大偏心率椭圆轨道星上轨道外推的参数化模型

王佳铭, 汤靖师*

南京大学天文与空间科学学院, 南京 210023

*联系人, E-mail: jstang@nju.edu.cn

收稿日期: 2021-02-02; 接受日期: 2021-04-12; 网络出版日期: 2021-11-08

国家自然科学基金(编号: 11873031)和中央高校基本业务费专项(编号: 020114380037)资助项目

摘要 众所周知, 数值方法和分析方法都可以用于轨道预报. 一般而言, 采用数值方法可以获得更高的精度, 采用分析方法可以达到更高的效率. 对于近圆轨道卫星, 已有许多成熟的数值方法和分析方法可以用于轨道预报. 而对于大偏心率椭圆轨道卫星, 这些方法都有各自的局限性. 传统的数值积分器工作效率较低; 分析方法中多采用简化的力模型, 因而可以达到的精度有限. 为实现大偏心率椭圆轨道卫星的星上轨道预报, 本文提出了一种解决方案. 其核心思想是基于摄动分析解的表达式, 尝试构造拟合公式, 用不同的频率项反映摄动影响下轨道根数的周期变化和长期变化. 最终以拟合和计算的过程代替求解微分方程, 建立参数化模型, 从而实现轨道外推. 应用此模型时, 将首先通过拟合公式对真近点角 f 、近点角距 ω 、升交点经度 Ω 、轨道倾角 i 和地心距 r 进行拟合与计算, 然后利用这5个轨道根数计算出卫星在惯性坐标系下的位置矢量, 得到最终的预报结果. 为检验方法的可行性, 本文利用该参数化模型对33颗闪电轨道卫星进行了轨道外推. 对每颗卫星分别进行28组试验, 每组算例的外推弧段为3天. 数值试验结果表明, 轨道根数 f , ω , i 与 r 的计算结果受到轨道偏心率的影响. 3天内, 轨道外推的位置精度一般约为百米级.

关键词 轨道力学, 轨道预报, 大偏心率椭圆轨道, 闪电轨道

PACS: 95.10.Ce, 95.10.Eg, 95.55.-n

1 引言

轨道预报已经被广泛用于各类空间任务中. 随着人造卫星和空间碎片数量的增加, 现代空间任务需要对绕地轨道上无数的空间目标进行更快速、更准确的轨道预报^[1]. 为实现精准又高效的轨道预报, 各种模型和方法已经发展起来, 并且其中很多已经成功地应用

于天体力学领域^[2].

在解决轨道预报问题的实际应用中, 具体方法可以分为分析法、数值法和半分析法^[3]. 基于基础的轨道理论和Brouwer的奠基性工作, 许多分析方法陆续被提出^[4-6]. 这些分析方法中多采用简化的力模型. 由于其固有的近似性^[1], 分析方法可以实现更为简便的计算, 但是精度有限. 为达到高精度的需求, 数值方法

引用格式: 王佳铭, 汤靖师. 大偏心率椭圆轨道星上轨道外推的参数化模型. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2022, 52: 229511

Wang J M, Tang J S. A parameterized model to achieve orbit extrapolation on-board for highly elliptical orbits (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2022, 52: 229511, doi: [10.1360/SSPMA-2021-0035](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2021-0035)

是更为合适的选择, 例如, 常用的Runge-Kutta-Fehlberg (RKF)方法已成为目前被广泛采用的单步法. 其中, RKF7(8)嵌套公式被广泛应用于求解全局误差小于 10^{-6} 的问题^[7]. 除单步法外, Adams-Bashforth方法和Adams-Moulton方法等多步法, 也常被采用以达到更高的效率需求. 此外, 通过对Adams方法概念的扩展, Cowell和Crommelin^[8]在预报哈雷彗星回归的工作中提出了Cowell方法. 此方法比利用Adams方法求方程的数值解更为简便. 然而, 无论是单步法还是多步法, 这些传统数值积分器的工作效率非常慢. 通常在卫星的每个周期内需要积分100步甚至更多步才能给出较好的预报结果, 频繁而复杂的计算过程增加了对计算机存储空间的需求^[1]. 为寻求预报精度与计算效率之间的平衡, Cefola团队^[9]在20世纪70年代中期提出了半分析法. 这种方法也被后来的许多学者进行了扩展和改进, 并成功地应用于近圆轨道卫星的轨道预报任务中^[10,11].

不同于近圆轨道卫星, 若要实现大偏心率椭圆轨道卫星的星上轨道外推, 上述方法均有不足之处. 首先, 传统数值积分器的计算速度过慢, 而星上的计算能力有限. 其次, 由于在分析方法中对力模型进行了简化, 使用这些分析方法将无法得到令人满意的结果^[4,12]. 例如, Hoots和France^[5]在1997年提出混合星历模型, 该方法通过傅里叶级数和幂级数模拟各轨道根数的周期变化规律, 再利用最小二乘法拟合参考星历获得模型所需参数. 将利用该方法所得的预测星历与参考星历进行比较, 可以看出对于近圆轨道卫星, 7 d的位置误差均方根值约为500 m; 而对于偏心率为0.75的大偏心率椭圆轨道卫星, 7 d的位置误差均方根值约为2 km. 根据Sang等人^[13]在2017年所提出的方法, 首先利用切比雪夫多项式拟合长期项, 再利用傅里叶级数拟合周期项, 最后利用正弦函数之和拟合剩余残差. 其计算结果显示, 对于近圆轨道卫星, 预报5 d的位置误差均方根值约为几十到几百米. 但是对于大偏心率椭圆轨道, 此方法的预报误差会大很多. 此外, 由于傅里叶级数的使用, 该方法需要大量的参数与相应的存储空间.

