

考虑概率分布的灰色网络计划模型研究*

李旭升 石朝锋** 刘江

(西南交通大学经济管理学院, 成都 610031)

摘要:综合分析了模糊数学、概率统计及灰色系统理论在描述项目不确定性信息方面的优劣性,提出用区间灰数刻画项目工序持续时间特点,并采用三角白化权函数反映灰区间内的概率分布。针对不确定性条件下关键线路的易变性,重新定义了关键路径,建立了一整套适合于灰色网络计划模型的区间灰数运算规则和排序规则。最后,通过实例验证了模型的有效性。

关键词:灰色系统理论;区间灰数;三角白化权函数;概率分布;灰数排序;关键路径

中图分类号:F224

文献标识码:A

doi:10.3969/j.issn.1006-6055.2013.02.032

Study on the Gray Network Scheduling Model with probability distribution*

LI Xusheng SHI Chaofeng** LIU Jiang

(School of Economics and Management, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031)

Abstract: This paper first analyzes comprehensively the merits and demerits of the existing methods on processing uncertain information, such as fuzzy mathematics, stochastic and interval methods, then introduces a new model of grey network scheduling that is constituted by interval grey numbers, and describes works' duration with triangular whitenization weight function. On the basis of adopting the ranking of grey number, the authors redefine the critical path. At last, it verifies the validity of this model through specific case analyses.

Key words: Grey system theory; Interval grey number; Triangular whitenization weight function; probability distribution; Ranking; Critical path

1 引言

工程项目在实施过程中面临着各种各样的风险,工期风险是主要核心风险之一,因为工期的延误将使项目各参与方的效用均下降。尤其是业主,如果项目不能按照预定计划建设投产,项目所赖以生存的基础就会受到破坏,工期风险对工程项目造成的负面影响包括项目建设成本增加、项目贷款利息负担增加、项目资金流量不能按计划实现等。无论在发展中国家还是在发达国家,工程项目建设期出现工期风险的概率都是比较高的。英国著名项目管理专家 Merrow 在 1998 年对世界范围内 58 个随机项目的研究表明^[1],大型工程项目的最终完成时间,平均比预期的要延期 17%,造成这一现象的主要原因是工程项目施工中工序活动持续时间具有不确定性。通常工程项目进度计划是以关键线路法(简称 CPM)为基础的^[2],其基本假定是网络进度计划中每项活动的持续时间均是确定的,按照这种静态点估计得到的期望工期缺乏实际指导意义。

为了更有效地估计不确定性环境中网络进度计划的时间参数,最大限度降低项目工期风险,越来越多的学者将注意力投向了随机型网络结构。最具代表性的研究成果为 Leu S. S. A^[3]采用模糊数学理论中的隶属度函数,对工程项目的进度费用进行了模糊综合优化,取得了较为满意的效果。Hua Ke^[4]结合概率统计中的相关机会规划模型,提出了项目进度优化的新方法,并运用遗传算法进行了求解,发现其计算结果明显优于关键线路法。杨应玖^[5]尝试将灰色系统理论引入到工程项目优化领域,并给出了关键路径的判别条件,但并没有按照灰数的运算规则进行求解,也没有考虑灰区间内时间参数的分布信息。

模糊数学、概率统计和灰色系统理论是三种最常用的不确定性系统研究方法,其研究对象却具有差异性^[6];模糊数学着重研究“认知不确定”问题,主要是凭决策者经验并借助于隶属函数来刻画不确定性;概率统计研究的是“随机不确定”现象的历史统计规律,其出发点是大样本,并要求对象服从某种典型分布;灰色系统理论着重研究模糊数学、概率统计难以解决的“少样本、贫信息”不确定性问题,通过充分挖掘已有信息探索事物的内在规律。通常认为,项目时间参数信息的不确定性是客观存在的,它不以人们主观认识的变化而改变,也难以用某种典型概率分布来准确描述,更科学和更有意义的做法是把它看成一个可能的区间,这和灰色系统理论中白化权函数的定义是吻合的。

