全纯截面曲率与 Kähler-like 度量

汤凯

浙江师范大学数学与计算机科学学院, 金华 321004

E-mail: kaitang001@zjnu.edu.cn

收稿日期: 2020-02-15; 接受日期: 2020-06-08; 网络出版日期: 2020-07-16

浙江省自然科学基金 (批准号: LQ20A010005) 资助项目

摘要 本文研究具有给定全纯截面曲率条件的 Kähler-like 流形. 首先, 证明具有非零常值全纯截面曲率的 Kähler-like 流形一定是 Kähler 流形; 其次, 证明关于 Hermite 曲率流的抛物 Schwarz 引理; 最后, 给出具有正全纯截面曲率的紧致 Kähler-like 流形上的消没定理.

关键词 全纯截面曲率 Kähler-like 度量 Hermite 流形

MSC (2020) 主题分类 53C24, 53C55

1 引言

令 M^n 是一个 n 维复流形, J 是其上的近复结构, TM 是切丛. 如果 Riemann 度量 g 满足 $g(JX, JY) = g(X, Y)$, 其中 $X, Y \in TM$, 则称 g 为 Hermite 度量. 如果 M 上的联络 ∇ 既与 Hermite 度量 g 相容, 又与复结构相容, 那么称 ∇ 为 Chern 联络. 我们用 R 表示 Chern 联络的 Chern 曲率张量. 最近, Yang 和 Zheng^[1] 引进了 Kähler-like 度量, 即对任意的 $(1, 0)$ 型向量 X, Y, Z 和 W , 都满足

$$R(X, \bar{Y}, Z, \bar{W}) = R(Z, \bar{Y}, X, \bar{W}).$$

此时, 也称 M 为 Kähler-like 流形.

Kähler-like 流形不一定是 Kähler 流形. 例如, Iwasawa 流形上存在 Chern 曲率张量为 0 的 Hermite 度量, 但是, 它不是 Kähler 流形^[1]. 一个有趣的问题是, 分类所有的 Kähler-like 流形. Yang 和 Zheng^[1] 证明了, 紧致 Kähler-like 流形一定也是平衡 (balanced) 流形. 类似于 Chern 联络, Zhao 和 Zheng^[2, 3] 和 Yau 等^[4] 研究了 Riemann 联络和 Bismut 联络的 Kähler-like 条件, 得到了许多重要的分类定理. 例如, 他们得到了, 如果紧致复流形 (M, g) 上的 Bismut 联络满足 Kähler-like 条件, 则 g 一定是多闭合 (pluriclosed) 度量. Angella 等^[5] 也给出了任意度量联络上 Kähler-like 的定义.

英文引用格式: Tang K. Holomorphic sectional curvature and Kähler-like metric (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 2013–2024, doi: 10.1360/SSM-2020-0038

本文主要讨论具有给定全纯截面曲率条件的 Kähler-like 流形及其应用. 其中 (Chern) 全纯截面曲率的定义如下:

$$H(X) = \frac{R(X, \bar{X}, X, \bar{X})}{|X|^4},$$

这里 $X \in T^{1,0}M$ (参见文献 [6]). 全纯截面曲率是复几何中最重要的研究对象之一.

具有常值全纯截面曲率的完备 Kähler 流形被称为复空间形式 [6]. 众所周知, 单连通的复空间形式双全纯等价于复射影空间 $\mathbb{CP}^n$ 、复双曲空间 $\mathbb{B}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$. 1985 年, Balas 和 Gauduchon [7] 证明了具有非正的常值全纯截面曲率的紧致复 Hermite 面一定是 Kähler 流形. 1996 年, Apostolov 等 [8] 证明了具有逐点常值的全纯截面曲率的紧致复面一定是 Kähler 流形. 一个自然的问题是, 具有常值全纯截面曲率的高维紧致复流形, 是否为 Kähler 流形? 文献 [9] 研究了具有非正的常值全纯截面曲率的紧致局部共形 Kähler 流形 M , 推得 M 一定是 Kähler 流形. 本文的第一个结果主要是考虑具有常值全纯截面曲率的 Kähler-like 流形, 得到如下结论:

定理 1.1 设 (M^n, g) 是 Kähler-like 流形, 且 g 有常值全纯截面曲率 c , 那么当 $c = 0$ 时, Chern 曲率张量恒为 0; 当 $c \neq 0$ 时, M 一定是 Kähler 流形.

上述定理中不需要假定 M 是紧致流形, 并且, 当 $c = 0$ 时, M 不一定是 Kähler 流形, 例如, Iwasawa 流形.

本文第二个结果是考虑具有非正全纯截面曲率的 Kähler-like 流形. 2007 年, Song 和 Tian [10] 证明了下述关于 Kähler-Ricci 流的抛物 Schwarz 引理:

定理 1.2 设 M 和 N 分别是维数为 m 和 κ 的复流形, f 是 M 到 N 上的全纯映射. 令 ω_0 是 M 上的 Kähler 度量, ω_N 是 N 上的 Kähler 度量. 如果 $\omega = \omega(t)$ 是方程 (1.1) 的解, 即

$$\frac{d}{dt}\omega = -\text{Ric}(\omega) - \nu\omega, \quad \omega|_{t=0} = \omega_0, \quad (1.1)$$

其中 $t \in [0, T)$, $\nu = 0$ 或 $\nu = 1$, 那么对于在 $M \times [0, T)$ 上的任意一点, 都有如下不等式成立:

$$\left(\frac{d}{dt} - \Delta\right) \log \text{tr}_\omega(f^*\omega_N) \leq C_N \text{tr}_\omega(f^*\omega_N) + \nu, \quad (1.2)$$

其中 C_N 是 ω_N 的全纯双截面曲率的负的上界.

