合后概率密度函数间的欧氏距离)的非线性约束规划问题. DeMars等人[41]将所有子高斯分量的均值、权重、标准差作为优化变量，提供了一种优化求解思路，给出了分割数量$N_{1\mathrm{d}}=3$与$N_{1\mathrm{d}}=5$(见文献[41]的表1和2)两个分割库参数. Vittaldev和Russell[42]考虑子高斯的对称性，将优化变量减少为$N_{1\mathrm{d}}-1$个，且假设标准差σ为$N_{1\mathrm{d}}$的函数，考虑三种分割规则(规则一: $\sigma^2=(1/N_{1\mathrm{d}})$; 规则二: $\sigma^2=(1/N_{1\mathrm{d}})^{3/4}$; 规则三: $\sigma^2=(1/N_{1\mathrm{d}})^{1/2}$)，提供了分割数目$N_{1\mathrm{d}}$为奇数的分割库参数，其中分割规则一下达到了最大分割数量$N_{1\mathrm{d}}=39$. 杨震[43]参照DeMars等人[41]、Vittaldev和Russell[42]的研究工作，通过最小化L_2距离，建立了单变量分割库的优化模型，通过对称性处理将优化变量减少为$N_{1\mathrm{d}}$个，且该模型不限定$N_{1\mathrm{d}}$为奇数.

为了将单变量分割库应用于多变量不确定性传播问题，首先需要确定分割方向. 通常情况下，选择非线性最强的方向进行分割. 光谱分解法经常被用于确定应用单变量分割库的光谱方向(即协方差矩阵的特征向量方向). 为了拓展应用单变量分割库的方向而不受限于光谱方向，Vittaldev和Russell[42]提出了一种多方向高斯和模型方法，能够将单变量分割库应用于任意方向，用来计算空间目标碰撞概率. 值得注意的是，对于高度非线性问题，沿着单个方向分割(即光谱方向或根据非线性量度[42]确定的任意方向)可能不足以降低所研究问题的整体非线性. 因此，为了更好地近似非线性传播后的非高斯型分布，Vittaldev和Russell提倡将初始多变量不确定性分布沿着多个方向进行分割[42]. 在高斯和模型框架的早期发展历程中，不确定性传播期间子高斯分量的权重与数量均为常值.

为了进一步增强高斯和模型方法用于非线性动力学下不确定性传播的适用性，已经有文献研究调整子高斯分量权重[44–46]与数量(通过分量分割或融合[41,47,48])的自适应算法. Terejanu等人[44]提出了两种不同的方法来更新子高斯分量的权重(自适应高斯和模型方法，AGMM): 第一种方法通过最小化真实概率密度函数与组合后概率密度函数间的积分平方差来更新权重，第二种方法通过使高斯和概率密度函数满足Fokker-Planck-Kolmogorov方程(连续时间系统)或Chapman-Kolmogorov方程(离散时间系统)来更新权重，所提方法有效提高了组合后概率密度函数精度. 在文献[44]基础上，Terejanu等人[45]针对非线性贝叶斯估计问题应用了自适应高斯和滤波器，获得了更优的状态估计值与更高精度的状态概率密度函数；Vishwajeet等人[46]重点研究了在两次观测时间间隔内更新子高斯分量权重的方法. 不同于上述研究工作，DeMars等人[41]提出了一种基于微分熵的自适应高斯和信息合成方法(AEGIS)用于非线性不确定性传播. 基于该方法，能够在不确定性传播期间通过非线性监测捕获不确定性分布的曲率特征，且可以利用预定义的微分熵偏差阈值，触发应用于协方差矩阵主导特征值方向的分量分割. Vishwajeet和Singla[47]基于Kolmogorov方程误差同时考虑子高斯分量分割与融合，提高了对低地球轨道卫星运动不确定性传播问题的求解精度. 在DeMars等人[41]研究工作基础上，Sun等人[48]针对强非线性相空间动力学的精确密度传播问题，提出了一种混合型高斯和分割技术(MDAES)，该方法由初始时刻的多方向分割技术与不确定性传播期间基于微分熵的自适应分割技术结合而成，解决了AEGIS方法下子高斯分量分布于所有的状态变量甚至偏离真实不确定性分布的问题，实现了对呈现高度变形与延长密度分布特征的强非线性密度传播问题的高精度求解.

