中国科学: 数学 2022 年 第 52 卷 第 8 期: 881 ～ 900
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

一类动力系统的吸引子吸引速度的估计

赵春燕[1,2], 钟承奎[2*], 赵春香[3]

1. 安徽理工大学数学与大数据学院, 淮南 232001;
2. 南京大学数学系, 南京 210093;
3. 江苏大学应用系统分析研究院, 镇江 212013

E-mail: emmanuelz@163.com, ckzhong@nju.edu.cn, zhaocxmath@163.com

收稿日期: 2021-07-08; 接受日期: 2021-09-22; 网络出版日期: 2021-12-29; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11731005 和 11801071) 资助项目

摘要 本文首先建立一类无穷维动力系统的多项式吸引子的存在性及其吸引速度具有估计的抽象定理, 随后将该定理运用于一类具有非局部弱阻尼、反阻尼以及次临界增长的非线性项的波方程.

关键词 多项式吸引子 吸引速度 非紧性测度多项式衰退 波方程 非局部弱阻尼

MSC (2020) 主题分类 35B40, 35B41, 35L05

1 引言

对无穷维动力系统的长时间行为的预测是一个重要的研究课题, 全局吸引子是描述耗散的无穷维动力系统长时间行为的一个核心概念, 它被定义为相空间中能一致地吸引所有从有界子集出发的轨道的不变紧集. 由定义可见, 全局吸引子若存在, 则必定包含了原系统的所有极限状态. 由 Hölder-Mañé 定理 [1, 2] 可知, 分形维数有限的紧集必定同胚于有限维 Euclid 空间中的紧集. 因此, 当全局吸引子具有有限的分形维数时, 无穷维动力系统在全局吸引子上的限制可约化为一个有限维动力系统 (参见文献 [3]).

然而全局吸引子作为描述动力系统的渐近动力学行为的概念也有局限性. 首先, 全局吸引子对轨道的吸引速度可能很慢, 而且一般而言很难用相关实际问题的物理参数来描述这一速度. 其次, 数学模型只是对现实世界的近似刻画, 故理想的数学概念应该关于小扰动是稳定的. 但是, 由于全局吸引子吸引速度可能很慢, 致使其对扰动很敏感. 一般而言, 全局吸引子关于扰动是上半连续的, 但很难推导出下半连续性. 最后, 当系统存在分形维数有限的全局吸引子时, 根据 Hölder-Mañé 定理约化出的有限维动力系统是 Hölder 连续的, 但不一定是 Lipschitz 连续的, 从而不一定可由常微分方程组生成 (参见文献 [3,4]).

为消除这些缺陷, Foias 等 [5] 于 1988 年提出了惯性流形的概念, 将它定义为能够一致地指数吸引所有从有界子集出发的轨道且包含全局吸引子的正不变的有限维 Lipschitz 流形. 动力系统在惯性流

英文引用格式: Zhao C Y, Zhong C K, Zhao C X. Estimate of the attractive velocity of attractors for some dynamical systems (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 881–900, doi: 10.1360/SCM-2021-0470

© 2021《中国科学》杂志社

形上的限制能被约化为 Lipschitz 连续的常微分方程组 (该常微分方程组被称为原系统的惯性形式). 几乎所有已知的惯性流形的构造方法都基于 "谱间隔" 条件 (参见文献 [5]), 但是这一条件验证起来比较困难. 已有的文献证明了大量偏微分方程 (尤其是一维和二维空间上的方程) 存在惯性流形 (参见文献 [4–8]), 然而还有很多重要的偏微分方程 (如二维不可压缩的 Navier-Stokes 方程) 的惯性流形的存在性仍然是一个开放问题. 此外, Mora 和 Solà-Morales [9] 证明了具有阻尼的 Sine-Gordon 方程不存在惯性流形.

因为惯性流形的存在性不容易得到, Eden 等 [10] 于 1994 年提出了指数吸引子的概念, 将它定义为一致地指数吸引所有从有界子集出发的轨道的、正不变的、分形维数有限的紧集. 换言之, 与惯性流形的定义相比, 指数吸引子的定义去掉了对集合光滑性的要求. 普遍的看法是, 对于数学物理方程来说, 只要能验证分形维数有限的全局吸引子的存在性, 基本上就都能验证指数吸引子的存在性.

动力系统存在指数吸引子的一个必要前提是, 它具有分形维数有限的全局吸引子. 另一方面, 已有的文献证明了许多方程的解所对应的动力系统具有无穷维全局吸引子, 如一些具有对称性的 p-Laplace 方程 [11]、一些无界区域上的反应扩散方程 [12,13] 和无界区域上的双曲方程 [14] 等. 当一个动力系统有无穷维全局吸引子时, 它一定没有指数吸引子, 但可能存在具有指数吸引性质的紧的正不变集. 基于此, Zhang 等 [15] 认为应该将指数吸引性与分形维数有限的性质分开进行讨论, 并首次提出了有界集的非紧性测度指数衰退的概念. 他们证明了, 耗散的动力系统具有正不变的、紧致的指数吸引集 $\mathcal{A}^*$ 的充分必要条件是该系统中有界集的非紧性测度是指数衰退的. Zhang 等 [15] 还给出了非紧性测度指数衰退性的几个判别条件, 且利用其中的 (C^*) 条件证明了一类反应扩散方程和一类带弱阻尼的波方程都具有非紧性测度的指数衰退性.

受到上述文献的启发, 我们试图通过研究非紧性测度的衰退速度来估计具有退化阻尼的波方程

$$u_{tt} - \Delta u + k\|u_t\|^p u_t + f(u) = \int_\Omega K(x,y)u_t(y)dy + h(x) \tag{1.1}$$

的吸引子的吸引速度. 由于得不到该方程的非紧性测度的指数衰退性, 我们猜想非紧性测度或许能以多项式的速度衰退, 相应地, 系统具有多项式吸引子. 这是本文的主要动机.

怀揣这个问题, 注意到 Nakao [16–18] 证明了满足差分不等式

$$\sup_{s\in[t,t+1]} w(s)^{1+\alpha} \leqslant K_0(1+t)^\gamma(w(t)-w(t+1)) + g(t)$$

的非负函数 $w(t)$ 随着时间的增长以多项式或对数多项式的速率衰退到 0. 随后, 许多数学家利用 Nakao 不等式建立了不同类型发展方程的能量泛函的多项式或对数多项式的衰退估计 (参见文献 [18–20]).

本文建立关于从正不变的有界吸收集 $\mathcal{B}_0$ 出发的任意两条轨道在时刻 t 的距离与初始距离之间控制关系的拟稳定不等式. 该拟稳定不等式形式上与一类差分不等式密切相关, 且含有紧致的伪度量. 因此, 根据非紧性测度的定义和伪度量的紧性, 从这个拟稳定不等式能推导出关于非紧性测度 $\alpha(S(t)\mathcal{B}_0)$ 的差分不等式, 从而得到非紧性测度 $\alpha(S(t)\mathcal{B}_0)$ 的多项式衰退速度的具体估计, 并藉此获得多项式吸引子的存在性与吸引速度的结果.

应用这个抽象定理于具体波方程时, 为了验证该方程满足拟稳定条件, 在能量渐近估计的过程中, 我们运用了内积空间中的强单调不等式、凹函数的性质以及能量重构的方法. 由此得到的能量估计式很自然地含有差分项 $E_z(0) - E_z(T)$ (其中 $E_z(t)$ 表示两个解之差 z 在 t 时刻的能量), 从而相应地得到与差分不等式密切相关的拟稳定不等式.

对于无穷维动力系统吸引子吸引速度的研究, 现有的文献基本局限于指数吸引速度的范围. 同时, 有很多关于能量泛函的多项式衰退速度的研究结果. 据我们所知, 关于多项式吸引子的研究, 本文尚属首次.

在方法上, 我们把能量估计、能量重构、非紧性测度与能导出非负函数衰退速度估计的一类差分不等式结合起来, 突破了传统上运用 Gronwall 不等式与能量估计的模式.

本文余下内容组织如下. 第 2 节给出一些预备知识. 第 3 节建立一类无穷维动力系统的多项式吸引子存在性和吸引速度具体估计的抽象定理. 第 4 节将抽象定理应用于一类具有非局部弱阻尼、反阻尼和次临界增长非线性项的波方程.

本文约定 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界集, $(\cdot,\cdot)$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示 $L^2(\Omega)$ 中的内积和范数, $\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(\Omega)$ 上的范数. $\hookrightarrow$ 和 $\hookrightarrow\hookrightarrow$ 分别用来表示连续嵌入和紧嵌入. 另外, 除非额外指明, 我们将用 C 表示任意正常数, 其依赖的参数以下标列出. 需要强调的是, 即使是同一行中的 C, 也可能是不同的.

2　预备知识

本节给出一些必要的预备知识. 首先简要地回顾 Kuratowski 非紧性测度的定义和基本性质 (详见文献 [21, 22]).

定义 2.1 [21]　设 X 是一个完备的度量空间. 对于 X 中的每个有界集 B, 定义它的 Kuratowski 非紧性测度 $\alpha(B)$ 如下:

$$\alpha(B) := \inf\{\delta > 0 \mid B \text{ 有一个由直径小于 } \delta \text{ 的成员组成的有限覆盖}\}.$$

引理 2.1 [21]　设 X 是一个完备的度量空间, 则 X 上的 Kuratowski 非紧性测度 α 满足以下性质:

(i) $\alpha(B) = 0$ 当且仅当 B 是准紧的;

(ii) 如果 $A \subseteq B$, 那么 $\alpha(A) \leqslant \alpha(B)$;

(iii) $\alpha(A \cup B) = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$;

(iv) $\alpha(B) = \alpha(\overline{B})$, 其中 $\overline{B}$ 表示 B 的闭包;

(v) 如果 X 中的非空闭集 B_i $(i = 1, 2, \ldots)$ 满足 $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \cdots$ 且 $\alpha(B_n) \to 0$ $(n \to \infty)$, 则 $\bigcap_{n\geqslant 1} B_n$ 是非空紧集;

(vi) 若 X 是 Banach 空间, 则 $\alpha(A + B) \leqslant \alpha(A) + \alpha(B)$.