特别地, 运用 Royden 引理 [11], 上述定理中的全纯双截面曲率条件也可以换成全纯截面曲率.

在 Hermite 流形上, Streets 和 Tian [12] 引进了一族 Hermite 曲率流. 在 Kähler 流形情形下, 此流是 Kähler-Ricci 流. 通过分析具有非正全纯截面曲率的 Kähler-like 流形, 可以推广 Song 和 Tian 的结论, 即下面的定理:

定理 1.3 设 $f: M^m \rightarrow N^n$ 是 M 到 N 上的全纯映射, 其中 M 和 N 分别是维数为 m 和 n 的 Hermite 流形. ω_0 是 M 上的 Hermite 度量, ω_N 是 N 上的 Kähler-like 度量, 且 ω_N 的全纯截面曲率的上界 $-\kappa \leq 0$. 如果 $\omega = \omega(t)$ 是方程 (1.3) 的解, 即

$$\frac{d}{dt}\omega = -S, \quad \omega|_{t=0} = \omega_0, \quad (1.3)$$

其中 S 是第二 (Chern) Ricci 曲率, 记 $u = \text{tr}_\omega f^*\omega_N$, 则有

$$\left(\frac{d}{dt} - \Delta_\omega\right) \log u \leq -\kappa \frac{r+1}{2r} u, \quad (1.4)$$

其中 r 是 df 最大的秩.

运用定理 1.3 到紧致 Hermite 流形上, 可得如下推论:

推论 1.1 设 (X^n, ω_0) 是紧致 Hermite 流形, ω_t 是 Hermite 曲率流 (1.3) 的解, 且初始解为 ω_0 . 如果 $\tilde{\omega}$ 是 X 上的 Kähler-like 度量, 且 $\tilde{\omega}$ 的全纯截面曲率的上界 $-\kappa \leq 0$, 那么存在一个常数 $C > 0$, 使得对于任意的 $t \in [0, T)$, 都有

$$C\tilde{\omega} \leq \omega_t. \quad (1.5)$$

在复几何中, Kobayashi^[13] 提出了一个著名的猜想, 即满足 Kobayashi 双曲条件的紧致复流形一定具有丰富的典范线丛, 或者有负的第一 Chern 类. 运用 Yau^[14] 的 Schwarz 引理, 推得具有负全纯截面曲率的 Hermite 流形一定是 Kobayashi 双曲的. 由此提出如下猜想: 如果 (X, g) 是紧致 Hermite 流形, 并且 g 有负的全纯截面曲率, 那么 X 的第一 Chern 类小于 0. 特别地, 对于具有负全纯截面曲率的紧致 Kähler 流形, Wu 和 Yau^[15] 猜测它具有丰富的典范线丛. 最近, 由于 Wu 和 Yau^[15] 等数学家的重要工作 [16, 17], Yau 猜想已被完全解决. 对于一般的紧致 Hermite 流形 (非 Kähler), 还有待进一步研究. 为了把 Wu 和 Yau 的理论推广到 Hermite 流形的情形, Yang 和 Zheng^[18] 引进了实双截曲率的概念. 如果把全纯截面曲率条件换成实双截曲率条件, Lee 和 Streets^[19] 证明了, 具有负实双截曲率的紧致 Hermite 面一定具有丰富的典范线丛.

我们需要指出, Yang 和 Zheng^[18] 证明了在 Kähler-like 流形 (X, g) 上, 实双截曲率 $B > 0$ (≥ 0 , < 0 或 ≤ 0) 当且仅当全纯截面曲率 $H > 0$ (≥ 0 , < 0 或 ≤ 0). 在非 Kähler-like 度量情形下, 实双截曲率条件略强于全纯截面曲率. 进一步地, 具有负全纯截面曲率的 Kähler-like 流形 (X, g) , X 一定也是具有负的实双截曲率的 Hermite 流形. 反之, 如果 (X, g) 具有负的实双截曲率, 那么可推得 g 具有负的全纯截面曲率, 但 g 是否为 Kähler-like 度量还需进一步探究. 文献 [18] 提出了一个猜想, 即具有负实双截曲率的紧致 Hermite 流形一定具有丰富的典范线丛.

因此, 我们建议如下猜想:

猜想 1.1 如果 (X, g) 是紧致 Kähler-like 流形, 并且 g 有负的全纯截面曲率, 那么 X 一定具有丰富的典范线丛.

因为紧致 Kähler-like 流形一定也是 balanced 流形, 而紧致的 balanced 复面是 Kähler 流形, 所以对于紧致复面, 上述猜想是成立的. 通过运用定理 1.3, 可以把上述猜想作为将来的研究课题.