在灰色系统理论中,三角白化权函数最为常用也更好地体现了项目工序“最乐观时间”、“最可能时间”与“最悲观时间”的概率分布特点。本文将在前人研究的基础上,明确提出工序持续时间为区间灰数的灰色网络计划模型,并采用三角白化权函数反映灰区间内的概率分布。针对不确定性条件下关键线路的易变性,重新定义了关键路径,建立了一整套适合于灰色网络计划模型的区间灰数运算规则和排序规则。采用白化期望与白化方差将灰区间中蕴含的信息完整反映出来,并采用 MATLAB 进行数值求解得到了项目完工工期。

2 灰色网络计划模型构建

在使用带三角白化权函数的区间灰数建立灰色网络计划模型之前,有必要结合所研究的问题给出一些定义。

2.1 灰工序和白化权函数

只知道取值范围而不知道其确切值的数叫做灰数^[7],通常用符号 $\otimes$ 表示。在实际项目中,根据工序持续时间特点,可以用灰数表达工序持续时间。

定义 1 灰工序是指工序持续时间介于 a 和 b 之间某个值,可以表示为 $\otimes \in [a, b]$;

* 国家自然科学基金(71071102)资助

** E-mail: fcs007swjt@126.com; Tel: 15902898940

The graph shows a triangular membership function $f(x)$ plotted against x . The function is zero at $x = a_m$ and $x = c_m$, and reaches its maximum value of 1 at $x = b_m$. The x-axis is labeled with 0 , a_m , b_m , and c_m . The y-axis is labeled with $f(x)$ and 1 . Dashed lines indicate the peak at $(b_m, 1)$ and the x-intercepts at a_m and c_m .

Figure 1 Triangular whitenization weight function

$$\tilde{\otimes} = \frac{\int_{a_1}^{a_2} xf(x) \, dx}{\int_{a_1}^{a_2} f(x) \, dx}$$
$$g^{\circ}(\otimes) = \frac{l(\otimes)}{\otimes}$$
$$D(\otimes) = \frac{\int_{a_1}^{a_2} (x - F(x))^2 f(x) dx}{\int_{a_1}^{a_2} f(x) dx}$$

2.2 灰色网络计划模型

时将面临区间灰数的排序问题,尤其当某灰工序存在两个以上紧前或紧后工序时,就需要根据取大或取小规则进行必要的取舍。目前,关于区间灰数的排序问题同样存在争议^[10-13];徐泽水将区间数排序问题转化为求解可能度矩阵的排序向量,并给出了区间数排序的可能度法。刘思峰在考虑区间灰数概率分布的基础上,提出了基于相关面积的灰数排序新方法。综合上述研究成果,本文构建了以下灰色网络计划模型的区间灰数运算规则和排序规则,为全面引入灰色系统理论奠定了理论基础。

$$(1) \hat{\otimes}_{1(g^{\circ_1})} = \hat{\otimes}_{2(g^{\circ_2})} \Leftrightarrow \hat{\otimes}_1 = \hat{\otimes}_2 \text{ 且 } g^{\circ_1} = g^{\circ_2}$$

$$(2) \hat{\otimes}_{1(g^{\circ}_1)} + \hat{\otimes}_{2(g^{\circ}_2)} = (\hat{\otimes}_1 + \hat{\otimes}_2)(g^{\circ}_1 \vee g^{\circ}_2)$$

$$(3) -\hat{\otimes}_{(\mathcal{R}^0)} = (-\hat{\otimes})_{(\mathcal{R}^0)}$$

$$(4) \hat{\otimes}_{1(g^{\circ}_1)} - \hat{\otimes}_{2(g^{\circ}_2)} = (\hat{\otimes}_1 - \hat{\otimes}_2)(g^{\circ}_1 \vee g^{\circ}_2)$$

2 灰数的排序规则

$$P(\otimes_1 > \otimes_2) = \frac{\iint_{D_1} g(x, y) dx dy}{\iint_{(D_1 + D_2)} g(x, y) dx dy}$$

