调和映照及其推广

献给齐民友教授 90 华诞

Jürgen Jost¹, 李先清¹, 陈群^{2*}

1. Max-Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Leipzig 04103, Germany;

2. 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072

E-mail: jost@mis.mpg.de, xianqing.li-jost@mis.mpg.de, qunchen@whu.edu.cn

收稿日期: 2018-03-08; 接受日期: 2018-09-29; 网络出版日期: 2018-12-28; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11571259) 资助项目

摘要 本文概述了调和映照的各种推广, 包括 Hermite 调和映照、Weyl 调和映照、仿射调和映照、Finsler 流形的调和映照、度量空间之间的调和映照、Dirac- 调和映照等.

关键词 调和映照 Hermite 调和映照 Weyl 调和映照 仿射调和映照 Finsler 流形的调和映照 度量空间 Dirac- 调和映照

MSC (2010) 主题分类 58E20, 58J05, 53C43, 35J47

1 引言

齐民友先生是中国偏微分方程研究的一名先驱. 他最著名的工作是文献 [1], 在其中他处理了在初始线退化的一类双曲型方程. 这项工作为他赢得了国际声誉, 有多个国家的数学家对其工作进行了研究和推广.

在“文化大革命”之后, 当他能够回到学术工作之时, 他建立了武汉偏微分方程学派, 培养了一代数学家, 他们在偏微分方程问题的广阔领域作出了重要贡献. 我有机会与他们之中的几位以及他们的学生在几何分析的若干问题上进行了合作研究. 在这篇献给齐民友先生的文章里, 我们将把这些工作放到一个一般的框架下, 即 Riemann 流形间调和映照的推广、延伸和深化. 希望这个一般的观点对武汉和中国其他地方的新一代几何分析学者也是有用的和感兴趣的.

— Jürgen Jost

2 Riemann 流形间的调和映照

设 M 是 m 维 Riemann 流形. 以下将不作解释地使用 Riemann 几何的基本概念, 例如, TM 是 M 的切丛, $T_x M$ 是 M 在 $x \in M$ 点的切空间, 参见文献 [2].

英文引用格式: Jost J, Li-Jost X Q, Chen Q. Harmonic maps and their generalizations (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 125–138, doi: 10.1360/N012018-00052

在局部坐标下, M 的度量张量表示为

$$(\gamma_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,\dots,m}. \quad (2.1)$$

更确切地, Riemann 度量是对称 2- 张量:

$$\gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta. \quad (2.2)$$

但在大多数情形下, 我们只用它们的系数矩阵 (2.1) 来表示. 我们采用以下记号:

$$(\gamma^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,\dots,m} = (\gamma_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,\dots,m}^{-1} \quad (\text{逆矩阵张量}), \quad (2.3)$$

$$\gamma := \det(\gamma_{\alpha\beta}),$$

$$\Gamma_{\beta\eta}^\alpha := \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\delta} (\gamma_{\beta\delta,\eta} + \gamma_{\eta\delta,\beta} - \gamma_{\beta\eta,\delta}) \quad (M \text{ 的 Christoffel 符号}). \quad (2.4)$$

这些 Christoffel 符号定义了 M 上唯一的无挠、与 $\gamma_{\alpha\beta}$ 相容的联络. M 的体积形式在局部坐标下表示为 $\sqrt{\gamma} dx^1 \cdots dx^m$, 通常简记为 $d\text{vol}(x)$ 或 dM .

M 的 Laplace 算子为

$$\Delta_M := \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^i} \right). \quad (2.5)$$

注意此处我们使用的记号与文献 [2] 中的不同, 在那里 Δ_M 前面有一负号.

对函数 $u : M \rightarrow \mathbb{R}$, 我们有 Dirichlet 积分

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_M \gamma^{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u}{\partial x^\beta} \sqrt{\gamma} dx^1 \cdots dx^m. \quad (2.6)$$

本节不详细讨论正则性理论, 因此只考虑光滑函数 (后面是光滑映射). 但是需要指出, 第 4 节不处理光滑结构, 所以, Dirichlet 积分自然地定义在 Sobolev 空间 $H^{1,2}(M)$ 上.

E 的临界点是 M 上的调和函数, 即下列 Euler-Lagrange 方程的解:

$$\Delta_M u = 0. \quad (2.7)$$

关于变分法的相关内容参见文献 [3].

现在对此进行推广: 把目标流形 $\mathbb{R}$ 换成 n 维 Riemann 流形 N , 具有度量张量 g_{ij} . 类似于 (2.3) 和 (2.4), 定义 g^{ij} 和 Γ_{jk}^i .

设 $u : M \rightarrow N$ 是 C^1 映照, 定义其在 M 上局部坐标 $(x^1, \dots, x^m)$ 和 N 上局部坐标 $(u^1, \dots, u^n)$ 下的能量密度

$$e(u)(x) := \frac{1}{2} \|du\|^2 := \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta}(x) g_{ij}(u(x)) \frac{\partial u^i(x)}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^j(x)}{\partial x^\beta}. \quad (2.8)$$

C^1 -映照 $u : M \rightarrow N$ 的能量为

$$E(u) := \int_M e(u) dM. \quad (2.9)$$

这样, 能量积分是由 M 和 N 的 Riemann 度量来定义的. 当 $N = \mathbb{R}$ 时, 就约化到了 (2.6).

利用一个冗长但直接的计算, 我们可以推广 (2.7):

引理 2.1 E 的 Euler-Lagrange 方程是

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} u^i \right) + \gamma^{\alpha\beta}(x) \Gamma_{jk}^i(u(x)) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} u^j \frac{\partial}{\partial x^\beta} u^k = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

通常我们把上述方程写成

$$\tau(u) = 0, \quad (2.11)$$

且称 $\tau(u)$ 是 u 的张力场.

定义 2.1 方程 (2.10) (或等价地 (2.11)) 的解称为调和映照.

(2.10) 构成一个椭圆型方程组, 一般地, 它是非线性的, 通过 Christoffel 符号 $\Gamma_{jk}^i(u(x))$ 与 u 的一阶导数缩并项与 N 的几何相连, 以一阶导数的二次项出现在方程中.

如前面所说, 调和映照是调和函数的推广, 它也是测地线 $[a, b] \rightarrow N$ 的推广, 即出发流形 M 是区间 $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Laplace-Beltrami 算子 Δ_M 和它的推广张力场 τ 都涉及 M 的 Levi-Civita 联络, 后者还涉及 N 的 Levi-Civita 联络. 调和映照的概念最初由 Bochner^[4] 在 1940 年提出, 也可参见文献 [5]. 后来, 关于它的发展非常丰富, 这里无法做出完全的评述, 参见文献 [6] 的概述.

