中国科学: 数学 2023 年 第 53 卷 第 2 期: 1～22
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

两类最大散射线性集的等价性与自同构群

献给朱烈教授 80 华诞

唐薇, 周悦*

国防科技大学理学院, 长沙 410073
E-mail: 1050271697tw@gmail.com, yue.zhou.ovgu@outlook.de

收稿日期: 2022-04-28; 接受日期: 2022-07-21; 网络出版日期: 2022-09-16; * 通信作者
湖南省自然科学基金 (批准号: 2019RS2031) 和长沙市杰出创新青年培养计划 (批准号: kq2106006) 资助项目

摘要 有限域上射影空间中的线性集在阻碍集、半域和秩度量码等的研究中起着核心作用. 具有最大可能的元素个数和最大秩的线性集称为最大散射线性集. 经过近 20 年的研究, 目前已知的射影直线上最大散射线性集的个数仍然较少, 其中包含 Csajbók 等 (2018) 和 Marino 等 (2020) 构造的两类. 本文旨在解决这两类最大散射线性集中每一类中元素的等价问题, 并确定它们的自同构群.

关键词 线性集 秩距离码 有限几何 线性多项式

MSC (2020) 主题分类 05B25, 51E20, 51E22

1 引言

线性集的概念由 Lunardon [12] 提出, 它是有限几何中子几何这一概念的推广. 在过去 20 年对有限几何和编码理论的研究中, 线性集被广泛研究并应用于构造和刻画各类对象, 包括阻断集 (blocking sets)、二相交集 (two-intersection sets)、Cayley 广义六边形的平移展形 (spread)、极空间的平移卵形体 (ovoid)、半域和秩度量码. 更多内容可参见文献 [2, 8, 16–18] 及其中所列的参考文献.

本文只讨论射影直线上的线性集. 令 $\Lambda = \mathrm{PG}(V) = \mathrm{PG}(1, q^n)$, 其中, V 是 $\mathbb{F}_{q^n}$ 上的 2 维向量空间, PG (projective geometry) 表示射影几何, 那么 Λ 是一条射影直线. 若 Λ 中的秩为 k 的点集 L 是被 V 中一个 $\mathbb{F}_q$- 向量子空间 U 中的非零向量定义, 即

$$L = L_U := \{\langle \boldsymbol{u}\rangle_{\mathbb{F}_{q^n}} : \boldsymbol{u} \in U \setminus \{\mathbf{0}\}\},$$

那么 L 称为 $\mathbb{F}_q$- 线性集, 其中 U 的维数称为 L 的秩. 对于任意秩为 k 的 $\mathbb{F}_q$- 线性集 L_U, 易知

$$|L| \leqslant \frac{q^k - 1}{q - 1}.$$

英文引用格式: Tang W, Zhou Y. Equivalence and automorphism groups of two families of maximum scattered linear sets (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 1–22, doi: 10.1360/SSM-2022-0073

如果等号成立, 那么 L_U 称为散射 (scattered) 线性集. Blokhuis 和 Lavrauw [3] 称 Λ 中一个具有最大秩 $k=n$ 的散射线性集为最大散射线性集.

在射影半线性群 (projective semilinear group, PΓL) $\mathrm{P\Gamma L}(2,q^n)$ 的作用下, 总可以假设 Λ 中秩为 n 的线性集 L_U 不包含点 $\langle(0,1)\rangle_{\mathbb{F}_{q^n}}$. 从而 U 和 L_U 可以表示为

$$U_f=\{(x,f(x))\colon x\in\mathbb{F}_{q^n}\}$$

以及

$$L_f=\{\langle(x,f(x))\rangle_{\mathbb{F}_{q^n}}\colon x\in\mathbb{F}_{q^n}^*\},$$

其中 f 是 $\mathbb{F}_{q^n}$ 上的 q- 多项式, 即 $f=\sum_{i=0}^{n-1}a_iX^{q^i}\in\mathbb{F}_{q^n}[X]$. 容易证明, L_f 是散射的当且仅当对于任意 $z,y\in\mathbb{F}_{q^n}^*$, 等式

$$\frac{f(z)}{z}=\frac{f(y)}{y}$$

意味着 z 和 y 是 $\mathbb{F}_q$- 线性相关的. 因此, Sheekey [18] 称满足此条件的 q- 多项式为散射多项式.

迄今为止, 在 $\mathrm{PG}(1,q^n)$ 中只有 3 类最大散射线性集对于无穷多个 n 成立. 为了方便起见, 下面列出 $\mathbb{F}_{q^n}$ 上相应的散射多项式:

(i) $f=X^{q^s}$ 且满足条件 $\gcd(s,n)=1$, 那么 L_f 称为伪正则型的线性集 (参见文献 [3]);

(ii) $f=X^{q^s}+\delta X^{q^{n-s}}$ 且满足条件 $n\geqslant 4$, $N_{q^n/q}(\delta)\notin\{0,1\}$ 及 $\gcd(s,n)=1$, 由 Lunardon 和 Polverino [13] 提出, 后来由 Sheekey [18] 推广.

(iii) $f=X^{q^s}+X^{q^{s(m-1)}}+h^{1+q^s}X^{q^{s(m+1)}}+h^{1-q^{2m-s}}X^{q^{2m-s}}$, 其中, q 为奇数, $n=2m\geqslant 6$, $h^{q^m+1}=-1$ 且满足条件 $\gcd(s,n)=1$. 这由 Longobardi 和 Zanella [11] 首次引入, 后来在文献 [10, 15] 中推广到一个大类.

本文主要研究 $\mathrm{PG}(1,q^6)$ 和 $\mathrm{PG}(1,q^8)$ 上的几类最大散射线性集. 下面列出它们相应的散射多项式:

(a) $x^q+x^{q^3}+\delta x^{q^5}$ 定义在 $\mathbb{F}_{q^6}$ 上, 且 $\delta^2+\delta=1$ 以及 q 为奇数 (参见文献 [14]).

(b) $x^{q^s}+\delta x^{q^{s+m}}$ 定义在 $\mathbb{F}_{q^{2m}}$ 上, 且 $m\in\{3,4\}$, $\gcd(s,m)=1$ 以及 δ 满足某些条件 (参见文献 [6]).

为了方便起见, 使用 $\mathscr{F}_6$ 和 $\mathscr{F}_8$ 分别表示 $m=3$ 和 $m=4$ 时 (b) 中给出的线性集类. 用 $f_{\delta,m}$ 代表 $\mathscr{F}_6$ 或 $\mathscr{F}_8$ 中参数为 (δ,m) 的相应散射多项式.

当 $m=3$ 时, 文献 [5] 已经说明对于 $q>4$ 和 $N_{q^6/q^3}(\delta)\neq 1$, 总是可以找到 $\delta\in\mathbb{F}_{q^2}^*$ 使得 $f_{\delta,3}$ 是散射多项式. Bartoli 等 [1] 完全确定了使得 $f_{\delta,3}$ 是散射多项式的 δ 的个数.

当 $m=4$ 时, 文献 [5] 也证明了, 若 q 为奇数, $N_{q^8/q^4}(\delta)\neq 1$ 且 $\delta^2=-1$, 那么 $f_{\delta,4}$ 一定是散射多项式. 此外, Timpanella 和 Zini [20] 证明了, 在 q 为奇素数的方幂和 $q\geqslant 1{,}039{,}891$ 的条件下, $f_{\delta,4}$ 是散射的当且仅当 $\delta^{1+q^4}=-1$.

对于 $\mathrm{PG}(1,q^n)$ 上的两个线性集 L_U 和 L_W, 如果存在 $\mathrm{P\Gamma L}(2,q^n)$ 中的元素 φ 使得 $L_U^{\varphi}=L_W$, 则称 L_U 和 L_W 是 PΓL- 等价 (或射影等价) 的. 对于给定的 q 和 n, 显然, 伪正则型中仅有唯一的最大散射线性集, 因为对于任意满足条件 $\gcd(s,n)=1$ 的整数 s, 有

$$\{\langle(1,x^{q^s-1})\rangle : x\in\mathbb{F}_{q^n}^*\}=\{\langle(1,x^{q-1})\rangle : x\in\mathbb{F}_{q^n}^*\}.$$

Lunardon-Polverino 类中不同元素的等价性问题已经被 Tang 等 [19] 解决. Longobardi-Zanella 类中的等价性问题也在文献 [11] 中部分解决.

本文主要研究 (a) 和 (b) 这两类散射多项式所定义的最大散射线性集的等价性问题. 首先, 第 3 节证明在 PΓL- 等价的意义下, (a) 中只包含一个元素, 并完全确定其自同构群. 其次, 第 4 节分别给出 $\mathscr{F}_6$ 和 $\mathscr{F}_8$ 这两类最大散射线性集中各自元素之间等价的充分必要条件, 并进一步确定其自同构群. 相关结果的主要证明思路如下: 首先将相关线性集之间的 PΓL- 等价性转化为相应多项式映射像集的等价性; 通过进一步分析和验证这些多项式系数之间的一些必要条件, 同时考虑其伴随多项式的一些性质, 来完成等价性的判断与自同构群的计算.

本文余下的内容安排如下: 第 2 节介绍关于最大散射线性集等价性的一些预备知识和辅助结果. 第 3 节主要讨论由 (a) 中给出的散射多项式导出的线性集的等价问题, 并确定它们的自同构群. 第 4 节讨论 $\mathscr{F}_6$ 和 $\mathscr{F}_8$ 中线性集的等价问题. 第 5 节简要总结全文的内容.

2　预备知识

有限域 $\mathbb{F}_{q^n}$ 上的一个 q- 多项式 (或一个线性化多项式) 具有如下形式:

$$f=\sum_{i=0}^{k}a_iX^{q^i},$$

其中, $a_i\in\mathbb{F}_{q^n}$, k 为正整数. 用 $\mathcal{L}_{n,q}$ 表示 $\mathbb{F}_{q^n}$ 上所有次数小于 q^n 的 q- 多项式的集合. 则在 $\mathcal{L}_{n,q}$ 和 $\mathbb{F}_{q^n}$ 上的 $\mathbb{F}_q$- 线性映射之间存在一个双射. 有关线性化多项式的更多内容, 参见文献 [9, 第 3 章, 第 4 节]. 在 $\mathbb{F}_q$ 上考虑具有如下形式的 $\mathbb{F}_{q^n}$ 上的非退化对称双线性型: 对于任意 $x,y\in\mathbb{F}_{q^n}$

$$\langle x,y\rangle=\mathrm{Tr}_{q^n/q}(xy),$$

其中 $\mathrm{Tr}_{q^n/q}(x)=x+\cdots+x^{q^{n-1}}$. 对于 q- 多项式 $f=\sum_{i=0}^{n-1}a_iX^{q^i}$ 和上述双线性型 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 定义 f 的伴随多项式 $\hat{f}$ 为满足如下条件的 q- 多项式: 对于任意 $y,z\in\mathbb{F}_{q^n}$, 有

$$\mathrm{Tr}_{q^n/q}(yf(z))=\mathrm{Tr}_{q^n/q}(z\hat{f}(y)).$$

容易证明 $\hat{f}$ 一定满足

$$\hat{f}=\sum_{i=0}^{n-1}a_i^{q^{n-i}}X^{q^{n-i}}. \tag{2.1}$$

下面由一个 q- 多项式的伴随定义的线性集相关的结果, 分别在文献 [2, 引理 2.6] 和 [19, 引理 2.1] 中得到了两种不同的证明方法.