Figure 2 Ranking of interval grey number

1)灰工序网络计划模型的节点最早开始时间:

$$(T_{i-i}^{ES}) = \max \{ (T_{h-i}^{ES}) + (D_{h-i}) \}$$

其中, (D_{h-i}) 为紧前灰工序 $h-i$ 持续时间的灰数, (T_{h-i}^{ES}) 为紧前灰工序 $h-i$ 的最早开始时间的灰数, (T_{i-j}^{ES}) 为灰工序 $i-j$ 的最早开始时间的灰数。

2) 灰工序网络计划模型的节点最早完成时间:

$$(T_{i-j}^{EF}) = \{ (T_{i-j}^{ES}) + (D_{i-j}) \}$$

- 3) 灰工序网络计划模型的节点最迟开始时间:
 $(T_{i-j}^{LS}) = \{(T_{i-j}^{LF}) - (D_{i-j})\}$
- 4) 灰工序网络计划模型的节点最迟完成时间:
 $(T_{h-i}^{LF}) = \min \{(T_{i-j}^{LF}) - (D_{i-j})\}$
- 其中, (D_{i-j}) 为紧后灰工序 $i-j$ 持续时间的灰数, (T_{i-j}^{LS}) 为紧后灰工序 $i-j$ 的最迟完成时间的灰数, (T_{h-i}^{LS}) 为灰工序 $h-i$ 的最迟完成时间的灰数。
- 5) 灰色网络计划模型的节点总时差:
 $(F_{i-j}^T) = \{(T_{i-j}^{LS}) - (T_{i-j}^{ES})\}$

2.2.4 关键工序与关键线路的判定

在灰色网络计划模型中,灰工序的自由时差和总时差均为区间数,这将使得关键工序呈现出易变性,给关键路径的选取带来困难。传统 PERT 算法根据中心极限定理定义了具有最大期望值的线路为关键线路,一般不会出现多条关键线路,但它不能反映灰工序持续时间的时变性造成的关键线路的多变性^[14-16]。Stefan Chanas^[17]深入研究了区间网络计划的关键线路并给出了区间关键路的定义和求解方法,然而按照该方法常常得到多条关键路径,难以实现对项目的重点控制。Williams^[18,19]等在研究 CPM 时曾提出了工作关键度 (ACP) 这一指标,它从概率的角度定义了不同工序的相对关键程度,降低了次关键工作位于关键线路上的可能性,更具合理性。受文献[18]的启发,本文给出灰色网络计划中关键路径新的定义:以 C_r 和 C_i 分别表示某条线路持续时间和除该条线路之外的其他线路的持续时间,若存在 $P(C_r \geq C_i) > P(C_i \geq C_r)$, 则称该线路为关键线路。不难理解,灰工序排序过程类似于对工序进行关键度排序,都是从持续时间和概率两个方面表达了不确定性条件下关键工序的特征,这就保证了所选出来的所谓“关键工序”位于关键线路上的概率是最大的。确定关键线路的具体步骤如下:

步骤 1: 根据灰工序持续时间的白化权函数将工序作持续时间用灰数的简化形式来表达。

- 步骤 2: 以灰数的核作为灰工序持续时间的代表值,并按照确定型网络计划中计算时间节点的方法对各参数节点时间进行计算,加减运算过程中灰度按取大原则进行。
- 步骤 3: 当某节点存在多个紧前工序或者紧后工序时,根据灰工序大小的排序进行取舍,总时差灰数的核为最小的灰工序即为关键工序。
- 步骤 4: 鉴于步骤 3 已经考虑了灰工序的排序,这就保证了每个节点处选出的关键工序的持续时间在概率意义上是最大的,连接这些关键工序所形成的线路符合关键线路的定义。故顺次连接选出的关键工序即可找到关键路径。
- 步骤 5: 将项目总工期的灰数简化形式代入由定义 3、定义 5 和定义 8 组成的三个表达式,运用数值求解可得到项目总工期的白化权函数。