特别地, 变分方法可以应用到泛函 E . 值得指出的是, 对一些几何上的重要情形, 虽然具有无限作用泛函, 但我们可以证明解的存在性, 参见文献 [7–9]. 另一个途径是运用抛物方法, 即研究相应的流

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \tau(u), \quad (2.12)$$

其中 u 是映照 $M \times [0, \infty) \rightarrow N$. 当然, 需要证明对所有 $t \in [0, \infty)$ 解的存在性以及当 $t \rightarrow \infty$ 时的收敛性. 这并不总是成立的, 但是, 当目标流形 N 具有非正曲率时是成立的.

关于这个问题的研究太广泛, 这里不能恰当地评述. 同样地, 关于 (2.11) 的正则性理论发展完备, 但也不能在这里评述. 然而值得指出的是, 我们甚至可以对于方程 (2.11) 的右端是给定的非零向量场的某些情形发展相应的正则性理论 (参见文献 [10–13]). 在接下来的第 3 节, 我们将讨论各种延拓, 它们都可以看成方程 (2.11) 带有非平凡的右端项.

下面将讨论当 M 和/或 N 配备非 Riemann 流形的结构时, 情况将发生怎样的变化.

3 其他结构

我们讨论所涉及的流形 M 和 N 可以带有除 Riemann 流形之外的结构. 更确切地, 它们可以配备除了 Riemann 流形 Levi-Civita 联络之外的其他联络, 而这些联络是从非 Riemann 结构所诱导出来的, 如 Hermite 联络、仿射流形联络或 Weyl 流形联络. 研究表明, 对这些联络可以发展相应的调和映照理论.

我们先来给出这些方程的一般结构. 设 V 是 TM 的截面, T 是 $\otimes^{1,2}TN$ 的截面, 后面我们将看到, 对上面提到的一些结构, 这些量具体是什么. 称 $u: M \rightarrow N$ 是一个 VT -调和映照, 如果 u 满足

$$\tau(u) + du(V) + \text{Tr}_g T(du, du) = 0. \quad (3.1)$$

因此, 相比较于 (2.11), 我们有了两个额外的项, 一个是涉及出发流形 M 上的结构 V ; 另一个项是涉及目标流形 N 上结构 T 和 u 的一阶导数二次项. 这样, (2.11) 的一般结构仍然是保持的. 但应当指出, 一般情形下, 这些方程不再能够从某个变分原理所导出, 也就是说, 没有相应的能量泛函 E 使得其 Euler-Lagrange 方程是 (3.1). 这使得 (3.1) 的分析要比 (2.11) 困难得多. 我们需要用基于最大值原理和/或热流的方法去替代变分方法. 因为最大值原理仅仅适用于函数而不适用于映照, 人们需要

将 (3.1) 的解 u 与一个适当的函数 $F: u(M) \subset N \rightarrow \mathbb{R}$ 进行复合, 如 Jäger 和 Kaul 的开创性工作 [14]. 沿着这一方向, 关于 (3.1) 的分析是从 Chen 等¹⁾ 开始的.

在 $T \equiv 0$ 的情形, 即目标流形是 Riemann 流形, 而出发流形 M 带有 (与 Riemann 流形) 不同的结构时, 我们能够知道的则更多. 此时称之为 V -调和映照. 这些映照是下列方程的解:

$$\tau(u) + du(V) = 0. \quad (3.2)$$

关于它的一般数学理论在文献 [15–17] 中已经发展出来了. 有几个重要的特殊情形, 我们现在将主要依照文献 [15] 来进行详细描述.

3.1 Hermite 调和映照

设 M 是复流形, 带有 Hermite 度量 $\gamma = \gamma_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha d\bar{z}^\beta$, 作为复流形. M 带有自然的复联络, 这是我们将要利用的联络. 这个 Hermite 联络与 Levi-Civita 联络不同, 除非该 Hermite 度量是 Kähler 度量. 我们将看到, 这两个联络之间的差可以表示为 M 上的一个向量场 V . 跟前面一样, N 是带有度量 g 的 Riemann 流形. 对应的 Hermite 调和映照在文献 [18] 中被引入, 它们满足如下方程:

$$\gamma^{\alpha\bar{\beta}} \left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial u^j}{\partial z^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{z}^\beta} \right) = 0. \quad (3.3)$$

当 (M, γ) 是 Kähler 流形时, 从 M 出发的 Hermite 调和映照恰好是通常的调和映照, 即是方程 (2.11) 的一个解, 因为在这种情形, 算子 $\gamma^{\alpha\bar{\beta}} \frac{\partial^2 u^i}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}$ 是 Laplace-Beltrami 算子 (2.7). 现在来讨论一般的情形.

设 J 是 M 上的概复结构, e_A ($A = 1, \dots, m, m+1, \dots, 2m$) 是 M 上的局部幺正标架场, 使得 $e_{n+\alpha} = J e_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, m$. 设 ∇ 是 Levi-Civita 联络. 考虑 TM 的复化切丛 $TM \otimes \mathbb{C}$, 设它的一组基底是 $\{E_\alpha, E_{\bar{\alpha}}\}$, 且 $E_\alpha = \frac{1}{2}(e_\alpha + \sqrt{-1}e_{m+\alpha})$, $E_{\bar{\alpha}} = \frac{1}{2}(e_\alpha - \sqrt{-1}e_{m+\alpha})$. 选取一个与全纯结构相容的无挠联络 $\tilde{\nabla}$. 设 Δ_M 是关于 γ 的 Laplace 算子, 且

$$\tilde{\Delta} = \gamma^{\alpha\bar{\beta}} \frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}.$$

那么, 由于两个联络的差是一个张量, 我们有 (参见文献 [19])

$$(\tilde{\Delta} - \Delta)f = (\tilde{\nabla}_{e_A} e_A - \nabla_{e_A} e_A)f = \langle V, \nabla f \rangle,$$

且向量场

$$V = \tilde{\nabla}_{e_A} e_A - \nabla_{e_A} e_A \quad (3.4)$$

由 J 的一阶导数构成. 这样, (3.3) 就成为

$$\tau(u) + du(V) = 0, \quad (3.5)$$

就是说, 它是 (3.2) 的一种形式. 特别地, 当 M 是 Kähler 流形时, $V = 0$, 因为此时这两个联络重合. 当 M 和 N 都是 Kähler 流形时, 全纯映照必是调和的, 但如果 M 不是 Kähler 流形时, 结论不一定再成立. 然而, 全纯映照一定是 Hermite 调和的. 虽然反过来的结论不一定成立 (全纯映照是一阶偏微分方程组的解, 它比作为二阶方程组 (3.3) 解的 Hermite 调和映照受到的限制条件更多), 正如在复几何

1) Chen Q, Jost J, Qiu H B. On VT-harmonic maps. Technical Report, 2017.

中人们通常对全纯映照感兴趣一样, 研究 Hermite 调和映照是一个非常自然的课题. 这正是文献 [18] 引进 Hermite 调和映照的原因. 该文献发展了关于 Hermite 调和映照的分析理论, 在某个必要的拓扑非平凡条件下, 得到了当目标流形是非正截面曲率时解的存在性. 进一步的结果被文献 [15, 19–23] 等得到. 关于在 Hermite 几何中的刚性理论方面的应用, 参见文献 [18].