引理 2.1　令 f 为 $\mathcal{L}_{n,q}$ 中一个 q- 多项式. 那么对于任意 $b\in\mathbb{F}_{q^n}$, 有

$$\#\left\{x\in\mathbb{F}_{q^n}^*:\frac{f(x)}{x}=b\right\}=\#\left\{y\in\mathbb{F}_{q^n}^*:\frac{\hat{f}(y)}{y}=b\right\}. \tag{2.2}$$

此外, $L_f=L_{\hat{f}}$.

对于 $\mathbb{F}_{q^n}$ 上的两个 q- 多项式 f 和 g, 令 $U_f=\{(x,f(x)):x\in\mathbb{F}_{q^n}^*\}$ 和 $U_g=\{(x,g(x)):x\in\mathbb{F}_{q^n}^*\}$, 如果存在 $\varphi\in\Gamma\mathrm{L}(2,q^n)$ 使得 $U_f^{\varphi}=U_g$, 那么定义 U_f 与 U_g 是一般半线性群 (general semilinear group, ΓL)- 等价的. 根据定义, 可以直接得到以下结论.

引理 2.2 对于 $\mathbb{F}_{q^n}$ 上的两个 q- 多项式 f 和 g, 若 U_f 和 U_g 是 $\Gamma\mathrm{L}$- 等价的, 那么 L_f 和 L_g 是 $\mathrm{P\Gamma L}$- 等价的.

然而, 引理 2.2 的逆命题不一定成立. 例如, 若 $f(x)=x^q$, $g(x)=x^{q^s}$, $s\neq 1$, 且 $\gcd(s,n)=1$, 那么 U_f 与 U_g 不是 $\Gamma\mathrm{L}(2,q^n)$- 等价的, 但是显然 $L_f=\{\langle(1,x^{q-1})\rangle_{\mathbb{F}_{q^n}}:x\in\mathbb{F}_{q^n}^*\}=L_g$. 关于等价问题的更多结论, 可参见文献 [5,7].

一般而言, U_f 和 U_g 之间的等价问题比 L_f 和 L_g 之间的等价问题更容易解决. 例如, 族 (b) 中的 f 和 g 所定义的 U_f 和 U_g 与之间的等价性已经完全确定, 参见下面的引理. 然而, L_f 和 L_g 之间的等价性问题将在第 4 节中解决.

引理 2.3 (参见文献 [5, 命题 5.1]) 设 $U_{\delta,s_1}=\{(x,x^{q^{s_1}}+\delta x^{q^{s_1+m}}):x\in\mathbb{F}_{q^{2m}}\}$ 和 $U_{\theta,s_2}=\{(x,x^{q^{s_2}}+\theta x^{s_2+m}):x\in\mathbb{F}_{q^{2m}}\}$ 是两个 $\mathbb{F}_q$- 子空间, 且 $\delta,\theta\in\mathbb{F}_{q^{2m}}^*$. 如果 $N_{q^{2m}/q^m}(\delta)\neq 1$, $N_{q^{2m}/q^m}(\theta)\neq 1$, $1\leqslant s_1,s_2<m$ 且 $\gcd(m,s_1)=\gcd(m,s_2)=1$, 那么这两个 $\mathbb{F}_q$- 子空间 U_{δ,s_1} 和 U_{θ,s_2} 是 $\Gamma\mathrm{L}(2,q^{2m})$- 等价的当且仅当

$$s_1=s_2 \text{ 且 } N_{q^{2m}/q^m}(\delta)=N_{q^{2m}/q^m}(\theta)^\sigma,$$

或者

$$s_1+s_2=m \text{ 且 } N_{q^{2m}/q^m}(\delta)N_{q^{2m}/q^m}(\theta)^\sigma=1,$$

其中 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^m})$.

给定 $\mathbb{F}_{q^n}$ 上的两个子集或多重集 S 和 T, 若 $S=T$, 那么对于任意非负整数 d, 有

$$\sum_{x\in S}x^d=\sum_{x\in T}x^d.$$

对于两个线性集, 可以直接得到以下结果.

引理 2.4 (参见文献 [4, 引理 3.4]) 设 f 和 g 是线性多项式. 若 $L_f=L_g$, 那么对于任意非负整数 d, 有

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^n}^*}\left(\frac{g(x)}{x}\right)^d=\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^n}^*}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^d.$$

下面这个结论是众所周知的.

引理 2.5 (参见文献 [4, 引理 3.5]) 设 q 是素数的方幂, d 为整数, 若 $q-1\mid d$, 则有 $\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^n}^*}x^d=-1$, 否则 $\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^n}^*}x^d=0$.

根据引理 2.4 和 2.5, 可以得到以下关于两个线性集相等的判别准则.

引理 2.6 (参见文献 [4, 引理 3.6]) 设 $\mathbb{F}_{q^n}$ 上 q- 多项式 $f(x)=\sum_{i=1}^n a_ix^{q^i}$, $g(x)=\sum_{i=1}^n b_ix^{q^i}$. 若 $L_f=L_g$, 则

$$a_0=b_0. \tag{2.3}$$

对于任意 $k=1,2,\dots,n-1$, 有

$$a_ka_{n-k}^{q^k}=b_kb_{n-k}^{q^k}; \tag{2.4}$$

对于任意 $k=2,3,\dots,n-1$, 有

$$a_1a_{k-1}^qa_{n-k}^{q^k}+a_ka_{n-1}^qa_{n-k+1}^{q^k}=b_1b_{k-1}^qb_{n-k}^{q^k}+b_kb_{n-1}^qb_{n-k+1}^{q^k}. \tag{2.5}$$

一般而言, 在引理 2.6 中对 f 和 g 系数的限制条件不足以由 f 来唯一确定 g. 第 3 和 4 节将为 (a) 或 (b) 中的 f 和 g 提供一些额外的限制条件.

3　Marino-Montanucci-Zullo 类

本节主要讨论 Marino 等 [14] 所构造的一类最大散射线性集的等价性问题. 此类最大散射线性集定义为

$$\{\langle(1, x^{q-1}+x^{q^3-1}+\delta x^{q^5-1})\rangle_{\mathbb{F}_{q^6}} : x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\},$$

其中, $\delta^2+\delta=1$, q 为奇数. 由此定义可得, 给定 q, 一类中最多包含两个线性集. 下面的引理 3.1 主要讨论 δ 是属于 $\mathbb{F}_q$ 的素子域 $\mathbb{F}_p$ 还是属于 $\mathbb{F}_{p^2}$.

引理 3.1　令 q 为奇素数的方幂, n 为整数. 假设 $x_1,x_2\in\mathbb{F}_{q^n}$ 且 $x_1^2+x_1=x_2^2+x_2=1$, 则

(i) 当 $q\equiv 0,\pm1 \pmod 5$ 时, $x_1,x_2\in\mathbb{F}_q$;

(ii) 当 $q\equiv \pm2 \pmod 5$ 时, $x_1,x_2\in\mathbb{F}_{q^2}\setminus\mathbb{F}_q$.

特别地, 当 $q\equiv 0 \pmod 5$ 时, $x_1=x_2=2$. 此外, $x_1^{2q-1}=x_2^{2q-1}$ 成立当且仅当 $x_1=x_2$.

证明　令 $q=p^m$ 且 p 为素数. 由二次互反律可得, 5 是 $\mathbb{F}_p$ 上的平方元当且仅当 $p\equiv 0,1,4 \pmod 5$.

假设 $p=5$, 那么 X^2+X-1 的两个根 x_1 和 x_2 是相同的且 $x_1=x_2=2\in\mathbb{F}_p\subseteq\mathbb{F}_q$.

假设 $q\equiv\pm1 \pmod 5$. 当 $p\equiv 1,4 \pmod 5$ 时, 5 是 $\mathbb{F}_p$ 上的平方元, 由此可知 5 也是 $\mathbb{F}_q$ 上的平方元; 当 $p\equiv 2,3 \pmod 5$ 时, 存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得 $q=p^{2k}$, 从而 5 是 $\mathbb{F}_q$ 上的平方元.

假设 $q\equiv\pm2 \pmod 5$, 那么 $p\equiv 2,3 \pmod 5$ 且存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得 $q=p^{2k+1}$, 由此可知 5 不是 $\mathbb{F}_q$ 上的平方元.

下面证明 $x_1^{2q-1}=x_2^{2q-1}$ 的充分必要条件为 $x_1=x_2$. 充分性是显然的, 从而只需证明必要性. 现假设 $x_1^{2q-1}=x_2^{2q-1}$.

当 $q\equiv 0,\pm1 \pmod 5$ 时, 由上述证明可得 $x_1,x_2\in\mathbb{F}_q$, 从而

$$x_1=x_1^{2q-1}=x_2^{2q-1}=x_2,$$

即 $x_1=x_2$.

当 $q\equiv\pm2 \pmod 5$ 时, 由上述证明可得 $x_1,x_2\notin\mathbb{F}_q$. 因为 x_1 和 x_2 是 x^2+x-1 的两个根, 所以 $x_1=x_2$ 或 $x_1=x_2^q$. 若 $x_1=x_2^q$, 则由 $x_1^{2q-1}=x_2^{2q-1}$ 和 $x_2^{q+1}=-1$ 可得

$$x_2^6=-1.$$

又因为 $x_2^2+x_2=1$, 所以

$$(1-x_2)^3=-x_2^3+3x_2^2-3x_2+1=x_2(4x_2-4)+1=5-8x_2=-1,$$

从而

$$x_2=\frac{3}{4}.$$

然而, 在 $p\neq 2,5$ 的条件下, $x_2=\frac{3}{4}$ 与 $x_2^2+x_2=1$ 矛盾. 因此 $x_1=x_2$. □

在讨论 Marino-Montanucci-Zullo 类中的最大散射线性集之前, 先对此类中不同线性集 L_f 所对应的 6 维 $\mathbb{F}_q$- 子空间 U_f 的等价性问题进行讨论. 根据 $q \pmod 5$ 的值, 分为如下两个引理.