为实现大偏心率椭圆轨道卫星的星上轨道外推, 本文尝试提出一种新的解决方案. 其核心思想是基于摄动分析解的表达式, 尝试构造拟合公式, 用不同的频率项反映摄动影响下轨道根数的周期变化和长期变

化. 最终以拟合和计算的过程代替求解微分方程, 建立参数化模型, 从而实现轨道外推. 例如, 在星上计算能力受限的情况下, 使用已有的数值或分析方法将无法满足大偏心率椭圆轨道预报的需要. 而利用本方法可以在地面上计算好拟合系数, 再将系数上传到星上进行轨道预报, 从而提高了星上的计算速度和效率. 此方法的关键在于拟合公式的构造, 具体细节将在第2节中详细介绍. 为检验方法的可行性, 本文利用该参数化模型对33颗大偏心率椭圆轨道卫星进行了轨道外推. 具体的数值试验结果和针对结果进行的讨论将分别在第3节和第4节中给出.

2 方法

2.1 变量选择

表1列出了用于试验的大偏心率椭圆轨道卫星的具体信息和轨道参数. 从中可以看出, 这些轨道的偏心率约为0.7, 轨道倾角约为 63° , 轨道周期约为12 h. 这类轨道称为闪电轨道, 是为苏联及俄罗斯的Molniya系列通信卫星而设计的轨道^[14]. 这种轨道在中高纬度地区的天气和气候观测中具有独特的优势. 显然, 这种轨道上的卫星在远地点附近移动非常缓慢, 而在近地点附近移动速度很快^[15]. 这意味着卫星的运动随时间的变化是非均匀性的. 与近圆轨道不同, 时间 t 和平近点角 M 都不能直接反映此类卫星的真实位置. 考虑到真近点角决定了卫星在轨道中的具体位置, 因而可以用真近点角 f 对卫星位置进行准确的描述^[16]. 由此, 在本方法中将选择真近点角 f 作为拟合公式的自变量.

在利用此模型进行轨道外推时, 考虑到位置矢量可由轨道根数计算得到, 其随时间的变化规律表现为各轨道根数变化规律的耦合项. 因此若直接拟合位置矢量, 需要在拟合公式中考虑复杂的变化规律, 从而增加较多的频率项, 这将使拟合公式非常复杂. 相应地, 模型所需要的参数也会大大增加. 因此, 为节省存储空间同时提高计算效率, 本方法选择利用拟合公式, 对真近点角 f 、近点角距 ω 、升交点经度 Ω 、轨道倾角 i 和地心距 r 这5个轨道根数进行独立拟合与计算. 位置矢量是这些参数的耦合, 变化规律复杂; 相比之下, 这些轨道根数的变化规律相对简单、清晰. 这样使得拟合公式及拟合过程更为简便. 最后再通过星历计算得到卫星在惯性坐标系下的位置矢量.

表 1 试验卫星的具体信息与轨道参数

Table 1 Information and orbital elements of tested satellites

卫星编号	NORAD ID	远地点 (km)	近地点 (km)	轨道倾角 (°)	偏心率	轨道周期 (min)
1	7276	39616.3	1115.5	64.1	0.6828	587.5
2	7376	37912.0	2377.9	63.6	0.7250	716.2
3	7780	39666.1	704.7	63.1	0.7413	717.8
4	8195	39175.5	940.5	63.2	0.7501	712.7
5	8601	39972.4	499.7	62.8	0.7165	719.9
6	9880	40072.4	348.0	62.6	0.7288	718.8
7	10455	39583.0	817.7	62.3	0.7239	718.4
8	10925	38966.0	1409.0	62.5	0.7285	717.9
9	11896	39096.4	1278.0	62.6	0.7474	717.9
10	12156	38575.8	915.2	62.0	0.7137	700.1
11	13012	39467.0	859.3	63.4	0.6781	716.9
12	13070	39925.5	455.3	62.4	0.7331	718.0
13	13875	39268.6	1064.8	63.5	0.6742	717.1
14	13890	39349.6	1138.4	63.2	0.6898	720.2
15	15214	40059.3	789.3	62.7	0.7184	727.5
16	15429	37639.6	2737.6	63.7	0.6932	717.9
17	15738	30898.5	1547.6	63.8	0.6540	563.3
18	16393	36035.5	2351.1	64.6	0.6574	678.0
19	17078	37639.6	2737.6	63.7	0.6998	717.9
20	17328	37995.4	2375.7	63.8	0.6941	717.8
21	18946	38333.3	2045.6	63.5	0.7068	718.0
22	19807	38916.3	1464.0	64.4	0.6831	718.0
23	21118	37752.6	1817.4	64.5	0.6842	701.6
24	21196	38176.3	1776.2	64.7	0.6825	709.4
25	21426	38846.8	1524.8	64.1	0.6783	717.8
26	21706	37534.5	2183.9	64.2	0.7061	704.6
27	22178	35296.7	1839.6	64.7	0.6903	653.3
28	22671	13448.2	517.2	63.1	0.4881	256.0
29	22949	37924.3	2049.8	63.4	0.7325	709.8
30	23420	23864.1	1166.1	64.2	0.6178	430.5
31	24960	25529.7	739.6	63.5	0.6522	451.9
32	25485	34239.1	619.7	62.9	0.7490	609.0
33	25847	39782.6	580.3	62.4	0.7208	717.7