接下来简要回顾动力系统和全局吸引子的概念及基本结论.

定义 2.2 [4]　动力系统 $(X, \{S(t)\}_{t\geqslant 0})$ 由完备的度量空间 X 和连续的算子半群 $\{S(t) : X \to X\}_{t\geqslant 0}$ 组成, 其中 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 满足如下的性质:

(i) $S(0) = I$;

(ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$, $\forall\, t, s \geqslant 0$.

定义 2.3 [4]　闭集 $\mathcal{B} \subseteq X$ 称为动力系统 $(X, \{S(t)\}_{t\geqslant 0})$ 的吸收集, 若对任意的有界集 $B \subseteq X$ 都存在 $t_0(B)$ 使得当 $t > t_0(B)$ 时 $S(t)B \subseteq \mathcal{B}$. 称 $t_0(B)$ 为 B 进入 $\mathcal{B}$ 的时间. $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 称为耗散的, 若其存在有界吸收集.

引理 2.2 [23]　耗散的动力系统 $(X, \{S(t)\}_{t\geqslant 0})$ 一定存在正不变有界闭吸收集. 具体而言, 设 $\mathcal{B}$ 为

其有界吸收集, 则

$$\mathcal{B}_0=\overline{\bigcup_{t\geqslant t_{\mathcal{B}}} S(t)\mathcal{B}}$$

是一个正不变有界闭吸收集, 其中 $t_{\mathcal{B}}>0$ 是 $\mathcal{B}$ 进入它自身的时间.

定义 2.4 [4] 紧集 $\mathcal{A}\subseteq X$ 被称为动力系统 $(X,\{S(t)\}_{t\geqslant 0})$ 的全局吸引子当且仅当

(i) $\mathcal{A}$ 是一个不变集, 即对所有的 $t\geqslant 0$ 都有 $S(t)\mathcal{A}=\mathcal{A}$;

(ii) $\mathcal{A}$ 是一致吸引的, 即对每个有界集 $B\subseteq X$ 都有

$$\lim_{t\to+\infty}\operatorname{dist}(S(t)B,\mathcal{A})=0,$$

其中 $\operatorname{dist}(A,B):=\sup_{x\in A}\operatorname{dist}_X(x,B)$ 是 Hausdorff 半距离.

Ma 等 [24] 提出了 ω- 极限紧的概念, 并证明了 ω- 极限紧是耗散的动力系统具有全局吸引子的充分必要条件.

定义 2.5 动力系统 $(X,\{S(t)\}_{t\geqslant 0})$ 被称为是 ω- 极限紧的, 若对任意正不变的有界集 $B\subseteq X$ 都成立 $\alpha(S(t)B)\to 0$ $(t\to\infty)$, 其中 $\alpha(\cdot)$ 为 Kuratowski 非紧性测度.

定理 2.1 [24] 动力系统 $(X,\{S(t)\}_{t\geqslant 0})$ 具有全局吸引子当且仅当它既是耗散的又是 ω- 极限紧的.

全局吸引子的定义中不含吸引速度的信息. 为了更具体地刻画动力系统的渐近行为, 我们提出如下 φ- 吸引子的概念.

定义 2.6 设 $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 满足 $\varphi(t)\to 0$ $(t\to+\infty)$. 称紧集 $\mathcal{A}^*\subseteq X$ 为动力系统 $(X,\{S(t)\}_{t\geqslant 0})$ 的 φ- 吸引子, 若 $\mathcal{A}^*$ 关于 $S(t)$ 是正不变的, 且存在 $t_0\in\mathbb{R}$ 使得对任意有界集 $B\subseteq X$ 都存在 $t_B\geqslant 0$ 满足

$$\operatorname{dist}(S(t)B,\mathcal{A}^*)\leqslant\varphi(t+t_0-t_B),\quad \forall\, t\geqslant t_B.$$

特别地, 若 $\varphi(t)=Ct^{-\beta}$ (其中 C 和 β 为正常数), 则 $\mathcal{A}^*$ 被称为多项式吸引子.

需强调, 在上述 φ- 吸引子的定义中对分形维数的有限性不作要求. 事实上, 一些无穷维系统存在正不变的、分形维数无穷的紧集, 它们吸引所有有界集的速度可以用非负衰退函数 φ 来刻画.

作为 φ- 吸引子存在的条件, 我们进一步提出非紧性测度 φ- 衰退性的概念如下.

定义 2.7 动力系统 $(X,\{S(t)\}_{t\geqslant 0})$ 被称为关于非紧性测度 α 是 φ- 衰退的, 若它是耗散的, 且存在 $t_0>0$ 满足

$$\alpha(S(t)\mathcal{B}_0)\leqslant\varphi(t),\quad \forall\, t\geqslant t_0, \tag{2.1}$$

其中 $\mathcal{B}_0$ 是 $(X,\{S(t)\}_{t\geqslant 0})$ 的一个正不变的有界吸收集, $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ 是单调不增的函数且满足 $\varphi(t)\to 0$ $(t\to+\infty)$.

特别地, 若 $\varphi(t)=Ct^{-\beta}$ (或 $\varphi(t)=C\mathrm{e}^{-\beta t}$), 其中 C 和 β 为正常数, 则称 $(X,\{S(t)\}_{t\geqslant 0})$ 关于非紧性测度 α 是多项式 (或指数) 衰退的.

以下简单的引理说明了正不变有界吸收集的非紧性测度的衰退速度决定了任一有界集的非紧性测度的衰退速度, 这就保证了定义 2.7 的合理性.

引理 2.3 设动力系统 $(X,\{S(t)\}_{t\geqslant 0})$ 关于非紧性测度是 φ- 衰退的 (这意味着, 存在正不变有界吸收集 $\mathcal{B}_0$ 和正常数 t_0, 使得 $\alpha(S(t)\mathcal{B}_0)\leqslant\varphi(t), \forall\, t\geqslant t_0$), 则对 X 的任意有界子集 B 都有

$$\alpha(S(t)B)\leqslant\varphi(t-t_*(B)),\quad \forall\, t\geqslant t_*(B)+t_0,$$

其中 $t_*(B)$ 是 B 进入 $\mathcal{B}_0$ 的时间.

证明　因为 $S(t)B \subseteq \mathcal{B}_0, \forall\, t \geqslant t_*(B)$, 故有

$$S(t)B = S(t-t_*(B))S(t_*(B))B \subseteq S(t-t_*(B))\mathcal{B}_0,$$

从而有

$$\alpha(S(t)B) \leqslant \alpha(S(t-t_*(B))\mathcal{B}_0) \leqslant \varphi(t-t_*(B)), \quad \forall\, t \geqslant t_*(B)+t_0.$$

证毕. □

非紧性测度 φ- 衰退性的重要性体现于下述定理.

定理 2.2　设动力系统 $(X,\{S(t)\}_{t\geqslant 0})$ 关于非紧性测度是 φ- 衰退的, 则 $(X,\{S(t)\}_{t\geqslant 0})$ 存在 φ- 吸引子 $\mathcal{A}^*$ 使得对任意有界集 $B \subseteq X$ 都成立

$$\mathrm{dist}(S(t)B,\mathcal{A}^*) \leqslant \varphi(t-t_*(B)-1), \quad \forall\, t \geqslant t_*(B)+t_0+1, \tag{2.2}$$

其中 $t_*(B)$ 是 B 进入 $\mathcal{B}_0$ 的时间.

证明　**第 1 步**　由

$$\begin{cases} \varphi(t) \to 0, & t \to +\infty, \\ \alpha(S(t)\mathcal{B}_0) \leqslant \varphi(t), & \forall\, t \geqslant t_0 \end{cases}$$

有

$$\alpha(S(t)\mathcal{B}_0) \to 0, \quad t \to +\infty, \tag{2.3}$$

于是 $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B}_0) \equiv \bigcap_{t\geqslant 0}\overline{S(t)\mathcal{B}_0}$ 是系统的全局吸引子.

由 $\alpha(S(t)\mathcal{B}_0) \leqslant \varphi(t)$ $(\forall\, t \geqslant t_0)$ 可知, 对任意正整数 $m \geqslant t_0$, $S(m)\mathcal{B}_0$ 都存在有限的 $\varphi(m)$- 子网 $E_m = \bigcup_{i=1}^{K_m} S(m)a_i^{(m)}$, $a_i^{(m)} \in \mathcal{B}_0$, 即

$$S(m)\mathcal{B}_0 \subseteq \bigcup_{x_\lambda \in E_m} B(x_\lambda, \varphi(m)).$$

记 $F_m = \bigcup_{t\geqslant 0} S(t)E_m = \bigcup_{t\geqslant 0} S(t)\bigcup_{i=1}^{K_m} S(m)a_i^{(m)}$, $a_i^{(m)} \in \mathcal{B}_0$. 取

$$\mathcal{A}^* = \bigcup_{m\in\mathbb{N}, m\geqslant t_0} F_m \cup \mathcal{A}.$$

显然 $\mathcal{A}^*$ 是正不变的.

