锥形坐标系中 3 维定常位势流方程的椭圆性原理

龙柄菰¹, 易超^{2*}

1. 复旦大学数学科学学院, 上海 200433;

2. 华中科技大学数学中心, 武汉 430074

E-mail: bsong15@fudan.edu.cn, chaoyi@hust.edu.cn

收稿日期: 2020-02-08; 接受日期: 2020-04-14; 网络出版日期: 2020-06-04; * 通信作者

中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 2019kfyXJJS134) 和国家留学基金委 (批准号: 201506100083) 资助项目

摘要 本文研究状态方程满足 $p'(\rho) = \rho^{\gamma-1}$ 的 3 维定常可压缩位势流方程, 其中 p 和 ρ 分别表示压强和密度, $\gamma \geq -1$ 是一个已知常数. 在锥形坐标系中, 位势流方程是一个典型的混合型方程, 其类型可由一个拟 Mach 数 L 决定: 方程是椭圆型的当且仅当 $L < 1$, 是双曲型的当且仅当 $L > 1$. 本文首先证明一个椭圆性原理: 当 $\gamma \geq -1$ 时, 此方程在抛物 - 椭圆区域的内部是椭圆型的. 特别地, 当 $\gamma > -1$ 时, 可找到一个与区域无关的函数 $\delta_0 > 0$ 使得 $L \leq 1 - \delta_0$. 然后利用该椭圆性原理, 可以更进一步地说明, 当 $\gamma \geq -1$ 时, 此方程在严格远离退化边界的任一子区域上是一致椭圆型的.

关键词 3 维定常位势流方程 混合型方程 椭圆性原理 抛物 - 椭圆区域 退化边界

MSC (2020) 主题分类 35L65, 35L67, 35J25, 35J70, 76N10

1 引言

本文关注的是 3 维空间中的定常位势流方程, 它由质量守恒定律和 Bernoulli 定律组成:

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\rho \nabla_{\mathbf{x}} \Phi) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{2} |\nabla_{\mathbf{x}} \Phi|^2 + h(\rho) = \frac{1}{2} K, \quad (1.2)$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, ρ 、 Φ 和 $\frac{1}{2}K$ 分别表示密度、位势函数和 Bernoulli 常数. 这里比焓 $h(\rho)$ 满足

$$h'(\rho) = \frac{p'(\rho)}{\rho} = \frac{c^2(\rho)}{\rho}, \quad (1.3)$$

其中 $p = p(\rho)$ 是压强, $c = c(\rho)$ 是音速, 满足如下关系式:

$$p'(\rho) = \rho^{\gamma-1}, \quad \text{其中 } \gamma \geq -1. \quad (1.4)$$

英文引用格式: Long B S, Yi C. The ellipticity principle for the 3-D steady potential flow in conical coordinates (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1349–1368, doi: 10.1360/SSM-2020-0142

由 (1.3) 和 (1.4) 可得

$$h(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho^{\gamma-1} - \rho_0^{\gamma-1}}{\gamma-1} = \frac{c^2 - c_0^2}{\gamma-1}, & \gamma \in [-1, 1) \cup (1, +\infty), \\ \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right), & \gamma = 1, \end{cases} \quad (1.5)$$

此处 c_0 对应密度为 $\rho_0 > 0$ 时的音速.

将 (1.2) 代入 (1.1) 并利用 (1.5), 可以得到一个二阶拟线性方程

$$(c^2 - \Phi_{x_1}^2)\Phi_{x_1x_1} + (c^2 - \Phi_{x_2}^2)\Phi_{x_2x_2} + (c^2 - \Phi_{x_3}^2)\Phi_{x_3x_3} - 2\Phi_{x_1}\Phi_{x_2}\Phi_{x_1x_2} - 2\Phi_{x_1}\Phi_{x_3}\Phi_{x_1x_3} - 2\Phi_{x_2}\Phi_{x_3}\Phi_{x_2x_3} = 0, \quad (1.6)$$

其中

$$c^2 = c_0^2 + \frac{\gamma-1}{2}(K - |\nabla_{\mathbf{x}}\Phi|^2). \quad (1.7)$$

因为方程 (1.6) 的特征形式为

$$Q(\zeta) = c^2 - |\nabla_{\mathbf{x}}\Phi \cdot \zeta|^2, \quad \text{对于任意的 } \zeta \in \mathbb{R}^3, \quad |\zeta| = 1, \quad (1.8)$$

所以, 当 $M > 1$ 时, (1.6) 是双曲型的; $M < 1$ 时, 它是椭圆型的; $M = 1$ 时, 它是抛物退化的, 其中 $M = |\nabla_{\mathbf{x}}\Phi|/c$ 是气流的 Mach 数.

注意到 (1.6) 在下述伸缩变换下形式保持不变:

$$\mathbf{x} \rightarrow \alpha\mathbf{x}, \quad (\rho, \Phi) \rightarrow \left(\rho, \frac{\Phi}{\alpha}\right), \quad \text{其中 } \alpha \neq 0.$$

因此, 方程 (1.6) 存在一类具有如下形式的解:

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(\boldsymbol{\xi}), \quad \Phi(\mathbf{x}) = x_3\phi(\boldsymbol{\xi}), \quad (1.9)$$

其中 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) := (x_1/x_3, x_2/x_3)$ 被称为锥形坐标系. 这种形式的解会出现在三角翼超音速绕流问题中. 关于这一问题, 许多学者都进行了研究 (参见文献 [1-8]).