2.2 参数化模型

图1展示了应用此模型进行轨道外推时的三个主要步骤: 获得参考轨道、拟合轨道根数、计算轨道根数与位置矢量。下面将详细介绍并解释其中的具体内容。

2.2.1 参考轨道

在应用此模型前, 首先需要获得参考轨道。这一过程可以选择不同的数值积分方法, 具体预报弧段也可根据实际需求进行选择。本文选用RKF7(8)数值积分器, 考虑WGS84地球重力场模型, 阶次选择为10阶; 考

图 1 参数化模型在实际应用中的主要步骤

Figure 1 Main steps of using the parameterized model in a real application.

考虑日月引力摄动及其引起的固体潮摄动; 考虑大气阻力摄动, 大气光压摄动与后牛顿效应, 对33颗闪电轨道卫星分别进行30 d的轨道预报. 由此得到的参考轨道将作为评估该参数化模型可行性与计算预报精度的重要参考数据.

2.2.2 拟合公式

该方法的核心在于拟合公式的构造. 为寻找合适的拟合公式, 需要对摄动分析解的表达式进行仔细分析. 在摄动分析解的表达式中, 轨道根数的变化规律包括短周期变化、长周期变化与长期变化. 初步分析表明: 在轨道外推弧段内, 地心距 r 的变化表现出周期效应; 轨道倾角 i 的变化表现出周期效应与长期的积累效应; 真近点角 f 、近点角距 ω 和升交点经度 Ω 的变化呈现出周期变化与长期变化. 通过对轨道摄动分析解的分析, 可构造如式(1)所示的拟合公式:

$$\sigma = \sigma_f(f) + \sigma_p(t) + \sigma_l(t), \quad (1)$$

其中, σ 分别代表5类轨道根数; σ_f , σ_p 和 σ_l 三项用于描述各类摄动作用的影响以及在其影响下轨道根数的变化规律.

拟合公式的第一部分以真近点角 f 为自变量, 通过三角函数的形式描述轨道根数的短周期变化, 如式(2)所示:

$$\sigma_f(f) = \sum_{j=1}^{N_f} [A_j^{\sigma} \cos jf + B_j^{\sigma} \sin jf], \quad (2)$$

其中, N_f 是三角函数的阶数; A_j 和 B_j 是未知参数.

基于对摄动分析解表达式的分析, 拟合公式的第二部分依旧采用三角函数的形式. 通过考虑卫星自转周期 T_o 、近点角距 ω 的变化周期 T_{ω} 、地球自转周期 T_e 和月球平运动周期 T_m 描述各类摄动作用的影响. 卫星自转周期与近点角距的变化周期根据不同卫星选择具体数值, 地球自转周期为1 d, 月球平运动周期为27.55 d. 具体形式如式(3)所示:

$$\sigma_p(t) = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^{N_i} \left[c_{ki}^{\sigma} \cos \left[\frac{2\pi k(t-t_0)}{T_i} \right] + s_{ki}^{\sigma} \sin \left[\frac{2\pi k(t-t_0)}{T_i} \right] \right], \quad (3)$$

其中, N_i (N_o , N_e , N_m , N_{ω})代表三角函数的阶数; T_i (T_o , T_e , T_m , T_{ω})代表不同的运动周期; c_i 和 s_i 是未知参数; t_0 代表初始时刻.

若轨道预报弧段时长较短, 长周期变化与长期的累积变化可以统一用时间 t 的线性变化项进行描述. 因此, 拟合公式的第三部分以时间 t 为自变量, 描述轨道根数的长期变化与其他长周期变化, 如式(4)所示:

$$\sigma_l(t) = \sigma_0 + \sigma_1(t-t_0), \quad (4)$$

其中, σ_0 是轨道根数的初值; σ_1 是轨道根数的长期变率; t_0 代表初始时刻.

为验证此方法的可行性, 本文利用此拟合公式对33颗闪电轨道卫星进行了轨道外推. 对每颗卫星分别进行28组试验, 每组算例的外推弧段为3 d. 在拟合阶次的选择过程中, 本文尝试了多种不同的阶次组合, 并对结果进行了比较. 下面通过例子进行简要说明. 以卫星#7276为例, 分别选择如表2所示的3种阶次组合, 在同一弧段内对真近点角进行3 d的拟合与计算, 最终得到真近点角残差的均方根值, 结果如图2所示.