因 $\mathcal{A}^* \supseteq \bigcup_{m=[t_0]+1}^{+\infty} E_m$, 故

$$\mathrm{dist}(S(m)\mathcal{B}_0,\mathcal{A}^*) \leqslant \varphi(m), \quad \forall\, m \geqslant t_0. \tag{2.4}$$

$\mathcal{B}_0$ 是正不变的, 因此 $S(t)\mathcal{B}_0 \subseteq S([t])\mathcal{B}_0$ (其中 $[t]$ 表示 t 的整数部分), 从而由 $\varphi(t)$ 的单调性和 (2.4) 可知, 对任意 $t \geqslant t_0+1$ 都有

$$\mathrm{dist}(S(t)\mathcal{B}_0,\mathcal{A}^*) \leqslant \mathrm{dist}(S([t])\mathcal{B}_0,\mathcal{A}^*) \leqslant \varphi([t]) \leqslant \varphi(t-1). \tag{2.5}$$

对任意有界集 $B \subseteq X$, 存在 $t_*(B)$ 使得 $S(t)B \subseteq \mathcal{B}_0, \forall\, t \geqslant t_*(B)$. 因此

$$S(t)B = S(t-t_*(B))S(t_*(B))B \subseteq S(t-t_*(B))\mathcal{B}_0,$$

从而对任意 $t \geqslant t_*(B)+t_0+1$ 都有

$$\mathrm{dist}(S(t)B,\mathcal{A}^*) \leqslant \mathrm{dist}(S(t-t_*(B))\mathcal{B}_0,\mathcal{A}^*) \leqslant \varphi(t-t_*(B)-1). \tag{2.6}$$

第 2 步 接下来验证 $\mathcal{A}^*$ 是紧集, 即任意点列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq \mathcal{A}^*$ 均存在子列收敛于 $\mathcal{A}^*$ 中的一点. 由于全局吸引子 $\mathcal{A}$ 是紧集, 故若存在子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq \mathcal{A}$, 则 $\mathcal{A}^*$ 是紧的. 因此, 不失一般性, 不妨假定 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N},m\geqslant t_0} F_m$. 记

$$x_n = S(t_n)S(m_n)a_{i_n}^{(m_n)}, \quad t_n \geqslant 0, \quad m_n \geqslant t_0, \quad 1 \leqslant i_n \leqslant k_{m_n}, \quad a_{i_n}^{(m_n)} \in \mathcal{B}_0. \tag{2.7}$$

(i) 若 $\{t_n+m_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 无界, 则存在 $\{n\}$ 的子列 $\{n_k\}$ 使得 $t_{n_k}+m_{n_k} \to +\infty$ $(k\to+\infty)$. 于是由 (2.3) 可知存在 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 的子列收敛于 $\mathcal{A}=\omega(\mathcal{B}_0)\subseteq\mathcal{A}^*$ 中的点.

(ii) 若存在正整数 N_0 使得 $t_n+m_n \leqslant N_0$ $(\forall\, n\in\mathbb{N})$, 则

$$\{x_n\} \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N},t_0\leqslant m\leqslant N_0} \bigcup_{i=1}^{K_m} \bigcup_{t\in[0,N_0]} S(t)S(m)a_i^{(m)}.$$

对任意给定的 m 和 i, 映射 $t\to S(t)S(m)a_i^{(m)}$ 是连续的, 而 $[0,N_0]$ 是紧集, 故 $\bigcup_{t\in[0,N_0]} S(t)S(m)a_i^{(m)}$ 是紧的, 从而 $\bigcup_{m\in\mathbb{N},t_0\leqslant m\leqslant N_0}\bigcup_{i=1}^{K_m}\bigcup_{t\in[0,N_0]} S(t)S(m)a_i^{(m)}$ 也是紧的. 因此, 存在 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 的子列收敛于

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N},t_0\leqslant m\leqslant N_0} \bigcup_{i=1}^{K_m} \bigcup_{t\in[0,N_0]} S(t)S(m)a_i^{(m)} \subseteq \mathcal{A}^*.$$

证毕. □

注 2.1 构造 φ- 吸引子 $\mathcal{A}^*$ 的方法是向全局吸引子添加可列个正不变点集, 使所添加的点集吸引正不变有界吸收集 $\mathcal{B}_0$ 的速度以 φ 刻画, 从而其吸引任何有界集 B 的速度也以 φ 限定. 非紧性测度的 φ- 衰退性保证了全局吸引子添加上这些点集后仍然是紧集. 因此, 从本质上讲, 非紧性测度 α 的衰退速度刻画了正不变紧集吸引有界集能达到的速度.

本节最后给出一个关于非负函数衰退估计的引理, 本文中主要定理的证明将基于该引理.

引理 2.4 设 $\omega(t)$ 是定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的一个非负函数, 且满足

$$\max\{\omega^{1+\alpha}(t),\omega^{1+\alpha}(t+T)\} \leqslant h(t)[\omega(t)-\omega(t+T)], \quad \forall\, t \geqslant t_0, \tag{2.8}$$

其中, α、T 和 t_0 是正常数, $h(t)$ 是正的单调函数, 则 $\omega(t)$ 满足下列估计式:

$$\omega(t) \leqslant \left\{\inf_{s\in[t_0,t_0+T]}\omega^{-\alpha}(s)+\frac{\alpha}{T}\int_{t_0+T}^{t-T}\frac{ds}{h(s)}\right\}^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \forall\, t \geqslant t_0+2T. \tag{2.9}$$

特别地, 当 $h(t)=K_0$ 时,

$$\omega(t) \leqslant \left\{\inf_{s\in[t_0,t_0+T]}\omega^{-\alpha}(s)+\frac{\alpha}{TK_0}(t-t_0-2T)\right\}^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \forall\, t \geqslant t_0+2T. \tag{2.10}$$

证明　容易得到以下差分不等式:

$$
\begin{aligned}
\omega^{-\alpha}(t+T)-\omega^{-\alpha}(t)&=\int_0^1\frac{d}{d\theta}\{[\theta\omega(t+T)+(1-\theta)\omega(t)]^{-\alpha}\}d\theta\\
&=\alpha\int_0^1[\theta\omega(t+T)+(1-\theta)\omega(t)]^{-\alpha-1}d\theta[\omega(t)-\omega(t+T)]\\
&\geqslant\alpha(\max\{\omega(t),\omega(t+T)\})^{-\alpha-1}[\omega(t)-\omega(t+T)]. \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

由 (2.8) 和 (2.11) 有

$$
\omega^{-\alpha}(t+T)-\omega^{-\alpha}(t)\geqslant\frac{\alpha}{h(t)},\quad\forall\, t\geqslant t_0.
$$

于是

$$
\omega^{-\alpha}(t)\geqslant\omega^{-\alpha}(t-nT)+\frac{\alpha}{T}\sum_{i=1}^{n}\frac{T}{h(t-iT)},\quad\forall\, t\geqslant t_0+T, \qquad (2.12)
$$

其中 $n\equiv[\frac{t-t_0}{T}]$ 表示 $\frac{t-t_0}{T}$ 的整数部分.

若 $h(t)$ 非增, 则由 (2.12) 知, 对任意的 $t\geqslant t_0+2T$, 成立

$$
\begin{aligned}
\omega^{-\alpha}(t)&\geqslant\omega^{-\alpha}(t-nT)+\frac{\alpha}{h(t-nT)}+\frac{\alpha}{T}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{t-(i+1)T}^{t-iT}\frac{ds}{h(t-iT)}\\
&\geqslant\omega^{-\alpha}(t-nT)+\frac{\alpha}{h(t-nT)}+\frac{\alpha}{T}\int_{t-nT}^{t-T}\frac{ds}{h(s)}\\
&\geqslant\omega^{-\alpha}(t-nT)+\frac{\alpha}{T}\int_{t_0+T}^{t-T}\frac{ds}{h(s)}\\
&\geqslant\inf_{s\in[t_0,t_0+T]}\omega^{-\alpha}(s)+\frac{\alpha}{T}\int_{t_0+T}^{t-T}\frac{ds}{h(s)}. \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

若 $h(t)$ 非减, 则由 (2.12) 知, 对任意 $t\geqslant t_0+2T$, 成立

$$
\begin{aligned}
\omega^{-\alpha}(t)&\geqslant\omega^{-\alpha}(t-nT)+\frac{\alpha}{T}\sum_{i=1}^{n}\int_{t-iT}^{t-(i-1)T}\frac{ds}{h(t-iT)}\\
&\geqslant\omega^{-\alpha}(t-nT)+\frac{\alpha}{T}\int_{t-nT}^{t}\frac{ds}{h(s)}\\
&\geqslant\omega^{-\alpha}(t-nT)+\frac{\alpha}{T}\int_{t_0+T}^{t-T}\frac{ds}{h(s)}\\
&\geqslant\inf_{s\in[t_0,t_0+T]}\omega^{-\alpha}(s)+\frac{\alpha}{T}\int_{t_0+T}^{t-T}\frac{ds}{h(s)}. \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

综合 (2.13) 和 (2.14) 知, 若 $h(t)$ 单调, 则估计式 (2.9) 成立. 估计式 (2.10) 可由 (2.9) 直接得到. □

注 2.2　引理 2.4 在 $h(t)$ 为一般的正的单调函数情形下给出了满足差分不等式 (2.8) 的非负函数 $\omega(t)$ 的衰退速度估计. 这是对 Nakao 在文献 [18, 定理 1] 中所得结论的推广, 后者估计了满足差分不等式

$$
\sup_{s\in[t,t+1]}\omega(s)^{1+\alpha}\leqslant K_0(1+t)^{\gamma}(\omega(t)-\omega(t+1))+g(t)
$$

的非负函数 $\omega(t)$ 的衰退速度.

