

圆环面上纤维轨迹的计算机辅助设计

张三元

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 浙江大学计算机科学与工程系, 杭州 310027)

摘要 表面上的曲线造型是计算机图形领域的一个新的研究热点,而且它们在纤维织物编织、三维服装裁剪以及复合材料的纤维缠绕轨迹设计等领域有十分广泛的应用.为了解决圆环面上纤维轨迹的计算机辅助设计问题,研究了圆环面上测地线的解析解以及拟测地线数值求解的具体算法并给出了其表达式.测地线是表面上两点之间最短距离的曲线段,在一般表面上没有解析解,但是在圆环面上却可求出其精确的解析解.但在曲面的边沿部分,测地线因不能实现自然的折返过渡,于是拟测地线就被引进到表面上的曲线造型设计之中,在拟测地线分析研究基础上,给出了圆环面上拟测地线的方程及数值解法,通过其在一个实例中的应用结果证明,该方法可获得织物的纺织条纹以及缠绕物体的纤维轨迹.

关键词 复合材料 纤维缠绕 纤维轨迹 拟测地线

中图分类号: TP391.72 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2001)06-0573-04

Computer Aided Fiber Path Design to Torus in Filament Winding

ZHANG San-yuan

(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Department of Computer Science and Engineering, Hangzhou 310027)

Abstract Curve modeling on curved surface is paid much more attention recently because of its wide application in industry, which include fiber weaving, 3D garment clipping design and composite material product design. Computer aided design for filament winding is a basic technique in the area of production of composite materials. Torus is a typical product made of composite material; they are used as tube joints widely in chemistry and oil industry. The manufacture of torus is usually by means of filament winding. The main step for filament winding is fiber path design. The design of fiber path on torus is main topic of this paper. In the first part of the paper, the fiber path is designed as geodesics, the solution to the geodesics on a torus is discussed; in the second part of the paper, a formula for computing the semi-geodesics on a torus is derived, a numerical calculation for semi-geodesics from the formula is analyzed in detail. Lastly, the method is applied in a practical example.

Keywords Composite materials, Filament winding, Fiber paths, Semi-geodesics

0 引言

传统的曲线造型理论都是研究平面上曲线构造及性质的,如 Bézier 曲线及 B 样条曲线等,最近,表面上的曲线表示及生成方法又受到广泛的重视,主要是由于表面上的曲线有着广泛的应用前景,如人体模型上的各种曲线、立体服装裁剪中的拼接缝线等,而其最广泛的应用却是在复合材料产品的生产

设计上.如今纤维缠绕技术已广泛应用于高品质复合材料产品的生产设计之中,如航空器械的外壳、高压容器等,其中,纤维轨迹的设计是纤维缠绕技术的关键.到目前为止,对称体及旋转体的设计和生产技术比较成熟,其一般是采用 Clairaut^[1] 方程来求解测地线以作为缠绕轨迹,而对非对称物体,其缠绕轨迹的求解就相当复杂,一般是采用旋转体去逼近复杂物体,或是采用离散的方法^[2]来求解,而其精确解析解的研究还未形成系统有效的方法.

最近,非轴对称物体的纤维缠绕产品也在复合材料工业中得到广泛的应用,在非轴对称物体的纤维缠绕过程中,计算机辅助轨迹设计比较困难,这是由于非轴对称物体的结构非常复杂,而纤维轨迹的计算必须非常精确,因为在工业生产中,不仅要求纤维轨迹要有良好的几何性质,如要求纤维轨迹光滑,分割长度均匀、布满,相邻轨迹基本平行和回头自然等,还要求它们满足相应的物理约束,如不打滑、不架桥、厚度均匀、稳定性好等,这样,靠经验模型及初等方法是无法满足这些要求的.由此可见,非轴对称物体比轴对称物体的纤维缠绕轨迹设计的纤维缠绕轨迹设计,其难度要大得多^[3].