为方便后文表述, 引进符号

$$D^2\varphi[\mathbf{a}, \mathbf{b}] := \sum_{i,j=1}^2 a_i b_j \partial_{ij}\varphi, \quad \text{其中 } \varphi \in C^2 \text{ 且 } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2.$$

于是, 由 (1.6) 和 (1.9) 可知, 函数 ϕ 满足

$$c^2(\Delta\phi + D^2\phi[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}]) - D^2\phi[D\phi - \chi\boldsymbol{\xi}, D\phi - \chi\boldsymbol{\xi}] = 0, \quad (1.10)$$

其中 Δ 和 D 是标准的 Laplace 和梯度算子,

$$\chi = \phi - D\phi \cdot \boldsymbol{\xi}. \quad (1.11)$$

方程 (1.10) 还可被整理为

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}, \phi, D\phi) : D^2\phi := \sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \phi, D\phi) \partial_{ij}\phi = 0, \quad (1.12)$$

其中 $\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}, \phi, D\phi)$ 的表达式由 (1.10) 给出.

定义气流的拟 Mach 数

$$L^2 := \frac{|D\phi|^2 + |\chi|^2 - \frac{\phi^2}{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}}{c^2}. \quad (1.13)$$

直接验算可知方程 (1.10) 的类型由 L 决定. 具体而言, 方程 (1.10) 是双曲型的当且仅当 $L > 1$, 是椭圆型的当且仅当 $L < 1$, 是抛物退化的当且仅当 $L = 1$.

因为方程 (1.10) 的类型依赖于 ϕ 本身及 $D\phi$, 所以无法提前确定它的具体类型. 当机翼的前缘后掠角不是充分小时, 这是处理三角翼超音速绕流问题的主要困难之一. 此外, 该问题还有一个重要的特点: 对于多方气体, 方程 (1.10) 在一部分边界上是抛物退化的 (参见文献 [3]); 而对于 Chaplygin 气体, 这一性质会发生在整个边界上¹⁾. 因此, 本文将基于方程 (1.10) 在边界上是退化的这一假设条件来研究其在抛物 - 椭圆区域上的类型. 特别地, 受三角翼超音速绕流问题的启发, 还将考虑平坦边界上的滑移条件. 顺便说明, 由于现阶段大多数处理椭圆型方程的有效工具都要求方程是一致椭圆型的, 如经典的 Schauder 估计和 Hopf 引理等, 因此, 本文会重点关注方程 (1.10) 在什么情形下是一致椭圆型的.

这里指出, 当 $\gamma = -1$ 时, Chaplygin 气体的状态方程满足条件 (1.4). 该气体常出现在描述宇宙膨胀的模型中 (参见文献 [9, 10]). 近年来, 基于 Chaplygin 气体的独有特性, 一些学者以该气体为模型, 对高维 Riemann 和激波反射等问题进行了研究, 如 Serre^[11, 12]、Chen 和 Qu^[13, 14] 及 Lai 和 Sheng^[15].

现在给出问题相应的数学描述. 在 (ξ_1, ξ_2) 的上半平面, 假设 Ω_D 是一个有界开区域, 其边界由 $\partial^1 \Omega_D$ 和如下两个平坦的固壁组成:

$$W_1 := \{\xi_2 = 0, -\infty < \xi_1 < 0\} \quad \text{和} \quad W_2 := \{\xi_2 = \xi_1 \tan \theta_0, 0 < \xi_1 < +\infty\},$$

其中 $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ 表示 W_2 和 ξ_1 -轴形成的夹角. 记 P_1 为 $\partial^1 \Omega_D$ 和 W_1 的交点, P_2 为 $\partial^1 \Omega_D$ 和 W_2 的交点 (参见图 1). 于是, 我们的问题可以表述为如下问题:

图 1 锥形坐标系中的区域 Ω_D

1) Long B S, Yi C. Supersonic flow of Chaplygin gas past a delta wing. In preparation, 2019

问题 1.1 假设函数 $\phi \in C^0(\bar{\Omega}_D) \cap C^1(\bar{\Omega}_D \setminus \partial^1\Omega_D) \cap C^3(\Omega_D \cup W_1 \cup W_2)$ 满足方程 (1.10), 在 $\bar{\Omega}_D \setminus \partial^1\Omega_D$ 中有 $M > 1$, $0 \leq L \leq 1$ 和 $\rho > 0$, 且边界条件为

$$L = 1, \quad \text{在 } \partial^1\Omega_D \text{ 上} \quad (1.14)$$

和

$$D\phi \cdot \nu_{w_1} = 0, \quad \text{在 } W_1 \text{ 上}, \quad (1.15)$$

$$D\phi \cdot \nu_{w_2} = 0, \quad \text{在 } W_2 \text{ 上}. \quad (1.16)$$

我们的目标是确定方程 (1.10) 在区域 Ω_D 内的类型, 这里 $\nu_{w_1} = (0, -1)$ 表示 W_1 的单位外法向量, $\nu_{w_2} = (\sin \theta_0, -\cos \theta_0)$ 表示 W_2 的单位外法向量.

定理 1.1 (主要定理) 令 $\hat{M} > 1$ 是一个常数, 则关于问题 1.1, 有如下结论:

(i) 如果 $\gamma > -1$, 在 Ω_D 中有 $M \geq \hat{M}$, 并且边界 $\partial^1\Omega_D \in C^2$ 垂直于固壁 W_1 和 W_2 , 那么方程 (1.10) 在区域 Ω_D 内是椭圆型的, 且在严格远离边界 $\partial^1\Omega_D$ 的任意子区域 $\Omega_D^{\text{sub}} \subset \Omega_D$ 上是一致椭圆型的.