(2) 前两阶统计矩的非线性传播方法

基于高斯和模型框架的不确定性传播问题求解特征是能够利用子高斯分量前两阶统计矩的加权和近似非线性概率密度，从而实现解析计算密度. 假设已知高斯分量分割与融合后的所有子高斯分量权重、均值与协方差矩阵，可以利用无迹变换、状态转移张量、多

项式混沌展开、微分代数等非线性方法传播对应于每个子高斯分量的前两阶统计矩.

对于常规的非线性不确定性传播问题, 基于高斯和模型-无迹变换[41,48]、高斯和模型-状态转移张量[5,43,49]、高斯和模型-多项式混沌展开[50]、高斯和模型-微分代数[51]等混合方法能够实现不确定性的有效精确传播, 这些混合方法同时结合了高斯和模型与其他非线性不确定性传播方法的优点. DeMars等人[41]和Sun等人[48]的研究均基于无迹变换方法来高效传播对应于所有子高斯分量的前两阶统计矩. 相比于蒙特卡罗方法, 基于无迹变换方法传播前两阶统计矩的计算效率更高, 所需sigma点数量至多为$(2\cdot n+1)$, 其中n是问题维度. 针对空间目标碰撞评估问题, Fujimoto和Scheeres[49]首次结合了高斯和模型与状态转移张量方法来精确传播状态空间不确定性, 相比于蒙特卡罗方法, 该混合方法显著提高了非线性不确定性传播效率. 在文献[49]基础上, 针对J_2摄动型椭圆轨道附近卫星相对运动问题, Yang等人[5]对相对状态变量增加考虑了校正因子, 推导了考虑脉冲机动的状态转移张量, 结合高斯和模型方法与状态转移张量方法实现了非线性不确定性的精确高效传播. 基于状态转移张量方法传播前两阶统计矩的优势在于状态转移张量只需要(基于非线性动力学方程)计算一次, 且不依赖于初始时刻的不确定性分布. Vittaldev等人[50]首次结合了高斯和模型与多项式混沌展开方法来研究轨道不确定性传播问题, 相比于单独应用多项式混沌展开方法, 结合高斯和模型方法帮助降低了实现不确定性精确传播所需的多项式混沌展开式的阶次与计算成本. 该方法的提出对于单独应用多项式混沌展开方法难以求解的轨道不确定性传播问题具有重要参考意义. 相比于无迹变换与状态转移张量方法, 基于多项式混沌展开方法传播前两阶统计矩的主要思想是: 基于特定的正交多项式来近似非线性动力学系统对输入不确定性的响应, 用少量样本点的响应结果来求解多项式逼近的系数, 建立输出不确定性与输入不确定性的映射关系. 类似地, 为了实现非线性轨道不确定性的精确传播, Sun等人[51]首次结合了高斯和模型与微分代数方法来精确传播状态空间不确定性, 不同于无迹变换、状态转移张量、多项式混沌展开方法, 基于微分代数方法可以获得不确定性传播期间的高阶统计矩, 从而精确捕获传播后不确定性分布的非高斯型特征.

对于呈现高度变形与延长分布特征的强非线性密度分布, 为了实现不确定性的精确传播, 还需要增加考虑初始时刻或者密度传播期间的高斯分量分割或融合方法(见3.2节第(1)部分), 或者考虑分割方向足够全面(即不仅考虑非线性最强方向的分割, 还要增加考虑其他非线性方向的分割)且分割数值足够大的初始时刻高斯分量分割数量, 这有助于减小子高斯分量所对应的不确定性分布区域, 从而在更长传播时间内保证不确定性的精确传播. 例如, 针对强非线性相空间动力学精确密度传播问题, Sun等人[48]在基于自适应高斯和模型分割方法实现精确密度传播的基础上, 不仅增加考虑了初始时刻的多方向分割技术, 同时考虑了数值较大的初始时刻高斯分量分割数量, 从而实现了对呈现高度变形与延长特征的强非线性密度分布的精确表征.