从图2可以看出, 相比于第一类阶次组合, 第二类阶次组合中 f 项阶次的升高使得真近点角的计算精度提高了1个量级. 而比较第二类与第三类阶次组合, 可以发现仅增加地球自转周期项的阶数, 对真近点角的拟合与计算精度几乎没有影响. 按照上述过程, 可以通过试验不同的阶次组合, 分别增减各拟合项的阶数, 从而在保证精度的同时减少参数个数, 最终根据实际需要, 选择最为合适的阶数与项数.

经过试验, 在保证预报精度同时减少数据量的前提下, 满足本工作需要的最合适的阶数与项数选择如

表 2 拟合真近点角的3种阶次组合

Table 2 Three groups of orders to fit true anomaly

轨道根数	三角函数阶数					参数数量
	f	T_o	T_e	T_m	T	
f	8	4	2	2	4	42
f	12	4	2	2	4	50
f	12	4	4	2	4	54

图 2 (网络版彩图)以卫星#7276为例, 在同一弧段内, 分别选择如表2所示的第一类阶次组合(a)、第二类阶次组合(b)以及第三类阶次组合(c), 对真近点角进行3 d的拟合, 并利用所得系数进行计算, 最终得到的真近点角残差的均方根值

Figure 2 (Color online) Taking satellite #7276 for example, three groups of orders in Table 2 are separately chosen to fit true anomaly in the same predicting span. The RMS errors of true anomaly in three days are then calculated by the parameters, shown as (a) the first group of orders, (b) the second group of orders, and (c) the third group of orders.

表3所示. 若以双精度浮点型数据存储, 每个双精度浮点型数据占8个字节, 则所需的219个参数共占有存储空间1.71 KB. 需要注意的是, 本文所提出的拟合公式可以用于不同弧段长度的轨道外推. 上述选择仅为在此试验条件下的最佳选择. 在实际应用中, 可根据轨道摄动分析解的构造调整拟合公式中项数和阶数的选择. 以小偏心率轨道为例, 由于在分析解的构造中, 包含真近点角的短周期项的系数与偏心率相关, 而偏心率的幂次和真近点角以及近点角距的系数有关. 因此, 在利用此模型对小偏心率轨道进行轨道预报时降低拟

合公式中真近点角、近点角距相关项的最高阶次是符合实际分析解构造的. 其次, 还可以根据轨高度调整非球形引力项和反映第三体的月球平运动项的阶次. 以此为指导对拟合公式的具体项数和阶数进行实际调整 and 选择.

确定拟合公式的项数选择后, 可以利用上述公式对5个轨道根数进行拟合. 得到并存储拟合公式中的各项参数, 用于后续计算过程.

同时, 为验证不同的拟合弧长对拟合参数的影响, 本文还尝试了以卫星#7376为例, 选择如表3所示的阶次组合, 对不同的拟合弧长分别进行试验, 以拟合弧段内真近点角的计算精度为例, 说明不同的拟合弧长对于拟合参数的影响, 结果如表4所示.

从表4中可以看出, 在选择相同的阶数与项数时, 拟合弧段越短, 相应的拟合精度和计算精度稍有提高, 但是并不显著. 因此在满足精度要求的前提下, 拟合较小弧长的轨道时, 可以适当减少参数的个数.

2.2.3 计算轨道根数与卫星位置矢量

轨道根数的计算过程仍需用到拟合公式. 将拟合过程中得到的各项已知参数分别代入 σ_f , σ_p 和 σ_i , 结合

表 3 拟合公式中各项阶数与相应参数数量

Table 3 Orders of periods in the fitting formulas and corresponding number of total parameters

轨道根数	三角函数阶数					参数数量
	f	T_o	T_c	T_m	T	
f	12	4	2	2	4	50
ω	15	2	2	2	0	44
Ω	12	2	2	2	0	38
i	12	2	2	2	0	38
r	14	2	2	2	4	49

表 4 不同拟合弧长内真近点角的计算精度

Table 4 Calculating accuracy of true anomaly within different predicting spans

拟合弧长 (h)	Max error	RMS error
24	1.3774×10^{-4}	2.2685×10^{-5}
48	1.4441×10^{-4}	2.2992×10^{-5}
72	1.6764×10^{-4}	2.4827×10^{-5}
120	1.8422×10^{-4}	2.5799×10^{-5}

拟合公式中的自变量真近点角 f 与时间 t , 便可计算出卫星各时刻的轨道根数. 然而, 在实际应用中, t 为已知变量而 f 为未知变量. 若要计算卫星的轨道根数, 需首先知道卫星在各时刻的真近点角 f . 因此, 在计算各轨道根数之前, 需要首先计算真近点角 f .

具体计算方法为: 利用在拟合过程中所得参数求解函数 $g(f)$ 的零点, 计算出真近点角 f . 函数 $g(f)$ 的具体形式如式(5)所示.

$$g(f) = f - f_f(f) - f_i(t) - f_p(t), \quad (5)$$

其中, f_f , f_i 和 f_p 分别为当 σ 为真近点角 f 时, 其拟合公式中的第一项、第二项和第三项.