(ii) 如果 $\gamma = -1$, 边界 $\partial^1\Omega_D$ 是 C^2 分片光滑的且具有一致严格正的曲率, 那么可以得到与情形 (i) 相同的结论.

对于定理 1.1 中 $\gamma > -1$ 的情形, 最为关键的一步是建立方程 (1.10) 的椭圆性原理 (见下文引理 2.1), 它可以被看作文献 [16] 中关于自相似流方程椭圆性原理的推广. 但需要说明的是文献 [16] 中的方法对于 $\gamma = -1$ 的情形并不适用. 为了克服这一困难, 我们将利用脚注 1) 中发展的技巧去得到问题解的一个先验估计, 从而来确定方程 (1.10) 的类型.

本文的后续内容安排如下. 第 2 节主要建立 $\gamma > -1$ 时方程 (1.10) 的椭圆性原理. 同时, 对于情形 $\gamma = -1$, 也可以得到一个相对较弱的结论. 第 3 节给出一个方程 (1.10) 是一致椭圆型的充要条件. 然后, 结合引理 3.2 中构造的函数和 $\gamma > -1$ 时对应的椭圆性原理, 完成定理 1.1(i) 的证明. 最后, 当 $\gamma = -1$ 时, 通过建立问题解的先验估计, 证明定理 1.1(ii) 的结论.

2 方程 (1.10) 的椭圆性原理

受文献 [16, 17] 中方法的启发, 对于 $\gamma > -1$ 的情形, 先构造方程 (1.10) 的一个椭圆性原理. 为便于书写, 在下文中简记

$$\phi_i := \partial_i \phi, \quad \phi_{ij} := \partial_{ij} \phi, \quad \phi_{ijk} := \partial_{ijk} \phi; \quad e_{\xi_1} := (1, 0), \quad e_{\xi_2} := (0, 1),$$

其中 $i, j, k \in \{1, 2\}$.

引理 2.1 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界开区域, $\gamma > -1$, $\text{diam}(\Omega) \leq d < +\infty$. 若函数 $\phi \in C^3(\Omega)$ 满足方程 (1.10) 且在 Ω 内有 $M \geq \hat{M} > 1$, $0 \leq L \leq 1$ 和 $\rho > 0$, 其中 $\hat{M}$ 是一个已知常数, 那么存在一个常数 $\delta_0 = \delta_0(d) \in (0, 1/(1+d))$ 使得对于任意满足 $|Db| + |D^2b| \leq \delta_0$ 的函数 $b \in C^2(\Omega)$, 要么

$$L^2 \leq 1 - \delta_0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内},$$

要么 $L^2 + b$ 在 Ω 内达不到极大值.

证明 在下面的证明过程中, 用 $O(\delta)$ 来表示任意可被 δ 控制的变量, 即 $|O(\delta)| \leq C\delta$, 其中 $C > 0$ 是仅依赖于 (γ, d) 的常数. 证明的过程将被分成两步.

第 1 步 在引理的假设条件下, 在此断言存在一个常数 $\delta_1 \in (0, 1)$ 使得对于任意满足 $|Db| + |D^2b| \leq \delta_1/(1+d)$ 的函数 $b \in C^2(\Omega)$ 和区域 Ω 内的任意一点 P , 要么

$$L^2 \leq 1 - \delta_1, \quad \text{在 } P \text{ 处}, \quad (2.1)$$

要么 $L^2 + b$ 在 P 点处达不到极大值. 用反证法进行证明. 假设这一结论不成立, 那么对于任意的常数 $\delta_1 \in (0, 1)$, 可以找到一个满足 $|Db| + |D^2b| \leq \delta_1/(1+d)$ 的函数 $b \in C^2(\Omega)$ 和区域 Ω 内的一点 $\hat{P}(\xi_{1p}, \xi_{2p})$, 使得

$$L^2 > 1 - \delta_1, \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处}, \quad (2.2)$$

且 $L^2 + b$ 在 $\hat{P}$ 点处取得极大值, 这等价于

$$D(L^2 + b)(\hat{P}) = \mathbf{0}, \quad (2.3)$$

$$\partial_{ii}(L^2 + b)(\hat{P}) \leq 0, \quad \text{其中 } i = 1, 2. \quad (2.4)$$

当 δ_1 充分小时, 利用这些关系推导出一个矛盾.

由于方程 (1.6) 的形式在任意旋转变换下均保持不变且其解 Φ 具有形式 (1.9), 故不失一般性, 在 $(\xi_{1p}x_3, \xi_{2p}x_3, x_3)$ 处, 可以假设 $\partial_{x_1}\Phi = \partial_{x_2}\Phi = 0$ 和 $\partial_{x_3}\Phi = |D_{\mathbf{x}}\Phi|$, 其中 $x_3 \in \mathbb{R}$. 于是由 (1.9)、(1.11) 和 (1.13) 可得

$$D\phi = \mathbf{0}, \quad \chi = \phi, \quad M = \frac{\phi}{c}, \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处}, \quad (2.5)$$

$$L = \frac{M|\boldsymbol{\xi}|}{\sqrt{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}} = \frac{\phi|\boldsymbol{\xi}|}{c\sqrt{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}}, \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处}. \quad (2.6)$$