本文第三个结果主要是考虑具有正的全纯截面曲率的 Kähler-like 流形. 对于有正的全纯截面曲率的紧致 Kähler 流形, Yau^[20] 也提出了一个著名的猜想: 它是射影流形, 并且是有理连通的. 这里有理连通是指流形上任意两点都能用一条有理曲线连接. 最近, Yang^[21] 证明了这个猜想, 得到如下结论:

定理 1.4 设 (X, ω) 是具有正全纯截面曲率的紧致 Kähler 流形, 那么对任意的 p ($1 \leq p \leq \dim X$), 恒有 $(\wedge^p T_X, \wedge^p \omega)$ 是 RC 正的,

$$H_{\bar{\partial}}^{p,0}(X) = 0.$$

特别地, X 是射影流形, 并且是有理连通的.

类似地, 我们也可以建议如下猜想:

猜想 1.2 如果 (X, g) 是紧致 Kähler-like 流形, 并且 g 有正的全纯截面曲率, 那么

$$H_{\bar{\partial}}^{p,0}(X) = 0,$$

其中 $1 \leq p \leq \dim X$. 特别地, X 是射影流形, 并且是有理连通的.

对于紧致复面, 上述猜想也是成立的. 对于高维情形, 我们给出如下结果:

定理 1.5 如果 (X^n, g) 是紧致 Kähler-like 流形, 并且 g 有正的全纯截面曲率, 设 T_X 是全纯切丛, T_X^* 是全纯余切丛, 则有

- (1) $H^0(X, \wedge^p T_X^*) = 0, \forall 1 \leq p \leq n;$
- (2) $H^0(X, (T_X^*)^{\otimes k}) = 0, \forall k \geq 1.$

在定理 1.5 的条件下, 运用 Dolbeault 同构定理, 可推得

$$H_{\bar{\partial}}^{p,0}(X) \cong H^0(X, \wedge^p T_X^*) = 0.$$

众所周知, 在有理连通的射影流形 X 上, 可以得到

$$H^0(X, (T_X^*)^{\otimes k}) = 0, \quad \forall k \geq 1.$$

Mumford 猜测这个结论的逆命题也是成立的, 即下面的猜想:

猜想 1.3 设 X 是一个射影流形, 如果

$$H^0(X, (T_X^*)^{\otimes k}) = 0, \quad \forall k \geq 1,$$

那么 X 是有理连通的.

当 $\dim X \leq 3$ 时, 猜想 1.3 已经被证实 (参见文献 [22]). Campana 等^[23] 给出了在射影流形情形下有理连通的等价刻画. 特别地, 如果 X 是射影流形, 则下面两个性质是等价的:

- (1) X 是有理连通流形;
- (2) 对于 X 上的任意丰富 (ample) 线丛 A , 存在常数 $C_A > 0$ 使得

$$H^0(X, (T_X^*)^{\otimes k} \otimes A^{\otimes m}) = 0, \quad \forall k, m \in \mathbb{N}^*, \quad k \geq C_A m.$$

Yang^[21] 的工作启发了人们对具有其他正曲率条件的 Kähler 流形或 Hermite 流形的研究, 具体可以参见文献 [24–28]. 本文将在下面的章节中介绍 Hermite 流形的度量、联络与曲率张量的基本定义. 然后给出定理 1.1、1.3、推论 1.1 和定理 1.5 的证明.

2 预备知识

下面介绍本文将要用到的一些基本定义, 具体可以参见文献 [6].

设 M^n 是维数为 n 的 Hermite 流形, J 是其上的近复结构, g 是其上的 Hermite 度量. 定义一个 2 形式的 ω :

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y),$$

通常也称 ω 为 Kähler 形式. 它是一个 $(1, 1)$ 型张量. 假设 $(z_1, \dots, z_n)$ 是局部全纯坐标, 则有

$$g = g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j, \quad \omega = \sqrt{-1} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j.$$

如果 $d\omega = 0$, $d\omega^{n-1} = 0$, $\partial\bar{\partial}\omega^{n-1} = 0$ 或 $dd^c\omega = 0$, 那么 ω 分别被称为 Kähler 度量、balanced 度量、Gauduchon 度量或 pluriclosed 度量. 用 ∇ 表示 Chern 联络, 则 ∇ 的挠率张量 T 和曲率张量 R 定义为

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

在局部坐标下, 挠率张量 T 的分量为

$$T_{ij}^k = g^{k\bar{l}} \left(\frac{\partial g_{j\bar{l}}}{\partial z^i} - \frac{\partial g_{i\bar{l}}}{\partial z^j} \right).$$

当 g 是 Kähler 度量时, $T_{ij}^k = 0$. 曲率张量 R 的分量为

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = -\frac{\partial^2 g_{k\bar{l}}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} + g^{p\bar{q}} \frac{\partial g_{k\bar{q}}}{\partial z^i} \frac{\partial g_{p\bar{l}}}{\partial \bar{z}^j}.$$

通过对曲率张量求迹, 可得

$$R_{i\bar{j}} = g^{k\bar{l}} R_{i\bar{j}k\bar{l}} = -\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} \log \omega^n.$$

称 $R_{i\bar{j}}$ 为 (第一) Chern Ricci 曲率张量. 第一 Chern Ricci 形式为

$$\text{Ric}(\omega) = \sqrt{-1} R_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j \in \Gamma(M, \wedge^{1,1} TM^*).$$

它是闭的实 (1,1) 形式, 并且是 Chern 类 $c_1(M) \in H^2(M, 2\pi\mathbb{Z})$ 的代表元.