为求得函数 $g(f)$ 的零点, 可选择多种迭代方法进行迭代求解. 该迭代问题的初值如式(6)所示:

$$f_0 = f_i(t) + f_p(t). \quad (6)$$

为提高收敛的稳定性并加快收敛速度, 本文选择了Halley方法进行迭代求解^[17,18]. Halley方法所用到的迭代公式如下:

$$f_{k+1} = f_k - \frac{g(f_k)}{g'(f_k) - \frac{g''(f_k)g(f_k)}{2g'(f_k)}}, \quad (7)$$

其中, $g'(f)$ 为函数 $g(f)$ 的一阶导数, $g''(f)$ 为函数 $g(f)$ 的二阶导数.

$g'(f)$ 与 $g''(f)$ 的具体形式如下:

$$g'(f) = 1 + \sum_{j=1}^{N_f} f [A_j^\sigma \sin jf - B_j^\sigma \cos jf], \quad (8)$$

图 3 (网络版彩图)利用此模型对33颗大偏心率椭圆轨道卫星分别进行轨道外推. (a) 真近点角 f 的残差最大值; (b) 真近点角 f 的残差均方根值. 由于所选择的外推弧段共有28组, 且不同外推弧段的起始时刻相隔1 d, 因此在横轴上表现为连续的28 d. 折线图中每条曲线代表一颗闪电轨道卫星. 每条曲线上数据点的横坐标代表该数据所在外推弧段的起始时间, 纵坐标代表该数据所在外推弧段内的残差最大值或均方根值

Figure 3 (Color online) This model has been used to extrapolate orbits of 33 Molniya satellites. (a) The maximum residuals of true anomaly f ; (b) the root mean square (RMS) residuals of true anomaly f . There are 28 groups of extrapolating spans and the start point of each span is 1 d apart. Consequently, the horizontal axis consists of continuous 28 d. Each line in the figure represents a Molniya orbit. Horizontal coordinate of each data point represents the start time of extrapolating span and vertical coordinate represents the maximum residual or RMS residual of corresponding extrapolating span.

$$g''(f) = \sum_{j=1}^{N_f} f^2 [A_j^\sigma \cos jf + B_j^\sigma \sin jf], \quad (9)$$

其中, N_f 是三角函数的阶数; A_j 和 B_j 是通过拟合公式拟合真近点角 f 后得到的参数.

通过 Halley 方法迭代求解出真近点角 f 后, 便可继续利用拟合公式计算其他 4 个轨道根数. 计算出卫星在外推弧段内各时刻的轨道根数后, 可通过轨道根数与位置矢量之间的转换关系, 进而计算出卫星在不同时刻的位置矢量.

3 数值试验结果

为检验该方法的可行性, 本文完整地应用此模型, 对 33 颗大偏心率椭圆轨道卫星分别进行了 28 组轨道外推. 每组试验中所选择的外推弧长均为 3 d. 由此, 外推弧段可覆盖月球的平运动周期, 从而降低月球对轨道预报精度所产生的影响. 为评估该方法的预报精度, 本文计算了应用此模型所得到的预报轨道与参考轨道间的残差. 除了 f 与 r 在近地点处计算精度稍低于原始

拟合精度, 其他参数的拟合精度和计算精度基本一致.

图 3(a) 和 (b) 展示了真近点角 f 的残差最大值与均方根值. 从图中可以看出, 对于同一颗卫星, 在不同外推弧段内, 真近点角 f 的残差相差较大. 总体来说, 图中呈现显著的周期性波动特征, 且残差的波动范围对不同的卫星来说存在明显差异.

图 4(a) 和 (b) 分别展示了地心距 r 的残差最大值与均方根值. 总体来说, 地心距残差的均方根值不大于 3 km. 某些卫星地心距残差的均方根值可以达到几百米甚至几十米. 由椭圆轨道中 r 的计算公式可知, 在二体关系中, 地心距 r 与真近点角 f 之间存在强相关性. 因此, 比较图 3 与图 4 可发现, 两者表现出类似的周期性波动趋势.

图 5-7 分别展示了近点角距 ω 、升交点经度 Ω 和轨道倾角 i 的残差最大值与均方根值. 从这三幅图中可以看出, 在覆盖一个月球平运动周期的外推弧段内, 这三类轨道根数残差的最大值与均方根值均没有表现出明显的波动特征, 且基本保持相对平稳的趋势.

从上述图中可以看出, 对于 33 颗闪电轨道卫星, 有些卫星的数值试验结果较为接近, 而有些卫星的数值

图 4 (网络版彩图) (a) 地心距 r 的残差最大值; (b) 地心距 r 的残差均方根值. 折线图中每条曲线代表一颗闪电轨道卫星. 每条曲线上数据点的横坐标代表该数据所在外推弧段的起始时间, 纵坐标代表该数据所在外推弧段内的残差最大值或均方根值

Figure 4 (Color online) (a) The maximum residuals of geocentric distance r ; (b) the RMS residuals of geocentric distance r . Each line in the figure represents a Molniya orbit. Horizontal coordinate of each data point represents the start time of extrapolating span and vertical coordinate represents the maximum residual or RMS residual of corresponding span.