计算缠绕物体的纤维轨迹一般有两种方法^[4,5],一种是基于离散剖分的方法,该方法首先是将缠绕物体的芯模剖分成三角片,然后求解三角形网格表面上的测地线,得到用折线段表示的纤维轨迹,著名的纤维缠绕软件 CADFIL^[2]和 CADWIND 就是采用这种方法^[6];另一种方法就是直接导出满足几何及物理要求的纤维轨迹微分方程,因为一般没有解析解,故采用数值方法来求解^[4,5,7,8].上述这两种方法都有各自的优缺点,其中第1种方法适应面比较广,算法简单稳定,但计算量大,误差较大,并且在计算过程中无法知道计算出来的轨迹是否满足给定的几何及物理约束.第2种方法虽然在精度和计算量上都有优越性,但是它没有普遍适用性,这是由于不同物体上的纤维轨迹的微分方程千差万别,不可能有统一的方法来求解这些微分方程,因此在本文中,仅仅研究圆环面上纤维轨迹的计算.

由于圆环面是非轴对称曲面,它的几何和代数结构都比较简单,因此,其纤维轨迹微分方程的求解相对来说就比较容易,而选择圆环面作为研究对象的另一个原因,是由于它在复合材料工业中有广泛的应用,特别是1/2或1/4圆环面,对于管件(如天然气输送管的管道接头)部件均是必不可少的.对它们的生产方法,至今还是采用手工的方式,还没有达到数控加工的程度.另外,还有一种弯曲型曲面的三通管,其几何及代数结构都比环面复杂得多,因而对环面上纤维轨迹的求解将有助于一般曲面上纤维轨迹计算的研究.

由于测地线是表面上的短程线,沿测地线缠绕肯定能满足不打滑的要求,因此,应尽量采用测地线作为纤维缠绕轨迹,当测地线不能满足某些特殊要求时,就需采用拟测地线作为缠绕轨迹.

1 圆环面上测地线纤维轨迹的微分方程及其求解

圆环曲面通常可用如下的参数方程来表示

$$S(\varphi, \theta) = (x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta)) \quad (1)$$

式中

$$x(\varphi, \theta) = (R + r\cos\varphi)\cos\theta$$

$$y(\varphi, \theta) = (R + r\cos\varphi)\sin\theta$$

$$z(\varphi, \theta) = r\sin\varphi$$

φ 和 θ 为圆环面的自然参数(如图1所示).

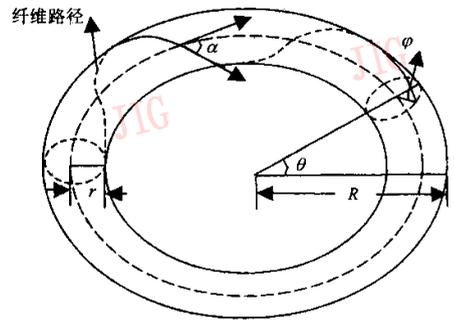


图1 圆环及其上面的纤维轨迹

从式(1)可以得到

$$S_\varphi = (-r\sin\varphi\cos\theta, -r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) \quad (2)$$

$$S_\theta = (-(R+r\cos\varphi)\sin\theta, (R+r\cos\varphi)\cos\theta, 0)$$

式中, S_φ, S_θ 是函数 $S(\varphi, \theta)$ 关于变量 φ, θ 的偏导数.

从式(2)可得到该圆环曲面的第一个基本微分形式,并用下式来表示

$$E = S_\varphi \cdot S_\varphi = r^2, F = S_\varphi \cdot S_\theta = 0,$$

$$G = S_\theta \cdot S_\theta = (R + r\cos\varphi)^2$$

进而圆环面上曲线弧长的微分形式可用下式来表示

$$ds^2 = (R + r\cos\varphi)^2 d\theta^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (3)$$

假设在纤维轨迹上任意一点处纤维的切向与过该点的中心圆切向之间的夹角为 α ,如图1所示,则称 α 为缠绕角.

这时测地线方程的Liouville公式可用下式来表示

$$k_g = \frac{d\alpha}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \ln E}{\partial \theta} \cos\alpha + \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \ln G}{\partial \varphi} \sin\alpha = 0 \quad (4)$$

这里

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}} \cos\alpha, \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}} \sin\alpha \quad (5)$$

从式(2)和式(5)可得下式

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos\alpha}{r} \quad (6)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin\alpha}{R + r\cos\varphi} \quad (7)$$

从式(4),式(6)和式(7),即可得如下圆环面上的缠绕角关于弧长的测地线方程

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin\varphi \sin\alpha}{R + r\cos\varphi} \quad (8)$$

由式(6)和式(7)可得下式

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{r\sin\alpha}{(R + r\cos\varphi)\cos\alpha} \quad (9)$$