3 关于多项式吸引子存在性和吸引速度估计的抽象结果

引理 3.1 设 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是完备度量空间 (X,d) 上的耗散动力系统, $\mathcal{B}_0$ 为其正不变有界吸收集. 假定存在正常数 T 和 δ_0、连续的非减函数 $q:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$、函数 $g:(\mathbb{R}^+)^m\to\mathbb{R}^+$ 和 $\mathcal{B}_0$ 上的伪度量 ϱ_T^i $(i=1,2,\dots,m)$ 满足

(i) $q(0)=0$, $q(s)<s$, $s>0$;

(ii) g 关于每个自变量都是非减的, $g(0,\dots,0)=0$ 且 g 在 $(0,\dots,0)$ 点连续;

(iii) ϱ_T^i $(i=1,2,\dots,m)$ 在 $\mathcal{B}_0$ 上是准紧的, 即任意点列 $\{x_n\}\subseteq\mathcal{B}_0$ 存在关于 ϱ_T^i Cauchy 收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$;

(iv) 对满足 $\varrho_T^i(y_1,y_2)\leqslant\delta_0$ $(i=1,2,\dots,m)$ 的任意两点 $y_1,y_2\in\mathcal{B}_0$ 均成立不等式

$$(d(S(T)y_1,S(T)y_2))^2\leqslant q((d(y_1,y_2))^2+g(\varrho_T^1(y_1,y_2),\varrho_T^2(y_1,y_2),\dots,\varrho_T^m(y_1,y_2))),\tag{3.1}$$

那么 $\alpha(S(t)\mathcal{B}_0)\to 0$ $(t\to+\infty)$, 即 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是 ω- 极限紧的.

证明 对任意的 $B\subseteq\mathcal{B}_0$ 和任意的 $\epsilon>0$, 由定义 2.1 知, 存在集合 $F_1,F_2,\dots,F_n$ 使得

$$B\subseteq\bigcup_{j=1}^{n}F_n,\quad \mathrm{diam}F_j<\alpha(B)+\epsilon.\tag{3.2}$$

由假设 (ii) 知, 存在 $\delta>0$ 使得 $g(x_1,x_2,\dots,x_m)<\epsilon$, $\forall\, x_i\in[0,\delta]$ $(i=1,2,\dots,m)$. 由于 ϱ_T^i $(i=1,2,\dots,m)$ 是准紧的, 因此存在有限集 $\mathcal{N}^i=\{x_j^i:j=1,2,\dots,k_i\}\subseteq B$, 使得对任意的 $y\in B$ 有 $x_j^i\in\mathcal{N}^i$ 满足 $\varrho_T^i(y,x_j^i)\leqslant\frac{1}{2}\min\{\delta,\delta_0\}$, 即

$$B\subseteq\bigcup_{j=1}^{k_i}C_j^i,\quad C_j^i=\left\{y\in B:\varrho_T^i(y,x_j^i)\leqslant\frac{1}{2}\min\{\delta,\delta_0\}\right\},\quad i=1,\dots,m.\tag{3.3}$$

于是有

$$\begin{cases} B\subseteq\displaystyle\bigcup_{j_1,j_2,\dots,j_m,j}(C_{j_1}^1\cap C_{j_2}^2\cap\cdots\cap C_{j_m}^m\cap F_j),\\ S(T)B\subseteq\displaystyle\bigcup_{j_1,j_2,\dots,j_m,j}(S(T)(C_{j_1}^1\cap C_{j_2}^2\cap\cdots\cap C_{j_m}^m\cap F_j)).\end{cases}$$

由 (3.2) 和 (3.3) 知, 任意的 $y_1,y_2\in C_{j_1}^1\cap C_{j_2}^2\cap\cdots\cap C_{j_m}^m\cap F_j$ 均满足

$$d(y_1,y_2)\leqslant\mathrm{diam}F_j<\alpha(B)+\epsilon,\tag{3.4}$$

$$\varrho_T^i(y_1,y_2)\leqslant\min\{\delta,\delta_0\},\quad i=1,2,\dots,m.\tag{3.5}$$

不等式 (3.5) 蕴涵着

$$g(\varrho_T^1(y_1,y_2),\dots,\varrho_T^m(y_1,y_2))<\epsilon.\tag{3.6}$$

由 (3.1) 和 (3.4)–(3.6) 可知, 任意的 $y_1,y_2\in C_{j_1}^1\cap C_{j_2}^2\cap\cdots\cap C_{j_m}^m\cap F_j$ 均满足

$$(d(S(T)y_1,S(T)y_2))^2\leqslant q((\alpha(B)+\epsilon)^2+\epsilon).\tag{3.7}$$

因此, 根据非紧性测度 α 的定义可得

$$(\alpha(S(T)B))^2 \leqslant q((\alpha(B)+\epsilon)^2+\epsilon). \tag{3.8}$$

由于 q 是连续且非减的, 结合 (3.8) 与 ϵ 的任意性可得

$$(\alpha(S(T)B))^2 \leqslant q((\alpha(B))^2). \tag{3.9}$$

(3.9) 蕴涵着

$$(\alpha(S(kT)\mathcal{B}_0))^2 \leqslant q((\alpha(S((k-1)T)\mathcal{B}_0))^2), \quad k=1,2,\ldots \tag{3.10}$$

由 $q(s)\leqslant s$ 可知序列 $\{(\alpha(S(kT)\mathcal{B}_0))^2\}_{k=1}^{+\infty}$ 单调非增, 因而存在

$$\alpha_0 = \lim_{k\to+\infty}(\alpha(S(kT)\mathcal{B}_0))^2.$$

由 q 的连续性, (3.10) 意味着 $\alpha_0 \leqslant q(\alpha_0)$, 从而由假设 (ii) 可知 $\alpha_0=0$. 于是有

$$\alpha(S(t)\mathcal{B}_0) \to 0, \quad t\to+\infty. \tag{3.11}$$

对任意的有界集 $D\subseteq X$, 存在 $t_D>0$ 使得 $S(t_D)D\subseteq\mathcal{B}_0$, 于是 $S(t+t_D)D\subseteq S(t)\mathcal{B}_0$. 因而,

$$\alpha(S(t+t_D)D)\leqslant\alpha(S(t)\mathcal{B}_0),$$

再由 (3.11) 便得到

$$\alpha(S(t)D)\to 0, \quad t\to+\infty, \tag{3.12}$$

也即 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是 ω- 极限紧的. □

定理 3.1　设 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是完备度量空间 (X,d) 上的耗散动力系统, $\mathcal{B}_0$ 是其正不变的有界吸收集. 假定存在正常数 C、T 和 δ_0, $\beta\in(0,1)$, 函数 $g_l:(\mathbb{R}^+)^m\to\mathbb{R}^+$ $(l=1,2)$ 和 $\mathcal{B}_0$ 上的伪度量 ϱ_T^i $(i=1,2,\ldots,m)$ 满足下列条件:

(i) g_l 关于每个自变量都是单调非减的, $g_l(0,\ldots,0)=0$ 且 g_l 在 $(0,\ldots,0)$ 点连续;

(ii) ϱ_T^i $(i=1,2,\ldots,m)$ 在 $\mathcal{B}_0$ 上是准紧的, 即任意点列 $\{x_n\}\subseteq\mathcal{B}_0$ 存在关于 ϱ_T^i Cauchy 收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$;

(iii) 对任意满足 $\varrho_T^i(y_1,y_2)\leqslant\delta_0$ $(i=1,2,\ldots,m)$ 的点 $y_1,y_2\in\mathcal{B}_0$, 均成立不等式

$$(d(S(T)y_1,S(T)y_2))^2 \leqslant (d(y_1,y_2))^2 + g_1(\varrho_T^1(y_1,y_2),\varrho_T^2(y_1,y_2),\ldots,\varrho_T^m(y_1,y_2)) \tag{3.13}$$

和

$$\begin{aligned}(d(S(T)y_1,S(T)y_2))^2 \leqslant{}& C[(d(y_1,y_2))^2-(d(S(T)y_1,S(T)y_2))^2\\&+g_1(\varrho_T^1(y_1,y_2),\varrho_T^2(y_1,y_2),\ldots,\varrho_T^m(y_1,y_2))]^\beta\\&+g_2(\varrho_T^1(y_1,y_2),\varrho_T^2(y_1,y_2),\ldots,\varrho_T^m(y_1,y_2)).\end{aligned} \tag{3.14}$$

那么 $(X,\{S(t)\}_{t\geqslant 0})$ 具有多项式吸引子 $\mathcal{A}^*$, 且存在 $t_0>0$, 使得对任意的有界集 $B\subseteq X$, 当 $t\geqslant t_0+2T+t_*(B)+1$ 时,

$$\operatorname{dist}(S(t)B,\mathcal{A}^*)\leqslant\left\{(\alpha(\mathcal{B}_0))^{\frac{2(\beta-1)}{\beta}}+\frac{1-\beta}{T\beta(1+2C)^{\frac{1}{\beta}}}(t-t_0-2T-t_*(B)-1)\right\}^{\frac{\beta}{2(\beta-1)}} \tag{3.15}$$

成立, 其中 $t_*(B)$ 满足

$$S(t)B\subseteq\mathcal{B}_0,\quad \forall\, t\geqslant t_*(B).$$

证明 对任意满足 $\varrho_T^i(y_1,y_2)\leqslant\delta_0$ $(i=1,2,\ldots,m)$ 的 $y_1,y_2\in\mathcal{B}_0$, 由 (3.14) 有

$$\begin{aligned}(d(S(T)y_1,S(T)y_2))^{\frac{2}{\beta}}\leqslant{}&(2C)^{\frac{1}{\beta}}[(d(y_1,y_2))^2-(d(S(T)y_1,S(T)y_2))^2\\&+g_1(\varrho_T^1(y_1,y_2),\varrho_T^2(y_1,y_2),\ldots,\varrho_T^m(y_1,y_2))]\\&+2^{\frac{1}{\beta}}g_2^{\frac{1}{\beta}}(\varrho_T^1(y_1,y_2),\varrho_T^2(y_1,y_2),\ldots,\varrho_T^m(y_1,y_2)),\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&(2C)^{-\frac{1}{\beta}}(d(S(T)y_1,S(T)y_2))^{\frac{2}{\beta}}+(d(S(T)y_1,S(T)y_2))^2\\&\quad\leqslant(d(y_1,y_2))^2+g_1(\varrho_T^1(y_1,y_2),\varrho_T^2(y_1,y_2),\ldots,\varrho_T^m(y_1,y_2))\\&\qquad+C^{-\frac{1}{\beta}}g_2^{\frac{1}{\beta}}(\varrho_T^1(y_1,y_2),\varrho_T^2(y_1,y_2),\ldots,\varrho_T^m(y_1,y_2)).\end{aligned}\tag{3.16}$$