3.2 Weyl 调和映照

接下来的例子是 Weyl 调和映照, 由 Kokarev^[24] 引进.

设 (M, c) 是一个共形流形, 这里 c 是共形类, 即形如 $e^\lambda \gamma$ 的一类度量, 其中 γ 是某个固定的 Riemann 度量, λ 是任意函数 (满足一定的光滑性要求, 在此不必具体给出). (M, c) 上的一个 Weyl 结构是指一个无挠联络 ∇^W , 它保持共形结构 c , 即存在 1-形式 Θ 使得对任意 $\gamma \in c$ 成立 $\nabla^W \gamma = \Theta \otimes \gamma$. 更精确地, ∇^W 的定义是

$$\nabla_X^W Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2} \Theta(X) Y - \frac{1}{2} \Theta(Y) X + \frac{1}{2} \gamma(X, Y) \Theta^\sharp, \quad \forall X, Y \in TM,$$

其中 ∇ 是 Levi-Civita 联络, $\Theta^\sharp$ 是关于 γ 与 Θ 对偶的向量场. 重要的是, 2-形式 $d\Theta$ 不依赖于 $\gamma \in c$, 而仅仅依赖于共形类 c . Weyl 结构称为闭的 (或正合的), 如果 Θ 是闭的 (或正合的).

如前所述, 设 (N, g) 是 Riemann 流形, $u: M \rightarrow N$ 是光滑映照. 联络 ∇^W 和 N 的 Levi-Civita 联络定义了丛 $T^*M \otimes u^{-1}TN$ 上的联络 $\tilde{\nabla}$. 在此之下, 我们又可以定义 u 的第二基本形式

$$Ddu(X, Y) = \tilde{\nabla}_X(du)Y := du(\nabla_X^W Y) - \nabla_{du(X)}^g du(Y). \quad (3.6)$$

称 $u: M \rightarrow N$ 为 Weyl 调和映照, 如果 u 的第二基本形式的迹为 0, 即

$$\tau^W(u) := \text{tr}_g Ddu = 0. \quad (3.7)$$

直接计算可以验证 (3.7) 等价于

$$\tau^W(u) = \tau(u) - \frac{n-2}{2} du(\Theta^\sharp) = 0. \quad (3.8)$$

因此, 如果 M 是二维的, 那么 (3.8) 恰为调和映照方程. 一般地, Weyl 调和映照是 V -调和映照, 而 $V = -\frac{n-2}{2} \Theta^\sharp$. 文献 [24] 运用文献 [18] 中的方法得到了映到非正曲率流形中的 Weyl 调和映照的存在性. 关于这一结果在 Weyl 几何刚性中的应用参见文献 [24, 25]. 进一步的分析结果参见文献 [15].

3.3 仿射调和映照

仿射流形是指一个光滑流形 M^m 被一个坐标图册所覆盖, 该坐标图册的坐标卡之间的变换是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^m$ 中的 Euclid 仿射变换.

在这种流形 M 上有自然的整体平坦和无挠的联络 ∇ . 设 M 是 m 维仿射流形, (N, g) 是 n 维 Riemann 流形. 分别在 M 和 N 上选取局部坐标系 $\{x^\alpha\}_{\alpha=1, \dots, m}$ 和 $\{y^i\}_{i=1, \dots, n}$. 设 $u: M \rightarrow N$ 为 C^2 映照. 那么, M 上的平坦联络 ∇ 和 N 上的 Levi-Civita 联络诱导了丛 $T^*M \otimes u^{-1}TN$ 上的联络, 然后又如前述, 诱导了 u 的第二基本形式 Ddu , 见 (3.6).

给定 M 上的度量 $\gamma = (\gamma_{\alpha\beta})$, 我们可以定义如下的二阶椭圆型方程组:

$$\sigma(u) \equiv \text{Tr}_\gamma Ddu = 0. \quad (3.9)$$

称 (3.9) 的解为仿射调和映照. 这类映照在文献 [26, 27] 中被引入, 其中证明了从紧致仿射流形 M 到另一个非正曲率 Riemann 流形 N 给定映照同伦类中仿射调和映照的存在性, 这里还是假定拓扑非平凡条件.

在局部坐标下, (3.9) 可写成

$$\gamma^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \Gamma_{jk}^i(u) \frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial x^\beta} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.10)$$

重要的是, (3.10) 在仿射变换下是不变的, 因此, (3.9) 在仿射流形上是良好定义的.

再一次地, (3.10) 与调和映照方程组 (2.10) 相差一个由 V 给出的一阶导数项. 因为 (M, γ) 是 Riemann 流形, 从 (3.10), 我们有如下定义的映照 u 的通常的张力场 $\tau(u)$:

$$\tau^i(u) \equiv \gamma^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\delta \frac{\partial u^i}{\partial x^\delta} + \Gamma_{jk}^i(u) \frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial x^\beta} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.11)$$

其中 $\Gamma_{\alpha\beta}^\delta$ 和 Γ_{jk}^i 分别是 (M, γ) 和 (N, g) 的 Levi-Civita 联络的 Christoffel 符号. 利用 M 上的向量场

$$V := \Gamma_{\alpha\beta}^\delta \gamma^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\delta},$$

(3.9) 可以写成

$$\tau(u) + du(V) = 0. \quad (3.12)$$

因此, 仿射调和映照是 V -调和映照. 关于其进一步的分析结果参见文献 [15]. 仿射调和映照在信息几何中自然地出现, 参见文献 [28].

3.4 Finsler 调和映照

现在来看最后一个例子. 从 Finsler 流形到 Riemann 流形的调和映照在文献 [29, 30] 中被引入. 因为 Finsler 流形上体积形式的不同选取, 这两个定义有细微的差别.

这里采用文献 [30] 中的定义. 设 M 是 m 维流形, 局部坐标为 $\{x^\alpha\}_{\alpha=1, \dots, m}$, (N, g) 是 n 维 Riemann 流形, 局部坐标为 $\{z^i\}_{i=1, \dots, n}$. 在 M 的切丛 TM 上, 我们也选取局部坐标 $\{(x^\alpha, y^\alpha)\}_{\alpha=1, 2, \dots, m}$, 即把向量场写成 $Y = y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$.

