DOI: 10.13732/j.issn.1008-5548.2003.02.002

第 9 卷 第 2 期
2003 年 4 月

中 国 粉 体 技 术
China Powder Science and Technology

Vol.9 No.2
April 2003

超微粒子的量子阻尼振动理论

姜迅东[1]， 胡荣泽[2]

(1.东北大学理学院，辽宁 沈阳 110006； 2.钢铁研究总院，北京 100081)

摘 要：根据 SU(1,1)Lie 代数，建立超微粒子的量子阻尼振动理论，得到超微粒子量子阻尼振动系统的能级和波函数。

关键词：超微粒子；阻尼振动；能级；波函数

中图分类号：O413.1 **文献标识码**：A

文章编号：1008－5548(2003)02－0007－03

Theory of Quantum Damped Oscillation for Ultrafine Particles

JIANG Xun-dong[1], *HU Rong-ze*[2]

(1.School of Science, Northeast University, Shenyang, 110006;
2.Central Iron and Steel Research Institute, Beijing, 100081, China)

Abstract: Based on the theory of SU(1,1) Lie algebra, the theory of quantum damped oscillation for ultrafine particle is discussed The energy level and the wave function of quantum damped oscillation for ultrafine particles are obtained.

Key words: ultrafine particle; damped oscillation; energy level; wave function

近二十多年来，国内外的许多文献中以不同的观点提出了量子阻尼振动理论的研究结果。本文根据创新的 SU(1,1)Lie 代数理论，建立超微粒子量阻尼振动理论，得到超微粒子量子阻尼振动系统的能级和波函数的完整表示。

1 超微粒子的量子阻尼振动理论

首先研究一维经典阻尼振动系统，其哈密顿量 $H(t)$ 可以表示为

$$H(t)=\frac{p^2(t)}{2m}e^{-2\gamma t}+\left[\frac{1}{2}m\omega^2x^2(t)-f(t)x(t)\right]e^{2\gamma t}, \tag{1}$$

式中，$x(t)$ 和 $p(t)$ 分别表示经典阻尼振动系统的正则坐标和正则动量；

m 为系统的质量；

ω 为系统的固有频率；

γ 为阻尼因子；

$f(t)$ 为与时间有关的外力。

$$\dot{x}(t)=\frac{\partial H(t)}{\partial p(t)}=\frac{p(t)}{m}e^{-2\gamma t}, \tag{2}$$

$$\dot{p}(t)=-\frac{\partial H(t)}{\partial x(t)}=\left[-m\omega^2x(t)+f(t)\right]e^{2\gamma t}, \tag{3}$$

$$\ddot{x}(t)=\frac{\dot{p}(t)}{m}e^{-2\gamma t}-2\gamma\frac{p(t)}{m}e^{-2\gamma t}, \tag{4}$$

将(2)式和(3)式代入(4)式中，得到

$$\ddot{x}(t)+2\gamma\dot{x}(t)+\omega^2x(t)=\frac{f(t)}{m}, \tag{5}$$

(5)式表示一维经典阻尼振动系统的动力学方程。

超微粒子是微观粒子，为了得到超微粒子的量子哈密顿量，必须将(1)式进行量子化处理，将 $x(t)$ 和 $p(t)$ 视作量子算符，得到超微粒子一维量子阻尼振动系统的量子哈密顿量 $H(t)$ 为

$$H(t)=\frac{p^2(t)}{2m}e^{-2\gamma t}+\left[\frac{1}{2}m\omega^2x^2(t)-f(t)x(t)\right]e^{2\gamma t}, \tag{6}$$

式中，$x(t)$ 和 $p(t)$ 分别为量子坐标算符和量子动量算符。它们满足下述对易关系

$$[x(t),p(t)]=i\hbar \tag{7}$$

式中
$$p(t)=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x(t)}, \tag{8}$$

引入湮灭算符 $a(t)$ 和产生算符 $a^+(t)$

$$a(t)=\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2}\left[x(t)+\frac{i}{m\omega}p(t)\right], \tag{9}$$

$$a^+(t)=\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2}\left[x(t)-\frac{i}{m\omega}p(t)\right], \tag{10}$$

且
$$[a(t),a^+(t)]_-=1, \tag{11}$$

定义零时刻的湮灭算符 a 和产生算符 a^+

$$a=\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2}\left(x+\frac{i}{m\omega}p\right) \tag{12}$$