第二 Chern Ricci 形式为

$$S \in \Gamma(M, \text{End}(TM))$$

且第二 Chern Ricci 曲率的分量为

$$S_{k\bar{l}} = g^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}k\bar{l}}.$$

当 g 不是 Kähler 度量时, $\text{Ric}(\omega)$ 与 S 可能是不同的.

对任意的 $X, Y \in T^{1,0}M$, 规定

$$B(X, Y) = \frac{R(X, \bar{X}, Y, \bar{Y})}{|X|^2 |Y|^2},$$

称 B 为度量 g 的全纯双截面曲率. 进一步地, 规定

$$H(X) = B(X, X) = \frac{R(X, \bar{X}, X, \bar{X})}{|X|^4},$$

则称 H 为度量 g 的全纯截面曲率. 对于曲率张量 R , 它满足对称性:

$$\overline{R(X, \bar{Y}, Z, \bar{W})} = R(Y, \bar{X}, W, \bar{Z}), \quad X, Y, Z, W \in T^{1,0}M.$$

一般而言, 曲率张量 R 不满足第一、三位置可交换的性质, 即

$$R(X, \bar{Y}, Z, \bar{W}) \neq R(Z, \bar{Y}, X, \bar{W}).$$

如果 g 是 Kähler 度量, 则 R 满足此性质; 反之, 不一定成立. 于是, Yang 和 Zheng^[1] 给出了 Kähler-like 度量的定义.

定义 2.1 一个 Hermite 度量 g 被称为 Kähler-like 度量, 如果 g 的 Chern 曲率张量 R 满足

$$R(X, \bar{Y}, Z, \bar{W}) = R(Z, \bar{Y}, X, \bar{W}), \quad X, Y, Z, W \in T^{1,0}M.$$

Boothby^[29] 证明了, 任何满足 Chern 曲率张量为 0 的紧致 Hermite 流形一定是复 Lie 群的商群. 其中最著名的例子便是 Iwasawa 流形. 自然这样的流形都满足 Kähler-like 性质.

3 定理 1.1 的证明

假设 K 是 Chern 曲率张量 R 对称部分, 且分量表示为

$$K_{i\bar{j}k\bar{l}} = \frac{1}{4}(R_{i\bar{j}k\bar{l}} + R_{k\bar{j}i\bar{l}} + R_{i\bar{l}k\bar{j}} + R_{k\bar{l}i\bar{j}}).$$

Balas^[30] 给出了如下性质:

命题 3.1 设 (M, h) 是 Hermite 流形, 则全纯截面曲率 $H = c$ 当且仅当

$$K_{i\bar{j}k\bar{l}} = \frac{1}{2}c(h_{i\bar{j}}h_{k\bar{l}} + h_{i\bar{l}}h_{k\bar{j}}). \quad (3.1)$$

证明 固定一点 $p \in M$, 设 $X = X^i \frac{\partial}{\partial z^i} \in T_p^{1,0}M$, 那么在 p 点, $H = c$ 当且仅当

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}}X^i\bar{X}^jX^k\bar{X}^l = c|X|^4.$$

通过简单的计算, 可推得

$$K_{i\bar{j}k\bar{l}}X^i\bar{X}^jX^k\bar{X}^l = c(h_{i\bar{j}}X^i\bar{X}^j)^2 = \frac{1}{2}c(h_{i\bar{j}}h_{k\bar{l}} + h_{i\bar{l}}h_{k\bar{j}})X^i\bar{X}^jX^k\bar{X}^l.$$

因此上式成立当且仅当 (3.1) 成立. $\square$

定理 1.1 的证明 考虑固定一点 $p \in M$ 即可. 当度量 g 是 Kähler-like 度量时, Chern 曲率张量满足 $R(X, \bar{Y}, Z, \bar{W}) = R(Z, \bar{Y}, X, \bar{W})$ 且

$$\overline{R(X, \bar{Y}, Z, \bar{W})} = R(Y, \bar{X}, W, \bar{Z}), \quad X, Y, Z, W \in T_p^{1,0}M.$$

所以,

$$R(X, \bar{Y}, Z, \bar{W}) = \overline{R(Y, \bar{X}, W, \bar{Z})} = \overline{R(W, \bar{X}, Y, \bar{Z})} = R(X, \bar{W}, Z, \bar{Y}).$$

运用命题 3.1, 可推得

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = K_{i\bar{j}k\bar{l}} = \frac{1}{2}c(g_{i\bar{j}}g_{k\bar{l}} + g_{i\bar{l}}g_{k\bar{j}}).$$

不妨在 p 点取酉 (unitary) 坐标, 即 $g_{i\bar{j}} = \delta_{ij}$, 则

$$\begin{aligned} R_{i\bar{j}} &= g^{k\bar{l}}R_{i\bar{j}k\bar{l}} = \sum_k R_{i\bar{j}k\bar{k}} \\ &= \frac{1}{2}c \sum_k (g_{i\bar{j}}g_{k\bar{k}} + g_{i\bar{k}}g_{k\bar{j}}) \\ &= \frac{1}{2}c \left(ng_{i\bar{j}} + \sum_k g_{i\bar{k}}g_{k\bar{j}} \right). \end{aligned}$$