记 $w(s)=(2C)^{-\frac{1}{\beta}}s^{\frac{1}{\beta}}+s$, $s\geqslant 0$, 则 (3.16) 即为

$$\begin{aligned}w((d(S(T)y_1,S(T)y_2))^2)\leqslant{}&(d(y_1,y_2))^2+g_1(\varrho_T^1(y_1,y_2),\varrho_T^2(y_1,y_2),\ldots,\varrho_T^m(y_1,y_2))\\&+C^{-\frac{1}{\beta}}g_2^{\frac{1}{\beta}}(\varrho_T^1(y_1,y_2),\varrho_T^2(y_1,y_2),\ldots,\varrho_T^m(y_1,y_2)).\end{aligned}\tag{3.17}$$

将 w 在 $\mathbb{R}^+$ 上的反函数记作 w^{-1}. 由于 w^{-1} 单调递增, 因此, (3.17) 蕴涵着

$$\begin{aligned}(d(S(T)y_1,S(T)y_2))^2\leqslant{}&w^{-1}((d(y_1,y_2))^2+g_1(\varrho_T^1(y_1,y_2),\varrho_T^2(y_1,y_2),\ldots,\varrho_T^m(y_1,y_2))\\&+C^{-\frac{1}{\beta}}g_2^{\frac{1}{\beta}}(\varrho_T^1(y_1,y_2),\varrho_T^2(y_1,y_2),\ldots,\varrho_T^m(y_1,y_2))).\end{aligned}\tag{3.18}$$

此外, 容易验证 $w^{-1}(0)=0$ 且 $w^{-1}(s)<0$, $s>0$. 因此, 根据引理 3.1, 由不等式 (3.18) 可推导出

$$\alpha(S(t)\mathcal{B}_0)\to 0,\quad t\to+\infty. \tag{3.19}$$

于是存在 $t_0>0$ 使得

$$\alpha(S(t)\mathcal{B}_0)<1,\quad \forall\, t\geqslant t_0. \tag{3.20}$$

对任意给定的 $t\geqslant t_0$ 和 $\epsilon>0$, 由定义 2.1 知, 存在集 $F_1,F_2,\ldots,F_n$ 使得

$$S(t)\mathcal{B}_0\subseteq\bigcup_{j=1}^n F_n,\quad \operatorname{diam}F_j<\alpha(S(t)\mathcal{B}_0)+\epsilon. \tag{3.21}$$

由假设 (i) 知, 存在 $\delta>0$ 使得当 $x_i\in[0,\delta]$ $(i=1,2,\dots,m)$ 时, $g_l(x_1,x_2,\dots,x_m)<\epsilon$ $(l=1,2)$. 因 ϱ_T^i $(i=1,2,\dots,m)$ 是准紧的, 故存在有限集 $\mathcal{N}^i=\{x_j^i:j=1,2,\dots,k_i\}\subseteq\mathcal{B}_0$ 使得对任意的 $y\in\mathcal{B}_0$, 有 $x_j^i\in\mathcal{N}^i$ 满足 $\varrho_T^i(S(t)y,S(t)x_j^i)\leqslant\frac{1}{2}\min\{\delta,\delta_0\}$, 即

$$S(t)\mathcal{B}_0\subseteq\bigcup_{j=1}^{k_i}C_j^i,\quad C_j^i=\left\{S(t)y:y\in\mathcal{B}_0,\ \varrho_T^i(S(t)y,S(t)x_j^i)\leqslant\frac{1}{2}\min\{\delta,\delta_0\}\right\},\quad i=1,\dots,m.\tag{3.22}$$

因而,

$$\begin{cases}S(t)\mathcal{B}_0\subseteq\displaystyle\bigcup_{j_1,j_2,\dots,j_m,j}(C_{j_1}^1\cap C_{j_2}^2\cap\cdots\cap C_{j_m}^m\cap F_j),\\ S(t+T)\mathcal{B}_0\subseteq\displaystyle\bigcup_{j_1,j_2,\dots,j_m,j}(S(T)(C_{j_1}^1\cap C_{j_2}^2\cap\cdots\cap C_{j_m}^m\cap F_j)).\end{cases}$$

由 (3.21) 和 (3.22) 知, 对任意满足 $S(t)y_1,S(t)y_2\in C_{j_1}^1\cap C_{j_2}^2\cap\cdots\cap C_{j_m}^m\cap F_j$ 的 $y_1,y_2\in\mathcal{B}_0$, 有

$$d(S(t)y_1,S(t)y_2)\leqslant\mathrm{diam}F_j<\alpha(S(t)\mathcal{B}_0)+\epsilon\tag{3.23}$$

和

$$\varrho_T^i(S(t)y_1,S(t)y_2)\leqslant\min\{\delta,\delta_0\},\quad i=1,2,\dots,m.\tag{3.24}$$

不等式 (3.24) 蕴涵着

$$g_l(\varrho_T^1(S(t)y_1,S(t)y_2),\dots,\varrho_T^m(S(t)y_1,S(t)y_2))<\epsilon,\quad l=1,2.\tag{3.25}$$

从 (3.13)、(3.14) 和 (3.24) 可推导出

$$\begin{aligned}(d(S(T+t)y_1,S(T+t)y_2))^{\frac{2}{\beta}}\leqslant(2C)^{\frac{1}{\beta}}[&(d(S(t)y_1,S(t)y_2))^2-(d(S(T+t)y_1,S(T+t)y_2))^2\\&+g_1(\varrho_T^1(S(t)y_1,S(t)y_2),\dots,\varrho_T^m(S(t)y_1,S(t)y_2))]\\&+2^{\frac{1}{\beta}}g_2^{\frac{1}{\beta}}(\varrho_T^1(S(t)y_1,S(t)y_2),\dots,\varrho_T^m(S(t)y_1,S(t)y_2)),\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&(2C)^{-\frac{1}{\beta}}(d(S(T+t)y_1,S(T+t)y_2))^{\frac{2}{\beta}}+(d(S(T+t)y_1,S(T+t)y_2))^2\\&\quad\leqslant(d(S(t)y_1,S(t)y_2))^2+g_1(\varrho_T^1(S(t)y_1,S(t)y_2),\dots,\varrho_T^m(S(t)y_1,S(t)y_2))\\&\qquad+C^{-\frac{1}{\beta}}g_2^{\frac{1}{\beta}}(\varrho_T^1(S(t)y_1,S(t)y_2),\dots,\varrho_T^m(S(t)y_1,S(t)y_2)),\end{aligned}\tag{3.26}$$

即

$$\begin{aligned}&w((d(S(T+t)y_1,S(T+t)y_2))^2)\\&\quad\leqslant(d(S(t)y_1,S(t)y_2))^2+g_1(\varrho_T^1(S(t)y_1,S(t)y_2),\dots,\varrho_T^m(S(t)y_1,S(t)y_2))\\&\qquad+C^{-\frac{1}{\beta}}g_2^{\frac{1}{\beta}}(\varrho_T^1(S(t)y_1,S(t)y_2),\dots,\varrho_T^m(S(t)y_1,S(t)y_2)).\end{aligned}\tag{3.27}$$

由于 $w(s)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上单调递增, (3.27) 意味着

$$(d(S(T+t)y_1,S(T+t)y_2))^2$$

$$\begin{aligned}&\leqslant w^{-1}((d(S(t)y_1,S(t)y_2))^2+g_1(\varrho_T^1(S(t)y_1,S(t)y_2),\ldots,\varrho_T^m(S(t)y_1,S(t)y_2))\\&\quad+C^{-\frac{1}{\beta}}g_2^{\frac{1}{\beta}}(\varrho_T^1(S(t)y_1,S(t)y_2),\ldots,\varrho_T^m(S(t)y_1,S(t)y_2))).\end{aligned}\tag{3.28}$$

从 (3.23)、(3.25)、(3.28) 以及 w^{-1} 的单调性可推导出

$$(d(S(T+t)y_1,S(T+t)y_2))^2\leqslant w^{-1}((\alpha(S(t)\mathcal{B}_0)+\epsilon)^2+\epsilon+C^{-\frac{1}{\beta}}\epsilon^{\frac{1}{\beta}}).$$

于是,

$$(\alpha(S(t+T)\mathcal{B}_0))^2\leqslant w^{-1}((\alpha(S(t)\mathcal{B}_0)+\epsilon)^2+\epsilon+C^{-\frac{1}{\beta}}\epsilon^{\frac{1}{\beta}}).$$

因而由 ϵ 的任意性可得

$$w((\alpha(S(t+T)\mathcal{B}_0))^2)\leqslant(\alpha(S(t)\mathcal{B}_0))^2.\tag{3.29}$$

不等式 (3.29) 等价于

$$(\alpha(S(t+T)\mathcal{B}_0))^2\leqslant 2C[(\alpha(S(t)\mathcal{B}_0))^2-(\alpha(S(t+T)\mathcal{B}_0))^2]^\beta.\tag{3.30}$$

当 $t\geqslant t_0$ 时, $\alpha(S(t+T)\mathcal{B}_0)\leqslant\alpha(S(t)\mathcal{B}_0)<1$, 故

$$(\alpha(S(t)\mathcal{B}_0))^2-(\alpha(S(t+T)\mathcal{B}_0))^2\leqslant[(\alpha(S(t)\mathcal{B}_0))^2-(\alpha(S(t+T)\mathcal{B}_0))^2]^\beta.\tag{3.31}$$