收稿日期：2003－02－24
第一作者简介：姜迅东(1944－)，男，硕士，副教授。

$$a^{+}=(\frac{m\omega}{2\hbar})^{1/2}(x-\frac{i}{m\omega}p),\tag{13}$$

式中，x 和 p 分别为零时刻的量子坐标算符和量子动量算符；

p 表示为 $p=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$。

x 和 p 满足对易关系

$$[x,p]_{-}=i\hbar,\tag{14}$$

且
$$[a,a^{+}]_{-}=1,\tag{15}$$

定义下述么正变换

$$a(t)=U^{+}(t)aU(t),\tag{16}$$

$$a^{+}(t)=U^{+}(t)a^{+}U(t),\tag{17}$$

式中
$$U(t)=e^{\frac{1}{2}\omega t a^{2}-\frac{1}{2}\omega t a^{+2}},\tag{18}$$

且
$$U^{+}(t)=U^{-1}(t),\tag{19}$$

由(16)、(18)式，得到下述关系式

$$a(t)=a\,\mathrm{ch}\,\omega t-a^{+}\mathrm{sh}\,\omega t,\tag{20}$$

$$a^{+}(t)=a^{+}\mathrm{ch}\,\omega t-a\,\mathrm{sh}\,\omega t,\tag{21}$$

将(9)、(10)、(12)、(13)式代入(20)式和(21)式中，得到 $x(t)$ 和 $p(t)$ 的表达式

$$x(t)=xe^{-\omega t},\quad p(t)=pe^{\omega t},\tag{22}$$

式中
$$\omega t=2\pi s,\tag{23}$$

式中 $s=0,1,2,\cdots$。

利用(22)式和(23)式，将(6)式表示为

$$H(s,t)=\frac{p^{2}}{2m}e^{-2(\gamma t-2\pi s)}+\frac{1}{2}m\omega^{2}x^{2}e^{2(\gamma t-2\pi s)}-f(t)xe^{2(\gamma t-\pi s)},\tag{24}$$

利用创新的 SU(1,1) Lie 代数，可以将(24)式表示为

$$H(t)=-\frac{\hbar\omega}{2}(K_{+}+K_{-}-2K_{0})e^{-2(\gamma t-2\pi s)}+\frac{\hbar\omega}{2}(K_{+}+K_{-}+2K_{0})e^{2(\gamma t-2\pi s)}-(\frac{\hbar}{2m\omega})^{1/2}(a+a^{+})f(t)e^{2(\gamma t-\pi s)},\tag{25}$$

式中
$$K_{0}=\frac{1}{2}(a^{+}a+\frac{1}{2}),\ K_{+}=\frac{a^{+2}}{2};\ K_{-}=\frac{a^{2}}{2},\tag{26}$$

且
$$[K_{+},K_{-}]_{-}=\pm K_{\pm},[K_{-},K_{+}]_{-}=2K_{0},\tag{27}$$

定义哈密顿量 $H(s,t)$ 的不变量

$$I=K_{0}^{2}-\frac{1}{2}[K_{+},K_{-}]_{+}=-\frac{3}{16},\tag{28}$$

由(25)式和(28)式可知，$H(s,t)$ 与 I 对易，因此它们具有共同的本征矢，记此本征矢为 $|n,k\rangle$，

令
$$I|n,k\rangle=k(k-1)|n,k\rangle,\tag{29}$$

$$K_{0}|n,k\rangle=(n,k)|n,k\rangle,\tag{30}$$

则
$$K_{+}|n,k\rangle=[(n+2k-1)n]^{1/2}|n+1,k\rangle,\tag{31}$$

$$K_{-}|n,k\rangle=[(n+2k-1)n]^{1/2}|n-1,k\rangle,\tag{32}$$

且
$$a|n,k\rangle=\lambda(n,k)|n,k\rangle,\tag{33}$$

式中 $n=0,1,2,\cdots;k=\frac{1}{4}$，

且
$$\lambda(n,k)=(n+k)^{1/2}+i(n+k-\frac{1}{2})^{1/2},\tag{34}$$

$$\lambda^{*}(n,k)=(n+k)^{1/2}-i(n+k-\frac{1}{2})^{1/2},\tag{35}$$

式中，$\lambda(n,k)$ 和 $\lambda^{*}(n,k)$ 分别为某个二次方程的根

下述关系成立

$$a|\nu\rangle=\nu^{1/2}|\nu-1\rangle,\tag{36}$$

$$a^{+}|\nu\rangle=(\nu+1)^{1/2}|\nu+1\rangle,\tag{37}$$

式中 $\nu=0,1,2,\cdots$。

将 $|n,k\rangle$ 表示成下述形式

$$|n,k\rangle=\sum_{\nu=0}^{\infty}C_{\nu}|\nu\rangle,\tag{38}$$

式中，C_{ν} 为复展开系数。

可以证明 $|n,k\rangle$ 为正交归一化本征矢。

利用(33)、(36)、(38)式，得到正交归一化本征矢 $|n,k\rangle$ 的具体表示

$$|n,k\rangle=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2}|\lambda(n,k)|^{2}}\lambda^{\nu}(n,k)}{(\nu!)^{1/2}}|\nu\rangle,\tag{39}$$

超微粒子一维量子阻尼振动系统的波函数 $\Psi[x(s),t]$ 可以表示为

$$\Psi[x(s),t]=e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{0}^{t}H(s,t')dt'}\Psi[x,0],\tag{40}$$

由(40)式可知，$\Psi[x(s),t]$ 满足下述量子波动方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi[x(s),t]=H(s,t)\Psi[x(s),t],\tag{41}$$