当 $i = j$ 时, $R_{i\bar{i}} = \frac{1}{2}c(n+1)$; 当 $i \neq j$ 时, $R_{i\bar{j}k\bar{l}} = 0$. 又 $\omega = \sqrt{-1}g_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j$, 因此,

$$\frac{1}{2}c(n+1)\omega = \text{Ric}(\omega) = -\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log\omega^n.$$

因为度量和 Ricci 曲率都与坐标的选取无关, 所以, 当 $c \neq 0$ 时, ω 是闭的, 即 $d\omega = 0$. 当 $c = 0$ 时, $R_{i\bar{j}k\bar{l}} = 0$. $\square$

4 定理 1.3 和推论 1.1 的证明

1980 年, Royden^[11] 证明了一个重要的引理, 它给出了全纯截面曲率来控制双全纯截面曲率的一个求和公式. 本质上说, 在 Kähler-like 流形上 Royden 引理是成立的. 为了方便和需要, 我们给出它的证明.

引理 4.1^[11] 令 M^n 是 Kähler-like 流形, 若 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 为 $T_p^{1,0}M$ 中一组正交向量组, 如果全纯截面曲率 $H \leq k$, 那么

$$\sum_{i,j} R(\xi_i, \bar{\xi}_i, \xi_j, \bar{\xi}_j) \leq \frac{k}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2 \right)^2 + \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^4 \right].$$

特别地, 如果 $k \leq 0$, 那么

$$\sum_{i,j} R(\xi_i, \bar{\xi}_i, \xi_j, \bar{\xi}_j) \leq \frac{(n+1)k}{2n} \left[\left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2 \right)^2 \right].$$

证明 记 $P = \{1, -1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}\}$, 取 $\xi_A = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i$, 其中 $a_i \in P$, $A = (a_1, \dots, a_n)$, 那么

$$R(\xi_A, \bar{\xi}_A, \xi_A, \bar{\xi}_A) \leq k \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2 \right)^2.$$

因此,

$$\frac{1}{4^n} \sum_{A \in P^n} R(\xi_A, \bar{\xi}_A, \xi_A, \bar{\xi}_A) \leq k \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2 \right)^2.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4^n} \sum_{A \in P^n} R(\xi_A, \bar{\xi}_A, \xi_A, \bar{\xi}_A) \\ &= \frac{1}{4^n} \sum_{A \in P^n} \sum_{i,j,k,l=1}^n a_i \bar{a}_j a_k \bar{a}_l R(\xi_i, \bar{\xi}_j, \xi_k, \bar{\xi}_l) \\ &= \frac{1}{4^n} \sum_{i,j,k,l=1}^n \left(\sum_{A \in P^n} a_i \bar{a}_j a_k \bar{a}_l \right) R(\xi_i, \bar{\xi}_j, \xi_k, \bar{\xi}_l) \\ &= \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \bar{\xi}_i, \xi_i, \bar{\xi}_i) + \sum_{i \neq j} [R(\xi_i, \bar{\xi}_i, \xi_j, \bar{\xi}_j) + R(\xi_i, \bar{\xi}_j, \xi_j, \bar{\xi}_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \bar{\xi}_i, \xi_i, \bar{\xi}_i) + 2 \sum_{i \neq j} [R(\xi_i, \bar{\xi}_i, \xi_j, \bar{\xi}_j)]. \end{aligned}$$

进一步地,

$$2 \sum_{i \neq j} [R(\xi_i, \bar{\xi}_i, \xi_j, \bar{\xi}_j)] \leq k \left[\left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2 \right)^2 + \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^4 \right].$$

当 $k \leq 0$ 时, 利用

$$n \sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^4 \geq \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2 \right)^2,$$

可推得

$$\sum_{i,j} R(\xi_i, \bar{\xi}_i, \xi_j, \bar{\xi}_j) \leq \frac{(n+1)k}{2n} \left[\left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2 \right)^2 \right].$$

证毕. $\square$

定理 1.3 的证明 固定 $x \in M, y = f(x) \in N$. 在 x 点的邻域内选择局部坐标 $(z^i)_{1 \leq i \leq m}$, 在 y 点的邻域内选择局部坐标系 $(\omega^\alpha)_{1 \leq \alpha \leq n}$. 全纯映射 f 可记为 $(f^1, \dots, f^n)$, 其中全纯函数

$$f^\alpha = f^\alpha(z^1, \dots, z^m).$$

用 f_i^α 表示 $\frac{\partial f^\alpha}{\partial z^i}$. 为了方便计算, ω 的分量记为 $g_{i\bar{j}}$, ω_N 的分量记为 $h_{\alpha\bar{\beta}}$, 那么 $f^*\omega_N$ 的分量是 $f_i^\alpha \bar{f}_j^\beta h_{\alpha\bar{\beta}}$, 且 $\text{tr}_\omega(f^*\omega_N) = g^{i\bar{j}} f_i^\alpha \bar{f}_j^\beta h_{\alpha\bar{\beta}}$. 设 $u = \text{tr}_\omega(f^*\omega_N) > 0$, 运用文献 [18, 引理 4.1], 在点 x , 可得

$$\begin{aligned} \Delta_\omega u &= \text{tr}_\omega(\sqrt{-1})\partial\bar{\partial}u \\ &= |\nabla df|^2 + g^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}k\bar{l}}^g g^{k\bar{q}} g^{p\bar{l}} h_{\alpha\bar{\beta}} f_p^\alpha \bar{f}_q^\beta - R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}^h (g^{i\bar{j}} f_i^\alpha \bar{f}_j^\beta) (g^{p\bar{q}} f_p^\gamma \bar{f}_q^\delta), \end{aligned} \quad (4.1)$$