由 (3.30) 和 (3.31) 可知, 对任意的 $t\geqslant t_0$ 有

$$\begin{aligned}(\alpha(S(t)\mathcal{B}_0))^2&=(\alpha(S(t+T)\mathcal{B}_0))^2+(\alpha(S(t)\mathcal{B}_0))^2-(\alpha(S(t+T)\mathcal{B}_0))^2\\&\leqslant(1+2C)[(\alpha(S(t)\mathcal{B}_0))^2-(\alpha(S(t+T)\mathcal{B}_0))^2]^\beta,\end{aligned}$$

即

$$(\alpha(S(t)\mathcal{B}_0))^{\frac{2}{\beta}}\leqslant(1+2C)^{\frac{1}{\beta}}[(\alpha(S(t)\mathcal{B}_0))^2-(\alpha(S(t+T)\mathcal{B}_0))^2].\tag{3.32}$$

由于 $\mathcal{B}_0$ 是正不变的, $\alpha(S(t)\mathcal{B}_0)$ 关于 t 单调非增. 因此由 (3.32) 可知 $w(t)\equiv(\alpha(S(t)\mathcal{B}_0))^2$ 满足 (2.8), 其中 $1+\alpha=\frac{1}{\beta}$, $h(t)=(1+2C)^{\frac{1}{\beta}}$. 那么, 根据引理 2.4 可得

$$\alpha(S(t)\mathcal{B}_0)\leqslant\left\{(\alpha(\mathcal{B}_0))^{\frac{2(\beta-1)}{\beta}}+\frac{1-\beta}{T\beta(1+2C)^{\frac{1}{\beta}}}(t-t_0-2T)\right\}^{\frac{\beta}{2(\beta-1)}},\quad\forall\,t\geqslant t_0+2T.$$

根据定理 2.2 可知, $(X,\{S(t)\}_{t\geqslant0})$ 具有满足 (3.15) 的多项式吸引子 $\mathcal{A}^*$. □

4 一类波方程多项式吸引子的存在性及其吸引速度的具体估计

考虑以下初边值问题:

$$u_{tt}-\Delta u+k\|u_t\|^pu_t+f(u)=\int_\Omega K(x,y)u_t(y)dy+h(x),\quad 于\ [0,\infty)\times\Omega,\tag{4.1}$$

$$u=0,\quad 于\ [0,\infty)\times\partial\Omega,\tag{4.2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\Omega,\tag{4.3}$$

其中, k 和 p 为正常数, $K\in L^2(\Omega\times\Omega)$, $h\in L^2(\Omega)$. $f\in C^1(\mathbb{R})$ 满足多项式增长条件: 存在正常数 M 使得

$$|f'(s)|\leqslant M|s|^q,\quad \forall\,|s|\geqslant 1,\tag{4.4}$$

其中, 当 $n\geqslant 3$ 时, $0<q<\frac{2}{n-2}$; 当 $n\leqslant 2$ 时, $0<q<\infty$. 此外 f 还满足耗散条件

$$\liminf_{|s|\to\infty} f'(s)\equiv\mu>-\lambda_1,\tag{4.5}$$

其中 λ_1 是带有 Dirichlet 边界条件的算子 $-\Delta$ 的第一特征值.

对于问题 (4.1)–(4.3), 文献 [25] 证明了以下结果.

引理 4.1 [25]　设 T 为任意正数. 在上述假设下, 对任意的 $(u_0,u_1)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, 初边值问题 (4.1)–(4.3) 有唯一的弱解 $u\in C([0,T];H_0^1(\Omega))\cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$, 相应地得到 $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 上的解半群

$$S(t)(u_0,u_1)=(u(t),u_t(t)),\quad t\geqslant 0.$$

此外, 半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是耗散的, 于是存在正不变有界吸收集 $\mathcal{B}_0$.

为建立本节的主要结果, 还需要如下引理.

引理 4.2 [26]　设 $(H,(\cdot,\cdot)_H)$ 是一个内积空间, $\|\cdot\|_H$ 是由内积所诱导的范数, 常数 $p>1$, 则必存在某个正常数 C_p, 使得对于 H 中任意两个不全为 0 的元素 x 和 y, 都有

$$(\|x\|_H^{p-2}x-\|y\|_H^{p-2}y,x-y)_H\geqslant\begin{cases}C_p\|x-y\|_H^p, & p\geqslant 2,\\ C_p\dfrac{\|x-y\|_H^2}{(\|x\|_H+\|y\|_H)^{2-p}}, & 1<p<2.\end{cases}$$

引理 4.3 [27]　设 Banach 空间 X、B 和 Y 满足 $X\hookrightarrow\hookrightarrow B\hookrightarrow Y$,

(i) 如果 F 是 $L^p(0,T;X)$ 中的一个有界集, 且集合 $\partial_tF:=\{\partial_tf:f\in F\}$ 在 $L^1(0,T;Y)$ 中是有界的, 其中 $1\leqslant p<\infty$, ∂_tf 是在分布意义下的导数, 那么 F 在 $L^p(0,T;B)$ 中是相对紧的.

(ii) 如果 F 是 $L^\infty(0,T;X)$ 中的一个有界集, ∂_tF 在 $L^r(0,T;Y)$ 中是有界的, 其中 $r>1$, 那么 F 在 $C(0,T;B)$ 中是相对紧的.

引理 4.4 [28]　若核 $K(x,y)$ 是平方可积的, 则积分算子

$$K:L^2(\Omega)\to L^2(\Omega),$$
$$v\mapsto\int_\Omega K(x,y)v(y)dy$$

是一个紧算子.

最后, 将定理 3.1 应用于问题 (4.1)–(4.3).

定理 4.1　设条件 (4.4) 和 (4.5) 成立, 则由问题 (4.1)–(4.3) 的解所生成的动力系统 $(H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega),\{S(t)\}_{t\geqslant 0})$ 关于非紧性测度是多项式衰退的, 因此具有多项式吸引子 $\mathcal{A}^*$, 且存在 $t_0>0$ 使得对任意有界集 $B\subseteq H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, 当 $t\geqslant t_0+t_*(B)+1$ 时都有

$$\operatorname{dist}(S(t)B,\mathcal{A}^*)\leqslant\left\{(\alpha(\mathcal{B}_0))^{-p}+\frac{pkC_p}{2^{p+2}}(t-t_0-t_*(B)-1)\right\}^{-\frac{1}{p}},\tag{4.6}$$

其中, $\mathcal{B}_0\subseteq H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 是正不变有界吸收集, $t_*(B)$ 是 B 进入 $\mathcal{B}_0$ 的时间.

证明 记 $\Psi(u_t(t,x))=\int_\Omega K(x,y)u_t(t,y)dy$. 设 $w(t)$ 和 $v(t)$ 分别是问题 (4.1)–(4.3) 对应于初值 $y_1,y_2\in\mathcal{B}_0$ 的弱解, 即

$$(w(t),w_t(t))\equiv S(t)y_1,\quad (v(t),v_t(t))\equiv S(t)y_2,\quad y_1,y_2\in B_0.$$

由 B_0 的正不变性有

$$\begin{cases}\|(w(t),w_t(t))\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\leqslant C,\\ \|(v(t),v_t(t))\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\leqslant C,\end{cases}\quad \forall\, t>0,\quad y_1,y_2\in B_0. \tag{4.7}$$

差 $z(t)=w(t)-v(t)$ 满足等式

$$z_{tt}-\Delta z+k(\|w_t\|^pw_t-\|v_t\|^pv_t)+f(w)-f(v)=\Psi(z_t). \tag{4.8}$$

将 (4.8) 与 z_t 在 $L^2(\Omega)$ 中作内积, 得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|z_t\|^2+\|\nabla z\|^2)+k(\|w_t\|^pw_t-\|v_t\|^pv_t,z_t)=(\Psi(z_t),z_t)-(f(w)-f(v),z_t). \tag{4.9}$$

令 T 为任意给定的正常数. 将 (4.9) 在 t 到 T 上作积分, 得到

$$\begin{aligned}E_z(t)=E_z(T)+k\int_t^T(\|w_t\|^pw_t-\|v_t\|^pv_t,z_t)d\tau\\ +\int_t^T(f(w)-f(v),z_t)d\tau-\int_t^T(\Psi(z_t),z_t)d\tau,\end{aligned} \tag{4.10}$$

其中

$$E_z(t)=\frac{1}{2}(\|z_t(t)\|^2+\|\nabla z(t)\|^2).$$

将 (4.10) 在 0 到 T 上作积分, 得到

$$\begin{aligned}TE_z(T)=\int_0^TE_z(t)dt-\int_0^T\int_t^Tk(\|w_t\|^pw_t-\|v_t\|^pv_t,z_t)d\tau dt\\ -\int_0^T\int_t^T(f(w)-f(v),z_t)d\tau dt+\int_0^T\int_t^T(\Psi(z_t),z_t)d\tau dt.\end{aligned} \tag{4.11}$$

将 (4.8) 与 z 在 $L^2(\Omega)$ 上作内积, 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\|z_t\|^2+\|\nabla z\|^2)=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(z_t,z)+\|z_t\|^2-\frac{1}{2}(f(w)-f(v),z)\\ +\frac{1}{2}(\Psi(z_t),z)-\frac{k}{2}(\|w_t\|^pw_t-\|v_t\|^pv_t,z).\end{aligned} \tag{4.12}$$

将 (4.12) 在 0 到 T 上作积分, 得

$$\begin{aligned}\int_0^TE_z(t)dt=-\frac{1}{2}(z_t,z)\,|_0^T+\int_0^T\|z_t\|^2dt-\frac{1}{2}\int_0^T(f(w)-f(v),z)dt\\ +\frac{1}{2}\int_0^T(\Psi(z_t),z)dt-\frac{k}{2}\int_0^T(\|w_t\|^pw_t-\|v_t\|^pv_t,z)dt.\end{aligned} \tag{4.13}$$

将 (4.13) 代入 (4.11), 得

$$
\begin{aligned}
TE_z(T) = &-\frac{1}{2}(z_t, z)\,|_0^T + \int_0^T \|z_t\|^2 dt - \frac{1}{2}\int_0^T (f(w)-f(v), z)dt \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^T (\Psi(z_t), z)dt - \frac{k}{2}\int_0^T (\|w_t\|^p w_t - \|v_t\|^p v_t, z)dt \\
&- \int_0^T \int_t^T k(\|w_t\|^p w_t - \|v_t\|^p v_t, z_t)d\tau dt \\
&- \int_0^T \int_t^T (f(w)-f(v), z_t)d\tau dt + \int_0^T \int_t^T (\Psi(z_t), z_t)d\tau dt.
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

利用 (4.7), 我们可以对等式 (4.14) 右边的各项作如下估计.