此外, 因为方程 (1.10) 具有旋转不变性, 所以还可以选取 $\xi_{1p} = -|\boldsymbol{\xi}| < 0$ 和 $\xi_{2p} = 0$. 将其代入 (2.6) 可得

$$|\xi_{1p}| = \frac{L}{\sqrt{M^2 - L^2}}, \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处}. \quad (2.7)$$

直接计算可得

$$D(|D\phi|^2) = 2D^2\phi D\phi, \quad D\chi^2 = -2\chi D^2\phi \boldsymbol{\xi}, \quad (2.8)$$

$$Dc^2 = -(\gamma - 1)D^2\phi(D\phi - \chi\boldsymbol{\xi}). \quad (2.9)$$

再结合 (2.5)–(2.7), 有

$$D(|D\phi|^2) = 0, \quad D\chi^2 = 2\phi|\xi_{1p}|D\phi_1, \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处}, \quad (2.10)$$

$$Dc^2 = -(\gamma - 1)\phi|\xi_{1p}|D\phi_1, \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处}. \quad (2.11)$$

(1) 首先利用一阶条件 (2.3) 和方程 (1.10) 来计算 ϕ_{ij} 在 $\hat{P}$ 处的值. 由 (1.13)、(2.10) 和 (2.11) 可得

$$D(L^2 + b) = \frac{D(|D\phi|^2 + \chi^2) - L^2 Dc^2}{c^2} - \frac{(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)D\phi^2 - \phi^2 D(|\boldsymbol{\xi}|^2)}{(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^2 c^2} + Db$$

$$\begin{aligned}
&= (2 + (\gamma - 1)L^2)M|\xi_{1p}|\frac{D\phi_1}{c} - \frac{2M^2|\xi_{1p}|}{(1 + |\xi_{1p}|^2)^2}e_{\xi_1} + Db \\
&= M|\xi_{1p}|\left((2 + (\gamma - 1)L^2)\frac{D\phi_1}{c} - 2M\left(1 - \frac{L^2}{M^2}\right)^2 e_{\xi_1}\right) + Db, \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处.}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

假设条件 $L \leq 1$ 和 $\gamma > -1$ 表明在 Ω 中 $2 + (\gamma - 1)L^2 > 0$. 于是结合 (2.3) 和 (2.12) 可知,

$$\frac{D\phi_1}{c} = \frac{2M(1 - \frac{L^2}{M^2})^2}{2 + (\gamma - 1)L^2}e_{\xi_1} + O(\delta_1)(e_{\xi_1} + e_{\xi_2}), \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处,}$$

即

$$\frac{\phi_{11}}{c} = \frac{2M(1 - \frac{L^2}{M^2})^2}{2 + (\gamma - 1)L^2} + O(\delta_1), \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处,} \tag{2.13}$$

$$\frac{\phi_{12}}{c} = O(\delta_1), \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处.} \tag{2.14}$$

另一方面, 由 (2.5)–(2.7), 可将方程 (1.10) 简化为

$$(1 - L^2)\phi_{11} + \left(1 - \frac{L^2}{M^2}\right)\phi_{22} = 0, \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处.} \tag{2.15}$$

将 (2.13) 代入此方程有

$$\frac{\phi_{22}}{c} = \frac{2M(L^2 - 1)(1 - \frac{L^2}{M^2})}{2 + (\gamma - 1)L^2} + O(\delta_1), \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处.} \tag{2.16}$$

注意到, 当 δ_1 充分小时, $O(\delta_1)$ 是一个小量, 因此在 $\hat{P}$ 处, 有

$$\frac{\phi_{11}}{c} > 0 \quad \text{和} \quad \frac{\phi_{22}}{c} < 0,$$

这意味着

$$\frac{|\phi_{11}| + |\phi_{22}|}{c} = \frac{2M(1 - \frac{L^2}{M^2})(2 - (1 + \frac{1}{M^2})L^2)}{2 + (\gamma - 1)L^2} + O(\delta_1), \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处.} \tag{2.17}$$

(2) 接着用二阶条件 (2.4) 来推导出一些关系. 为此, 需要计算 $\partial_{ii}L^2$ 的表达式. 从 (1.13)、(2.8) 和 (2.9) 可以看出

$$\partial_i L^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)L^2}{c^2} D\phi_i \cdot (D\phi - \chi\xi) - \frac{2(1 + |\xi|^2)\phi\phi_i - 2\xi_i\phi^2}{(1 + |\xi|^2)^2 c^2}. \tag{2.18}$$

不妨用 E_1 和 E_2 分别表示方程 (2.18) 右端的第一和二项. 于是,

$$\partial_{ii}L^2 = \partial_i E_1 + \partial_i E_2. \tag{2.19}$$

关于 E_1 , 直接计算有

$$\begin{aligned}
\partial_i E_1 &= \frac{2 + (\gamma - 1)L^2}{c^2} \partial_i (D\phi_i \cdot (D\phi - \chi\xi)) - \frac{1}{c^2} \partial_i c^2 (\partial_i L^2 + E_1) \\
&= \frac{2 + (\gamma - 1)L^2}{c^2} (D\phi_{ii} \cdot (D\phi - \chi\xi) + |D\phi_i|^2 + |D\phi_i \cdot \xi|^2 - \chi\phi_{ii})
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\gamma-1}{c^2} D\phi_i \cdot (D\phi - \chi\xi)(\partial_i L^2 + E_1), \quad (2.20)$$

其中第二个等式用到了关系式

$$\partial_i c^2 = -(\gamma-1)D\phi_i \cdot (D\phi - \chi\xi), \quad \partial_i \chi = -2\chi D\phi_i \xi.$$