3 案例分析

某新建项目共有 A—J 十项工序,由于信息量不足,项目管理人员只能估计出各工序的持续时间区间。该工程的灰色网络计划图如图 3 所示。

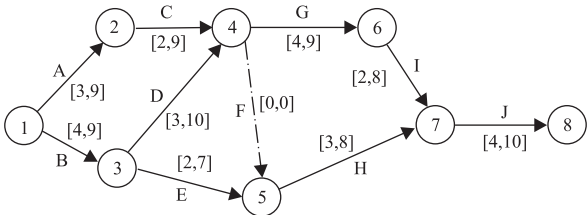
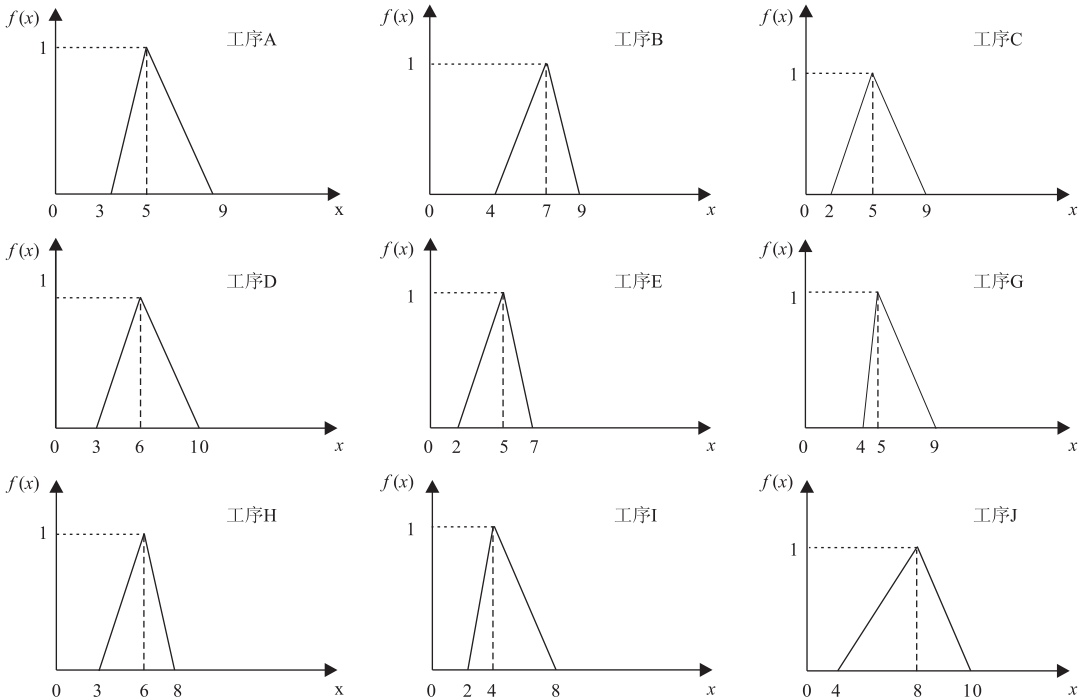


图 3 灰工作网络图
Figure 3 Grey networks

根据类似项目的施工经验,可得到各工序在所估计区间内的取值分布情况,采用三角白化权函数可表示为如下所示的形式。(其中:工序 F 为虚工序,不再考虑其白化权函数)