令下述关系成立

$$H(s,t)\Psi[x(s),t]=E(s,t)\Psi[x(s),t],\tag{42}$$

由(41)式及(42)式得到

$$\Psi[x(s),t]=e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{0}^{t}E(s,t')dt'}\Psi(x,0),\tag{43}$$

式中 $E(s,t)$ 为系统的能量，

$$E(s,t)=\sum_{n,k}E_{n,k}(s,t),\tag{44}$$

式中
$$E_{n,k}(s,t)=\langle n,k|H(s,t)|n,k\rangle,\tag{45}$$

将(25)式代入到(45)式中,并利用(30)、(31)、(32)、(33)、(34)、(35)式,得到 $E_{n,k}(s,t)$ 的具体表达式

$$E_{n,k}(s,t)=2(n+k)\hbar\omega \mathrm{ch}2(\gamma t-2\pi s)-\left(\frac{2\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}(n+k)^{1/2}f(t)\mathrm{e}^{2(\gamma t-\pi s)}, \tag{46}$$

且

$$\Psi(x,0)=\sum_{n,k}C_{n,k}\Psi_{n,k}(x), \tag{47}$$

式中

$$\Psi_{n,k}(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\lambda(n,k)|^2}\lambda^{\nu}(n,k)}{(\nu!)^{1/2}}\Psi_{\nu}(x), \tag{48}$$

式中

$$\Psi_{\nu}(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{(2^{\nu}\nu!)^{1/2}}H_{\nu}\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2}x\right]\mathrm{e}^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}, \tag{49}$$

2　结　论

本文根据 SU(1,1) Lie 代数理论,建立超微粒子的量子阻尼振动理论,得到超微粒子量子阻尼振动系统的能级和波函数具体表示,结果表明理论的建立是合理的。

值得指出,函数 e^x 和函数 $\mathrm{ch}\,x$ 在作幂级数展开时,其自变量 x 的取值区间为 $-\infty<x<\infty$,因此要求(46)式中的自变量 t 的取值区间为 $-\infty<t<\infty$,表明时间不可能取无穷大或负无穷大,以此消除某些认识上的误解。

参考文献:

[1]　姜迅东. 阻尼振子的量子论[J]. 东北工学院学报,1982,(1):25—37.

[2]　姜迅东,胡荣泽. 超微粒子的一维振动的量子化处理[J]. 中国粉体技术,2002,8(2):8—12.

信息之窗

第三届全国超(微)细粉体工程与精细化学品开发成果推广会通知

根据国家科技部、国家计委和中国石油和化学工业协会的指示精神,中国化工学会精细化工专业委员会、中国石油和化学工业协会培训中心、中国化工学会培训中心、全国化工实用高新技术协作网将于 2003 年 7 月中旬在广西桂林市组织召开《第三届全国超(微)细粉体工程与精细化学品开发成果推广会》。

会议将着重研讨国内外超(微)细粉体工程特别是纳米科技的发展状况,介绍最新超细和纳米科技科研成果,推广精细化学品技术项目,交流粉体工程和纳米科技在精细化学领域应用的经济技术信息,同时邀请有志于涉足该领域的全国石油、化工、日化、生物化工、制药、颜料、涂料、塑料、造纸、陶瓷等生产企业的厂长、总工和产品开发办负责人出席会议,参与项目交流与合作。

会议内容:1.世界超细、超微细粉体工程和精细化工最近发展动态;2.超细粉体和纳米科技改造传统化工产业的若干技术项目市场分析;3.中国纳米产业链和技术平台;4.纳米产业投资风险、技术风险和市场风险分析;5.纳米粉体产业生产线设计和纳米粉体产品设计;6.纳米催化技术在绿色高新精细化工中的应用;7.纳米材料和技术与能源、环境产业;8.超微粉体在医学和保健食品的应用;9.纳米涂料的产业化和涂层技术;10.纳米复合材料开发研究和推广应用;11.超微粉体助剂在功能化塑料、橡胶和纤维中的应用;12.超细粉体在造纸涂层上的应用;13.纳米材料在润滑油脂的应研究;14.纳米膨润土的生产与应用;15.纳米粉体的表面修饰技术;16.纳米粉体分散技术和复合粒子技术;17.纳米粉体保存与运输、产品的一致性和稳定性。

欢迎各界有关人士积极参加会议,欢迎有相关技术成果的单位到会作新技术、新产品介绍,并将论文或资料于 6 月 10 日前寄至培训中心章卫星处,以便排版印刷。

中国化工学会精细化工专业委员会:

联系人:王大全主任兼秘书长　电话:(010)64262400　传真:(010)64262400

中国化工学会培训中心:(请将有关资料及会议回执寄至培训中心)

联系地址:上海市天山路 461 弄 18 号,中国化工学会培训中心　邮编:200336　联系人:章卫星　农泽民

电　话:(021)62733056,62596690,62599706　传　真:(021)62596776

中心网址:www.traincenter.com.cn　EMAIL:traincenter@citiz.net