类似地, 关于 E_2 , 有

$$\begin{aligned} \partial_i E_2 &= -\frac{2}{(1+|\xi|^2)^2 c^2} \partial_i ((1+|\xi|^2)\phi\phi_i - \xi_i \phi^2) - \frac{\partial_i ((1+|\xi|^2)^2 c^2)}{(1+|\xi|^2)^2 c^2} E_2 \\ &= -\frac{2}{(1+|\xi|^2)^2 c^2} ((1+|\xi|^2)(\phi\phi_{ii} + \phi_i^2) - \phi^2) \\ &\quad + \frac{8\xi_i((1+|\xi|^2)\phi\phi_i - \xi_i \phi^2)}{(1+|\xi|^2)^3 c^2} + \frac{\gamma-1}{c^2} D\phi_i \cdot (D\phi - \chi\xi) E_2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

将 (2.20) 和 (2.21) 代入 (2.19) 并利用关系式 $\partial_i L^2 = E_1 + E_2$, 可得

$$\begin{aligned} \partial_{ii} L^2 &= \frac{2+(\gamma-1)L^2}{c^2} (D\phi_{ii} \cdot (D\phi - \chi\xi) + |D\phi_i|^2 + |D\phi_i \cdot \xi|^2 - \chi\phi_{ii}) \\ &\quad - \frac{2}{(1+|\xi|^2)^2 c^2} ((1+|\xi|^2)(\phi\phi_{ii} + \phi_i^2) - 4\xi_i \phi\phi_i) \\ &\quad + \frac{2\phi^2}{(1+|\xi|^2)^3 c^2} (1+|\xi|^2 - 4\xi_i^2) + \frac{2(\gamma-1)}{c^2} D\phi_i \cdot (D\phi - \chi\xi) \partial_i L^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

从 (2.3) 可以发现在 $\hat{P}$ 点处, $\partial_i L^2 = -\partial_i b$. 再结合 (2.5)–(2.7) 和 (2.22), 二阶条件 (2.4) 在 $\hat{P}$ 点处可写为

$$\begin{aligned} 0 &\geq \partial_{ii}(L^2 + b) \\ &= (2+(\gamma-1)L^2) \left(M|\xi_{1p}| \frac{\phi_{1ii}}{c} + (1+|\xi_{1p}|^2) \frac{\phi_{1i}^2}{c^2} + \frac{\phi_{2i}^2}{c^2} \right) \\ &\quad - M \left(2+(\gamma-1)L^2 + \frac{2}{1+|\xi_{1p}|^2} \right) \frac{\phi_{ii}}{c} + \frac{2M^2}{(1+|\xi_{1p}|^2)^3} (1+|\xi_{1p}|^2 - 4|\xi_{ip}|^2) \\ &\quad - 2(\gamma-1)M|\xi_{1p}| \frac{\phi_{1i}}{c} \partial_i b + \partial_{ii} b, \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处,} \end{aligned}$$

由此可知,

$$\begin{aligned} L \frac{\phi_{1ii}}{c} &\leq -\frac{M}{\sqrt{M^2 - L^2}} \left(\frac{\phi_{1i}^2}{c^2} + \left(1 - \frac{L^2}{M^2} \right) \frac{\phi_{2i}^2}{c^2} - \frac{\phi_{11}\phi_{ii}}{c^2} \right) \\ &\quad + \sqrt{M^2 - L^2} \left(\frac{\phi_{ii}}{c} + \left(\frac{4|\xi_{ip}|^2}{1+|\xi_{1p}|^2} - 1 \right) \frac{\phi_{11}}{c} \right) + O(\delta_1), \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处.} \end{aligned} \quad (2.23)$$

下面重点推导 $L \frac{\phi_{122}}{c}$ 在 $\hat{P}$ 点处的表达式. 取 $i=1$, 将 (2.13) 和 (2.14) 代入 (2.23), 有

$$\begin{aligned} L \frac{\phi_{111}}{c} &\leq \sqrt{1 - \frac{L^2}{M^2}} \left(\frac{4L^2}{M} \frac{\phi_{11}}{c} - \frac{\phi_{12}^2}{c^2} \right) + O(\delta_1) \\ &= \frac{8L^2(1 - \frac{L^2}{M^2})^{\frac{5}{2}}}{2 + (\gamma-1)L^2} + O(\delta_1), \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处.} \end{aligned} \quad (2.24)$$

同样地, 当 $i = 2$ 时, 利用 (2.14)–(2.17) 可知,

$$\begin{aligned}
 L \frac{\phi_{122}}{c} &\leq -\frac{M}{\sqrt{M^2 - L^2}} \left(\frac{\phi_{12}^2}{c^2} + \left(1 - \frac{L^2}{M^2} \right) \frac{\phi_{22}^2}{c^2} - \frac{\phi_{11}\phi_{22}}{c^2} \right) \\
 &\quad + \sqrt{M^2 - L^2} \left(\frac{\phi_{22}}{c} - \frac{\phi_{11}}{c} \right) + O(\delta_1) \\
 &= -\sqrt{1 - \frac{L^2}{M^2}} \left(\frac{2 - L^2}{1 - L^2} \frac{\phi_{22}^2}{c^2} + M \frac{|\phi_{11}| + |\phi_{22}|}{c} \right) \\
 &\quad - \frac{M}{\sqrt{M^2 - L^2}} \frac{\phi_{12}^2}{c^2} + O(\delta_1) \\
 &= -\frac{2M^2(2 - (1 + \frac{1}{M^2})L^2)(1 - \frac{L^2}{M^2})^{\frac{3}{2}}}{2 + (\gamma - 1)L^2} \\
 &\quad - \frac{4M^2(1 - L^2)(2 - L^2)(1 - \frac{L^2}{M^2})^{\frac{5}{2}}}{(2 + (\gamma - 1)L^2)^2} + O(\delta_1), \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处.} \tag{2.25}
 \end{aligned}$$