这里 $R_{i\bar{j}k\bar{l}}^g$ 是 ω 的曲率张量, $R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}^h$ 是 ω_N 的曲率张量. 运用文献 [18, 引理 4.2], 可推得

$$\Delta_\omega \log u \geq \frac{1}{u} [g^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}k\bar{l}}^g g^{k\bar{q}} g^{p\bar{l}} h_{\alpha\bar{\beta}} f_p^\alpha \bar{f}_q^\beta - R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}^h (g^{i\bar{j}} f_i^\alpha \bar{f}_j^\beta) (g^{p\bar{q}} f_p^\gamma \bar{f}_q^\delta)]. \quad (4.2)$$

进一步地, 运用 (1.3) 可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u &= \frac{d}{dt} (g^{i\bar{j}} f_i^\alpha \bar{f}_j^\beta h_{\alpha\bar{\beta}}) = \frac{d}{dt} (g^{i\bar{j}}) f_i^\alpha \bar{f}_j^\beta h_{\alpha\bar{\beta}} \\ &= -g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}} \frac{d}{dt} (g_{k\bar{l}}) f_i^\alpha \bar{f}_j^\beta h_{\alpha\bar{\beta}} = g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}} S_{k\bar{l}} f_i^\alpha \bar{f}_j^\beta h_{\alpha\bar{\beta}} \\ &= g^{i\bar{l}} g^{k\bar{j}} g^{t\bar{s}} R_{t\bar{s}k\bar{l}}^g f_i^\alpha \bar{f}_j^\beta h_{\alpha\bar{\beta}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

结合 (4.2) 和 (4.3), 获得

$$\left(\frac{d}{dt} - \Delta_\omega \right) \log u \leq \frac{1}{u} R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}^h (g^{i\bar{j}} f_i^\alpha \bar{f}_j^\beta) (g^{p\bar{q}} f_p^\gamma \bar{f}_q^\delta). \quad (4.4)$$

最后, 结合文献 [18, 定理 4.3] 的证明方法完成本定理的证明. 对 x 点和 $y = f(x)$ 点取酉坐标变换. 假设 $[f_i^\alpha]$ 有典范形式 $f_i^\alpha = \lambda_i \delta_i^\alpha$ 且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = 0$, 其中 r 是矩阵 $[f_i^\alpha]$ 的最大的秩, 那么

$$u = \text{tr}_\omega f^* \omega_N = \sum_i \lambda_i^2 = \sum_\alpha \lambda_\alpha^2. \quad (4.5)$$

因此,

$$R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}^h (g^{i\bar{j}} f_i^\alpha \bar{f}_j^\beta) (g^{p\bar{q}} f_p^\gamma \bar{f}_q^\delta) = \sum_{\alpha, \gamma} R_{\alpha\bar{\alpha}\gamma\bar{\gamma}}^h \lambda_\alpha^2 \lambda_\gamma^2. \quad (4.6)$$

运用引理 4.1, 以及 ω_N 的全纯截面曲率的上界 $-\kappa \leq 0$, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \gamma} R_{\alpha\bar{\alpha}\gamma\bar{\gamma}}^h \lambda_\alpha^2 \lambda_\gamma^2 &\leq -\kappa \frac{r+1}{2r} \left[\sum_\alpha |\lambda_\alpha|^2 \right]^2 \\ &= -\kappa \frac{r+1}{2r} u^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

运用 (4.4) 和 (4.7), 推得 (1.4) 成立. $\square$

推论 1.1 的证明 运用定理 1.3, 可得

$$\left(\frac{d}{dt} - \Delta_{\omega_t}\right) \log \operatorname{tr}_{\omega_t} \tilde{\omega} \leq -\kappa \frac{n+1}{2n} u \leq 0. \quad (4.8)$$

因为 X 是紧致流形, 通过极值原理可知, 存在常数 C 使得

$$\operatorname{tr}_{\omega_t}(\tilde{\omega}) \leq \max_X \operatorname{tr}_{\omega_0}(\tilde{\omega}) =: C, \quad (4.9)$$

因此, 对任意 $t \in [0, T)$, 有

$$\frac{1}{C} \tilde{\omega} \leq \omega_t. \quad (4.10)$$

证毕. $\square$

5 定理 1.5 的证明

对于 Kähler 流形情形, Yang^[21] 给出了一个重要的引理. 本质上该引理可以推广到 Kähler-like 流形的情形.

引理 5.1 假设 (X, ω) 是 Kähler-like 流形, q 是 X 上任意的点. 令 $e_1 \in T_q X$ 是一个单位向量, 并且在 q 点, ω 的全纯截面曲率 H 在 e_1 方向上取值最小, 那么

$$2R(e_1, \bar{e}_1, W, \bar{W}) \geq (1 + |\langle W, e_1 \rangle|^2) R(e_1, \bar{e}_1, e_1, \bar{e}_1),$$

其中 $W \in T_q X$ 是任意的单位向量.