图 5 (网络版彩图) (a) 近点角距 ω 的残差最大值; (b) 近点角距 ω 的残差均方根值. 折线图中每条曲线代表一颗闪电轨道卫星. 每条曲线上数据点的横坐标代表该数据所在外推弧段的起始时间, 纵坐标代表该数据所在外推弧段内的残差最大值或均方根值

Figure 5 (Color online) (a) The maximum residuals of argument of perigee ω ; (b) the RMS residuals of argument of perigee ω . Each line in the figure represents a Molniya orbit. Horizontal coordinate of each data point represents the start time of extrapolating span and vertical coordinate represents the maximum residual or RMS residual of corresponding span.

图 6 (网络版彩图) (a) 每组外推弧段内, 升交点经度 Ω 的残差最大值; (b) 每组外推弧段内, 升交点经度 Ω 的残差均方根值. 折线图中每条曲线代表一颗闪电轨道卫星. 每条曲线上数据点的横坐标代表该数据所在外推弧段的起始时间, 纵坐标代表该数据所在外推弧段内的残差最大值或均方根值

Figure 6 (Color online) (a) The maximum residuals of right ascension of ascending node Ω ; (b) the RMS residuals of right ascension of ascending node Ω . Each line in the figure represents a Molniya orbit. Horizontal coordinate of each data point represents the start time of extrapolating span and vertical coordinate represents the maximum residual or RMS residual of corresponding span.

图 7 (网络版彩图) (a) 轨道倾角 i 的残差最大值; (b) 轨道倾角 i 的残差均方根值. 折线图中每条曲线代表一颗闪电轨道卫星. 每条曲线上数据点的横坐标代表该数据所在外推弧段的起始时间, 纵坐标代表该数据所在外推弧段内的残差最大值或均方根值
Figure 7 (Color online) (a) The maximum residuals of orbital inclination i ; (b) the RMS residuals of orbital inclination i . Each line in the figure represents a Molniya orbit. Horizontal coordinate of each data point represents the start time of extrapolating span and vertical coordinate represents the maximum residual or RMS residual of corresponding span.

试验结果之间存在较大差异. 为找到其原因, 我们分析了数值试验结果与卫星各参数之间的相关关系. 最终, 我们发现各轨道根数的计算精度与卫星的轨道偏心率之间存在较强的相关性.

图8(a)–(d)分别为真近点角 f 、近点角距 ω 、轨道倾角 i 和升交点经度 Ω 的残差均方根值与轨道偏心率之间的相关关系图. 从前三幅散点图中可以看出, 除偏心率为0.4881的卫星外, 其余卫星的真近点角、近点角距和轨道倾角的残差均与轨道偏心率呈正相关关系, 残差的均方根值随轨道偏心率的增大而增大. 除图中所示轨道根数外, 由于在二体关系中地心距与真近点角之间存在强相关性, 因此可推测地心距的数值计算结果也会受到轨道偏心率的影响. 图8(d)中并未表现出明显的相关关系, 因此可认为升交点经度的数值计算结果未受到轨道偏心率的影响. 参考表1可知, 在用于试验的33颗Molniya卫星中, 大部分卫星的轨道偏心率约为0.7. 仅有卫星#22671例外, 其轨道偏心率为0.4881, 远小于其他卫星. 由于在应用此方法对不同试验卫星进行轨道外推时, 拟合公式中所选择的项数与阶数不变, 均如表3所示. 因此对于较小偏心率的卫星

#22671来说, 如在第2.2.2节中所述, 需按照精度要求灵活调整拟合公式中项数与阶数的选择.

图9描述了在 R 、 T 、 N 方向下, 卫星的位置矢量在3个方向的残差最大值与均方根值. 对于大部分卫星而言, 在其不同外推弧段内, 卫星的位置矢量在3个方向的残差均方根值均小于800 m. 为计算这些残差的范围与比例, 将图9中具体数据整理归类, 可得到如图10所示的柱形图. 在 N 方向, 超过90%的残差均方根值小于400 m; 在 R 方向和 T 方向, 超过80%的残差均方根值小于800 m.

图11描述了卫星位置矢量残差的最大值与均方根值. 在所有外推弧段内, 对33颗卫星的位置矢量残差均方根值进行统计, 可以得到: 超过60%的位置残差均方根值小于700 m, 超过70%的位置残差均方根值小于800 m, 超过80%的位置残差均方根值小于1.1 km. 由此可见, 利用此参数化模型对大偏心率椭圆轨道卫星进行轨道外推, 大多数情况下, 在3 d的外推弧段内位置矢量的残差均方根值约为几百米.