M 上的 Finsler 结构是一个函数 $F : TM \rightarrow [0, +\infty)$, 满足 $F \in C^\infty(TM \setminus 0)$ 和 $F(x, ty) = tF(x, y)$, $\forall t > 0, \forall (x, y) \in TM$. 记 $\gamma_{\alpha\beta}(x, y) := \frac{1}{2}(F^2)_{y^\alpha y^\beta}$ 为基本张量. 映照 $u : (M, F) \rightarrow (N, g)$ 的能量密度定义为 $e(u) : SM \rightarrow [0, +\infty)$:

$$e(u)(x, [y]) := \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta}(x, y) g_{ij}(u) \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial x^\beta},$$

u 的能量泛函定义为

$$E(u) := \frac{1}{\text{vol}(S^{m-1})} \int_{SM} e(u) d\text{vol}_{SM},$$

其中 $\text{vol}(S^{m-1})$ 是标准球面 S^{m-1} 的体积, 而球丛 $SM := \{(x, [y]) := (x, ty) \mid t > 0, (x, y) \in TM \setminus 0\}$ 上的体积形式 $d\text{vol}_{SM}$ 由 $TM \setminus 0$ 上的 Sasaki 度量所诱导.

选取 Riemann 向量丛 (π^*TM, γ) 的局部么正标架 $\{e_\alpha\}_{\alpha=1, 2, \dots, m}$ 及其对偶标架 $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1, 2, \dots, m}$ 使得 $\omega_m = \omega$. 若记 $\omega_\alpha = v_{\alpha\beta} dx^\beta$, 则 $\det(v_{\alpha\beta}) = \sqrt{\det(\gamma_{\alpha\beta})}$. 对 ω_α 求外微分得到 Chern 联络形式 $\{\omega_{\alpha\beta}\}$, 由此给出体积形式:

$$d\text{vol}_{SM} := \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m \wedge \omega_{m1} \wedge \cdots \wedge \omega_{m,m-1}.$$

设

$$\Omega := \omega_{m1} \wedge \cdots \wedge \omega_{m,m-1} \bmod dx^\alpha, \quad dx := dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m,$$

我们可以把能量泛函写为

$$E(u) = \frac{1}{\text{vol}(S^{m-1})} \int_M dx \int_{S_x M} e(u) \sqrt{\det(\gamma_{\alpha\beta})} \Omega.$$

利用

$$S^{\alpha\beta}(x) := \frac{\int_{S_x M} \gamma^{\alpha\beta}(x, y) \sqrt{\det(\gamma_{\eta\xi}(x, y))} \Omega}{\text{vol}(S^{m-1}) \sigma(x)},$$

其中 $\sigma(x) := \int_{S_x M} \sqrt{\det(\gamma_{\eta\xi}(x, y))} \Omega$, 那么 (参见文献 [29, 31])

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_M S^{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial x^\beta} h_{ij}(u(x)) \sigma(x) dx.$$

将 u 看成从 Riemann 流形 $(M, (S_{\alpha\beta}))$ 到 (N, g) 的映照, 其中 $(S_{\alpha\beta}) := (S^{\alpha\beta})^{-1}$, 那么其能量密度是 $\tilde{e}(u) := \frac{1}{2} S^{\alpha\beta}(x) g_{ij}(u) \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial x^\beta}$. 设 $d\text{vol}_S := \sqrt{\det(S_{\alpha\beta})} dx$, $f := \ln \frac{\sigma}{\sqrt{\det(S_{\alpha\beta})}}$, 那么能量泛函可以重新写为

$$E(u) = \int_M \tilde{e}(u) e^f d\text{vol}_S,$$

这意味着调和映照 $u : (M, F) \rightarrow (N, g)$ 是 f -调和映照. 这样, u 必须满足

$$\tau(u) + du(V) = 0,$$

$V := \nabla f$. 所以, u 是一个从 $(M, (S_{\alpha\beta}))$ 到 (N, g) 的 V -调和映照. 跟前面例子不同的是, 这里是有变分结构的. 相关的分析结果参见文献 [15, 31, 32].

4 更少结构

本节将讨论度量空间之间的调和映照. 这一理论由 Jost [33–36] 发展出来, Korevaar 和 Schoen [37] 独立地发展了更弱一般性的形式.

Riemann 流形自然是度量空间的特殊情形, 但后者的结构要一般得多. 这意味着, 对这一理论, 我们可用的结构要比 Riemann 几何中少得多.

在度量空间中的调和网络中, 人们可以发展一个系统的变分理论, 参见文献 [38]. 此处, 区域是一个图, 即一维的. 我们将讨论如何在高维区域情形能够发展出系统的变分理论. 为了描述这些以及给出理论的动机, 我们再回到函数 $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ 的 Dirichlet 积分 (2.6):

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_M \|du(x)\|^2 dM. \quad (4.1)$$

这里, 我们将把它看成 $L^2(M)$ 泛函 (而非像第 2 节中的 $H^{1,2}(M)$ 泛函):

$$E : L^2(M) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}. \quad (4.2)$$

它是 (严格) 凸的:

$$E(sv + (1-s)u) \leq sE(v) + (1-s)E(u), \quad (4.3)$$

除非 $u = v$ (或者是无限值), 不等式是严格的. 这可以从下列等式导出:

$$\int \|d((1-s)u + sv)\|^2 = s \int \|dv\|^2 + (1-s) \int \|du\|^2 - s(1-s) \int \|d(u-v)\|^2. \quad (4.4)$$

然而, 在一般的度量空间上没有像 (4.1) 中函数 u 的微分的概念. 但我们可以用差商来逼近微分, 而后者可以用度量来定义. 更一般地, 我们能利用距离函数所定义的泛函来逼近能量泛函 (2.9). 因此, 考虑取值于带有距离函数 $d(\cdot, \cdot)$ 的度量空间 N 的泛函:

$$E_\epsilon(u) = \frac{1}{c_\epsilon} \int_M \int_{B(x, \epsilon)} d^2(u(x), u(y)) \, d\text{vol}(y) \, d\text{vol}(x), \quad (4.5)$$

其中 $B(x, \epsilon)$ 是区域 M 中以 x 为中心、以 ϵ 为半径的球 (此处, 为了定义半径, 假设区域 M 也是度量空间, 但读者将看到, 这不是本质的, 我们可以通过在其他类型的区域上的积分来定义这些泛函). c_ϵ 是一个适当选取的规格化的常数, 使得在光滑情形, 有

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon(u) = E(u). \quad (4.6)$$

这样就可以改变缺少微分结构的局面, 而对于取值在度量空间 N 的映照来定义能量泛函:

$$E := \Gamma\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon, \quad (4.7)$$