由 (4.4), 有

$$
\begin{aligned}
\left[\int_\Omega (f(w)-f(v))^2 dx\right]^{1/2} &= \left\{\int_\Omega \left[\int_0^1 f'(v+\theta(w-v))(w-v)d\theta\right]^2 dx\right\}^{1/2} \\
&\leqslant \left\{\int_\Omega \left[\int_0^1 M(|v+\theta(w-v)|^q+1)|w-v|d\theta\right]^2 dx\right\}^{1/2} \\
&\leqslant C\left\{\int_\Omega [(|v|^q+|w|^q+1)|w-v|]^2 dx\right\}^{1/2} \\
&\leqslant C\left\{\int_\Omega (|v|^{2q}+|w|^{2q}+1)|w-v|^2 dx\right\}^{1/2} \\
&\leqslant C\left\{\left(\int_\Omega |v|^{2q}|w-v|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega |w|^{2q}|w-v|^2 dx\right)^{1/2} \right. \\
&\qquad \left. + \left(\int_\Omega |w-v|^2 dx\right)^{1/2}\right\}.
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

当 $n \geqslant 3$ 时, 取

$$
r = \frac{n}{(n-2)q}, \quad \overline{r} = \frac{n}{n-(n-2)q},
$$

则由 $q < \frac{2}{n-2}$ 易知

$$
\frac{1}{r} + \frac{1}{\overline{r}} = 1, \quad 2qr = \frac{2n}{n-2}, \quad 2\overline{r} < \frac{2n}{n-2}.
$$

当 $n \leqslant 2$ 时, 取 $r = \overline{r} = 2$. 于是对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2qr}(\Omega)$ 和 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{2\overline{r}}(\Omega)$.

因此, 由 (4.7) 和 (4.15) 可得

$$
\begin{aligned}
\left[\int_\Omega (f(w)-f(v))^2 dx\right]^{1/2} &\leqslant C\left\{\left(\int_\Omega |w|^{2qr} dx\right)^{\frac{1}{2r}} \left(\int_\Omega |w-v|^{2\overline{r}} dx\right)^{\frac{1}{2\overline{r}}} \right. \\
&\qquad \left. + \left(\int_\Omega |v|^{2qr} dx\right)^{\frac{1}{2r}} \left(\int_\Omega |w-v|^{2\overline{r}} dx\right)^{\frac{1}{2\overline{r}}} + \left(\int_\Omega |w-v|^2 dx\right)^{1/2}\right\} \\
&\leqslant C(\|\nabla v\|^q + \|\nabla w\|^q + 1)\|w-v\|_{2\overline{r}} \\
&\leqslant C\|w-v\|_{2\overline{r}}.
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

继而有

$$
-\int_0^T \int_t^T (f(w)-f(v), z_t)d\tau dt \leqslant T^2 \sup_{t\in[0,T]} \|f(w(t))-f(v(t))\| \sup_{t\in[0,T]} \|z_t(t)\|
$$

$$\begin{aligned}&\leqslant T^2C\sup_{t\in[0,T]}\|f(w(t))-f(v(t))\|\\&\leqslant T^2C\sup_{t\in[0,T]}\|w(t)-v(t)\|_{2\overline{r}}\end{aligned}\tag{4.17}$$

和

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_0^T(f(w)-f(v),z)dt&\leqslant\frac{T}{2}\sup_{t\in[0,T]}\|f(w(t))-f(v(t))\|\sup_{t\in[0,T]}\|z(t)\|\\&\leqslant TC\sup_{t\in[0,T]}\|z(t)\|.\end{aligned}\tag{4.18}$$

由引理 4.2 知

$$(\|w_t\|^pw_t-\|v_t\|^pv_t,w_t-z_t)\geqslant C_p\|w_t-v_t\|^{p+2},$$

于是有

$$\|w_t-v_t\|^2\leqslant C_p^{-\frac{2}{p+2}}(\|w_t\|^pw_t-\|v_t\|^pv_t,w_t-v_t)^{\frac{2}{p+2}}.\tag{4.19}$$

由 (4.19) 以及函数 $g(s)=s^{\frac{2}{p+2}}$ $(s>0)$ 的凹性, 可得

$$\begin{aligned}\int_0^T\|z_t\|^2dt&\leqslant C_p^{-\frac{2}{p+2}}\int_0^T(\|w_t\|^pw_t-\|v_t\|^pv_t,w_t-v_t)^{\frac{2}{p+2}}dt\\&\leqslant C_p^{-\frac{2}{p+2}}T\bigg(\frac{1}{T}\int_0^T(\|w_t\|^pw_t-\|v_t\|^pv_t,w_t-v_t)dt\bigg)^{\frac{2}{p+2}}\\&=C_p^{-\frac{2}{p+2}}T^{\frac{p}{p+2}}\bigg(\int_0^T(\|w_t\|^pw_t-\|v_t\|^pv_t,w_t-v_t)dt\bigg)^{\frac{2}{p+2}}.\end{aligned}\tag{4.20}$$

在等式 (4.10) 中取 $t=0$, 得

$$\begin{aligned}&\int_0^T(\|w_t\|^pw_t-\|v_t\|^pv_t,w_t-v_t)dt\\&\quad=\frac{1}{k}\bigg(E_z(0)-E_z(T)-\int_0^T(f(w)-f(v),z_t)d\tau+\int_0^T(\Psi(z_t),z_t)d\tau\bigg).\end{aligned}\tag{4.21}$$

由 (4.7)、(4.16)、(4.20) 和 (4.21), 可推导出

$$\begin{aligned}\int_0^T\|z_t\|^2dt&\leqslant(kC_p)^{-\frac{2}{p+2}}T^{\frac{p}{p+2}}\bigg(E_z(0)-E_z(T)\\&\qquad-\int_0^T(f(w)-f(v),z_t)d\tau+\int_0^T(\Psi(z_t),z_t)d\tau\bigg)^{\frac{2}{p+2}}\\&\leqslant(kC_p)^{-\frac{2}{p+2}}T^{\frac{p}{p+2}}\bigg(E_z(0)-E_z(T)\\&\qquad+TC\sup_{t\in[0,T]}\|w(t)-v(t)\|_{2\overline{r}}+C\int_0^T\|\Psi(z_t(t))\|dt\bigg)^{\frac{2}{p+2}}.\end{aligned}\tag{4.22}$$

继续列出剩下几项的估计:

$$-\frac{1}{2}(z_t,z)|_0^T\leqslant\frac{1}{2}(\|z_t(T)\|\|z(T)\|+\|z_t(0)\|\|z(0)\|)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C(\|z(T)\| + \|z(0)\|) \\
&\leqslant C \sup_{t\in[0,T]} \|z(t)\|,
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^T (\Psi(z_t), z)dt &\leqslant \frac{T}{2} \sup_{t\in[0,T]} \|\Psi(z_t(t))\| \sup_{t\in[0,T]} \|z(t)\| \\
&\leqslant \frac{T}{2}\|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} \sup_{t\in[0,T]} \|z_t(t)\| \sup_{t\in[0,T]} \|z(t)\| \\
&\leqslant TC \sup_{t\in[0,T]} \|z(t)\|,
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

$$
-\frac{k}{2}\int_0^T (\|w_t\|^p w_t - \|v_t\|^p v_t, z)dt \leqslant TC \sup_{t\in[0,T]} \|z(t)\|, \tag{4.25}
$$

$$
-\int_0^T \int_t^T k(\|w_t\|^p w_t - \|v_t\|^p v_t, z_t)d\tau dt \leqslant 0, \tag{4.26}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_t^T (\Psi(z_t), z_t)d\tau dt &\leqslant \int_0^T \int_0^T |(\Psi(z_t), z_t)|d\tau dt \\
&\leqslant T \sup_{t\in[0,T]} \|z_t(t)\| \int_0^T \|\Psi(z_t(t))\|dt \\
&\leqslant TC \int_0^T \|\Psi(z_t(t))\|dt.
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

将 (4.17)、(4.18) 和 (4.22)–(4.27) 代入到 (4.14) 中得到

$$
\begin{aligned}
E_z(T) &\leqslant C_T\bigg(\sup_{t\in[0,T]} \|z(t)\| + \sup_{t\in[0,T]} \|z(t)\|_{2\overline{r}} + \int_0^T \|\Psi(z_t(t))\|dt\bigg) \\
&\quad + (kTC_p)^{-\frac{2}{p+2}}\bigg(E_z(0) - E_z(T) \\
&\quad + TC \sup_{t\in[0,T]} \|z(t)\|_{2\overline{r}} + C\int_0^T \|\Psi(z_t(t))\|dt\bigg)^{\frac{2}{p+2}} \\
&\leqslant C_T\bigg(\sup_{t\in[0,T]} \|z(t)\|_{2\overline{r}} + \int_0^T \|\Psi(z_t(t))\|dt\bigg) \\
&\quad + (kTC_p)^{-\frac{2}{p+2}}\bigg(E_z(0) - E_z(T) \\
&\quad + TC \sup_{t\in[0,T]} \|z(t)\|_{2\overline{r}} + C\int_0^T \|\Psi(z_t(t))\|dt\bigg)^{\frac{2}{p+2}}.
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

因 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{2\overline{r}}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, 故由引理 4.3 和 (4.7) 可知 $\rho_T(y_1, y_2) = \sup_{t\in[0,T]} \|z(t)\|_{2\overline{r}}$ 在 $\mathcal{B}_0$ 上是准紧的.