在本文的参数化模型中, 包含卫星真近点角 f 和地球自转周期的项用来反映非球形引力摄动; 包含卫星

图 8 (网络版彩图) 轨道偏心率与真近点角 f (a), 近点角距 ω (b), 轨道倾角 i (c) 以及升交点经度 Ω (d) 的残差均方根值之间的相关关系图. 横轴为卫星的轨道偏心率. 对同一颗卫星进行 28 组外推所得结果, 在图中对应为具有相同横坐标的 28 个数据点

Figure 8 (Color online) The relationship between eccentricity and RMS residuals of true anomaly f (a), argument of perigee ω (b), orbital inclination i (c), and right ascension of ascending node Ω (d). Horizontal axis presents the eccentricity of orbits. The 28 groups of calculating results for each satellite are shown as 28 data points with the same horizontal coordinate in this figure.

图 9 (网络版彩图) 卫星的位置矢量在 R 方向的残差最大值 (a) 与均方根值 (b); 在 T 方向的残差最大值 (c) 与均方根值 (d); 在 N 方向的残差最大值 (e) 与均方根值 (f). 折线图中每条曲线代表一颗闪电轨道卫星, 每条曲线上数据点的横坐标代表该数据所在外推弧段的起始时间, 纵坐标代表该数据所在外推弧段内的残差最大值或均方根值

Figure 9 (Color online) This figure shows (a) the maximum residuals of position in R direction, (b) RMS residuals of position in R direction, (c) the maximum residuals of position in T direction, (d) RMS residuals of position in T direction, (e) the maximum residuals of position in N direction, (f) RMS residuals of position in N direction. Each line in the figure represents a Molniya orbit. Horizontal coordinate of each data point represents the start time of extrapolating span and vertical coordinate represents the maximum residual or RMS residual of corresponding span.

图 10 (网络版彩图) 在所有外推弧段内, 33 颗卫星的位置矢量在 R , T , N 三个方向的残差均方根值统计图. 横轴表示残差均方根值的范围: 分别为小于 400 m, 600 m, 800 m, 1 km, 1.5 km 和 2 km. 纵轴表示相应的数值比例

Figure 10 (Color online) The comparison of RMS residuals in R , T and N directions. The sample includes the RMS residuals in 28 different extrapolating spans for all 33 satellites. Horizontal axis presents the ranges of RMS residuals, which are smaller than 400 m, 600 m, 800 m, 1 km, 1.5 km and 2 km, respectively. Vertical axis presents the percentage.

平运动和月球平运动的周期项可以反映第三体引力摄动; 长期项可以吸收各类摄动的长周期项在短时间内产生的变化项与大气阻力摄动产生的长期项. 对于人

造地球卫星而言, 除了 J_2 项通常为一阶摄动外, 第三体引力、大气阻力等其他摄动均不高于二阶. 但由于拟合公式形式简单且客观上难以表达大偏心率轨道所受的田谐项摄动, 因此所得的拟合与计算精度应低于二阶摄动解的一般精度 (10^{-6}), 并且在近地点处精度会更低 (受重力场影响更显著, 田谐项对应误差的反映也更显著). 数值试验结果可以与上述理论误差相互验证.

4 讨论与总结

数值试验结果表明, 真近点角、地心距以及位置矢量残差的最大值与均方根值都存在波动特征, 而其余轨道根数的数值试验结果并未表现出此趋势. 在建立此模型时, 基于摄动分析解的表达式构造拟合公式, 反映摄动的影响. 同时在数值试验中, 对每颗卫星均进行了 28 组轨道外推, 每组试验中所选择的外推弧长均为 3 d. 从而外推弧段可覆盖一个月球平运动周期, 降低了月球对轨道预报精度所产生的影响. 因而在利用现有参数化模型进行轨道外推时, 并未预料在结果中会出现周期约为 12–13 d 的波动. 上述结果预示在后续的工作中, 还需进一步调整和完善拟合公式, 在其中考

图 11 (网络版彩图) (a) 位置矢量的残差最大值; (b) 位置矢量的残差均方根值. 折线图中每条曲线代表一颗闪电轨道卫星. 每条曲线上数据点的横坐标代表该数据所在外推弧段的起始时间, 纵坐标代表该数据所在外推弧段内的残差最大值或均方根值

Figure 11 (Color online) (a) The maximum residuals of position; (b) the RMS residuals of position. Each line in the figure represents a Molniya orbit. Horizontal coordinate of each data point represents the start time of extrapolating span and vertical coordinate represents the maximum residual or RMS residual of corresponding span.

虑更多的频率和周期项, 以更为全面和完整地描述轨道根数的变化规律和摄动作用的影响.

在本文所述试验中, 由于工作背景为实现大偏心率椭圆轨道的星上轨道外推, 因而拟合公式的项数和阶数皆依据试验对象而选择. 在实际工作中, 可以依据实际情况灵活调整. 对于较小偏心率轨道, 为防止过拟合导致的个别轨道根数的计算精度下降, 可以在应用此参数化模型时适当减少拟合公式的项数与阶数. 在后续的工作中, 还会调整拟合公式的具体形式, 并将此模型应用于近圆轨道卫星的轨道预报.

通过分析数值计算结果与卫星各参数之间的相关

关系, 发现真近点角、近点角距、轨道倾角和地心距的计算结果主要受轨道偏心率的影响. 其残差的均方根值与轨道偏心率呈正相关关系.