由式(6)和式(8)可得下式

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{r\sin\varphi \sin\alpha}{(R + r\cos\varphi)\cos\alpha} \quad (10)$$

为了求解方程组(9)和(10),构造如下整函数

$$F(\alpha, \varphi) = (R + r\cos\varphi)\sin\alpha \quad (11)$$

就可以得到

$$dF(\alpha, \varphi) = \frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial F}{\partial \varphi} d\varphi = (R + r\cos\varphi)\cos\alpha d\alpha - r\sin\varphi \sin\alpha d\varphi \quad (12)$$

将式(9)代入上式可得到 $dF(\alpha, \varphi)$ 恒等于零,因而有

$$(R + r\cos\varphi)\sin\alpha \equiv C \quad (13)$$

这里, C 是一个积分常数,其可以通过初始条件来确定,如

$$C = (R + r\cos\varphi_0)\sin\alpha_0$$

这里, φ_0 和 α_0 是初始中心角和缠绕角。

这个公式与旋转曲面上测地线的 Clairaut 方程非常类似,因而可以看成是 Clairaut 方程在圆环面上的推广。从式(13)可以解出

$$\sin\alpha = \frac{C}{R + r\cos\varphi} \quad (14)$$

因而有

$$\cos\alpha = \pm \frac{\sqrt{(R + r\cos\varphi)^2 - C^2}}{R + r\cos\varphi} \quad (15)$$

将式(14)和式(15)代入式(9),可以得到如下 θ 与 φ 之间的关系

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \pm \frac{rC}{(R + r\cos\varphi)\sqrt{(R + r\cos\varphi)^2 - C^2}} \quad (16)$$

在给定初值条件下,由式(14)和式(16)可求出任意长度的一段测地线。图 2 即是一个圆环面上测地线的实例。

尽管测地线方程能够精确地求解,但在实际应用中,测地线有很多约束限制,如要使纤维轨迹不架桥,则初始缠绕角必须很大,这就对纤维的分布及力

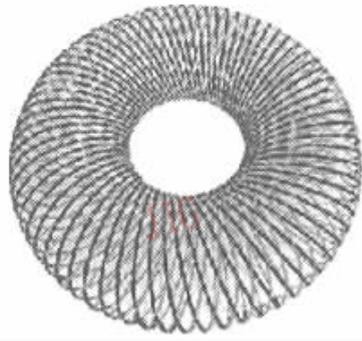


图 2 圆环面上的测地线

初值条件: $\alpha=85^\circ, \varphi=0^\circ, \theta=0^\circ, R=2r$

学特性的调整带来不便;另一方面,在实际应用中,并不需要生产整个圆环,而大量的只是生产 $1/4$ 圆环来作为管接头,一般在 $1/4$ 圆环的缠绕过程中,要求缠到边界处能自然回头,且不能打滑,这种情况下,用测地线是完全不能满足这个要求的,但有没有办法来克服这两个缺陷呢?由于实际物体表面都是粗糙的,并且在实际缠绕过程中也一定有误差,因此精确的测地线缠绕并不一定是必须的,为此将物体的摩擦系数考虑进去,采用一种拟测地线的方法来进行纤维缠绕,就可以减小缠绕角和自然回头,同时满足不打滑不架桥的要求。

2 环面上的拟测地线方程及其求解

曲面上的拟测地线定义为

$$\frac{k_g}{k_n} = \lambda \quad (17)$$

这里, k_g 是测地曲率, k_n 是法曲率,从力学分析上看, k_g 和 k_n 分别对应着曲面上的两种受力情况:一是落在切平面上的切向分量 f_g ,二是垂直于曲面的法向分量 f_n 。

由于圆环面不是一个完全的凸曲面,如果轨迹设计不合理,那么在缠绕过程中纤维就可能会因被拉紧而架桥,因此为了避免纤维架桥,一方面法向力 f_n 必须将纤维向曲面方向拉紧,而在另一方面,又要避免纤维在曲面上打滑,切向力 f_g 必须不能超过摩擦力的最大值 f_μ ,可以用下式来表示

$$|f_g| \leq |f_\mu| \leq \mu |f_n| \quad (18)$$

这里, μ 是静态摩擦系数。虽然一般摩擦系数 μ 的值由多种因素确定,但主要由模芯曲面的形状、树脂的粘性度等确定,其具体数值一般在 $0.1 \sim 0.4$;式(17)中的 λ 是一个常数;式(18)表示的稳定性格