引理 3.2 假设 q 为奇素数的方幂, 且满足 $q\equiv\pm2\pmod 5$. 定义 $\mathbb{F}_{q^6}$ 上的函数 $f(x)=x^q+x^{q^3}+\theta x^{q^5}$ 和 $g(x)=x^q+x^{q^3}+\delta x^{q^5}$ 且满足 $\theta,\delta\in\mathbb{F}_{q^6}$, $\theta^2+\theta=\delta^2+\delta=1$. 那么 $\mathbb{F}_q$- 子空间 U_f 和 U_g 是 ΓL- 等价的.

证明 因为 θ 和 δ 是 $\mathbb{F}_q$ 上不可约多项式 x^2+x-1 的根, 所以 $\theta=\delta$ 或 $\theta=\delta^q$. 如果 $\theta=\delta$, 那么 $U_f=U_g$; 如果 $\theta=\delta^q$, 那么

$$\{(x^q,(x^q+x^{q^3}+\delta x^{q^5})^q):x\in\mathbb{F}_{q^6}\}=\{(x,x^q+x^{q^3}+\delta^q x^{q^5}):x\in\mathbb{F}_{q^6}\}=U_f.$$

因此, U_f 和 U_g 是 ΓL- 等价的. □

引理 3.3 假设 q 为奇素数的方幂且满足 $q\equiv 0,\pm1\pmod 5$. 定义 $\mathbb{F}_{q^6}$ 上函数 $f(x)=x^q+x^{q^3}+\theta x^{q^5}$ 和 $g(x)=x^q+x^{q^3}+\delta x^{q^5}$ 且满足 $\theta,\delta\in\mathbb{F}_{q^6}$ 及 $\theta^2+\theta=\delta^2+\delta=1$. 如果 $\mathbb{F}_q$- 子空间 U_f 和 U_g 是 ΓL- 等价的, 那么 $\theta=\delta$.

证明 假设 $\mathbb{F}_q$- 子空间 U_f 和 U_g 是 ΓL- 等价的. 由引理 3.1 可得 $\theta,\delta\in\mathbb{F}_q$. 因此, 只需证明存在 $\mathbb{F}_{q^6}$ 上可逆矩阵 $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ 使得对于任意 $x\in\mathbb{F}_{q^6}$ 都存在 $y\in\mathbb{F}_{q^6}$ 满足如下等式:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\f(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\g(y)\end{pmatrix}.$$

上式等价于

$$cX+df(X)\equiv g(aX+bf(X))\pmod{X^{q^6}-X}. \tag{3.1}$$

将等式 (3.1) 右边展开, 得

$$(b^q\theta+b^{q^3}+b^{q^5}\delta)X+a^qX^q+(b^q+b^{q^3}\theta+b^{q^5}\delta)X^{q^2}+a^{q^3}X^{q^3}+(b^q+b^{q^3}+b^{q^5}\theta\delta)X^{q^4}+a^{q^5}\delta X^{q^5}.$$

比较等式 (3.1) 两边 X^q、X^{q^3} 和 X^{q^5} 的系数可得

$$\begin{cases}d=a^q=a^{q^3},\\ d\theta=a^{q^5}\delta.\end{cases} \tag{3.2}$$

根据 b 的取值, 分如下两种情形进行讨论.

情形 1 $b=0$. 比较等式 (3.1) 两边 X 的系数可得 $c=0$ 且 $ad\neq0$. 从而由 (3.2) 得 $a,d\in\mathbb{F}_{q^2}$ 且

$$\begin{cases}d=a^q,\\ \theta=\delta.\end{cases}$$

情形 2 $b\neq0$. 比较等式 (3.1) 两边 X^{q^2} 和 X^{q^4} 的系数可得

$$\begin{cases}b^q+b^{q^3}\theta+b^{q^5}\delta=0,\\ b^q+b^{q^3}+b^{q^5}\theta\delta=0.\end{cases} \tag{3.3}$$

又由 (3.3) 可得

$$(b^{q^3}-b^{q^5}\delta)(1-\theta)=0,$$

由此可得 $b^{q^3}-b^{q^5}\delta$ 或 $1-\theta$ 等于 0. 若 $1-\theta=0$, 显然这与 $\theta^2+\theta=1$ 相矛盾. 若 $b^{q^3}-b^{q^5}\delta=0$, 则 $\delta=b^{q^3-q^5}$, 从而

$$\delta^{q^4+q^2+1}=N_{q^6/q^2}(b^{q^3(1-q^2)})=1.$$

由 $\delta^2+\delta=1$ 和 $\delta\in\mathbb{F}_{q^2}$ 可得

$$\delta^{q^4+q^2+1}=\delta^3=(1-\delta)\delta=2\delta-1.$$

由上述关于 $\delta^{q^4+q^2+1}$ 的两个等式可得 $\delta=1$, 这与 $\delta^2+\delta=1$ 相矛盾. 因此, 不存在 $b\in\mathbb{F}_{q^6}^*$ 使得 $\delta=b^{q^3-q^5}$ 成立.

综上可得 $\theta=\delta$ 且矩阵 $M=\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&a^q\end{smallmatrix}\right)$, 其中 $a\in\mathbb{F}_{q^2}^*$. □

下面的定理完全解决了 Marino-Montanucci-Zullo 类中元素的等价问题, 与引理 3.3 中的结论相比, 可以得到此类线性集中 L_f 和 L_g 的等价性与 U_f 和 U_g 的等价性并不相同.

定理 3.1　Marino-Montanucci-Zullo 类中所有的元素都是 PΓL- 等价的.

证明　显然, 当 $q\equiv 0 \pmod 5$ 时, 此类中只有一个元素; 当 $q\equiv\pm1,\pm2 \pmod 5$ 时, 此类中有两个元素.

对于 $q\not\equiv 0 \pmod 5$, 设 $f_i(x)=x^q+x^{q^3}+\theta_i x^{q^5}$ $(i=1,2)$ 为 Marino-Montanucci-Zullo 类中的两个元素.

当 $q\equiv\pm2 \pmod 5$ 时, 由引理 3.2 可得 U_{f_1} 和 U_{f_2} 是 ΓL- 等价的, 从而 L_{f_1} 和 L_{f_2} 是 PΓL- 等价的. 当 $q\equiv\pm1 \pmod 5$ 时, 由引理 3.1 可得 $\theta_1,\theta_2\in\mathbb{F}_q$. 令 $h(x)=(-\theta_1-1)x^q+x^{q^3}+x^{q^5}$. 可以直接验证 $h(f_1(x))=x$, 即 $h(x)$ 是 $f_1(x)$ 的逆映射. 因此

$$\left\{\frac{x}{f_1(x)}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\right\}=\left\{\frac{(-\theta_1-1)x^q+x^{q^3}+x^{q^5}}{x}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\right\}=\left\{\frac{h(x)}{x}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\right\},$$

从而 L_{f_1} PΓL- 等价于 L_h.

通过计算, $h(x)$ 的伴随多项式 $\hat{h}(x)$ 为

$$\hat{h}(x)=x^q+x^{q^3}+(-\theta_1-1)^{q^5}x^{q^5}=x^q+x^{q^3}+\theta_2x^{q^5}=f_2(x).$$

由引理 2.1 可得 $L_h=L_{\hat{h}}=L_{f_2}$. 因此 L_{f_1} 和 L_{f_2} 是 PΓL- 等价的. □

由定理 3.1 可得, 在等价的条件下, Marino-Montanucci-Zullo 类中只有一个元素. 下面的结论给出了这个元素的自同构群.

定理 3.2　假设 q 为奇素数的方幂. 定义 $\mathbb{F}_{q^6}$ 上的函数 $f(x)=x^q+x^{q^3}+\theta x^{q^5}$ 且满足 $\theta^2+\theta=1$. 那么线性集 L_f 的自同构群为

$$\mathrm{Aut}(L_f)=\begin{cases}\mathcal{D}, & q\equiv\pm1 \pmod 5,\\ \mathcal{D}\cup\mathcal{C}, & q\equiv 0,\pm2 \pmod 5,\end{cases}$$

其中

$$\mathcal{D}:=\left\{M\tau:M=\begin{pmatrix}1&0\\0&d\end{pmatrix}\in\mathrm{PGL}(2,q^6),\tau\in\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^6}),\theta^{\tau-1}=1,d^{q+1}=1\right\},$$

$$\mathcal{C}:=\left\{M\tau:M=\begin{pmatrix}0&1\\c&0\end{pmatrix}\in\mathrm{PGL}(2,q^6),\tau\in\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^6}),\theta^{\tau+1}=-1,c^{q+1}=1\right\}.$$

证明 令 $M=\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$, 设 $M\in \mathrm{PGL}(2,q^6)$ 且 $\tau\in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^6})$. 假设 $M\tau\in \mathrm{P\Gamma L}(2,q^6)$ 使得 L_f 在 $M\tau$ 的作用下是不变的, 那么

$$\left\{\frac{f(x)}{x}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\right\}=\left\{\frac{cx+d\bar{f}(x)}{ax+b\bar{f}(x)}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\right\},\tag{3.4}$$

其中 $\bar{f}(x)=x^q+x^{q^3}+\theta^\tau x^{q^5}$.

下面确定 M 和 τ. 根据 b 是否为 0, 将证明分如下两种情形.

情形 1 $b=0$. 因为 M 是 $\mathrm{PGL}(2,q^6)$ 中元素, 所以可以假设 $a=1$, 那么 (3.4) 等价于

$$\{x^{q-1}+x^{q^3-1}+\theta x^{q^5-1}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\}=\left\{c+d\frac{\bar{f}(x)}{x}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\right\}.\tag{3.5}$$

由 (2.3), 以及 $k=1$ 和 $k=3$ 在条件 (2.4), 可分别得到 $c=0$ 和

$$d^{q+1}=\left(\frac{\theta}{\theta^\tau}\right)^q\tag{3.6}$$

以及

$$d^{q^3+1}=1.\tag{3.7}$$

由 (3.6) 和 (3.7) 可得

$$\theta^{\tau(q^3-q^2+q)}=\theta^{q^3-q^2+q}.\tag{3.8}$$

由引理 3.1 可得, (3.8) 等价于

$$\theta^\tau=\theta.\tag{3.9}$$

根据等式 (3.6)、(3.7) 和 (3.9) 可得

$$d^{q+1}=1.\tag{3.10}$$

因此 (3.9) 和 (3.10) 是必要条件. 下面证明 (3.9) 和 (3.10) 也是充分条件. 根据 (3.10), 可知存在 $\alpha\in\mathbb{F}_{q^2}^*$ 使得 $d=\alpha^{q-1}$. 用 αx 代替 x 代入等式 (3.5) 的左边, 可得

$$\{(\alpha x)^{q-1}+(\alpha x)^{q^3-1}+\theta(\alpha x)^{q^5-1}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\}=\{\alpha^{q-1}(x^{q-1}+x^{q^3-1}+\theta x^{q^5-1}):x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\}.\tag{3.11}$$

根据 (3.9), (3.11) 等价于

$$\{x^{q-1}+x^{q^3-1}+\theta x^{q^5-1}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\}=\{d(x^{q-1}+x^{q^3-1}+\theta^\tau x^{q^5-1}):x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\}.$$

因此, 若 $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)$ 和 τ 满足 (3.9) 和 (3.10), 则 L_f 在映射 $M\tau$ 下是不变的.