这里已经取了所谓 de Giorgi 意义下的 Γ -极限, 因为这种极限具有一些方便的性质 (参见文献 [3]). 特别地, 当逼近泛函具有这个性质时, 它是凸的且下半连续的 (实际上在这里逼近泛函 E_ϵ 甚至是连续的). 对一个逼近泛函极小化子的收敛序列 u_ϵ , 其极限必是极限泛函的极小化子. 这也是 de Giorgi Γ -收敛性的一个漂亮的性质. 然而, 为了得到有用的理论, 有必要对目标流形作一些限制. 事实说明, 对非正曲率作适当的推广可以得到相当满意的理论. Riemann^[39] 最先利用度量张量 (2.2) 的系数 (2.1) 的二阶和一阶导数来定义度量的曲率. 这一概念似乎只限于 Riemann 流形. 但事实上, 虽然曲率张量本身仅仅能够对 Riemann 流形或类似流形 (如第 3 节中的 Hermite 流形或仿射流形) 来定义, 但曲率不等式却具有更一般的几何意义. 这里, 我们不准备回顾关于曲率不等式概念推广的丰富而又有趣的历史, 只打算对某些内容作一个初步的介绍, 这些内容对我们的理论而言是重要的. 这些内容是 Alexandrov^[40] (也可参见文献 [41]) 和 Busemann^[42] 的相关理论. 他们利用距离函数的凸性来表示曲率不等式, 且对 Riemann 流形来说恰好就是截面曲率不等式. 为了给出这些定义, 需要假设所考虑的度量空间是测地空间, 即其中任意两点都能够由最短曲线所连接, 所谓的最短曲线 (也叫测地线) 是这样的曲线, 其长度正好是端点之间的距离. 当这种测地线由弧长参数化时 (总可以这样假设), 我们称之为弧长参数测地线. 更一般的不需要这种性质的概念最近在文献 [43] 中出现, 但对本文而言, 我们只限于测地空间, 而且我们仅仅描述非正曲率条件. 更一般的不等式, 即曲率 $\leq K$ (K 是常数) 能够通过改变适当的符号来类似地处理, 而对曲率 $\geq K$ 也有类似的定义. 于是, 假设 N 具有距离函数 d . Alexandrov 关于非正曲率的定义需要 (局部地) 假设对弧长参数测地线 $\gamma : [0, 1] \rightarrow N$, $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$, 以及另外一点 r , 有

$$d^2(\gamma(s), r) \leq s d^2(q, r) + (1-s) d^2(p, r) - s(1-s) d^2(p, q). \quad (4.8)$$

Busemann 则是假定对弧长测地线 $c_1, c_2: [0, 1] \rightarrow N$, $c_1(0) = c_2(0) = r$, $c_1(1) = p$, $c_2(1) = q$, 成立

$$d(c_1(s), c_2(s)) \leq sd(p, q). \quad (4.9)$$

Busemann 的条件比 Alexandrov 的条件更为一般. 这里假设 N 是单连通的. 在调和映照的问题中, 通常不这样假设, 而是提升到万有覆盖空间, 并把 (如紧致) 流形之间给定同伦类中的映照看作万有覆盖空间之间关于覆盖变换群等变的映照, 参见文献 [44]. 我们不再进一步讨论这个技术细节, 在本节的剩余部分只简单地假设目标流形是单连通的, 且在 Alexandrov 或者 Busemann 意义下具有非正曲率. Reshetnyak^[45] 系统地研究了度量的曲率条件与凸性之间的关系, 也可参见文献 [36]. 一类重要的非流形的非正曲率空间是 Euclid Bruhat-Tits 建筑. 这是度量树的某种高维类似, 其重要性在于它们是定义在 p - 进制数域 $\mathbb{Q}_p$ 上的线性代数群的齐性空间. 实际上, 一般理论的一个动机出自文献 [46], 其中发展了从 Riemann 流形到这种建筑的调和映照理论并给出了在刚性问题中的应用. 在文献 [34, 36] 中被系统地应用的一个原理是, 当目标流形是非正曲率 (non-positive curvature, NPC) 空间时, 泛函 E_ϵ 是严格凸的, 因为积分的线性运算并不影响距离函数的凸性. 实际上, 在 L^2 - 度量

$$d_{L^2}^2(u, v) := \int_M d^2(u(x), v(x)) dM \quad (4.10)$$

下, 空间 $L^2(M, N)$ 本身就是 NPC 的. 于是, (4.4) 描述的 Dirichlet 积分机制在更广泛的范围内仍然适用: 距离的平方替代导数的平方, 一般 NPC 空间替代实直线 $\mathbb{R}$. 这样, 取值于 NPC 空间调和映照, 即 (4.7) 定义的泛函 E 的极小化子的存在性问题, 就转化为寻找 NPC 空间 Y 上的凸下半连续泛函 $F: Y \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ 的极小化子. 而这可以从一般凸性论证中得出 (参见文献 [34, 36]).

关于取值于 NPC 空间的 (广义) 调和映照的正则性理论也类似地运用 NPC 空间的凸性性质. Gromov-Schoen^[46] 详细地发展了取值于 Euclid Bruhat-Tits 建筑的调和映照的正则性理论. Jost^[33] 证明了从 Riemann 流形到一般 NPC 空间调和映照的一个 Lipschitz 界. 另一个证明在文献 [35] 中给出. 这些证明依赖于这样的事实: 区域是 Riemann 流形, Ricci 曲率有下界. 因为我们正在处理比 Riemann 流形更一般的目标流形, 考虑更一般的区域也就很自然了. 这样一种方法甚至在光滑空间的情形也能够确定正则性理论中的关键成分和假设. 这种正则性理论确实是可能的并具有系统性的好处. 它依赖于 Moser 的 Harnack 不等式的抽象版本 (参见文献 [47]). 运用公理方法到椭圆正则性理论, Biroli 和 Mosco^[48]、Grigor'yan^[49]、Saloff-Coste^[50] 和其他人证明, 对于满足体积双倍性质 (即对于小于某个 R_0 的所有的 R 一致地有: 半径为 $2R$ 的球的体积能被半径为 R 的同心球的体积所控制) 的空间上的椭圆算子, Harnack 不等式能够成立, 而且 Poincaré 也是成立的. Jost^[51] 和 Lin^[52] 利用这个 Harnack 不等式证明了这种区域到 NPC 空间调和映照的 Hölder 连续性. 与次椭圆算子之间的联系在文献 [53] 中建立. 在最近的一项重要工作中, Zhang 和 Zhu^[54] 甚至能够证明这些映照的 Lipschitz 连续性.

5 更多结构

最后, 我们来看从另外一个很不同的方向对调和映照理论的延拓. 这一方向源于超对称量子场论, 更确切地说是源于超对称非线性 sigma 模型, 这是量子场论中最基本和重要的模型之一. 对它的数学介绍参见文献 [55–57]. 这些模型由于其所具有的对称性和不变性而特别重要. 对称性之一是共形不变性, 它只在区域是二维, 即 Riemann 曲面的情形成立. 另一种对称性是超对称, 它需要在调和映照之外, 还有一个场, 即沿着映照的非线性旋量场. 还要求这个旋量场是反交换的, 这需要在第 2 节及之后

所使用的标准坐标函数之外, 引入额外的反交换的所谓奇变量. 超对称非线性 sigma 模型的泛函在文献 [58, 59] 中被系统地数学观点研究. 这把我们带入超几何这一领域, 它具有诸多从通常微分几何的观点来看显得奇怪的特征. 特别地, 对反交换变量不能建立不等式, 从而偏微分方程的标准工具和估计不再有用. 然而, 我们仅用通常的交换变量场能发展出这一理论的数学版本—Dirac- 调和映照 (参见文献 [60, 61]). 它已经成为变分法和几何分析领域中的一个很活跃的研究方向, 其中有很多具有挑战性的困难, 使得研究者发展了一些新的有力工具, 它们在几何分析其他的问题中也相当有用. 现在来描述这一理论.