步骤 1:将以上各工序持续时间用灰数的简化形式来表达,汇总如表 1 所示。

表 1 各工序持续时间的灰数简化形式

Table 1 Simplified of grey number about works' duration

工序	白化均值	区间长度	灰度	核	白化方差	简化形式
A	5.67	6.00	1.06	5.67	1.56	$\hat{\otimes}_{1(g^{\circ})} = 5.67_{(1.06)}$
B	6.67	5.00	0.75	6.67	1.06	$\hat{\otimes}_{2(g^{\circ})} = 6.67_{(1.06)}$
C	5.33	7.00	1.31	5.33	2.06	$\hat{\otimes}_{3(g^{\circ})} = 5.33_{(2.06)}$
D	6.33	7.00	1.11	6.33	2.06	$\hat{\otimes}_{4(g^{\circ})} = 6.33_{(2.06)}$
E	4.67	5.00	1.07	4.67	1.06	$\hat{\otimes}_{5(g^{\circ})} = 4.67_{(1.06)}$
F	-	-	-	-	-	-
G	6.00	5.00	0.83	6.00	1.17	$\hat{\otimes}_{7(g^{\circ})} = 6.00_{(1.17)}$
H	5.67	5.00	0.88	5.67	1.06	$\hat{\otimes}_{8(g^{\circ})} = 5.67_{(1.06)}$
I	4.67	6.00	1.29	4.67	1.56	$\hat{\otimes}_{9(g^{\circ})} = 4.67_{(1.56)}$
J	7.33	6.00	0.82	7.33	1.56	$\hat{\otimes}_{10(g^{\circ})} = 7.33_{(1.56)}$

步骤 2:计算各节点时间的时间参数,整理如表 2 所示。

表 2 项目各工序时间参数

Table 2 Time parameters of networks

工序	最早开始时间 ES	最迟开始时间 LS	总时差 TF	自由时差 FF	是否为关键工序
A	0.00	2.00 _(1.31)	2.00 _(1.31)	0.00 _(1.06)	否
B	0.00	0.00 _(1.29)	0.00 _(1.29)	0.00 _(0.75)	是
C	5.67 _(1.06)	7.67 _(1.31)	2.00 _(1.31)	2.00 _(1.31)	否
D	6.67 _(0.75)	6.67 _(1.29)	0.00 _(1.29)	0.00 _(1.11)	是
E	6.67 _(0.75)	13.33 _(1.29)	6.66 _(1.29)	1.66 _(1.29)	否
F	13.00 _(1.11)	18.00 _(1.29)	5.00 _(1.29)	0.00 _(1.29)	否
G	13.00 _(1.11)	13.00 _(1.29)	0.00 _(1.29)	0.00 _(1.29)	是
H	13.00 _(1.11)	18.00 _(1.29)	5.00 _(1.29)	0.00 _(1.29)	否
I	19.00 _(1.11)	19.00 _(1.29)	0.00 _(1.29)	0.00 _(1.29)	是
J	23.67 _(1.29)	23.67 _(1.29)	0.00 _(1.29)	0.00 _(1.29)	是

步骤 3:在某个灰工序出现多个紧前或紧后节点时,需要对灰工序排序。以本例中 F 工序的最早开始时间为例, $ES_{4-5} = \max \{ ES_{2-4} + \hat{\otimes}_3, ES_{3-4} + \hat{\otimes}_4 \} = \max \{ 11.00_{(1.31)}, 13.00_{(1.11)} \}$ 。和确定性网络计划模型不同的是,灰工序是一个区间数,不能直接进行比较大小。根据 2.2 中描述的灰工序排序规则,不难得出 $P \{ 11.00_{(1.31)} > 13.00_{(1.11)} \} = 0.15 < 0.50$,这说明 $13.00_{(1.11)}$ 在概率意义上大于 $11.00_{(1.13)}$ 。

步骤 4:总时差灰数的核最小的灰工序分别是 B、D、G、I、J,由它们组成的线路即为关键线路。很容易得到该项目总工期为

$$T = \hat{\otimes}_{2(g^{\circ})} + \hat{\otimes}_{4(g^{\circ})} + \hat{\otimes}_{7(g^{\circ})} + \hat{\otimes}_{9(g^{\circ})} + \hat{\otimes}_{10(g^{\circ})} = 31.00_{(1.29)} \quad (1)$$

步骤 5:设项目总工期的三角白化权函数的相关参数分别为 a、b、c,则有:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & (a \leq x \leq b) \\ \frac{x-c}{b-c}, & (b \leq x \leq c) \end{cases}$$

由于各灰工序相互独立,故方差
 $D(T) = D(\hat{\otimes}_2) + D(\hat{\otimes}_4) + D(\hat{\otimes}_7) + D(\hat{\otimes}_9) + D(\hat{\otimes}_{10}) = 1.06 + 2.06 + 1.17 + 1.56 + 1.56 = 7.41 \quad (2)$