情形 2 $b\neq 0$. 不失一般性, 假设 $b=1$. 首先, 证明如下断言.

断言 $a=0$.

(反证法) 假设 $a\neq 0$, 则

$$\frac{cx+d\bar{f}(x)}{ax+b\bar{f}(x)}=d+\frac{(c-ad)x}{ax+\bar{f}(x)},$$

其中 $\bar{f}(x)=x^q+x^{q^3}+\theta^\tau x^{q^5}$. 因为 M 是非奇异的, 所以 $c-ad\neq 0$. 此外, 由 $\mathrm{PG}(1,q^6)$ 上最大散射线性集的定义可得, 映射 $x\mapsto ax+\bar{f}(x)$ 一定是可逆的 (否则 L_f 包含点 $\langle(0,1)\rangle_{\mathbb{F}_{q^6}}$, 但这是不可能的). 假设 $h(x)=\sum_{i=0}^5 r_i x^{q^i}$ 是映射 $x\mapsto \frac{ax+\bar{f}(x)}{c-ad}$ 的逆映射. 令 $y=\frac{ax+\bar{f}(x)}{c-ad}$, 则

$$d+\frac{(c-ad)x}{ax+\bar{f}(x)}=d+\frac{h(y)}{y}.$$

比较 $ah(Y)+\bar{f}(h(Y))\equiv(c-ad)Y \pmod{Y^{q^6}-Y}$ 两边的系数, 可知对 $i=1,2,3,4,5$, 有

$$ar_i+r_{i-1}^q+r_{i+3}^{q^3}+\theta^\tau r_{i+1}^{q^5}=0. \tag{3.12}$$

此时 (3.4) 变为

$$\{x^{q-1}+x^{q^3-1}+\theta x^{q^5-1}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\}=\left\{d+\sum_{i=0}^5 r_i y^{q^i-1}:y\in\mathbb{F}_{q^6}^*\right\}.$$

对于 $k=1$, 由 (2.4) 可得

$$r_1r_5^q=\theta^q,$$

那么 $r_1,r_5\neq 0$. 对于 $k=2$, 由 (2.4) 可得

$$r_2r_4^{q^2}=0,$$

那么 r_2 和 r_4 中至少有一个等于 0. 不失一般性, 假设 $r_2=0$. 对于 $k=2$, 由 (2.5) 可得

$$r_1^{q+1}r_4^{q^2}+r_2r_5^{q^2+q}=0.$$

于是 $r_1^{q+1}r_4^{q^2}=0$, 从而 $r_4=0$.

将 $i=1,3,5$ 代入 (3.12) 可得

$$\begin{cases} r_1=-\dfrac{r_0^q}{a},\\ r_3=-\dfrac{r_0^{q^3}}{a},\\ r_5=-\dfrac{\theta^\tau r_0^{q^5}}{a}. \end{cases} \tag{3.13}$$

将 $i=2$ 代入 (3.12) 可得

$$r_1^q+r_5^{q^3}+\theta^\tau r_3^{q^5}=0.$$

又因为 $\theta^\tau\in\mathbb{F}_{q^2}$, 所以上述等式等价于

$$r_1^{q^5}+r_5^q+\theta^\tau r_3^{q^3}=0. \tag{3.14}$$

同理, 将 $i=4$ 代入 (3.12) 可得

$$r_1^{q^5}+r_3^{q^3}+\theta^\tau r_5^q=0. \tag{3.15}$$

由 (3.14) 和 (3.15) 可得 $(r_3^{q^3}-r_5^q)(\theta^\tau-1)=0$, 于是

$$r_3^{q^3}=r_5^q.$$

将 (3.13) 代入上述等式可得 $\theta^\tau=a^{q-q^3}$, 从而

$$\theta^{3\tau}=N_{q^6/q^2}(\theta^\tau)=N_{q^6/q^2}(a^{q(1-q^2)})=1. \tag{3.16}$$

由 $\theta^2+\theta=1$ 和 $\theta\in\mathbb{F}_{q^2}$ 可得

$$\theta^{3\tau}=(1-\theta^\tau)\theta^\tau=\theta^\tau+\theta^\tau-1=2\theta^\tau-1.$$

结合 (3.16) 可得 $\theta=1$, 这与 $\theta^2+\theta=1$ 矛盾.

至此完成了断言的证明.

因为

$$\begin{pmatrix}0&1\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-d/c&1/c\\1&0\end{pmatrix},$$

所以, 由 M 的逆映射及命题中 $a=0$ 可得 $d=0$. 因此

$$M=\begin{pmatrix}0&1\\c&0\end{pmatrix}.$$

令 $h(x)=-(\theta^{\tau q}+1)x^q+x^{q^3}+x^{q^5}$, 于是 $h(\bar{f}(x))=x$, 即 $h(x)$ 是 $\bar{f}(x)$ 的逆映射. 从而 (3.4) 等价于

$$\left\{\frac{ch(x)}{x}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\right\}=\left\{\frac{f(x)}{x}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\right\}.$$

对于 $k=1$, 由 (2.4) 可得

$$c^{q+1}=\frac{-\theta^q}{(\theta^{\tau q}+1)}. \tag{3.17}$$

对于 $k=3$, 由 (2.4) 可得

$$c^{q^3+1}=1. \tag{3.18}$$

结合 (3.17) 和 (3.18) 可得

$$\theta^{2q-1}=(-\theta^\tau-1)^{2q-1}. \tag{3.19}$$

因为 θ 和 $-\theta^\tau-1$ 都是多项式 X^2+X-1 的根, 根据引理 3.1 可知, (3.19) 等价于 $-\theta=\theta^\tau+1$. 于是

$$\theta^{\tau+1}=-1. \tag{3.20}$$

由 (3.17) 和 $\theta^\tau+1=-\theta$ 可得

$$c^{q+1}=1. \tag{3.21}$$

那么 (3.20) 和 (3.21) 是必要条件.

下面证明 (3.20) 和 (3.21) 是充分条件. 假设 (3.20) 和 (3.21) 成立. 令 $h(x)=-(\theta^{\tau q}+1)x^q+x^{q^3}+x^{q^5}$. 那么 $h(\bar{f}(x))=x$, 从而

$$\left\{\frac{cx}{\bar{f}(x)}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\right\}=\left\{\frac{ch(x)}{x}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\right\}. \tag{3.22}$$

通过简单计算, $h(x)$ 的伴随 $\hat{h}(x)$ 为

$$\hat{h}(x)=x^q+x^{q^3}+(-\theta^{\tau q}-1)^{q^5}x^{q^5}=x^q+x^{q^3}+\theta x^{q^5}=f(x).$$

根据引理 2.1 可得 $L_h=L_{\hat{h}}$, 于是

$$\left\{\frac{ch(x)}{x}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\right\}=\left\{\frac{c\hat{h}(x)}{x}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\right\}=\left\{\frac{cf(x)}{x}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\right\}. \tag{3.23}$$

由证明中情形 1 可得, 如果 c 满足 (3.21), 那么

$$\left\{\frac{cf(x)}{x}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\right\}=\left\{\frac{f(x)}{x}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\right\}. \tag{3.24}$$

结合 (3.22)–(3.24) 可得 (3.20) 和 (3.21) 是充分条件.

因此 L_f 的自同构群为

$$\mathrm{Aut}(L_f)=\mathcal{D}\cup\mathcal{C},$$

其中

$$\mathcal{D}:=\left\{M\tau:M=\begin{pmatrix}1&0\\0&d\end{pmatrix},\theta^\tau=\theta,d^{q+1}=1\right\},$$

$$\mathcal{C}:=\left\{M\tau:M=\begin{pmatrix}0&1\\c&0\end{pmatrix},\theta^{\tau+1}=-1,c^{q+1}=1\right\}.$$

由引理 3.1 和 $\theta^2+\theta=1$ 可得, 等式 $\theta^{\tau+1}=-1$ 成立当且仅当以下条件之一得到满足:

(i) $q\equiv 0\pmod 5$, $\theta^\tau=\theta$;

(ii) $q\equiv\pm2\pmod 5$, $\theta^\tau=\theta^q$.

此外, 当 $q\equiv\pm1\pmod 5$ 时, $\theta^{\tau+1}=-1$ 不成立, 从而 $\mathcal{C}=\emptyset$. □

4 Csajbók-Marino-Polverino-Zanella 类

本节主要讨论 Csajbók 等 [5] 构造的 $\mathscr{F}_6$ 和 $\mathscr{F}_8$ 这两类线性集的等价性问题.

对于 $m=3,4$, $\mathscr{F}_{2m}$ 中包含了 $\mathrm{PG}(1,q^{2m})$ 中具有如下形式的最大散射线性集:

$$\{\langle(1,x^{q^s-1}+\theta x^{q^{s+m}-1})\rangle_{\mathbb{F}_{q^{2m}}}:x\in\mathbb{F}_{q^{2m}}^*\},$$

其中 $\gcd(s,m)=1$ 且 θ 和 q 满足某些条件.

由引理 2.2 和下面的引理 4.1, 只需要讨论 $\mathscr{F}_{2m}$ 中当 $s=1$ 时的线性集等价性问题.

引理 4.1 [5] 设子空间 $U_{b',s}=\{(x,x^{q^s}+b'x^{q^{s+m}}):x\in\mathbb{F}_{q^{2m}}\}$ 且 $\gcd(s,m)=1$, 那么一定存在 $b\in\mathbb{F}_{q^{2m}}$ 使得子空间 $U_{b',s}$ 与子空间

$$U_b=\{(x,x^q+bx^{q^{1+m}}):x\in\mathbb{F}_{q^{2m}}\}$$

是 $\mathrm{GL}(2,q^{2m})$- 等价的.

引理 2.6 可以用来处理 $\mathscr{F}_6$ 和 $\mathscr{F}_8$ 中元素的等价性问题. 但是, 利用引理 2.6 中的结论无法完全解决该问题, 所以引入下面几个引理.