设 (M, γ) 是闭的定向二维 Riemann 流形 (即 Riemann 曲面), 假设 M 配备了自旋结构, (N, g) 是 Riemann 流形. 我们将研究定义在下面空间上的超泛函 A :

$$\mathcal{X}(M, N) = \{(u, \psi) \mid u : M \rightarrow N, \psi \in \Gamma(S \otimes u^*TN)\}, \quad (5.1)$$

其中 $\Gamma(S \otimes u^*TN)$ 是从 $S \otimes u^*TN$ 的截面空间. 关于旋量丛和旋量场参见文献 [2]. 此处我们使用的是 Clifford 代数 $Cl_{0,2}$, 如文献 [62] 中所说明.

作用泛函是

$$A(u, \psi; g, \chi) := \int_M (\|du\|^2 + \langle \psi, \not{D}\psi \rangle_{S \otimes u^*TN}) dM, \quad (5.2)$$

其中 $\not{D}$ 是从 $S \otimes u^*TN$ 上的扭合 Dirac 算子. 在 N 的局部坐标 y^j 和 M 上局部么正标架 e_α 之下, 它的表达式为

$$\not{D} = \not{\partial} \psi^j \otimes u^* \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right) + e_\alpha \cdot \psi^j \otimes u^* \left(\nabla_{u_* e_\alpha}^{TN} \frac{\partial}{\partial y^j} \right), \quad (5.3)$$

其中 $\not{\partial}$ 是通常的 Dirac 算子 (参见文献 [2]). 特别地, $\not{D}$ 不仅依赖于区域 M 的自旋几何, 还依赖于映照 u . 这导致 u 和 ψ 这两个场在 (5.2) 中的耦合. 因此, (5.2) 的 Euler-Lagrange 方程是耦合方程组:

$$\tau(u) = \frac{1}{2} R^{u^*TN}(\psi, e_\alpha \cdot \psi) u_* e_\alpha, \quad (5.4)$$

$$\not{D}\psi = 0, \quad (5.5)$$

其中 R 是 N 的曲率张量, $\tau(u)$ 是 u 的张力场 (2.11), $\not{D}$ 是扭合 Dirac 算子 (5.3). 方程 (5.4) 和 (5.5) 的解称为 Dirac- 调和映照. 这些方程在文献 [60] 中被推导出来, 关于这些方程解的正则性理论在文献 [61] 中开始建立起来. 这一模型进一步的侧面和延伸²⁾ 可参见文献 [63–69] 和 [70–75] 等. 在正则性理论中, Rivière^[76] 的方法被证明是非常有效的.

存在性理论的困难在于, 跟能量 (2.9) 不同, 作用泛函 (5.2) 是无下界的, 无界性源于 $\langle \psi, \not{D}\psi \rangle$ 这一项, 实际上归根结底是由于 Dirac 算子 $\not{\partial}$ 的谱是无下界的, 这一点跟 Laplace 算子 (2.5) 完全不同. 因此, 变分方法不能用于存在性问题. 第 3 节已经遇到了同样的问题. 正如在那里所指出的, 变分方法的一个替代者是热流方法. 然而, 在目前的情形还有一个额外的困难就是, 作为一阶微分算子, Dirac 算子没有一个自然的抛物版本, 这又跟 Laplace 算子很不相同. 因此, 文献 [77] 引入了一个新的椭圆- 抛物组. 其想法是把二阶椭圆方程组 (5.4) 换成抛物组, 而保持一阶椭圆组 (5.5) 作为附加限制. 这样, 我们研究了以下方程组:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \tau(u) - \frac{1}{2} R^{u^*TN}(\psi, e_\alpha \cdot \psi) u_* e_\alpha, \quad (5.6)$$

$$\not{D}\psi = 0 \quad (5.7)$$

2) Chen Q, Jost J, Wang G F. The supersymmetric non-linear σ -model. 2008.

满足适当的初始条件, 并且当出发流形带边界时满足适当的边界条件, 参见文献 [77]. 关于解的短时间、长时间存在性、正则性和渐近性态在文献 [78–81] 被进一步研究. 实际上, 原始的超对称作用泛函仍然有丰富的结构并涉及更多的场, 特别地, 有区域度量的超对应—引力微子, 参见文献 [55–59]. 最近, 文献 [62] 构造和研究了该模型仅使用交换变量的一个版本, 它类似于 Dirac-调和映照的作用泛函 (5.2), 并有所推广. 关于这个模型的进一步结果参见文献 [82–84]. 作者认为这是一个好的研究方向, 有很多困难和具有挑战性的分析问题, 涉及解的存在性和正则性, 具有深入的几何应用的潜力, 可能不像 Seiberg-Witten 方程 (参见文献 [85, 86], 关于分析方面参见文献 [2, 87]) 或给出 Gromov-Witten 不变量的全纯曲线 (参见文献 [88, 89]).

将量子场论的超对称作用原理转换为仅使用交换场的数学版本这一方法也适用于其他的情形, 如超 Liouville 作用, 并产生了丰富的数学理论, 参见文献 [90–95].