定义 $\mathcal{A} = -\Delta$ 为定义域是 $D(\mathcal{A}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 的 $L^2(\Omega)$ 上的严格正定算子. 设 V 是 $L^2(\Omega)$ 关于范数 $\|\cdot\|_V = \|\Psi(\cdot)\| + \|\mathcal{A}^{-\frac{1}{2}}(\cdot)\|$ 的完备化空间, W 是 $L^2(\Omega)$ 关于范数 $\|\cdot\|_W = \|\mathcal{A}^{-\frac{1}{2}}(\cdot)\|$ 的完备化空间. 由引理 4.4, 有

$$
L^2(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow V \hookrightarrow W. \tag{4.29}
$$

由 (4.16) 有

$$\|f(w(t))\| \leqslant C. \tag{4.30}$$

此外还有

$$\|\Psi(w_t(t))\| \leqslant \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}\|w_t(t)\| \leqslant C. \tag{4.31}$$

由 (4.1)、(4.30) 和 (4.31) 可得

$$\|\mathcal{A}^{-\frac{1}{2}}w_{tt}(t)\| \leqslant \|\nabla w(t)\| + k\|w_t(t)\|^p\|\mathcal{A}^{-\frac{1}{2}}w_t(t)\| + \|\mathcal{A}^{-\frac{1}{2}}(\Psi(w_t(t)) + h - f(w(t)))\| \leqslant C.$$

于是,

$$\int_0^T \|\mathcal{A}^{-\frac{1}{2}}w_{tt}(t)\|dt \leqslant C_T. \tag{4.32}$$

此外还有

$$\int_0^T \|w_t(t)\|dt \leqslant C_T. \tag{4.33}$$

由引理 4.3, (4.29)、(4.32) 和 (4.33) 意味着 $\varrho_T(y_1,y_2)=\int_0^T\|\Psi(z_t(t))\|dt$ 在 $\mathcal{B}_0$ 上是准紧的.

于是由定理 3.1, 从 (4.28) 可推导出存在 $t_0>0$ 使得对任意有界集 $B\subseteq H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ 都有当 $t\geqslant t_0+2T+t_*(B)$ 时,

$$\alpha(S(t)B) \leqslant \left\{(\alpha(\mathcal{B}_0))^{-p} + \frac{p}{2(T^{\frac{2}{p+2}}+2^{\frac{p}{p+2}+1}(kC_p)^{-\frac{2}{p+2}})^{\frac{p+2}{2}}}(t-t_0-2T-t_*(B))\right\}^{-\frac{1}{p}}, \tag{4.34}$$

其中 $t_*(B)$ 满足

$$S(t)B\subseteq\mathcal{B}_0,\quad \forall\, t\geqslant t_*(B).$$

因为 $\{(\alpha(\mathcal{B}_0))^{-p}+\frac{p}{2(T^{\frac{2}{p+2}}+2^{\frac{p}{p+2}+1}(kC_p)^{-\frac{2}{p+2}})^{\frac{p+2}{2}}}(t-t_0-2T-t_*(B))\}^{-\frac{1}{p}}$ 关于 T 是连续且单调递增的, 而 T 是任意给定的正常数, 在 (4.34) 中令 $T\to 0$, 可知对任意的 $t>t_0+t_*(B)$ 都有

$$\alpha(S(t)B) \leqslant \left\{(\alpha(\mathcal{B}_0))^{-p} + \frac{pkC_p}{2^{p+2}}(t-t_0-t_*(B))\right\}^{-\frac{1}{p}}.$$

因此, 问题 (4.1)–(4.3) 的解生成的动力系统 $(H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega),\{S(t)\}_{t\geqslant 0})$ 具有满足 (4.6) 的多项式吸引子 $\mathcal{A}^*$. 证毕. □

注 4.1 如 (4.6) 所示, p 越大, 能量耗散越慢, 吸引子 $\mathcal{A}^*$ 的吸引速度也越慢; 反之, p 越小, 能量耗散越快, 吸引子 $\mathcal{A}^*$ 的吸引速度越快. 当 $p\to 0$ 时, 阻尼趋近于线性阻尼, 此时吸引子 $\mathcal{A}^*$ 的吸引速度趋近于指数吸引. 这个结果与我们出于直观的预测是一致的.

致谢 衷心感谢评审专家们的仔细阅读及非常有益的修改意见.

参考文献

1 Foias C, Olson E. Finite fractal dimension and Hölder-Lipshitz parametrization. Indiana Univ Math J, 1996, 45: 603–616

2 Hunt B R, Kaloshin V Y. Regularity of embeddings of infinite-dimensional fractal sets into finite-dimensional spaces. Nonlinearity, 1999, 12: 1263–1275

3 Miranville A, Zelik S. Attractors for dissipative partial differential equations in bounded and unbounded domains. In: Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations, vol. IV. Amsterdam: Elsevier/North-Holland, 2008, 103–200

4 Robinson J C. Infinite-Dimensional Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge University Press, 2001

5 Foias C, Sell G R, Temam R. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations. J Differential Equations, 1988, 73: 309–353

6 Constantin P, Foias C, Nicolaenko B, et al. Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1989

7 Sell G R, You Y. Dynamics of Evolutionary Equations. New York: Springer, 2002

8 Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1997

9 Mora X, Solà-Morales J. Existence and nonexistence of finite-dimensional globally attracting invariant manifolds in semilinear damped wave equations. In: Dynamics of Infinite-Dimensional Systems. Berlin: Springer, 1987, 187–210

10 Eden A, Foias C, Nicolaenko B, et al. Exponential Attractors for Dissipative Evolution Equations. Paris: Masson, 1994

11 Zhong C K, Niu W S. On the Z_2 index of the global attractor for a class of p-Laplacian equations. Nonlinear Anal, 2010, 73: 3698–3704

12 Zelik S V. The attractor for a nonlinear reaction-diffusion system in the unbounded domain and Kolmogorov's ϵ-entropy. Math Nachr, 2001, 232: 129–179

13 Zelik S V. Attractors of reaction-diffusion systems in unbounded domains and their spatial complexity. Comm Pure Appl Math, 2003, 56: 584–637

14 Zelik S V. The attractor for a nonlinear hyperbolic equation in the unbounded domain. Discrete Contin Dyn Syst, 2001, 7: 593–641

15 Zhang J, Kloeden P E, Yang M H, et al. Global exponential κ-dissipative semigroups and exponential attraction. Discrete Contin Dyn Syst, 2017, 37: 3487–3502

16 Nakao M. Convergence of solutions of the wave equation with a nonlinear dissipative term to the steady state. Mem Fac Sci Kyushu Univ Ser A, 1976, 30: 257–265

17 Nakao M. Asymptotic stability of the bounded or almost periodic solution of the wave equation with nonlinear dissipative term. J Math Anal Appl, 1977, 58: 336–343

18 Nakao M. A difference inequality and its application to nonlinear evolution equations. J Math Soc Japan, 1978, 30: 747–762

19 Nakao M. Decay of solutions of some nonlinear evolution equations. J Math Anal Appl, 1977, 60: 542–549

20 Silva M A J, Narciso V, Vicente A. On a beam model related to flight structures with nonlocal energy damping. Discrete Contin Dyn Syst Ser B, 2019, 24: 3281–3298

21 Deimling K. Nonlinear Functional Analysis. Berlin: Springer, 1985

22 Akhmerov R R, Kamenskiĭ M I, Potapov A S, et al. Measures of Noncompactness and Condensing Operators. Basel: Birkhäuser, 1992

23 Chueshov I, Lasiecka I. Long-time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 195. Providence: Amer Math Soc, 2008

24 Ma Q F, Wang S H, Zhong C K. Necessary and sufficient conditions for the existence of global attractors for semigroups and applications. Indiana Univ Math J, 2002, 51: 1541–1570

25 Zhao C Y, Zhao C X, Zhong C K. Asymptotic behaviour of the wave equation with nonlocal weak damping and anti-damping. J Math Anal Appl, 2020, 490: 124186–124202

26 Zhao C X, Zhao C Y, Zhong C K. The global attractor for a class of extensible beams with nonlocal weak damping. Discrete Contin Dyn Syst Ser B, 2020, 25: 935–955

27 Simon J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. Ann Mat Pura Appl (4), 1986, 146: 65–96

28 Lax P. Functional Analysis. New York: Wiley-Interscience, 2002

Estimate of the attractive velocity of attractors for some dynamical systems

Chunyan Zhao, Chengkui Zhong & Chunxiang Zhao

Abstract In this paper, we first prove an abstract theorem on the existence of polynomial attractors and the concrete estimate of their attractive velocity for infinite-dimensional dynamical systems, then apply this theorem to a class of wave equations with nonlocal weak damping and anti-damping in the case where the nonlinear term f is of subcritical growth.

Keywords **polynomial attractor, attractive velocity, polynomial decay with respect to noncompactness measure, wave equation, nonlocal weak damping**

MSC(2020) **35B40, 35B41, 35L05**

doi: 10.1360/SCM-2021-0470