引理 4.2 设 $f(x)=a_1x^q+a_4x^{q^4}$ 和 $g(x)=b_1x^q+b_4x^{q^4}$ 是 $\mathbb{F}_{q^6}$ 上的 q- 多项式. 若 $L_f=L_g$, 则

$$a_4^{q^4+q^2+1}=b_4^{q^4+q^2+1}. \tag{4.1}$$

证明 令 $D=(q^2-q+1)(q^2+q+1)=q^4+q^2+1$, 于是

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^6}^*}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^D=\sum_{u_1,u_2,u_3\in\{1,4\}}a_{u_1}a_{u_2}^{q^2}a_{u_3}^{q^4}\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^6}^*}x^U,$$

且 $U=q^{u_1}+q^{u_2+2}+q^{u_3+4}-(1+q^2+q^4)$. 由引理 2.4 可得 $\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^6}^*}x^k=-1$ 当且仅当 $q^6-1\mid k$. 当 $\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^6}^*}x^U=-1$ 时,

$$q^{u_1}+q^{u_2+2}+q^{u_3+4}\equiv 1+q^2+q^4 \pmod{q^6-1},$$

其中 $u_1,u_2,u_3\in\{1,4\}$. 直接计算可得 $u_1=u_2=u_3=4$. 又由 $L_f=L_g$ 和引理 2.5 可得

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^6}^*}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^D=\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^6}^*}\left(\frac{g(x)}{x}\right)^D.$$

从而,

$$a_4a_4^{q^2}a_4^{q^4}=b_4b_4^{q^2}b_4^{q^4}.$$

□

引理 4.3 设 $f(x)=a_1x^q+a_5x^{q^5}$ 和 $g(x)=b_1x^q+b_5x^{q^5}$ 是 $\mathbb{F}_{q^8}$ 上的 q- 多项式. 若 $L_f=L_g$, 则

$$a_1^{q^2+q+1}a_5^{q^3}=b_1^{q^2+q+1}b_5^{q^3}, \tag{4.2}$$

且

$$a_1a_5^{q^6+q^3+q}=b_1b_5^{q^6+q^3+q}. \tag{4.3}$$

证明 令 $D_1=q^3+q^2+q+1$, 于是

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^8}^*}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{D_1}=\sum_{u_1,u_2,u_3,u_4\in\{1,5\}}a_{u_1}a_{u_2}^{q}a_{u_3}^{q^2}a_{u_4}^{q^3}\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^8}^*}x^U,$$

且 $U=q^{u_1}+q^{u_2+1}+q^{u_3+2}+q^{u_4+3}-(1+q+q^2+q^3)$. 由引理 2.4 可得 $\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^8}^*}x^k=-1$ 当且仅当 $(q^8-1)\mid k$. 当 $\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^8}^*}x^U=-1$ 时, 有

$$q^{u_1}+q^{u_2+1}+q^{u_3+2}+q^{u_4+3}\equiv 1+q+q^2+q^3 \pmod{q^8-1},$$

其中 $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \{1, 5\}$. 直接计算可得 $u_1 = u_2 = u_3 = 1$, $u_4 = 5$.

令 $D_2 = (q^3 - q^2 + 1)(q^3 + q^2 + q + 1) = q^6 + q^3 + q + 1$, 于是

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_{q^8}^*} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{D_2} = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1,5\}} a_{i_1} a_{i_2}^q a_{i_3}^{q^3} a_{i_4}^{q^6} \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^8}^*} x^I,$$

其中 $I = q^{i_1} + q^{i_2+1} + q^{i_3+3} + q^{i_4+6} - (1 + q + q^3 + q^6)$. 当 $\sum_{x \in \mathbb{F}_{q^8}^*} x^I = -1$ 时,

$$q^{i_1} + q^{i_2+1} + q^{i_3+3} + q^{i_4+6} \equiv 1 + q + q^3 + q^6 \pmod{q^8 - 1},$$

其中 $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1, 5\}$. 因此必有 $i_1 = 1$, $i_2 = i_3 = i_4 = 5$.

由 $L_f = L_g$ 和引理 2.5 可得, 对 $k = 1, 2$ 有

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_{q^6}^*} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{D_k} = \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^6}^*} \left(\frac{g(x)}{x}\right)^{D_k},$$

从而

$$\begin{aligned} a_1 a_1^q a_1^{q^2} a_5^{q^3} &= b_1 b_1^q b_1^{q^2} b_5^{q^3}, \\ a_1 a_5^q a_5^{q^3} a_5^{q^6} &= b_1 b_5^q b_5^{q^3} b_5^{q^6}. \end{aligned}$$

证毕. □

引理 4.4 设 $f(x) = x^{q^{s_1}} + \delta x^{q^{s_1+m}}$, $g(x) = x^{q^{s_2}} + \theta x^{q^{s_2+m}}$, 其中, $\theta, \delta \in \mathbb{F}_{q^{2m}}$ 且 $1 \leqslant s_1, s_2 < m$ 以及 $\gcd(m, s_1) = \gcd(m, s_2) = 1$. 若 $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ 是 $\mathbb{F}_{q^{2m}}$ 上的可逆矩阵, 且

$$\{x^{q^{s_1}-1} + \delta x^{q^{s_1+m}-1} : x \in \mathbb{F}_{q^{2m}}^*\} = \left\{\frac{cx + dg(x)}{ax + g(x)} : x \in \mathbb{F}_{q^{2m}}^*\right\}, \tag{4.4}$$

那么 $a = d = 0$.

证明 因为 M 是非奇异的, 所以 $c - ad \neq 0$, 从而

$$\frac{cx + dg(x)}{ax + bg(x)} = d + \frac{(c - ad)x}{ax + g(x)}.$$

此外, 映射 $x \mapsto ax + g(x)$ 一定是可逆的 (否则, 将与点 $\langle(0, 1)\rangle_{\mathbb{F}_{q^{2m}}}$ 不属于 L_f 相矛盾).

设 $x \mapsto \frac{ax+g(x)}{c-ad}$ 的逆映射为 $h(x) = \sum_{i=0}^{2m-1} r_i x^{q^i}$. 令 $y = \frac{ax+g(x)}{c-ad}$, 于是

$$d + \frac{(c - ad)x}{ax + g(x)} = d + \frac{h(y)}{y}.$$

比较等式 $ah(Y) + g(h(Y)) \equiv (c - ad)Y \pmod{Y^{q^{2m}} - Y}$ 两边的系数可得, 对于 $i = 1, 2, \ldots, 2m - 1$ 有

$$ar_i + r_{i-s_2}^{q^{s_2}} + \theta r_{i-s_2+m}^{q^{s_2+m}} = 0. \tag{4.5}$$

此时 (4.4) 变为

$$\{x^{q^{s_1}-1} + \delta x^{q^{s_1+m}-1} : x \in \mathbb{F}_{q^{2m}}^*\} = \left\{d + \sum_{i=0}^{2m-1} r_i y^{q^i - 1} : y \in \mathbb{F}_{q^{2m}}^*\right\}.$$

由 (2.3) 可得

$$r_0 = -d. \tag{4.6}$$

此外, 对于 $k = 1, 2, \ldots, 2m-1$, 根据等式 (2.4) 有

$$r_k r_{2m-k}^{q^k} = 0. \tag{4.7}$$

将 $k = s_2$ 代入等式 (4.7) 中可得

$$r_{s_2} r_{2m-s_2}^{q^{s_2}} = 0,$$

从而 r_{s_2} 和 r_{2m-s_2} 至少有一个等于 0. 不失一般性, 可假设 $r_{s_2} = 0$. 将 $k = m$ 代入等式 (4.7) 中可得 $r_m^{q^m+1} = 0$, 于是

$$r_m = 0. \tag{4.8}$$

将 $i = s_2$ 代入等式 (4.5) 中可得

$$r_0^{q^{s_2}} + \theta r_m^{q^{s_2+m}} = 0, \tag{4.9}$$

结合 (4.8) 和 (4.9) 可得 $d = -r_0 = 0$.

根据

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/c \\ 1 & -a/c \end{pmatrix},$$

考虑将 M 的逆映射作用于 L_g, 可得 $a = 0$. □

现讨论 $\mathscr{F}_6$ 中线性集的等价性问题. 下面这个定理确定了 $\mathscr{F}_6$ 中不同元素间的等价性.

定理 4.1 设 $f(x) = x^q + \delta x^{q^4}$ 和 $g(x) = x^q + \theta x^{q^4}$ 是 $\mathbb{F}_{q^6}$ 上的两个 q- 多项式. L_f 和 L_g 是 PΓL- 等价的当且仅当存在 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^3})$ 使得

$$N_{q^6/q^3}(\delta) = N_{q^6/q^3}(\theta)^\sigma. \tag{4.10}$$

证明 若 $\theta = \delta = 0$, 则上述结论显然成立. 因此, 假设 θ 中 δ 至少有一个不为 0.

首先, 证明条件 (4.10) 的必要性.

假设 L_f 和 L_g 是 PΓL- 等价的, 于是存在 $\mathbb{F}_{q^6}$ 上的可逆矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ 和 $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^6})$ 使得

$$\{x^{q-1} + \delta x^{q^4-1} : x \in \mathbb{F}_{q^6}^*\} = \left\{ \frac{cx + d\bar{g}(x)}{ax + b\bar{g}(x)} : x \in \mathbb{F}_{q^6}^* \right\}, \tag{4.11}$$

其中 $\bar{g}(x) = x^q + \theta^\tau x^{q^4}$.

根据 b 的值是否为 0, 分两种情形进行讨论.

情形 1 $b = 0$. 因为 M 属于 $\mathrm{PGL}(2, q^6)$, 所以可假设 $a = 1$. 于是 (4.11) 变为

$$\{x^{q-1} + \delta x^{q^4-1} : x \in \mathbb{F}_{q^6}^*\} = \left\{ c + d\frac{\bar{g}(x)}{x} : x \in \mathbb{F}_{q^6}^* \right\}. \tag{4.12}$$

由 (2.3) 可得 $c = 0$. 那么 (4.12) 变为

$$\{x^{q-1} + \delta x^{q^4-1} : x \in \mathbb{F}_{q^6}^*\} = \{d(x^{q-1} + \theta^\tau x^{q^4-1}) : x \in \mathbb{F}_{q^6}^*\}.$$

对于 $k=2$, 由 (2.5) 可得

$$d^{q^2+q+1}\theta^{\tau q^2}=\delta^{q^2}. \tag{4.13}$$

如果 θ 和 δ 中有一个等于 0, 那么 δ 和 d 必须都为 0. 然而, 这与 M 是非奇异的相矛盾. 因此 θ 和 δ 都不为 0. 由 (4.1) 可得

$$d^{(q^2-q+1)(q^2+q+1)}=\frac{\delta^{q^4+q^2+1}}{\theta^{\tau(q^4+q^2+1)}}. \tag{4.14}$$

结合 (4.13) 和 (4.14) 可得

$$\delta^{q^3+1}=(\theta^{q^3+1})^{\tau}.$$

令 $\sigma=\tau|_{\mathbb{F}_{q^3}}$, 从而

$$N_{q^6/q^3}(\delta)=N_{q^6/q^3}(\theta)^{\sigma}.$$

情形 2 $b\neq 0$. 不失一般性, 假设 $b=1$. 应用引理 4.4 可得 $a=d=0$, 于是

$$M=\begin{pmatrix}0&1\\c&0\end{pmatrix}.$$

令 $h_0(x)=-\theta^{\tau q^5}x^{q^2}+x^{q^5}$, 那么 $h_0(\bar{g}(x))=(1-\theta^{\tau(q^2+q^5)})x$.