利用本文所提出的参数化模型, 对33颗大偏心率椭圆轨道卫星分别进行28组轨道外推, 其结果显示: 在3 d的外推弧段内, 超过60%的位置残差均方根值小于700 m, 超过70%的位置残差均方根值小于800 m, 超过80%的位置残差均方根值小于1.1 km. 总体而言, 在大多数情况下, 此方法所得预报结果的位置精度约为百米级; 对于某些卫星, 其位置精度甚至可以达到10 m级.

参考文献

- 1 Danielson D A, Sagovac C P, Neta B, et al. Semianalytic Satellite Theory. Technical Report. Monterey: Naval Postgraduate School, 1995
- 2 Montenbruck O, Gill E. Satellite Orbits-Models, Methods, and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2000. 117–154
- 3 Hoots F R, France R G. An analytic satellite theory using gravity and a dynamic atmosphere. *Celestial Mech*, 1987, 40: 1–18
- 4 Brouwer D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. *Astron J*, 1959, 64: 378–397
- 5 Hoots F R, France R G. The future of artificial satellite theories hybrid ephemeris compression model. *Celestial Mech Dyn Astr*, 1997, 66: 51–60
- 6 Liu L, Wang Y R. An analytical method for satellite orbit prediction. *Chin Astron Astrophys*, 2006, 30: 68–74
- 7 Prince P J, Dormand J R. High order embedded Runge-Kutta formulae. *J Comput Appl Math*, 1981, 7: 67–75
- 8 Cowell P H, Crommelin A C D. Investigation of the Motion of Halley's Comet from 1759 to 1910. In: Greenwich Observations in Astronomy, Magnetism and Meteorology made at the Royal Observatory, Series 2. 1911, 71: O1–O84
- 9 Cefola P J. Equinoctial orbit elements—Application to artificial satellite orbits. In: AIAA and AAS, Astrodynamics Conference. Palo Alto, CA, 1972. AIAA 1972-937
- 10 Setty S J, Cefola P J, Montenbruck O, et al. Application of semi-analytical satellite theory orbit propagator to orbit determination for space object catalog maintenance. *Adv Space Res*, 2016, 57: 2218–2233
- 11 Wang D, Tang J, Liu L, et al. The assessment of the semi-analytical method in the long-term orbit prediction of Earth satellites. *Chin Astron Astrophys*, 2018, 42: 239–266
- 12 Kozai Y. The motion of a close earth satellite. *Astron J*, 1959, 64: 367–377
- 13 Sang J, Li B, Chen J, et al. Analytical representations of precise orbit predictions for Earth orbiting space objects. *Adv Space Res*, 2017, 59: 698–714
- 14 Sun R, Zhao C, Zhang M, et al. Dynamical evolution of high area-to-mass ratio objects in Molniya orbits. *Adv Space Res*, 2013, 51: 2136–2144
- 15 Kidder S Q, Vonder Haar T H. On the use of satellites in Molniya orbits for meteorological observation of middle and high latitudes. *J Atmos Ocean Technol*, 1990, 7: 517–522
- 16 Liu L. Orbit Theory of Spacecraft (in Chinese). Beijing: National Defense Industry Press, 2000 [刘林. 航天器轨道理论. 北京: 国防工业出版社, 2000]
- 17 Alefeld G. On the convergence of Halley's method. *Am Math Mon*, 1981, 88: 530–536
- 18 Gander W. On Halley's iteration method. *Am Math Mon*, 1985, 92: 131–134

A parameterized model to achieve orbit extrapolation on-board for highly elliptical orbits

WANG JiaMing & TANG JingShi^{*}

School of Astronomy and Space Science, Nanjing University, Nanjing 210023, China

In general, both numerical and analytical methods can be used to predict the orbit. Numerical integrations are often adopted to achieve high accuracy, while analytical methods are more efficient. Many methods can be successfully used to predict the orbit for near-circular orbits. However, when it comes to orbit extrapolation on-board for orbits of extreme eccentricities, these existing methods are impractical. Conventional numerical integrators are extremely slow and analytical methods cannot reach sufficient accuracy because of the simplified force model. To find an appropriate solution to achieve orbit extrapolation on-board for highly elliptical orbits, a parameterized model comprising a polynomial fitting formula is proposed herein. The exact form of the fitting formula was determined after the analysis of the analytical solution of perturbations. Different functions were used to reflect the periodic term and secular term under the effect of perturbations. Five orbital elements σ (true anomaly f , argument of perigee ω , right ascension of ascending node Ω , orbital inclination i and geocentric distance r) were first fitted and then calculated using the fitting formula. Real positions of satellites were also calculated using these five orbital elements and presented in an inertial coordinate system. A total of 33 Molniya orbits were tested using this method. Twenty-eight groups of tests were performed for each satellite, and each extrapolation spanned three days. The numerical test results indicate that residuals of orbital elements (f , w , i and r) are affected by the eccentricity of orbits. Position errors are generally several hundred meters in three days.

orbital mechanics, orbit prediction, highly elliptical orbit, Molniya orbit

PACS: 95.10.Ce, 95.10.Eg, 95.55.-n

doi: [10.1360/SSPMA-2021-0035](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2021-0035)