准可以写成

$$|\lambda| \leq \mu \quad (19)$$

根据式(17)式,并利用第1节的推导方法,可得到圆环面上的拟测地线方程如下

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\sin\varphi\sin\alpha}{R+r\cos\varphi} - \lambda \left(\frac{\cos^2\alpha}{R+r\cos\varphi} + \frac{\sin^2\alpha}{r} \right) \quad (20)$$

与式(9)和式(10)所表示的测地线方程相类似,拟测地线方程可以用如下微分方程表示

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{-r\cos\alpha}{r\cos\alpha\sin\varphi + \lambda(\cos^2\alpha + (R+r\cos\varphi)\sin^2\alpha)} \quad (21)$$

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{-(R+r\cos\varphi)\sin\alpha}{r\cos\alpha\sin\varphi + \lambda(\cos^2\alpha + (R+r\cos\varphi)\sin^2\alpha)} \quad (22)$$

微分方程式(20),(21)和(22)没有解析解,因此必须利用数值方法来求解这些微分方程,当给定适当的初始参数 $\varphi_0, \theta_0, \alpha_0$ 就可以一步一步地将拟测地线纤维轨迹计算出来. 一个张角为 90° 的圆环面上的拟测地线纤维轨迹如图3所示. 实验结果表明其计算过程是稳定的.

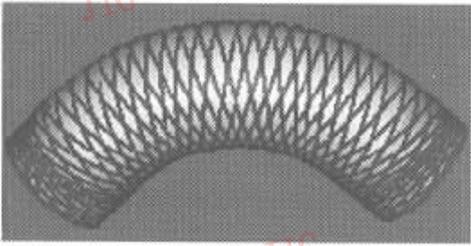


图3 1/4 环面上的拟测地线纤维轨迹
(初始参数: $\alpha=75^\circ, \varphi=0^\circ, \theta=0^\circ, R=3r, \mu=0.20$)

3 结 论

用复合材料制成的圆环面,尤其是1/4圆环面是常见的纤维缠绕产品,主要用于直管之间的接头,如今纤维缠绕的直管产品的生产技术已经相当成熟,并已经大量投入生产,生产过程已经实现自动化,而弯管的生产目前在国内还是靠手工方法来实现. 本文的研究成果为弯管生产的自动控制提供了

充分的依据. 同时由于圆环是一种典型的非轴对称物体,因此对其缠绕轨迹的研究方法可以应用或借鉴到其他非轴对称物体(如三通管,多叉接头等)的缠绕研究上去.

参 考 文 献

- 1 Wells G M, McAnnly K F. Computer aided filament winding using non-geodesic trajectories. In: Proceedings of the 6th International Conference on Composite Materials, (ICCM-VI), 1: 161~173, London, UK, 1987; 672~688.
- 2 Middleton V, Owen M J, Elliman D G *et al.* Developments in non-axisymmetric filament winding. In: Proceedings of 2nd International Conference on Automated Composite'88, Noordwijkerhout, the Netherlands, 1988; 324~335.
- 3 Do Carmo M P. Differential geometry of curves and surfaces. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1976.
- 4 Liang Y D, Luo Gene. A simple filament winding pattern generation algorithm. In: Proceedings of 28th International SAMPE Technical Conference, Seattle, 1996; 1027~1037.
- 5 Johan Scholliers, Hendrik Van Brussel. Computer-integrated filament winding: computer-integrated design, robotic filament winding and robotic quality control. Composites Manufacturing, 1994, 5(1): 15~23.
- 6 Rutan B, Hiel C, Goldsworthy B. Design with composite materials: from complete chaos to clear concepts. SAMPE Journal, 1996, 32(5): 83~91.
- 7 Lossie M, Brussel H V. Design principles in filament winding. Composite Manufacturing, 1994, 5(1): 67~81.
- 9 Liang Y D, Zhou Z Q *et al.* Quasi-geodesics—A new class of simple, non-slip trajectories on revolutionary surface. In: Proceedings of the 28th International SAMPE Technical Conference, Seattle, Washington, 1996; 1038~1049.

张三元 博士,副教授,主要从事计算机辅助设计、计算机图形学、网络图论等领域的研究工作. 发表学术论文 40 余篇.