若 $N_{q^6/q^3}(\theta)=1$, 那么 $1-\theta^{\tau(q^2+q^5)}=0$. 从而 $x\mapsto g(x)$ 一定是不可逆映射, 由 (4.11) 可得这与点 $\langle(0,1)\rangle_{\mathbb{F}_{q^6}}$ 不属于 L_f 相矛盾. 因此 $N_{q^6/q^3}(\theta)\neq 1$.

令

$$h(x)=\frac{h_0(x)}{1-\theta^{\tau(q^2+q^5)}}=-\frac{\theta^{\tau q^5}x^{q^2}}{1-\theta^{\tau(q^2+q^5)}}+\frac{x^{q^5}}{1-\theta^{\tau(q^2+q^5)}}.$$

那么 $h(\bar{g}(x))=x$, 即 $h(x)$ 是 $\bar{g}(x)$ 的可逆映射. 因此 (4.11) 等价于

$$\{x^{q-1}+\delta x^{q^4-1}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\}=\left\{\frac{ch(x)}{x}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\right\}. \tag{4.15}$$

通过计算, $h_1(x)=h(x)(1-\theta^{\tau(q^2+q^5)})$ 的伴随 $\hat{h}_1(x)$ 为

$$\hat{h}_1(x)=x^q+(-\theta^{q^5\tau})^{q^4}x^{q^4}.$$

根据引理 2.1 可得 $L_{h_1}=L_{\hat{h}_1}$, 那么 (4.15) 等价于

$$\{x^{q-1}+\delta x^{q^4-1}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\}=\{\hat{c}(x^{q-1}+(-\theta^{q^5\tau})^{q^4}x^{q^4-1}):x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\}, \tag{4.16}$$

其中 $\hat{c}=\frac{c}{1-\theta^{\tau(q^2+q^5)}}$. 由 (2.5) 可得

$$\hat{c}^{q^2+q+1}(-\theta^{q^5\tau})=\delta^{q^2}. \tag{4.17}$$

如果 θ 和 δ 中有一个等于 0, 那么 δ 和 d 必须为 0. 然而, 这与 M 是非奇异的相矛盾. 因此 θ 和 δ 都不为 0. 由 (4.1) 可得

$$\hat{c}^{(q^2-q+1)(q^2+q+1)}=\frac{\delta^{q^4+q^2+1}}{(-\theta^{q^5\tau})^{q^4(q^4+q^2+1)}}. \tag{4.18}$$

结合 (4.17) 和 (4.18) 可得

$$\delta^{q^3+1}=(-\theta^{q^5\tau})^{q^4(q^3+1)}.$$

令 $\sigma=\tau|_{\mathbb{F}_{q^3}}$, 从而

$$N_{q^6/q^3}(\delta)=N_{q^6/q^3}(\theta)^{\sigma}.$$

因此, 这证明了 (4.10) 的必要性.

下面证明 (4.10) 的充分性. 假设 $N_{q^6/q^3}(\delta)=N_{q^6/q^3}(\theta)^{\sigma}$ 且 $\theta,\delta\neq 0$. 从而只需证明存在可逆矩阵 M 使得 (4.11) 成立. 令 $M=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)$, 其中 d 满足等式 (4.13). 因此

$$d^{(q^3+1)(q^2+q+1)}=\left(\frac{\delta}{\theta^{\tau}}\right)^{q^2(q^3+1)}=1.$$

那么显然存在 $\alpha\in\mathbb{F}_{q^6}^*$ 使得 $d=\alpha^{q-1}$. 用 αx 代替 x, 可以得到

$$L_f=\{(\alpha x)^{q-1}+\delta(\alpha x)^{q^4-1}:x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\}=\{\alpha^{q-1}(x^{q-1}+\alpha^{q^4-q}\delta x^{q^4-1}):x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\}. \tag{4.19}$$

因为 $\alpha^{q^4-q}\delta=d^{q(q^2+q+1)}\delta=\frac{\delta^{q^3+1}}{\theta^{q^3\tau}}=\theta^{\tau}$ 且 $d=\alpha^{q-1}$, 所以 (4.19) 等价于

$$L_f=\{d(x^{q-1}+\theta^{\tau}x^{q^4-1}):x\in\mathbb{F}_{q^6}^*\}=L_{d\bar{g}}.$$

证毕. □

注 4.1 事实上, 若 $N_{q^6/q^3}(\delta)=N_{q^6/q^3}(\theta)^{\sigma}$ 不等于 0 或 1, 那么也可以直接用引理 2.3 来证明定理 4.1 中的充分条件.

定理 4.2 设 $\mathbb{F}_{q^6}$ 上的 q- 多项式 $f(x)=x^q+\theta x^{q^4}$ 且 $\theta\neq 0$. 那么 L_f 的自同构群为

$$\mathrm{Aut}(L_f)=\begin{cases}\mathcal{D}, & N_{q^6/q^3}(\theta)=1,\\ \mathcal{D}\cup\mathcal{C}, & N_{q^6/q^3}(\theta)\neq 1,\end{cases}$$

其中

$$\mathcal{D}=\left\{M\tau:N_{q^6/q^3}(\theta)^{\tau-1}=1,M=\begin{pmatrix}1&0\\0&d\end{pmatrix}\in\mathrm{PGL}(2,q^6),\tau\in\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^6}),d^{q^2+q+1}=\left(\frac{\theta}{\theta^{\tau}}\right)^{q^2}\right\},$$

$$\mathcal{C}=\left\{M\tau:N_{q^6/q^3}(\theta)^{\tau-1}=1,M=\begin{pmatrix}0&1\\c&0\end{pmatrix}\in\mathrm{PGL}(2,q^6),\tau\in\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^6}),\right.$$
$$\left.\left(\frac{c}{1-\theta^{\tau(q^2+q^5)}}\right)^{q^2+q+1}=\frac{\theta^{q^2}}{-\theta^{\tau q^5}}\right\}.$$

证明 下面将基于定理 4.1 的证明及假设 $\theta=\delta$ 对此定理进行证明. 根据 b 是否为 0, 分如下两种情形.

情形 1 $b=0$. 当等式 (4.11) 中 $b=0$ 时, 有 $a=1$ 和 $c=0$ 成立. 因此, 若 $\bar{f}(x)=x^q+\theta^{\tau}x^{q^4}$, 那么只需找到满足 $L_{d\bar{f}}=L_f$ 的 $d\in\mathbb{F}_{q^6}$ 和 $\tau\in\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^6})$. 由 (4.13) 和 (4.14) 可得, 若 $L_{d\bar{f}}=L_f$, 则 d 和 τ 应满足条件

$$d^{q^2+q+1}=\left(\frac{\theta}{\theta^{\tau}}\right)^{q^2}, \tag{4.20}$$

$$N_{q^6/q^3}(\theta) = N_{q^6/q^3}(\theta)^\tau. \tag{4.21}$$

因此 (4.20) 和 (4.21) 是必要条件.

下面证明 (4.20) 和 (4.21) 也是 $L_{d\bar{f}} = L_f$ 成立的充分条件. 由 (4.20) 和 (4.21) 可得

$$d^{(q^3+1)(q^2+q+1)} = \left(\frac{\theta}{\theta^\tau}\right)^{q^2(q^3+1)} = N_{q^6/q^3}\left(\frac{\theta}{\theta^\tau}\right)^{q^2} = 1.$$

因此, 存在 $\alpha \in \mathbb{F}_{q^6}^*$ 使得 $d = \alpha^{q-1}$. 用 αx 代替 x, 可以得到

$$\{(\alpha x)^{q-1} + \theta(\alpha x)^{q^4-1} : x \in \mathbb{F}_{q^6}^*\} = \{\alpha^{q-1}(x^{q-1} + \alpha^{q^4-q}\theta x^{q^4-1}) : x \in \mathbb{F}_{q^6}^*\}. \tag{4.22}$$

因为 $\alpha^{q^4-q}\theta = d^{q(q^2+q+1)}\theta = \frac{\theta^{q^3+1}}{\theta^{q^3\tau}} = \theta^\tau$, 所以 (4.22) 等价于

$$\{(\alpha x)^{q-1} + \theta(\alpha x)^{q^4-1} : x \in \mathbb{F}_{q^6}^*\} = \{d(x^{q-1} + \theta^\tau x^{q^4-1}) : x \in \mathbb{F}_{q^6}^*\}.$$

情形 2　$b \neq 0$. 当 (4.11) 中 $b \neq 0$ 时, 有 $N_{q^6/q^3}(\theta) \neq 1$, $b = 1$, 且 $a = d = 0$. 因此,

$$h(x) = -\frac{\theta^{\tau q^5} x^{q^2}}{1 - \theta^{\tau(q^2+q^5)}} + \frac{x^{q^5}}{1 - \theta^{\tau(q^2+q^5)}}.$$

从而只需确定满足 $L_{ch} = L_f$ 的 $c \in \mathbb{F}_{q^6}$ 和 $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^6})$. 由 (4.17) 和 (4.18) 可得, 若 $L_{ch} = L_f$, 那么 c 和 τ 满足

$$\hat{c}^{q^2+q+1} = \frac{\theta^{q^2}}{-\theta^{q^5\tau}}, \tag{4.23}$$

其中 $\hat{c} = \frac{c}{1-\theta^{\tau(q^2+q^5)}}$ 且

$$N_{q^6/q^3}(\theta) = N_{q^6/q^3}(\theta)^\tau. \tag{4.24}$$

因此 (4.23) 和 (4.24) 是必要条件.