证明 令 $e_2 \in T_q X$ 是与 e_1 正交的单位向量. 假设

$$f_1(\theta) = H(\cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

运用 Kähler-like 条件, 那么有如下展开式:

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= \cos^4(\theta) R_{1\bar{1}1\bar{1}} + \sin^4(\theta) R_{2\bar{2}2\bar{2}} \\ &\quad + 2\sin(\theta)\cos^3(\theta)[R_{1\bar{1}1\bar{2}} + R_{2\bar{1}1\bar{1}}] + 2\cos(\theta)\sin^3(\theta)[R_{1\bar{2}2\bar{2}} + R_{2\bar{1}2\bar{2}}] \\ &\quad + \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)[4R_{1\bar{1}2\bar{2}} + R_{1\bar{2}1\bar{2}} + R_{2\bar{1}2\bar{1}}]. \end{aligned}$$

因为 $f_1(\theta) \geq R_{1\bar{1}1\bar{1}}$, 对所有的 $\theta \in \mathbb{R}$ 成立, 并且 $f_1(0) = R_{1\bar{1}1\bar{1}}$, 所以有

$$f_1'(0) = 0, \quad f_1''(0) \geq 0.$$

通过直接计算, 得到

$$\begin{aligned} f_1'(0) &= 2(R_{1\bar{1}1\bar{2}} + R_{2\bar{1}1\bar{1}}) = 0, \\ f_1''(0) &= 2(4R_{1\bar{1}2\bar{2}} + R_{1\bar{2}1\bar{2}} + R_{2\bar{1}2\bar{1}}) - 4R_{1\bar{1}1\bar{1}} \geq 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

相似地, 如果令 $f_2(\theta) = H(\cos(\theta)e_1 + \sqrt{-1}\sin(\theta)e_2)$, 从 $f_2'(0) = 0$ 和 $f_2''(0) \geq 0$ 也可以得到

$$-R_{1\bar{1}1\bar{2}} + R_{2\bar{1}1\bar{1}} = 0, \quad 2(4R_{1\bar{1}2\bar{2}} - R_{1\bar{2}1\bar{2}} - R_{2\bar{1}2\bar{1}}) - 4R_{1\bar{1}1\bar{1}} \geq 0. \quad (5.2)$$

因此, 通过 (5.1) 和 (5.2), 可得

$$R_{1\bar{1}1\bar{2}} = R_{1\bar{1}2\bar{1}} = 0, \quad 2R_{1\bar{1}2\bar{2}} \geq R_{1\bar{1}1\bar{1}}. \quad (5.3)$$

对于任意的单位向量 $W \in T_q X$, 如果 W 和 e_1 平行, 即 $W = \lambda e_1$ 且 $|\lambda| = 1$, 则

$$2R(e_1, \bar{e}_1, W, \bar{W}) = 2R(e_1, \bar{e}_1, e_1, \bar{e}_1).$$

假设 W 和 e_1 不平行. 令 e_2 是一个单位向量,

$$e_2 = \frac{W - \langle W, e_1 \rangle e_1}{|W - \langle W, e_1 \rangle e_1|}. \quad (5.4)$$

那么 e_2 和 e_1 正交, 并且

$$W = ae_1 + be_2,$$

其中

$$a = \langle W, e_1 \rangle, \quad b = |W - \langle W, e_1 \rangle e_1| \quad \text{和} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

因此,

$$2R(e_1, \bar{e}_1, W, \bar{W}) = 2|a|^2 R_{1\bar{1}1\bar{1}} + 2|b|^2 R_{1\bar{1}2\bar{2}}.$$

上面等式运用了

$$R_{1\bar{1}1\bar{2}} = R_{1\bar{1}2\bar{1}} = 0.$$

又通过 (5.3), 可得

$$2R(e_1, \bar{e}_1, W, \bar{W}) \geq (2|a|^2 + |b|^2) R_{1\bar{1}1\bar{1}} = (1 + |a|^2) R_{1\bar{1}1\bar{1}}.$$

因此命题成立. □

定理 1.5 的证明 对于 $s \in H^0(X, \wedge^p T_X^*) \cong H_{\bar{\partial}}^{p,0}(X)$, 通过 Bochner 公式, 有

$$\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} |s|_g^2 = \langle \nabla s, \nabla s \rangle_g + R^E(\bullet, \bullet, s, \bar{s}), \quad (5.5)$$

其中

$$E = \wedge^p T_X.$$

假设 $|s|_g^2$ 在某个 p 点达到最大值. 令 $e_1 \in T_p X$ 是一个单位向量, 并且在 e_1 方向在该点的全纯截面曲率取值最小. 根据 (5.5) 和极值原理, 在 p 点, 有

$$R^E(e_1, \bar{e}_1, s, \bar{s}) \leq 0.$$

然而运用引理 5.1, 有

$$R(e_1, \bar{e}_1, \bullet, \bullet) \in \Gamma(X, \text{End}(T_X))$$

是正定的. 因此,

$$R^E(e_1, \bar{e}_1, \bullet, \bullet) \in \Gamma(X, \text{End}(\wedge^p T_X))$$

是正定的, 即

$$R^E(e_1, \bar{e}_1, s, \bar{s}) > 0,$$

这是一个矛盾, 因此 $s(p) = 0$. 所以 $s = 0$, 即

$$H_{\bar{\partial}}^{p,0}(X) = 0.$$

定理 1.5(2) 的证明与定理 1.5(1) 是类似的. □

致谢 作者对郑方阳教授给予的指导和帮助表示深深的感谢. 作者感谢审稿人对本文的建议和帮助.