即:

$$D(T) = \frac{\int_a^c (x - E(x))^2 f(x) dx}{\int_a^c f(x) dx} = 7.41 \quad (3)$$

根据灰工序的白化均值及灰度的定义,可得出

$$E(\hat{\otimes}) = \frac{\int_a^c xf(x) dx}{\int_a^c f(x) dx} = 31.00_{(1.29)} \quad (4)$$

$c - a = 31.00 \times 1.29;$

(5)

联立式(1~5),并采用 MATLAB 工具箱进行数值求解可得到:a=11.17,b=30.61,c=49.97,画出总工期的三角白化权函数如图 4 所示。通过该白化权函数可以较为直观的了解项目总工期的分布情况,也很容易得到计划工期内的完工概率。尤其值得注意的是,实际工程建设项目中关键路径上的工序个数不一定能达到用中心极限定理对随机变量 $\sum_{i=1}^N X_i (N \geq 30)$ 有关事件进行近似概率计算的要求,采用传统 PERT 算法将难以得出项目完工概率。而本文介绍的模型具有一般性,能够为项目管理者提供较为客观的决策依据。

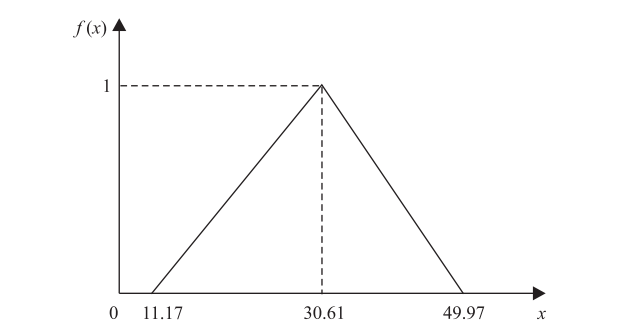


图 4 项目总工期的三角白化权函数

Figure 4 Triangular whitening weight function of total duration

4 结论

合理的项目进度计划有助于提高项目的可控性,而以往的研究无法准确描述项目工序持续时间的不确定性特征。本文结合灰色系统理论,采用带三角白化权函数的区间灰数来刻画各工序持续时间的不确定性,并以灰数的简化形式构建了灰色网络计划模型。针对灰色网络计划图的特点,确定了基于核与灰度的区间灰数运算法则,并给出了灰工序的排序规则。经过实例验证,该模型具有较强的直观性,决策者可以通过总工期的白化权函数清晰的了解项目工期的分布情况。该模型同样适用于任意形式的白化权函数(如正态分布、梯形分布等)且不受工序个数的限制,具有广泛的适应性。本次研究是建立在各工序相互独立这一基础上的,通常各工序相互独立的假定并不能保证,因此如何弱化这一假定以更准确地反映项目的实际情况将是需要继续深入研究的问题。