下面证明 (4.23) 和 (4.24) 也是 $L_{ch} = L_f$ 成立的充分条件. 由 (4.15)、(4.16) 和 $\delta = \theta$ 可得, 只需证明这两个条件是 (4.16) 的充分条件即可得上述结论. 由 (4.23) 和 (4.24) 可得

$$\hat{c}^{(q^3+1)(q^2+q+1)} = \left(\frac{\theta^{q^2}}{-\theta^{q^5\tau}}\right)^{q^3+1} = \frac{N_{q^6/q^3}(\theta)^{q^2}}{N_{q^6/q^3}(\theta)^{q^2\tau}} = 1.$$

因此存在 $\alpha \in \mathbb{F}_{q^6}^*$ 使得 $\hat{c} = \alpha^{q-1}$ 成立. 用 αx 代替 x, 可以得到

$$\{(\alpha x)^{q-1} + \theta(\alpha x)^{q^4-1} : x \in \mathbb{F}_{q^6}^*\} = \{\alpha^{q-1}(x^{q-1} + \alpha^{q^4-q}\theta x^{q^4-1}) : x \in \mathbb{F}_{q^6}^*\}. \tag{4.25}$$

因为 $\alpha^{q^4-q}\theta = \hat{c}^{q(q^2+q+1)}\theta = \frac{\theta^{q^3+1}}{(-\theta^{q^5\tau})^q} = (-\theta^{q^5\tau})^{q^4}$, 所以 (4.25) 等价于

$$\{(\alpha x)^{q-1} + \theta(\alpha x)^{q^4-1} : x \in \mathbb{F}_{q^6}^*\} = \{\hat{c}(x^{q-1} + (-\theta^{q^5\tau})^{q^4} x^{q^4-1}) : x \in \mathbb{F}_{q^6}^*\}.$$

证毕. □

注 4.2　在定理 4.1 和 4.2 中, 并没有要求 L_f 和 L_g 是最大散射线性集. 换言之, 在这两个定理中确定了 $\mathrm{PG}(1, q^6)$ 中一大类线性集的等价性及其自同构群, 并且这一大类线性集包含了 Csajbók 等 [5] 所发现的最大散射线性集类 $\mathscr{F}_6$.

下面讨论文献 [5] 中所构造的第二个族 $\mathscr{F}_8$ 的等价性问题.

定理 4.3 设 $f(x)=x^q+\delta x^{q^5}$ 和 $g(x)=x^q+\theta x^{q^5}$ 为 $\mathbb{F}_{q^8}$ 上的 q- 多项式. 线性集 L_f 和 L_g 是 PΓL- 等价的当且仅当存在 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^4})$ 使得

$$N_{q^8/q^4}(\delta)=N_{q^8/q^4}(\theta)^\sigma. \tag{4.26}$$

证明 若 $\theta=\delta=0$, 则上述结论显然成立. 因此, 假设 θ 和 δ 中至少有一个不为 0.

首先, 证明条件 (4.26) 的必要性.

假设 L_f 和 L_g 是等价的, 那么存在 $\mathbb{F}_{q^8}$ 上可逆矩阵 $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ 和 $\tau\in\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^8})$ 使得

$$\{x^{q-1}+\delta x^{q^5-1}:x\in\mathbb{F}_{q^8}^*\}=\left\{\frac{cx+d\bar{g}(x)}{ax+b\bar{g}(x)}:x\in\mathbb{F}_{q^8}^*\right\}, \tag{4.27}$$

其中 $\bar{g}(x)=x^q+\theta^\tau x^{q^5}$.

下面分两种情形进行证明.

情形 1 $b=0$. 因为 M 属于 $\mathrm{PGL}(2,q^8)$, 所以可假设 $a=1$. 由 (2.3) 可得 $c=0$. 那么 (4.27) 等价于

$$\{x^{q-1}+\delta x^{q^5-1}:x\in\mathbb{F}_{q^8}^*\}=\{d(x^{q-1}+\theta^\tau x^{q^5-1}):x\in\mathbb{F}_{q^8}^*\}.$$

由 (4.2) 可得

$$d^{1+q+q^2+q^3}\theta^{\tau q^3}=\delta^{q^3}. \tag{4.28}$$

如果 θ 和 δ 中有一个等于 0, 那么 δ 和 d 必须为 0. 然而, 这与 M 是非奇异的相矛盾. 因此 θ 和 δ 都不为 0. 由 (4.3) 可得

$$d^{(q^3-q^2+1)(1+q+q^2+q^3)}=\frac{\delta^{q^6+q^3+q}}{\theta^{\tau(q^6+q^3+q)}}. \tag{4.29}$$

结合 (4.28) 和 (4.29) 可得

$$\delta^{q^5+q}=\theta^{\tau(q^5+q)}.$$

令 $\sigma=\tau|_{\mathbb{F}_{q^4}}$, 从而

$$N_{q^8/q^4}(\delta)=N_{q^8/q^4}(\theta)^\sigma.$$

情形 2 $b\neq 0$. 不失一般性, 假设 $b=1$. 应用引理 4.4 可得 $a=d=0$, 从而

$$M=\begin{pmatrix}0&1\\c&0\end{pmatrix}.$$

令 $h_0(x)=-\theta^{\tau q^7}x^{q^3}+x^{q^7}$, 那么 $h_0(\bar{g}(x))=(1-\theta^{\tau(q^3+q^7)})x$.

若 $N_{q^8/q^4}(\theta)=1$, 那么 $1-\theta^{\tau(q^3+q^7)}=0$. 从而 $x\mapsto g(x)$ 为不可逆映射. 由 (4.27) 可得, 这与点 $\langle(0,1)\rangle_{\mathbb{F}_{q^8}}$ 不属于 L_f 相矛盾. 因此 $N_{q^8/q^4}(\theta)\neq 1$.

令

$$h(x)=-\frac{\theta^{\tau q^7}x^{q^3}}{1-\theta^{\tau(q^3+q^7)}}+\frac{x^{q^7}}{1-\theta^{\tau(q^3+q^7)}}.$$

从而 $h(\bar{g}(x))=x$, 即若 $\bar{g}(x)=x^q+\theta^\tau x^{q^5}$, 那么 $h(x)$ 是 $\bar{g}(x)$ 的逆映射. 由此可得 (4.27) 等价于

$$\{x^{q-1}+\delta x^{q^5-1}:x\in\mathbb{F}_{q^8}^*\}=\left\{\frac{ch(x)}{x}:x\in\mathbb{F}_{q^8}^*\right\}. \tag{4.30}$$

通过计算, $h_1(x)=(1-\theta^{\tau(q^3+q^7)})h(x)$ 的伴随 $\hat{h}_1(x)$ 为

$$\hat{h}_1(x)=x^q+(-\theta^{q^7\tau})^{q^5}x^{q^5}.$$

由引理 2.1 可得 $L_{h_1}=L_{\hat{h}_1}$, 于是 (4.30) 等价于

$$\{x^{q-1}+\delta x^{q^5-1}:x\in\mathbb{F}_{q^8}^*\}=\{\hat{c}(x^{q-1}+(-\theta^{q^7\tau})^{q^5}x^{q^5-1}):x\in\mathbb{F}_{q^8}^*\}, \tag{4.31}$$

其中 $\hat{c}=\frac{c}{1-\theta^{\tau(q^3+q^7)}}$.

由 (4.2) 可得

$$\hat{c}^{1+q+q^2+q^3}(-\theta^{q^7\tau})=\delta^{q^3}. \tag{4.32}$$

如果 θ 和 δ 中有一个等于 0, 那么 δ 和 d 必须为 0. 然而, 这与 M 是非奇异的矛盾. 因此 θ 和 δ 都不为 0.

此外, 由 (4.3) 可得

$$\hat{c}^{(q^3-q^2+1)(1+q+q^2+q^3)}=\frac{\delta^{q^6+q^3+q}}{(-\theta^{q^7\tau})^{q^5(q^6+q^3+q)}}. \tag{4.33}$$

于是结合 (4.32) 和 (4.33) 可得

$$\delta^{q^5+q}=(-\theta^{q^7\tau})^{q^5(q^5+q)}.$$

令 $\sigma=\tau|_{\mathbb{F}_{q^4}}$, 从而

$$N_{q^8/q^4}(\delta)=N_{q^8/q^4}(\theta)^\sigma.$$

因此, 这证明了 (4.26) 的必要性.

下面证明 (4.26) 的充分性. 假设 $N_{q^8/q^4}(\delta)=N_{q^8/q^4}(\theta)^\sigma$ 且 $\theta,\delta\neq 0$.

从而只需证明存在可逆矩阵 M 使得 (4.27) 成立. 令 $M=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)$, 其中 d 满足等式 (4.28). 因此

$$d^{(q^4+1)(q^3+q^2+q+1)}=\left(\frac{\delta}{\theta^\tau}\right)^{q^3(q^4+1)}=1.$$

那么存在 $\alpha\in\mathbb{F}_{q^8}^*$ 使得 $d=\alpha^{q-1}$. 用 αx 代替 x, 可以得到

$$L_f=\{(\alpha x)^{q-1}+\delta(\alpha x)^{q^5-1}:x\in\mathbb{F}_{q^8}^*\}=\{\alpha^{q-1}(x^{q-1}+\alpha^{q^5-q}\delta x^{q^5-1}):x\in\mathbb{F}_{q^8}^*\}. \tag{4.34}$$

因为 $\alpha^{q^5-q}\delta=d^{q(q^3+q^2+q+1)}\delta=\frac{\delta^{q^3+1}}{\theta^{q^3\tau}}=\theta^\tau$ 且 $d=\alpha^{q-1}$, 所以 (4.34) 等价于

$$L_f=\{d(x^{q-1}+\theta^\tau x^{q^5-1}):x\in\mathbb{F}_{q^8}^*\}=L_{d\bar{g}}.$$

证毕. □

定理 4.4 设 $f(x)=x^q+\theta x^{q^5}$ 为 $\mathbb{F}_{q^8}$ 上的 q- 多项式且 $\theta\neq 0$. 那么 L_f 的自同构群为

$$\mathrm{Aut}(L_f)=\begin{cases}\mathcal{D}, & N_{q^8/q^4}(\theta)=1,\\ \mathcal{D}\cup\mathcal{C}, & N_{q^8/q^4}(\theta)\neq 1,\end{cases}$$

其中

$$\mathcal{D}=\left\{M\tau: N_{q^8/q^4}(\theta)^{\tau-1}=1, M=\begin{pmatrix}1&0\\0&d\end{pmatrix}\in\mathrm{PGL}(2,q^8), \tau\in\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^8}), d^{q^3+q^2+q+1}=\left(\frac{\theta}{\theta^\tau}\right)^{q^3}\right\},$$

$$\mathcal{C}=\left\{M\tau: N_{q^8/q^4}(\theta)^{\tau-1}=1, M=\begin{pmatrix}0&1\\c&0\end{pmatrix}\in\mathrm{PGL}(2,q^8), \tau\in\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^8}),\right.$$
$$\left.\left(\frac{c}{1-\theta^{\tau(q^3+q^7)}}\right)^{q^3+q^2+q+1}=\frac{\theta^{q^3}}{-\theta^{\tau q^7}}\right\}.$$

证明 下面将基于定理 4.3 的证明和假设 $\theta=\delta$ 对此定理进行证明. 根据 b 是否为 0, 分如下两种情形.