3.3　高斯和模型框架下的密度计算流程

假定一个平面密度传播问题(包含变量x_1与x_2), 仅考虑初始时刻的状态空间不确定性, 为了获得高斯和模型框架下的密度, 需要完成以下4个步骤:

(1) 确定初始时刻t_0分割技术(包括分割方向、分割数量), 基于初始时刻密度分布获得初始时刻分割出的L个子高斯分量(式(5));

(2) 确定前两阶统计矩的非线性传播方法(例如, 无迹变换、状态转移张量等), 计算对应于所有子高斯分量的非线性传播后的前两阶统计矩;

(3) 根据所研究问题的非线性程度, 确定是否要在不确定性传播期间触发自适应分量分割(或融合), 如果要在不确定性传播期间触发分量分割(或融合), 还需要确定: 1) 自适应分割(或融合)的方向与数量, 2) 用于监测密度不确定性的非线性量度, 3) 触发分量分割(或融合)的条件;

(4) 先由式(5)计算末端时刻t_f组合后的联合概率密度, 再利用对应于所有子高斯分量的均值与协方差矩阵, 计算边缘概率密度.

图5给出了高斯和模型框架下的密度计算过程图解, 其中主要展示了三种初始时刻子高斯分量分割方法(包括单方向分割、不分割、多方向分割)、不确定性传播期间的子高斯分量自适应分割(或融合)方法. 实际应用中, 当基于高斯和模型框架求解轨道不确定性传播问题时, 需要根据问题的非线性程度确定合适

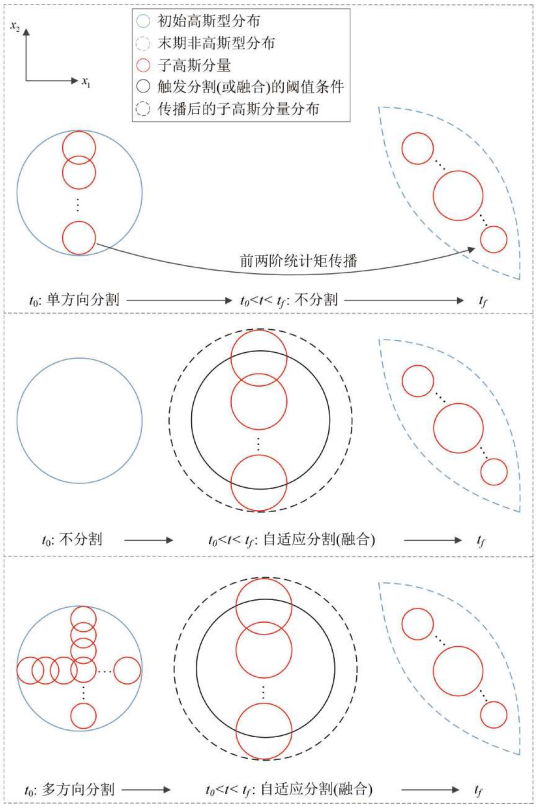

图 5　(网络版彩图)高斯和模型框架下密度计算图解

Figure 5　(Color online) Illustration for density calculation within the Gaussian mixture model framework.

的子高斯分量分割(或融合)方法以及用于传播前两阶统计矩的非线性方法. 值得注意的是, 当传播前两阶统计矩仍然无法捕获不确定性分布的强非线性特征时, 可以尝试基于微分代数等非线性方法传播子高斯分量的高阶统计矩[51].

4　两种框架方法的比较

基于连续方程框架的求解特征是从纯粹数值角度计算密度(类似于蒙特卡罗方法), 可以在密度演变期间了解动力学系统的本质非线性特征. 不同于连续方程框架, 基于高斯和模型框架的求解特征是能够利用子高斯分量前两阶统计矩的加权和近似非线性概率密度, 从而实现解析计算密度.

Sun等人[37]针对非分岔型相空间长期密度传播问题完成了连续方程与高斯和模型框架下的长期密度传播方法性能评估.