注意到上式最后一个等式的第一项可作如下分解:

$$\begin{aligned}
 &2M^2 \left(2 - \left(1 + \frac{1}{M^2} \right) L^2 \right) \left(1 - \frac{L^2}{M^2} \right)^{\frac{3}{2}} \\
 &= 4M^2(1 - L^2) \left(1 - \frac{L^2}{M^2} \right)^{\frac{3}{2}} + 2M^2 L^2 \left(1 - \frac{1}{M^2} \right) \left(1 - \frac{L^2}{M^2} \right)^{\frac{3}{2}}. \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

将其代入 (2.25) 中, 有

$$\begin{aligned}
 L \frac{\phi_{122}}{c} &\leq -\frac{4L^2(1 - L^2)(1 - \frac{L^2}{M^2})^{\frac{3}{2}}}{2 + (\gamma - 1)L^2} - 2 \left(1 - \frac{1}{\hat{M}^2} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{L^2}{2 + (\gamma - 1)L^2} \\
 &\quad - 4 \left(1 - \frac{1}{\hat{M}^2} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{(1 - L^2)(2 - L^2)}{(2 + (\gamma - 1)L^2)^2} + O(\delta_1) \\
 &= -2 \left(1 - \frac{1}{\hat{M}^2} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{4 - 4L^2 + (\gamma + 1)L^4}{(2 + (\gamma - 1)L^2)^2} \\
 &\quad - \frac{4L^2(1 - L^2)(1 - \frac{L^2}{M^2})^{\frac{3}{2}}}{2 + (\gamma - 1)L^2} + O(\delta_1), \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处,} \tag{2.27}
 \end{aligned}$$

其中在第一个不等式里利用了假设条件

$$M \geq \hat{M} > 1 \quad \text{和} \quad L \leq 1.$$

为了处理 (2.27) 中出现的项 $\frac{4 - 4L^2 + (\gamma + 1)L^4}{(2 + (\gamma - 1)L^2)^2}$, 考虑函数

$$F(t) = \frac{4 - 4t + (\gamma + 1)t^2}{(2 + (\gamma - 1)t)^2}, \quad \text{其中 } t \in [0, 1].$$

因为

$$F'(t) = \frac{8\gamma(t - 1)}{(2 + (\gamma - 1)t)^3}, \quad \text{其中 } t \in [0, 1],$$

所以,

$$F(t) \geq \begin{cases} 1, & \gamma \in (-1, 0), \\ \frac{1}{\gamma+1}, & \gamma > 0. \end{cases}$$

综合上述分析和 (2.27), 最终得到

$$L \frac{\phi_{122}}{c} \leq -\frac{2(1 - \frac{1}{M^2})^{\frac{5}{2}}}{\gamma+2} - \frac{4L^2(1-L^2)(1 - \frac{L^2}{M^2})^{\frac{3}{2}}}{2 + (\gamma-1)L^2} + O(\delta_1), \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处.} \quad (2.28)$$

(3) 现在来导出当 δ_1 充分小时所存在的矛盾. 先将方程 (1.10) 两边同时关于 ξ_1 求偏导可得

$$\begin{aligned} & c^2(\Delta\phi_1 + D^2\phi_1[\xi, \xi] + 2D^2\phi[\partial_1\xi, \xi]) + (\Delta\phi + D^2\phi[\xi, \xi])\partial_1c^2 \\ & - D^2\phi_1[D\phi - \chi\xi, D\phi - \chi\xi] - 2D^2\phi[\partial_1(D\phi - \chi\xi), D\phi - \chi\xi] = 0. \end{aligned}$$

利用 (2.8) 和 (2.9), 上式可写为

$$\begin{aligned} & c^2(\Delta\phi_1 + D^2\phi_1[\xi, \xi]) - D^2\phi_1[D\phi - \chi\xi, D\phi - \chi\xi] \\ & + (2\chi - (\gamma-1)(\Delta\phi + D^2\phi[\xi, \xi]))D\phi_1 \cdot (D\phi - \chi\xi) \\ & - 2D^2\phi[D\phi_1 + (D\phi_1 \cdot \xi)\xi, D\phi - \chi\xi] + 2c^2D\phi_1 \cdot \xi = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

再结合 (2.5) 和 (2.7) 以及常规的计算可得其在 $\hat{P}$ 点处的形式为

$$\begin{aligned} & c^2((1 + \xi_{1p}^2)\phi_{111} + \phi_{122}) - \xi_{1p}^2\phi^2\phi_{111} + (\gamma-1)\xi_{1p}\phi\phi_{11}((1 + \xi_{1p}^2)\phi_{11} + \phi_{22}) \\ & + 2\xi_{1p}\phi((1 + \xi_{1p}^2)\phi_{11}^2 + \phi_{12}^2) + 2\xi_{1p}(c^2 - \phi^2)\phi_{11} = 0, \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处.} \end{aligned}$$