参考文献

- 1 Yang B, Zheng F Y. On curvature tensors of Hermitian manifolds. *Comm Anal Geom*, 2018, 26: 1195–1222
- 2 Zhao Q T, Zheng F Y. Strominger connection and pluriclosed metrics. *arXiv:1904.06604*, 2019
- 3 Zhao Q T, Zheng F Y. Complex nilmanifolds and Kähler-like connections. *J Geom Phys*, 2019, 146: 103512
- 4 Yau S T, Zhao Q T, Zheng F Y. On Strominger Kähler-like manifolds with degenerate torsion. *arXiv:1908.05322*, 2019
- 5 Angella D, Otal A, Ugarte L, et al. On Gauduchon connections with Kähler-like curvature. *arXiv:1809.02632*, 2018
- 6 Zheng F Y. *Complex Differential Geometry*. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics. Providence: Amer Math Soc; Boston: International Press, 2000
- 7 Balas A, Gauduchon P. Any Hermitian metric of constant non-positive (Hermitian) holomorphic sectional curvature on a compact complex surface is Kähler. *Math Z*, 1985, 190: 39–43
- 8 Apostolov V, Davidov J, Muskarov O. Compact self-dual Hermitian surfaces. *Trans Amer Math Soc*, 1996, 348: 3051–3063
- 9 Chen H J, Chen L L, Nie X L. Chern-Ricci curvatures, holomorphic sectional curvature and Hermitian metrics. *Sci China Math*, 2021, 64: 763–780
- 10 Song J, Tian G. The Kähler-Ricci flow on surfaces of positive Kodaira dimension. *Invent Math*, 2007, 170: 609–653
- 11 Royden H L. The Ahlfors-Schwarz lemma in several complex variables. *Comment Math Helv*, 1980, 55: 547–558
- 12 Streets J, Tian G. Hermitian curvature flow. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2011, 13: 601–634
- 13 Kobayashi S. *Hyperbolic Complex Spaces*. New York: Springer, 1998
- 14 Yau S T. A general Schwarz lemma for Kähler manifolds. *Amer J Math*, 1978, 100: 197–203
- 15 Wu D, Yau S T. Negative holomorphic curvature and positive canonical bundle. *Invent Math*, 2016, 204: 595–604
- 16 Heier G, Lu S S Y, Wong B. Kähler manifolds of semi-negative holomorphic sectional curvature. *J Differential Geom*, 2016, 104: 419–441
- 17 Wu D, Yau S T. A remark on our paper “Negative holomorphic curvature and positive canonical bundle”. *Comm Anal Geom*, 2016, 24: 901–912
- 18 Yang X K, Zheng F Y. On real bisectional curvature for Hermitian manifolds. *Trans Amer Math Soc*, 2019, 371: 2703–2718
- 19 Lee M C, Streets J. Complex manifolds with negative curvature operator. *arXiv:1903.12645*, 2019
- 20 Yau S T. *Problem Section, Seminar on Differential Geometry*, vol. 102. Princeton: Princeton University Press, 1982
- 21 Yang X K. RC-positivity, rational connectedness and Yau’s conjecture. *Cambridge J Math*, 2018, 6: 183–212
- 22 Kollár J, Miyaoka, Mori S. Rationally connected varieties. *J Algebraic Geom*, 1992, 1: 429–448
- 23 Campana F, Demailly J P, Peternell T. Rationally connected manifolds and semipositivity of the Ricci curvature. In: *Recent Advances in Algebraic Geometry*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge: Cambridge University Press, 2013, 71–91
- 24 Ni L, Zheng F Y. Comparison and vanishing theorems for Kähler manifolds. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2018, 57: 151
- 25 Ni L, Zheng F Y. Positivity and Kodaira embedding theorem. *arXiv:1804.09696*, 2018
- 26 Yang X K. RC-positivity, vanishing theorems and rigidity of holomorphic maps. *J Inst Math Jussieu*, 2021, 20: 1023–1038
- 27 Yang X K. RC-positive metrics on rationally connected manifolds. *Forum Math Sigma*, 2020, 8: e53
- 28 Yang X K. RC-positivity and the generalized energy density I: Rigidity. *arXiv:1810.03276*, 2018
- 29 Boothby W M. Hermitian manifolds with zero curvature. *Michigan Math J*, 1958, 5: 229–233
- 30 Balas A. Compact Hermitian manifolds of constant holomorphic sectional curvature. *Math Z*, 1985, 189: 193–210

Holomorphic sectional curvature and Kähler-like metric

Kai Tang

Abstract This paper focuses on the Kähler-like manifolds with holomorphic sectional curvature condition. Firstly, we prove that Kähler-like manifold with non-zero constant holomorphic sectional curvature must be Kähler. Secondly, we prove the parabolic Schwarz lemmas on Hermite manifolds. Thirdly, we give several vanishing theorems on compact Kähler-like manifold with positive holomorphic sectional curvature.

Keywords holomorphic sectional curvature, Kähler-like metric, Hermite manifolds

MSC(2020) 53C24, 53C55

doi: 10.1360/SSM-2020-0038