图6展示了文献[37]场景1下4个案例在时刻t={0, 0.5, 1, 1.5, 2} yr的联合概率密度集成图解(时间间隔dt = 0.5 yr), 包括蒙特卡罗(MC)、连续方程(DEE-961, 样本数量$N_{\rm sam}$ = 961)、连续方程(DEE-1E5, $N_{\rm sam}$ = 1×10^5)、高斯和模型-无迹变换(GMM-UT, 初始分割数量$N_{\rm ld}$ = 39), 其研究证实, 对于动力学非线性较强的情况(例如在时刻t = {1, 2} yr), 具有更大随机样本数目的连续方程方法(即案例DEE-1E5)要优于高斯和模型框架下的方法(即具有更高的密度精度), 但是相比于高斯和模型框架下的方法具有大得多的计算量. 对于动力学非线性较弱的情况(例如在时刻t = {0, 0.5, 1.5} yr), 高斯和模型框架下的方法与连续方程方法性能相当, 但是具有小得多的计算量. 对于前两阶统计矩的传播, 高斯和模型框架下的方法要优于连续方程方法(见文献[37]中的图6). 从密度精度方面来说, 当密度分布未呈现高度变形与延长的特征时, 连续方程与高斯和模型框架下的方法均适合求解非分岔型相空间长期密度传播问题. 从计算效率方面来说, 高斯和模型框架下的方法计算效率更高(见文献[37]中的表4). 这是因为高斯和模型框架下的计算量主要在于前两阶统计矩的非线性传播, 当涉及分量分割时, 可以基于文献中已有的单变量分割库来执行分量分割操作. 对于呈现高度变形与延长特征的强非线性密度分布, 需要分别基于连续方程框架改进线性插值方法与分箱方法、基于高斯和模型框架改进高斯和分割(或融合)技术与前两阶统计矩的非线性传播方法, 从而提高连续方程或高斯和模型框架下的密度计算精度与效率.

就问题适用性方面来说, 基于连续方程与高斯和模型框架的方法均可拓展到其他非线性动力学下的不确定性传播问题. 对于高维或强非线性问题, 为了在连续方程或高斯和模型框架下求解轨道不确定性传播问题, 需要基于不同方法框架引入一些实用技术(例如多分支技术[34]、混合型高斯和分割技术[48]), 从而提高不确定性的传播精度与效率.

5　总结

本文综述了连续方程与高斯和模型框架下的轨道不确定性传播方法研究进展. 基于连续方程框架的求解特征是从纯粹数值角度计算密度, 可以在传播期间保留非线性动力学系统的本质特征; 基于高斯和模型