情形 1 $b=0$. 当等式 (4.27) 中 $b=0$ 时, 有 $a=1$ 和 $c=0$ 成立. 因此, 若 $\bar{f}(x)=x^q+\theta^\tau x^{q^5}$, 则只需找到使得 $L_{d\bar{f}}=L_f$ 成立的 $d\in\mathbb{F}_{q^8}$ 和 $\tau\in\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^8})$. 由 (4.28) 和 (4.29) 可得, 若 $L_{d\bar{f}}=L_f$, 则 d 和 τ 满足

$$d^{q^3+q^2+q+1}=\left(\frac{\theta}{\theta^\tau}\right)^{q^3} \tag{4.35}$$

且

$$N_{q^8/q^4}(\theta)=N_{q^8/q^4}(\theta)^\tau. \tag{4.36}$$

因此 (4.35) 和 (4.36) 是必要条件.

下面证明 (4.35) 和 (4.36) 也是 $L_{d\bar{f}}=L_f$ 成立的充分条件. 由 (4.35) 和 (4.36) 可得

$$d^{(q^4+1)(q^3+q^2+q+1)}=\left(\frac{\theta}{\theta^\tau}\right)^{q^3(q^4+1)}=N_{q^8/q^4}\left(\frac{\theta}{\theta^\tau}\right)^{q^3}=1.$$

因此存在 $\alpha\in\mathbb{F}_{q^8}^*$ 使得 $d=\alpha^{q-1}$. 用 αx 代替 x, 可以得到

$$\{(\alpha x)^{q-1}+\theta(\alpha x)^{q^5-1}: x\in\mathbb{F}_{q^8}^*\}=\{\alpha^{q-1}(x^{q-1}+\alpha^{q^5-q}\theta x^{q^5-1}): x\in\mathbb{F}_{q^8}^*\}. \tag{4.37}$$

因为 $\alpha^{q^5-q}\theta=d^{q(q^3+q^2+q+1)}\theta=\frac{\theta^{q^4+1}}{\theta^{q^4\tau}}=\theta^\tau$, 所以 (4.22) 等价于

$$\{(\alpha x)^{q-1}+\theta(\alpha x)^{q^5-1}: x\in\mathbb{F}_{q^8}^*\}=\{d(x^{q-1}+\theta^\tau x^{q^5-1}): x\in\mathbb{F}_{q^8}^*\}.$$

情形 2 $b\neq 0$. 当 (4.27) 中 $b\neq 0$ 时, 有 $N_{q^8/q^4}(\theta)\neq 1$ 和 $b=1$ 以及 $a=d=0$ 成立. 因此, 若

$$h(x)=-\frac{\theta^{\tau q^7}x^{q^3}}{1-\theta^{\tau(q^3+q^7)}}+\frac{x^{q^7}}{1-\theta^{\tau(q^3+q^7)}},$$

则只需找到使得 $L_{ch}=L_f$ 成立的 $c\in\mathbb{F}_{q^8}$ 和 $\tau\in\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^8})$ 进行定义. 由 (4.32) 和 (4.33) 可得, 若 $L_{ch}=L_f$, 则 c 和 τ 满足

$$\hat{c}^{q^3+q^2+q+1}=\frac{\theta^{q^3}}{-\theta^{q^7\tau}},\tag{4.38}$$

其中 $\hat{c}=\frac{c}{1-\theta^{\tau(q^3+q^7)}}$ 且

$$N_{q^8/q^4}(\theta)=N_{q^8/q^4}(\theta)^{\tau}.\tag{4.39}$$

因此 (4.38) 和 (4.39) 是必要条件.

下面证明 (4.38) 和 (4.39) 也是 $L_{ch}=L_f$ 成立的充分条件. 由 (4.30)、(4.31) 和 $\delta=\theta$ 可得, 只需证明这两个条件是 (4.31) 的充分条件即可得到上述结论. 结合 (4.38) 和 (4.39) 可得

$$\hat{c}^{(q^4+1)(q^3+q^2+q+1)}=\left(\frac{\theta^{q^3}}{-\theta^{q^7\tau}}\right)^{q^4+1}=\frac{N_{q^8/q^4}(\theta)^{q^3}}{N_{q^8/q^4}(\theta)^{q^3\tau}}=1.$$

因此存在 $\alpha\in\mathbb{F}_{q^8}^*$ 使得 $\hat{c}=\alpha^{q-1}$. 用 αx 代替 x, 可以得到

$$\{(\alpha x)^{q-1}+\theta(\alpha x)^{q^5-1}:x\in\mathbb{F}_{q^8}^*\}=\{\alpha^{q-1}(x^{q-1}+\alpha^{q^5-q}\theta x^{q^5-1}):x\in\mathbb{F}_{q^8}^*\}.\tag{4.40}$$

因为 $\alpha^{q^5-q}\theta=\hat{c}^{q(q^3+q^2+q+1)}\theta=\frac{\theta^{q^4+1}}{(-\theta^{q^7\tau})^q}=(-\theta^{q^7\tau})^{q^5}$, 所以 (4.40) 等价于

$$\{(\alpha x)^{q-1}+\theta(\alpha x)^{q^5-1}:x\in\mathbb{F}_{q^8}^*\}=\{\hat{c}(x^{q-1}+(-\theta^{q^7\tau})^{q^5}x^{q^5-1}):x\in\mathbb{F}_{q^8}^*\}.$$

证毕. □

注 4.3 正如在关于 $\mathscr{F}_6$ 族等价问题的注 4.2 中所指出的, 因为定理 4.3 和 4.4 不要求 f 和 g 是散射多项式, 所以我们也确定了 $\mathrm{PG}(1,q^8)$ 中一个包含 $\mathscr{F}_8$ 更大线性集类的等价性和自同构群.

5 结论

本文分析了 Marino 等 [14] 所构造的一类最大散射线性集以及 Csajbók 等 [5] 构造的 $\mathscr{F}_6$ 和 $\mathscr{F}_8$ 这两类线性集的等价性问题, 并分别给出了它们的自同构群. 在对 Marino-Montanucci-Zullo 类的研究中, 本文证明了在 PΓL- 等价的意义下, 该类只包含一个元素, 之后确定了其自同构群. 在对 Csajbók-Marino-Polverino-Zanella 类的研究中, 根据文献 [5] 可知, 只需要讨论 $\mathscr{F}_{2m}$ 中当 $s=1$ 时的线性集等价性问题, 为此, 本文给出了 $\mathcal{F}_{2m}$ 中元素之间 PΓL- 等价的充分必要条件, 并进一步确定了其自同构群. 本文对于最大散射线性集所采用的分析思路和过程, 对解决其他线性集的等价性都具有一定的参考性, 并提供了较为有效的方法. 下一步将继续研究其他线性集的等价性问题.

参考文献

1 Bartoli D, Csajbók B, Montanucci M. On a conjecture about maximum scattered subspaces of $\mathbb{F}_{q^6}\times\mathbb{F}_{q^6}$. Linear Algebra Appl, 2021, 631: 111–135

2 Bartoli D, Giulietti M, Marino G, et al. Maximum scattered linear sets and complete caps in Galois spaces. Combinatorica, 2018, 38: 255–278

3 Blokhuis A, Lavrauw M. Scattered spaces with respect to a spread in $\mathrm{PG}(n,q)$. Geom Dedicata, 2000, 81: 231–243

4 Csajbók B, Marino G, Polverino O. Classes and equivalence of linear sets in $\mathrm{PG}(1,q^n)$. J Combin Theory Ser A, 2018, 157: 402–426
5 Csajbók B, Marino G, Polverino O, et al. A new family of MRD-codes. Linear Algebra Appl, 2018, 548: 203–220
6 Csajbók B, Marino G, Zullo F. New maximum scattered linear sets of the projective line. Finite Fields Appl, 2018, 54: 133–150
7 Csajbók B, Zanella C. On the equivalence of linear sets. Des Codes Cryptogr, 2016, 81: 269–281
8 Lavrauw M, Van de Voorde G. Field reduction and linear sets in finite geometry. Contemp Math, 2015, 632: 271–293
9 Lidl R, Niederreiter H. Finite Fields. Cambridge: Cambridge University Press, 1997
10 Longobardi G, Marino G, Trombetti R, et al. A large family of maximum scattered linear sets of $\mathrm{PG}(1,q^n)$ and their associated MRD codes. arXiv:2102.08287, 2021
11 Longobardi G, Zanella C. Linear sets and MRD-codes arising from a class of scattered linearized polynomials. J Algebr Comb, 2021, 53: 639–661
12 Lunardon G. Normal spreads. Geom Dedicata, 1999, 75: 245–261
13 Lunardon G, Polverino O. Blocking sets and derivable partial spreads. J Algebraic Combin, 2001, 14: 49–56
14 Marino G, Montanucci M, Zullo F. MRD-codes arising from the trinomial $x^q+x^{q^3}+cx^{q^5}\in\mathbb{F}_{q^6}$. Linear Algebra Appl, 2020, 591: 99–114
15 Neri A, Santonastaso P, Zullo F. Extending two families of maximum rank distance codes. Finite Fields Appl, 2022, 81: 102045
16 Polverino O. Linear sets in finite projective spaces. Discrete Math, 2010, 310: 3096–3107
17 Polverino O, Zullo F. Connections between scattered linear sets and MRD-codes. Bull Inst Combin Appl, 2020, 89: 46–74
18 Sheekey J. A new family of linear maximum rank distance codes. Adv Math Commun, 2016, 10: 475–488
19 Tang W, Zhou Y, Zullo F. On the automorphism groups of Lunardon-Polverino scattered linear sets. arXiv:2201.12777, 2022
20 Timpanella M, Zini G. On a family of linear MRD codes with parameters $[8\times 8,16,7]_q$. arXiv:2108.13082, 2021

Equivalence and automorphism groups of two families of maximum scattered linear sets

Wei Tang & Yue Zhou

Abstract Linear set in projective spaces over finite fields plays central roles in the study of blocking sets, semifields and rank-metric codes. A linear set with the largest possible cardinality and the maximum rank is called maximum scattered. After two decades of study, there are only a small number of known maximum scattered linear sets in projective lines, including two types constructed by Csajbók et al. (2018) and Marino et al. (2020). This paper aims to solve the equivalence problem of the linear sets in each of these families and to determine their automorphism groups.

Keywords linear set, rank-metric code, finite geometry, linearized polynomial

MSC(2020) 05B25, 51E20, 51E22

doi: 10.1360/SSM-2022-0073