整理上式有

$$\begin{aligned} & (1-L^2)\frac{\phi_{111}}{c} + \left(1 - \frac{L^2}{M^2}\right)\frac{\phi_{122}}{c} - (2 + (\gamma-1)L^2)M|\xi_{1p}|\frac{\phi_{11}^2}{c^2} \\ & - 2(1-M^2)\left(1 - \frac{L^2}{M^2}\right)|\xi_{1p}|\frac{\phi_{11}}{c} - 2\left(1 - \frac{L^2}{M^2}\right)M|\xi_{1p}|\frac{\phi_{12}^2}{c^2} = 0, \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处,} \end{aligned}$$

由此可知,

$$\begin{aligned} L \frac{\phi_{122}}{c} &= \frac{L^2-1}{1 - \frac{L^2}{M^2}} L \frac{\phi_{111}}{c} + \frac{2ML^2}{\sqrt{M^2-L^2}} \frac{\phi_{12}^2}{c^2} \\ &+ \frac{L^2}{\sqrt{M^2-L^2}} \left(\frac{M(2 + (\gamma-1)L^2)}{1 - \frac{L^2}{M^2}} \frac{\phi_{11}}{c} + 2(1-M^2) \right) \frac{\phi_{11}}{c}, \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处.} \end{aligned} \quad (2.30)$$

将 (2.13)、(2.14) 和 (2.24) 代入 (2.30), 有

$$\begin{aligned} L \frac{\phi_{122}}{c} &= \frac{L^2-1}{1 - \frac{L^2}{M^2}} L \frac{\phi_{111}}{c} + \frac{2L^2(1-L^2)}{\sqrt{M^2-L^2}} \frac{\phi_{11}}{c} + O(\delta_1) \\ &\geq -\frac{4L^2(1-L^2)(1 - \frac{L^2}{M^2})^{\frac{3}{2}}}{2 + (\gamma-1)L^2} + O(\delta_1), \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处.} \end{aligned} \quad (2.31)$$

显然, 当 (2.1) 中的常数 $\delta_1 \in (0, 1)$ 充分小时, 上式与 (2.28) 矛盾. 因此断言得证.

第 2 步 从第 1 步中已证的断言可知, 对于任意的内点 $\bar{P} \in \Omega$, 若 $L^2 + b$ 在 $\bar{P}$ 处取到极大值, 那么一定有关系式 $L^2(\bar{P}) \leq 1 - \delta_1$. 另外, 注意到 $|Db| \leq \delta_1/(1+d)$ 和 $\text{diam}(\Omega) \leq d$, 因此,

$$\text{osc}_\Omega b \leq \text{diam}(\Omega)|Db| \leq \frac{d\delta_1}{1+d},$$

这意味着

$$L^2 \leq L^2(\bar{P}) + \text{osc}_\Omega b \leq 1 - \frac{\delta_1}{1+d}, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内.}$$

于是, 只需取 $\delta_0(d) = \delta_1/(1+d)$ 即可完成引理的证明. $\square$

引理 2.1 的结论适用于方程在边界上是抛物退化的情形. 接下来, 在 (ξ_1, ξ_2) 平面上考虑一个带有平坦边界 Γ 的区域 Ω , 且方程 (1.10) 的解 $\phi \in C^3(\Omega \cup \Gamma)$ 满足

$$D\phi \cdot \nu = 0, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上,} \quad (2.32)$$

其中 ν 表示 Γ 的单位外法向量.

引理 2.2 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界开区域, $\Gamma \subset \Omega$ 是一个开的平坦边界, $\gamma > -1$ 且 $\text{diam}(\Omega) \leq d < +\infty$. 若函数 $\phi \in C^3(\Omega \cup \Gamma)$ 是方程 (1.10) 的解, 并且在 $\Omega \cup \Gamma$ 上满足 $M \geq \hat{M} > 1$, $0 \leq L \leq 1$ 和 $\rho > 0$, 在 Γ 上满足 (2.32), 其中 $\hat{M}$ 是一个常数, 那么存在一个常数 $\delta_0 = \delta_0(d) \in (0, 1/(1+d))$ 使得对于任意的函数 $b \in C^2(\Omega \cup \Gamma)$, 当其在 Ω 内满足 $|Db| + |D^2b| \leq \delta_0$ 、在 Γ 上满足 $Db \cdot \nu = 0$ 时, 要么

$$L^2 \leq 1 - \delta_0, \quad \text{在 } \Omega \cup \Gamma \text{ 内,}$$

要么 $L^2 + b$ 在 $\Omega \cup \Gamma$ 内达不到极大值.

证明 因为方程 (1.6) 和 (1.10) 都具有旋转不变性, 所以不妨取 $\Gamma \subset \{\xi_1 = 0\}$ 和 $\nu = (1, 0)$. 此时边界条件 (2.32) 可简化为

$$\phi_1 = 0, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上.} \quad (2.33)$$

将其沿着 Γ 的切向求导可得

$$\phi_{12} = 0, \quad \phi_{122} = 0, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上,} \quad (2.34)$$

再结合 (2.33), 有

$$\partial_1 c^2 = -(\gamma - 1)D\phi_1(D\phi - \chi\xi) = 0, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上.} \quad (2.35)$$

将方程 (1.10) 关于 ξ_1 求导并利用 (2.33)–(2.35) 可以发现, 在 Γ 上, $c^2\phi_{111} = 0$. 又在 $\Omega \cup \Gamma$ 上,

$$c^2 = \rho^{\gamma-1} > 0,$$

因此,

$$\phi_{111} = 0, \quad \text{在 } \Gamma \text{ 上.} \quad (2.36)$$

基于上述分析, 可将区域 Ω 关于 ξ_2 轴作镜像对称得到一个新的区域, 记为 Ω_{ext} . 相应地, 函数 ϕ 也作如下延拓:

$$\phi_{\text{ext}}(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} \phi(\xi_1, \xi_2), & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \phi(-\xi_1, \xi_2), & \text{在 } \Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega \text{ 内.} \end{cases} \quad (2.37)$$