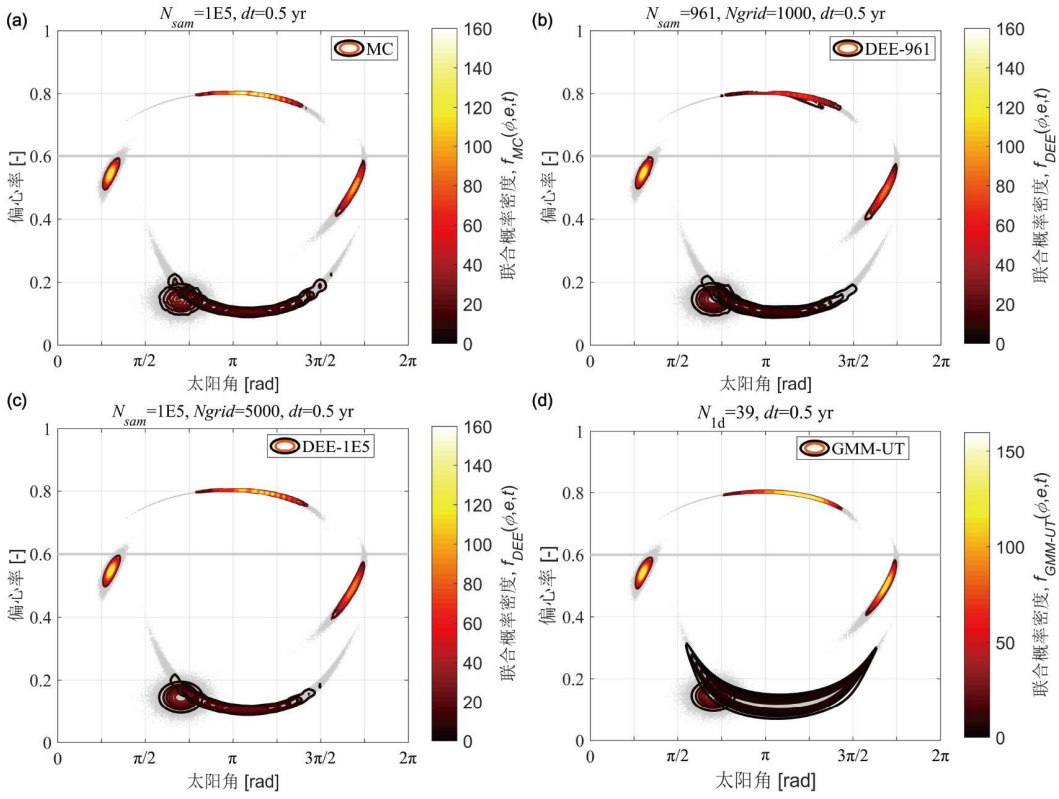

图 6　(网络版彩图)文献[37]场景1下4个案例在时刻t = {0, 0.5, 1, 1.5, 2} yr的联合概率密度集成图解(时间间隔dt = 0.5 yr), (a) 蒙特卡罗(MC), (b) 连续方程(DEE-961), 样本数量$N_{\rm sam}$ = 961, (c) 连续方程(DEE-1E5), $N_{\rm sam}$ = 1×10^5, (d) 高斯和模型-无迹变换(GMM-UT), 初始分割数量$N_{1\rm d}$ = 39

Figure 6　(Color online) Integrated joint density for the four cases of Scenario 1 in ref. [37], at times t = {0, 0.5, 1, 1.5, 2} yr, dt = 0.5 yr (the time interval between two consecutive snapshots), (a) Monte Carlo (MC), (b) continuity equation (DEE-961, $N_{\rm sam}$ = 961), (c) continuity equation (DEE-1E5, $N_{\rm sam}$ = 1×10^5), (d) Gaussian mixture model-unscented transformation (GMM-UT), $N_{1\rm d}$ = 39 (the initial splitting number).

框架的求解特征是能够利用子高斯分量前两阶统计矩的加权和近似非线性概率密度, 实现解析计算密度. 对于常规的非线性不确定传播问题, 基于连续方程或高斯和模型框架均可以实现不确定性的精确传播, 且高斯和模型框架下的求解效率更高. 对于呈现高度变形与延长分布特征的强非线性不确定性传播问题, 需要分别基于连续方程框架改进线性插值方法与分箱方法、基于高斯和模型框架改进高斯和分割(或融合)技术, 从而提高连续方程或高斯和模型框架下的密度计算精度与效率.

参考文献

1　Luo Y, Yang Z. A review of uncertainty propagation in orbital mechanics. Prog Aerospace Sci, 2017, 89: 23–39

2　Zhao Y H, Hou X Y, Liu L. Error analysis and trajectory correction maneuvers of Lunar transfer orbit (in Chinese). Acta Astron Sin, 2013, 54: 261–273 [赵玉晖, 侯锡云, 刘林. 月球探测中转移轨道误差分析和中途修正计算. 天文学报, 2013, 54: 261–273]

3　Baoyin H X, Li J Y. Review of trajectory design for manned Lunar mission (in Chinese). Mech Eng, 2015, 37: 665–673 [宝音贺西, 李京阳. 载人登月轨道研究综述. 力学与实践, 2015, 37: 665–673]

4　Bai X Z. Research on Orbital Prediction Error and Collision Probability of Space Objects (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Changsha: National University of Defense Technology, 2013 [白显宗. 空间目标轨道预报误差与碰撞概率问题研究. 博士学位论文. 长沙: 国防科学技术大学, 2013]

5 Yang Z, Luo Y Z, Zhang J, et al. Uncertainty quantification for short rendezvous missions using a nonlinear covariance propagation method. J Guidance Control Dyn, 2016, 39: 2170–2178

6 Yang Z, Luo Y Z, Zhang J. Analytically nonlinear propagation of orbit uncertainty under J2 perturbation (in Chinese). In: Proceedings of the 2017 Chinese Mechanics Conference-Celebration of the 60th Anniversary of the Establishment of the Chinese Society of Mechanics (B). Beijing, 2017, 1653–1662 [杨震, 罗亚中, 张进. J2摄动下航天器轨道偏差的解析非线性预报方法. 见: 中国力学大会-2017暨庆祝中国力学学会成立60周年大会论文集(B). 北京, 2017, 1653–1662]

7 Wang W B, Gao Y. Modeling and analysis of three types of empirical accelerations in precise orbit determination (in Chinese). J Astronaut, 2015, 36: 1406–1413 [王文彬, 高扬. 精密定轨中三类经验加速度的有效建模方法. 宇航学报, 2015, 36: 1406–1413]

8 The State Council Information Office of the People's Republic of China. China's space program: A 2021 perspective (in Chinese). 2022 [中华人民共和国国务院新闻办公室.《2021中国的航天》白皮书. 2022]

9 Geller D K. Linear covariance techniques for orbital rendezvous analysis and autonomous onboard mission planning. J Guidance Control Dyn, 2006, 29: 1404–1414