参考文献

- 1 齐民友. 论数据给在抛物型退缩线上的一类双曲型方程之哥西问题. 数学学报, 1958, 8: 521–530
- 2 Jost J. Riemannian Geometry and Geometric Analysis. New York: Springer, 2017
- 3 Jost J, Li-Jost X. Calculus of Variations. Cambridge: Cambridge University Press, 1998
- 4 Bochner S. Harmonic surfaces in Riemann metric. Trans Amer Math Soc, 1940, 47: 146–154
- 5 Fuller F B. Harmonic mappings. Proc Natl Acad Sci USA, 1954, 40: 987–991
- 6 Jost J. Harmonic mappings. In: Handbook of Geometric Analysis. Somerville: International Press, 2008, 147–194
- 7 Lohkamp J. An existence theorem for harmonic maps. Manuscripta Math, 1990, 67: 21–23
- 8 Wolf M. Infinite energy harmonic maps and degeneration of hyperbolic surfaces in moduli space. J Differential Geom, 1991, 33: 487–539
- 9 Jost J, Zuo K. Harmonic maps of infinite energy and rigidity results for representations of fundamental groups of quasiprojective varieties. J Differential Geom, 1997, 47: 469–503
- 10 Ding W, Tian G. Energy identity for a class of approximate harmonic maps from surfaces. Comm Anal Geom, 1995, 3: 543–554
- 11 Chen W, Jost J. Maps with prescribed tension fields. Comm Anal Geom, 2004, 12: 93–109
- 12 Li J, Zhu X. Energy identity for the maps from a surface with tension field bounded in L^p . Pacific J Math, 2012, 260: 181–195
- 13 Wang W, Wei D, Zhang Z. Energy identity for approximate harmonic maps from surfaces to general targets. J Funct Anal, 2017, 272: 776–803
- 14 Jäger W, Kaul H. Uniqueness and stability of harmonic maps and their Jacobi fields. Manuscripta Math, 1979, 28: 269–291
- 15 Chen Q, Jost J, Wang G. A maximum principle for generalizations of harmonic maps in Hermitian, affine, Weyl, and Finsler geometry. J Geom Anal, 2015, 25: 2407–2426
- 16 Chen Q, Jost J, Qiu H. Existence and Liouville theorems for V -harmonic maps from complete manifolds. Ann Global Anal Geom, 2012, 42: 565–584
- 17 Chen Q, Jost J, Qiu H. Omori-Yau maximum principles, V -harmonic maps and their geometric applications. Ann Global Anal Geom, 2014, 46: 259–279
- 18 Jost J, Yau S T. A nonlinear elliptic system for maps from Hermitian to Riemannian manifolds and rigidity theorems in Hermitian geometry. Acta Math, 1993, 170: 221–254
- 19 Ni L. Hermitian harmonic maps from complete Hermitian manifolds to complete Riemannian manifolds. Math Z, 1999, 232: 331–355
- 20 Chen J. A boundary value problem for Hermitian harmonic maps and applications. Proc Amer Math Soc, 1996, 124: 2853–2863
- 21 Grunau H C, Kühnel M. On the existence of Hermitian-harmonic maps from complete Hermitian to complete Riemannian manifolds. Math Z, 2005, 249: 297–327
- 22 Li Z Y, Zhang X. Hermitian harmonic maps into convex balls. Canad Math Bull, 2007, 50: 113–122

- 23 Liu K, Yang X. Hermitian harmonic maps and non-degenerate curvatures. *Math Res Lett*, 2014, 21: 831–862
- 24 Kokarev G. On pseudo-harmonic maps in conformal geometry. *Proc Lond Math Soc* (3), 2009, 99: 168–194
- 25 Kokarev G, Kotschick D. Fibrations and fundamental groups of Kähler-Weyl manifolds. *Proc Amer Math Soc*, 2010, 138: 997–1010
- 26 Jost J, Şimşir F M. Affine harmonic maps. *Analysis*, 2009, 26: 185–197
- 27 Jost J, Şimşir F M. Non-divergence harmonic maps. *Contemp Math*, 2011, 542: 231–238
- 28 Ay N, Jost J, Lê H V, et al. *Information Geometry*. Berlin: Springer, 2017
- 29 Centore P. Finsler Laplacians and minimal-energy maps. *Internat J Math*, 2000, 11: 1–13
- 30 Mo X H. Harmonic maps from Finsler manifolds. *Illinois J Math*, 2001, 45: 1331–1345
- 31 Mo X H, Yang Y Y. The existence of harmonic maps from Finsler manifolds to Riemannian manifolds. *Sci China Ser A*, 2005, 48: 115–130
- 32 von der Mosel H, Winklmann S. On weakly harmonic maps from Finsler to Riemannian manifolds. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 2009, 26: 39–57
- 33 Jost J. Equilibrium maps between metric spaces. *Calc Var Partial Differential Equations*, 1994, 2: 173–204
- 34 Jost J. Convex functionals and generalized harmonic maps into spaces of non positive curvature. *Comment Math Helv*, 1995, 70: 659–673
- 35 Jost J. Generalized harmonic maps between metric spaces. In: *Geometric Analysis and the Calculus of Variations for Stefan Hildebrandt*. Boston: International Press, 1996, 143–174
- 36 Jost J. *Nonpositive Curvature: Geometric and Analytic Aspects*. Basel: Birkhäuser, 1997
- 37 Korevaar N J, Schoen R M. Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets. *Comm Anal Geom*, 1993, 1: 561–659
- 38 Jost J, Todjihounde L. Harmonic nets in metric spaces. *Pacific J Math*, 2007, 231: 437–444
- 39 Riemann B. *On the Hypotheses Which Lie at the Bases of Geometry*. Classic Texts in the Sciences. Basel: Birkhäuser, 2016
- 40 Alexandrov A D. Über eine verallgemeinerung der Riemannschen geometrie. *Schr Forschungsinst Math*, 1957, 1: 33–84
- 41 Berestovskij V N, Nikolaev I G. Multidimensional generalized Riemannian spaces. In: *Geometry IV. Encyclopedia of Mathematics Sciences*, vol. 70. New York: Springer, 1993, 165–243
- 42 Busemann H. *The Geometry of Geodesics*. New York: Academic Press, 1955
- 43 Bačák M, Hua B, Jost J, et al. A notion of nonpositive curvature for general metric spaces. *Differential Geom Appl*, 2015, 38: 22–32
- 44 Jost J, Yau S T. Harmonic maps and group representations. In: *Differential Geometry*. Harlow: Longman Scientific, 1991, 241–259
- 45 Reshetnyak Y G. Inextensible mappings in a space of curvature no greater than K . *Soviet Math J*, 1968, 9: 683–689
- 46 Gromov M, Schoen R. Harmonic maps into singular spaces and p -adic superrigidity for lattices in groups of rank one. *Publ Math Inst Hautes Études Sci*, 1992, 76: 165–246
- 47 Moser J. On Harnack’s theorem for elliptic differential equations. *Comm Pure Appl Math*, 1961, 14: 577–591
- 48 Biroli M, Mosco U. A Saint-Venant type principle for Dirichlet forms on discontinuous media. *Ann Mat Pura Appl* (4), 1995, 169: 125–181
- 49 Grigor’yan A A. The heat equation on noncompact Riemannian manifolds. *Math USSR Sb*, 1992, 72: 47–77
- 50 Saloff-Coste L. Parabolic Harnack inequality for divergence form second order differential operators. *Potential Anal*, 1995, 4: 429–467
- 51 Jost J. Generalized Dirichlet forms and harmonic maps. *Calc Var Partial Differential Equations*, 1997, 5: 1–19
- 52 Lin F H. Analysis on singular spaces. In: *Geometry, Analysis and Mathematical Physics, in honor of Professor Chaohao Gu*. Singapore: World Scientific, 1997, 114–126
- 53 Jost J, Xu C J. Subelliptic harmonic maps. *Trans Amer Math Soc*, 1998, 350: 4633–4650
- 54 Zhang H C, Zhu X P. Lipschitz continuity of harmonic maps between Alexandrov spaces. *Invent Math*, 2018, 211: 863–934
- 55 Deligne P, Etingof P, Freed D, et al. *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians*, Vol. I. Princeton: Amer Math Soc and Inst Adv Study, 1999
- 56 Deligne P, Etingof P, Freed D, et al. *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians*, Vol. II. Princeton:

- Amer Math Soc and Inst Adv Study, 1999
- 57 Jost J. *Geometry and Physics*. New York: Springer, 2009
 - 58 Jost J, Keßler E, Tolksdorf J. Super Riemann surfaces, metrics and gravitinos. *Adv Theor Math Phys*, 2017, 21: 1161–1187
 - 59 Keßler E. The super conformal action functional on super Riemann surfaces. PhD Thesis. Leipzig: Universität Leipzig, 2017
 - 60 Chen Q, Jost J, Li J, et al. Dirac-harmonic maps. *Math Z*, 2006, 254: 409–432
 - 61 Chen Q, Jost J, Li J, et al. Regularity theorems and energy identities for Dirac-harmonic maps. *Math Z*, 2005, 251: 61–84
 - 62 Jost J, Keßler E, Tolksdorf J, et al. Regularity of solutions of the nonlinear sigma model with gravitino. *Comm Math Phys*, 2018, 358: 171–197
 - 63 Branding V. Some aspects of Dirac-harmonic maps with curvature term. *Differential Geom Appl*, 2015, 40: 1–13
 - 64 Branding V. Dirac-harmonic maps with torsion. *Commun Contemp Math*, 2016, 18: 1550064
 - 65 Chen Q, Jost J, Sun L. Gradient estimates and Liouville theorems for Dirac-harmonic maps. *J Geom Phys*, 2014, 76: 66–78
 - 66 Chen Q, Jost J, Sun L L, et al. Dirac-geodesics and their heat flows. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2015, 54: 2615–2635
 - 67 Chen Q, Jost J, Sun L L, et al. Dirac-harmonic maps between Riemann surfaces. *Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences Preprint 76/2015*, 2015
 - 68 Chen Q, Jost J, Wang G. Liouville theorems for Dirac-harmonic maps. *J Math Phys*, 2007, 48: 113517
 - 69 Chen Q, Jost J, Wang G, et al. The boundary value problem for Dirac-harmonic maps. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2013, 15: 997–1031
 - 70 Jost J, Liu L, Zhu M M. Geometric analysis of the action functional of the nonlinear supersymmetric sigma model. *Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences Preprint 77/2015*, 2015
 - 71 Jost J, Liu L, Zhu M M. Regularity of Dirac-harmonic maps with λ -curvature term in higher dimensions. *Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences Preprint 25/2017*, 2017
 - 72 Jost J, Liu L, Zhu M. Energy identity for a class of approximate Dirac-harmonic maps from surfaces with boundary. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 2018, in press
 - 73 Sharp B, Zhu M. Regularity at the free boundary for Dirac-harmonic maps from surfaces. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2016, 55: 27
 - 74 Wang C Y, Xu D L. Regularity of Dirac-harmonic maps. *Int Math Res Not IMRN*, 2009, 20: 3759–3792
 - 75 Zhu M. Regularity for weakly Dirac-harmonic maps to hypersurfaces. *Ann Global Anal Geom*, 2009, 35: 405–412
 - 76 Rivière T. Conservation laws for conformally invariant variational problems. *Invent Math*, 2007, 168: 1–22
 - 77 Chen Q, Jost J, Sun L L, et al. Estimates for solutions of Dirac equations and an application to a geometric elliptic-parabolic problem. *J Eur Math Soc (JEMS)*, 2017, in press
 - 78 Jost J, Liu L, Zhu M. Blow-up analysis for approximate Dirac-harmonic maps in dimension 2 with applications to the Dirac-harmonic heat flow. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2017, 56: 108
 - 79 Jost J, Liu L, Zhu M M. A global weak solution of the Dirac-harmonic map flow. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 2017, 34: 1851–1882
 - 80 Jost J, Liu L, Zhu M M. The existence of Dirac-harmonic maps with Dirichlet-chiral boundary conditions. *Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences Preprint 35/2017*, 2017
 - 81 Wittmann J. Short time existence of the heat flow for Dirac-harmonic maps on closed manifolds. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2017, 56: 169
 - 82 Jost J, Wu R J, Zhu M M. Energy quantization for a nonlinear sigma model with critical gravitinos. *ArXiv:1702.03526*, 2017
 - 83 Jost J, Wu R, Zhu M. Coarse regularity of solutions to a nonlinear sigma-model with L^p gravitino. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2017, 56: 154
 - 84 Jost J, Keßler E, Tolksdorf J, et al. Symmetries and conservation laws of a nonlinear sigma model with gravitino. *J Geom Phys*, 2018, 128: 185–198
 - 85 Seiberg N, Witten E. Electromagnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N = 2$ supersymmetric

- Yang-Mills theory. Nucl Phys B, 1994, 431: 581–640
- 86 Seiberg N, Witten E. Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N = 2$ supersymmetric QCD. Nucl Phys B, 1994, 431: 484–550
- 87 Jost J, Peng X, Wang G. Variational aspects of the Seiberg-Witten functional. Calc Var Partial Differential Equations, 1996, 4: 205–218
- 88 Gromov M. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. Invent Math, 1985, 82: 307–347
- 89 Taubes C. $SW \Rightarrow Gr$: From the Seiberg-Witten equations to pseudo-holomorphic curves. J Amer Math Soc, 1996, 9: 845–918
- 90 Jost J, Wang G, Zhou C. Super-Liouville equations on closed Riemann surfaces. Comm Partial Differential Equations, 2007, 32: 1103–1128
- 91 Jost J, Wang G, Zhou C, et al. Energy identities and blow-up analysis for solutions of the super Liouville equation. J Math Pures Appl (9), 2009, 92: 295–312
- 92 Jost J, Wang G, Zhou C, et al. The boundary value problem for the super-Liouville equation. Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire, 2014, 31: 685–706
- 93 Jost J, Zhou C, Zhu M. The qualitative boundary behavior of blow-up solutions of the super-Liouville equations. J Math Pures Appl (9), 2014, 101: 689–715
- 94 Jost J, Zhou C, Zhu M. A local estimate for super-Liouville equations on closed Riemann surfaces. Calc Var Partial Differential Equations, 2015, 53: 247–264
- 95 Jost J, Zhou C Q, Zhu M M. Vanishing Pohozaev constant and removability of singularities. ArXiv:1709.07342, 2017

Harmonic maps and their generalizations

Jürgen Jost, Xianqing Li-Jost & Qun Chen

Abstract This paper gives a survey on generalizations of harmonic maps, including Hermitian harmonic maps, Weyl harmonic maps, affine harmonic maps, harmonic maps from Finsler manifolds, harmonic maps between metric spaces and Dirac-harmonic maps etc.

Keywords harmonic map, Hermitian harmonic map, Weyl harmonic map, affine harmonic map, harmonic map from Finsler manifolds, metric space, Dirac-harmonic map

MSC(2010) 58E20, 58J05, 53C43, 35J47

doi: 10.1360/N012018-00052