参考文献

- [1] MERROW B. A Review of Project Risk Management [J]. International Journal of Project Management, 1998, (7): 127-142.
- [2] KELLY J E. Critical path planning and scheduling mathematical basis [J]. Operations Research, 1961, 9(3): 67-79.
- [3] LEU S S. A GA-based fuzzy optimal model for construction times-cost trade-off [J]. International Journal of Project Management, 2001, (19): 47-58.
- [4] HUA Ke, LIU Baoding. Project scheduling problem with stochastic activity duration times [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 168(1): 342-353.
- [5] 杨应玖, 杨毅, 杨念. 论灰色网络计划技术[J]. 武汉水利水电大学学报, 1998, 31(3): 95-101.
- [6] LIU S F, LIN Y. An introduction to grey system: Foundations, methodology and applications [M]. Pennsylvania: IIGSS Academic Publisher, 1998, 13(24): 203-205.
- [7] 刘思峰, 谢乃明. 基于改进三角白化权函数的灰评估新方法[J]. 系统工程学报, 2011, 26(2): 245-252.
- [8] LIU Si-feng. Axiom on grey degree [J]. The Journal of Grey System, 1996, 7(2): 97-101.
- [9] 刘思峰, 方志耕, 谢乃明. 基于核和灰度的区间灰数运算法则[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(2): 314-318.
- [10] CHANNS S, KUCHRA D. Multi-objective programming in optimization of interval objective functions-a generalized approach [J]. European Journal of Operational Research, 1996, 94: 594-598.
- [11] SENGUPTA A, PAL T K. On comparing interval numbers [J]. European Journal of Operational Research, 2000, 127: 28-43.
- [12] 徐则水, 达庆利. 区间数排序的可能度法及其应用[J]. 系统工程学报, 2003, 18(1): 67-71.
- [13] 谢乃明, 刘思峰. 考虑概率分布的灰数排序方法[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29(4): 169-175.
- [14] MACCRIMMON K R, RYAVEC C A. An analytical study of the PERT assumptions [J]. Operational Research, 1964, 12(1): 16-37.
- [15] ANKLESARIA K P, DREZNER Z. A multivariate approach to estimating the completion times for PERT networks [J]. Journal of the Operational Research Society, 1986, 37(8): 811-815.
- [16] RAGSDALE C. The current state of the network simulation in project management theory and practice [J]. OMEGA, 1989, 17(1): 21-25.
- [17] CHANAS S, ZIZELINSKI P. The computational complexity of the criticality problems in a network with interval activity times [J]. European Journal of Operational Research, 2002, 136(4): 541-550.
- [18] WILLIAMS T M. Criticality in Stochastic Networks [J]. Journal of Operational Research Society, 1992, 43(4): 353-357.
- [19] WILLIAMS T M. What is Critical [J]. International Journal of Project Management, 1993, 11(4): 197-200.

作者简介

李旭升(1970-), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向: 项目管理, 决策科学, 数据挖掘;
石朝锋(1987-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向: 工程估价;
刘江(1979-), 男, 硕士研究生, 一级建造师, 国家注册造价工程师, 高级经济师, 主要研究方向: 项目管理。

(上接第 264 页)

- [9] LEON R, MURRAY J I, CRAGG G, et al. Identification and characterization of binding sites on S100A7, a participant in cancer and inflammation pathways [J]. Biochemistry, 2009, 48(44): 10 591-10 600.
- [10] RALHAN R, DESOUZA L V, MATTA A, et al. Discovery and verification of head-and-neck cancer biomarkers by differential protein expression analysis using iTRAQ labeling, multidimensional liquid chromatography, and tandem mass Spectrometry [J]. Molecular & Cellular Proteomics, 2008, 7(6): 1 162-1 173.
- [11] BARBIERI M R, ANDRADE C D, SILVA W A, et al. Expression of human protein S100A7 (psoriasin), preparation of antibody and application to human larynx squamous cell carcinoma [J]. BMC Research Notes, 2011, 4(494): 1 186-1 756.
- [12] EMBERLEY E D, ALOWAMI S, SNELL L, et al. S100A7 (psoriasin) expression is associated with aggressive features and alteration of Jab1 in ductal carcinoma in situ of the breast [J]. Breast Cancer Research, 2004, 6(4): 308-315.
- [13] ZHANG Hao, WANG Yinping, CHEN Yue, et al. Identification and validation of S100A7 associated with lung squamous cell carcinoma metastasis to brain [J]. Lung cancer, 2007, 57(1): 37-45.
- [14] KROP I, MARZ A, CARLSSON H, et al. A putative role for psoriasin in breast tumor progression [J]. Cancer Research, 2005, 65(24): 11 326-11 334.
- [15] TRIPATHI S C, MATTA A, KAUR J, et al. Nuclear S100A7 is associated with poor prognosis in head and neck cancer [J]. Public library of science one, 2010, 5(8): e11939.

作者简介

祝佼(1985-), 女, 硕士在读, 主要研究方向: 头颈部肿瘤;
骆文龙(1962-), 男, 博士后, 教授, 科主任, 博士生导师, 主要研究方向: 头颈部肿瘤; 面神经损伤与修复。