10 Halder A, Bhattacharya R. Dispersion analysis in hypersonic flight during planetary entry using stochastic Liouville equation. J Guidance Control Dyn, 2016, 34: 459–474

11 Julier S J, Uhlmann J K. Reduced sigma point filters for the propagation of means and covariances through nonlinear transformation. In: Proceedings of the 2002 American Control Conference. Anchorage, 2002, 2: 887–892

12 Tenne D, Singh T. The higher order unscented filter. In: Proceedings of the 2003 American Control Conference. Denver, 2003, 3: 2441–2446

13 Park R S, Scheeres D J. Nonlinear mapping of Gaussian state uncertainties: theory and applications to spacecraft trajectory design. J Guidance Control Dyn, 2006, 29: 1367–1375

14 Xiu D, Karniadakis G E. The Wiener–Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. SIAM J Sci Comput, 2002, 24: 619–644

15 Jia B, Xin M. Short-arc orbital uncertainty propagation with arbitrary polynomial chaos and admissible region. J Guidance Control Dyn, 2020, 43: 715–728

16 Wan X, Karniadakis G E. An adaptive multi-element generalized polynomial chaos method for stochastic differential equations. J Comput Phys, 2005, 209: 617–642

17 Wittig A, Di Lizia P, Armellin R, et al. Propagation of large uncertainty sets in orbital dynamics by automatic domain splitting. Celest Mech Dyn Astr, 2015, 122: 239–261

18 Feng J, Santeramo D, Di Lizia P, et al. Dynamical structure of the motion around asteroids with uncertain gravity and solar radiation pressure. Acta Astronaut, 2021, 186: 135–147

19 Armellin R, Di Lizia P, Bernelli-Zazzera F, et al. Asteroid close encounters characterization using differential algebra: The case of Apophis. Celest Mech Dyn Astr, 2010, 107: 451–470

20 Sun Z J. High-Order Method for Nonlinear Orbital Uncertainty Propagation Based on Differential Algebra (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Changsha: National University of Defense Technology, 2019 [孙振江. 基于微分代数的非线性轨道偏差高阶演化分析算法研究. 博士学位论文. 长沙: 国防科技大学, 2019]

21 Giza D, Singla P, Jah M. An approach for nonlinear uncertainty propagation: Application to orbital mechanics. In: Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. Chicago, 2009, AIAA 2009-6082.

22 Gor'kavyi N N, Ozernoy L M, Mather J C. A new approach to dynamical evolution of interplanetary dust. Astrophys J, 1997, 474: 496–502

23 Letizia F, Colombo C, Lewis H G. Multidimensional extension of the continuity equation method for debris clouds evolution. Adv Space Res, 2016, 57: 1624–1640

24 Evans L C. Partial Differential Equations. Berkeley: University of California, 2010

25 McInnes C R. Simple analytic model of the long-term evolution of nanosatellite constellations. J Guidance Control Dyn, 2000, 23: 332–338

26 Heard W B. Dispersion of ensembles of non-interacting particles. Astrophys Space Sci, 1976, 43: 63–82

27 McInnes C R. An analytical model for the catastrophic production of orbital debris. ESA J, 1993, 17: 293–305

28 Colombo C, McInnes C R. Evolution of swarms of "Smart Dust" Spacecraft. New Trends in Astrodynamics and Applications VI, 2011

29 Letizia F, Colombo C, Lewis H G. Analytical model for the propagation of small-debris-object clouds after fragmentations. J Guidance Control Dyn, 2015, 38: 1478–1491

30 Letizia F. Space Debris Cloud Evolution in Low Earth Orbit. Dissertation for Doctoral Degree. Southampton: University of Southampton. 2016

31 Frey S. Evolution and Hazard Analysis of Orbital Fragmentation Continua. Dissertation for Doctoral Degree. Milan: Polytechnic University of Milan, 2020

32 Trisolini M, Colombo C. Propagation and reconstruction of reentry uncertainties using continuity equation and simplicial interpolation. J Guidance Control Dyn, 2021, 44: 793–811

33 Sun P, Li S, Trisolini M, et al. Improved alpha shape-based continuum method for long-term density propagation. Celest Mech Dyn Astron, 2024, 136: 5

34 Sun P, Li S, Trisolini M, et al. A multi-segment alpha shape-based continuum method for long-term density propagation with bifurcation. Nonlinear Dyn, 2024, 112: 3481–3503

35 Gkolias I, Lara M, Colombo C. An ecliptic perspective for analytical satellite theories. In: Proceedings of the Advances in the Astronautical Sciences. Utah, 2018, 167: 337–351

36 Preparata F P, Shamos M I. Computational Geometry. New York: Springer-Verlag, 2015

37 Sun P, Colombo C, Trisolini M, et al. Comparison of continuity equation and Gaussian mixture model for long-term density propagation using semi-analytical methods. Celest Mech Dyn Astron, 2022, 134: 22

38 Edelsbrunner H, Mücke E P. Three-dimensional alpha shapes. ACM Trans Graph, 1994, 13: 43–72

39 Soong T T. Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers. Hoboken: John Wiley & Sons, 2004

40 Alspach D, Sorenson H. Nonlinear Bayesian estimation using Gaussian sum approximations. IEEE Trans Automat Contr, 1972, 17: 439–448

41 DeMars K J, Bishop R H, Jah M K. Entropy-based approach for uncertainty propagation of nonlinear dynamical systems. J Guidance Control Dyn, 2013, 36: 1047–1057

42 Vittaldev V, Russell R P. Space object collision probability using multidirectional Gaussian mixture models. J Guidance Control Dyn, 2016, 39: 2163–2169

43 Yang Z. Nonlinear Method for Orbit Targeting and Uncertainty Propagation (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Changsha: National University of Defense Technology, 2018 [杨震. 非线性轨道机动瞄准与偏差演化分析方法. 博士学位论文. 长沙: 国防科技大学, 2018]

44 Terejanu G, Singla P, Singh T, et al. Uncertainty propagation for nonlinear dynamic systems using Gaussian mixture models. J Guidance Control Dyn, 2013, 31: 1623–1633

45 Terejanu G, Singla P, Singh T, et al. Adaptive Gaussian sum filter for nonlinear Bayesian estimation. IEEE Trans Automat Contr, 2011, 56: 2151–2156

46 Vishwajeet K, Singla P, Jah M. Nonlinear uncertainty propagation for perturbed two-body orbits. J Guidance Control Dyn, 2014, 37: 1415–1425

47 Vishwajeet K, Singla P. Adaptive split/merge-based gaussian mixture model approach for uncertainty propagation. J Guidance Control Dyn, 2017, 41: 603–617

48 Sun P, Colombo C, Trisolini M, et al. Hybrid Gaussian mixture splitting techniques for uncertainty propagation in nonlinear dynamics. J Guidance Control Dyn, 2023, 46: 770–780

49 Fujimoto K, Scheeres D J. Tractable expressions for nonlinearly propagated uncertainties. J Guidance Control Dyn, 2015, 38: 1146–1151

50 Vittaldev V, Russell R P, Linares R. Spacecraft uncertainty propagation using Gaussian mixture models and polynomial chaos expansions. J Guidance Control Dyn, 2016, 39: 2615–2626

51 Sun Z J, Luo Y Z, di Lizia P, et al. Nonlinear orbital uncertainty propagation with differential algebra and Gaussian mixture model. Sci China-Phys Mech Astron, 2019, 62: 034511

A review of uncertainty propagation methods within continuity equation and Gaussian mixture model frameworks

SUN Pan[1*] & LI Shuang[2]

[1] *Department of Intelligent Equipment, Changzhou College of Information Technology, Changzhou 213164, China*
[2] *College of Astronautics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China*
**Corresponding author (email: sunpan@czcit.edu.cn)*

This paper reviews the research progress for uncertainty propagation within continuity equation and Gaussian mixture model frameworks. First, a state-of-the-art study on the uncertainty propagation methods within the continuity equation framework is given in terms of the continuity equation, interpolation method and the binning method. Second, a review of development of the uncertainty propagation methods within the Gaussian mixture model framework is given in terms of the Gaussian mixture model, and the hybrid methods within the Gaussian mixture model framework. Third, a comparison is given for the mathematical nature, accuracy and efficiency between the two method frameworks. Finally, the main features and advantages are concluded for the two method frameworks for uncertainty propagation, and the future research work is envisaged.

continuity equation, Gaussian mixture model, uncertainty propagation, research progress

PACS: 02.50.Cw, 02.50.Fz, 02.60.Ed

doi: 10.1360/SSPMA-2024-0300