显然, $\phi_{\text{ext}} \in C^3(\Omega_{\text{ext}})$ 且在区域 Ω_{ext} 内满足方程 (1.10), 于是, Γ 上的点可看作区域 Ω_{ext} 的内点. 再利用引理 2.1 的结论即可完成证明. $\square$

可以看到当 $\gamma = -1$ 时, 若 $L \rightarrow 1$, 那么 $2 + (\gamma - 1)L^2 \rightarrow 0$. 这表明在引理 2.1 中, 当 δ_1 充分小时, $O(\delta_1)$ 对应的变量无法再被 $C\delta_1$ 所控制, 其中 C 是一个仅与 (γ, d) 有关的常数. 因此, 引理 2.1 中的方法并不适用于 $\gamma = -1$ 的情形. 尽管如此, 还是可以得到一个相对较弱的结果:

引理 2.3 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界开区域, $\gamma > -1$, $\text{diam}(\Omega) \leq d < +\infty$. 若函数 $\phi \in C^3(\Omega)$ 满足方程 (1.10) 且在 Ω 内有 $M > 1$, $0 \leq L \leq 1$ 和 $\rho > 0$, 那么

$$L^2 < 1, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内.}$$

证明 用反证法进行证明. 如果上述结论不成立, 那么必存在一点 $\hat{P}(\xi_{1p}, \xi_{2p}) \in \Omega$ 使得

$$L^2 = 1, \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处.}$$

又因为在 Ω 内 $0 \leq L \leq 1$, 所以,

$$D(L^2)(\hat{P}) = 0. \quad (2.38)$$

类似引理 2.1 中的分析, 不失一般性, 可以假设

$$\begin{aligned} D\phi &= 0, \quad \chi = \phi, \quad M = \frac{\phi}{c}, \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处,} \\ L &= \frac{M|\xi_{1p}|}{\sqrt{1 + |\xi_{1p}|^2}} = \frac{\phi|\xi_{1p}|}{c\sqrt{1 + |\xi_{1p}|^2}}, \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处.} \end{aligned}$$

于是, 在 $\hat{P}$ 点处, 将 $\gamma = -1$, $M > 1$ 和 $L^2 = 1$ 代入 (2.12), 有

$$\begin{aligned} D(L^2) &= M|\xi_{1p}| \left((2 + (\gamma - 1)L^2) \frac{D\phi_1}{c} - 2M \left(1 - \frac{L^2}{M^2} \right)^2 e_{\xi_1} \right) \\ &= -2M\sqrt{1 + |\xi_{1p}|^2} \left(1 - \frac{1}{M^2} \right)^2 e_{\xi_1} \\ &< 0, \quad \text{在 } \hat{P} \text{ 处.} \end{aligned} \quad (2.39)$$

显然, 上式与一阶条件 (2.38) 矛盾. 引理证毕. $\square$

注 2.1 从引理 2.1 和 2.3 可以看出, 当 $\gamma \geq -1$ 时, 方程 (1.10) 一定不存在解 $\phi \in C^3$ 使得在任一开区域上, 该方程是抛物退化的且 $M \geq \hat{M} > 1$, $\rho > 0$, 其中 $\hat{M}$ 是一个常数.

3 定理 1.1 的证明

为了证明本文的主要定理, 先给出下述引理.

引理 3.1 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界开区域, $\text{diam}(\Omega) \leq d < +\infty$, 且在 Ω 内有 $\rho > 0$, 则在区域 Ω 内, 方程 (1.10) 是一致椭圆型的当且仅当存在一个仅与 d 有关的正数 $\varepsilon \in (0, 1)$ 使得 $L^2 \leq 1 - \varepsilon$, 其中 L 的定义由 (1.13) 给出.

证明 直接计算可得方程 (1.10) 的特征满足

$$\lambda^2 - a_1\lambda + a_2 = 0,$$

其中

$$\begin{aligned} a_1 &= c^2 + (\xi_1\phi_2 - \xi_2\phi_1)^2 + (1 + |\xi|^2) \left(c^2 - |D\phi|^2 - |\chi|^2 + \frac{\phi^2}{1 + |\xi|^2} \right), \\ a_2 &= (1 + |\xi|^2)c^2 \left(c^2 - |D\phi|^2 - |\chi|^2 + \frac{\phi^2}{1 + |\xi|^2} \right). \end{aligned}$$

于是,

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}. \quad (3.1)$$

为简化符号, 引进

$$m^2 = (1 + |\xi|^2) \left(c^2 - |D\phi|^2 - |\chi|^2 + \frac{\phi^2}{1 + |\xi|^2} \right), \quad (3.2)$$

$$n^2 = (\xi_1\phi_2 - \xi_2\phi_1)^2, \quad (3.3)$$

则

$$\begin{aligned} a_1^2 - 4a_2 &= (c^2 + m^2 + n^2)^2 - 4c^2m^2 \\ &= (c^2 - m^2 + n^2)^2 + 4m^2n^2 \\ &\geq (c^2 - m^2 + n^2)^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

将该不等式代入 (3.1) 可得如下估计:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \geq \frac{c^2 + n^2}{m^2} \geq \frac{c^2}{m^2} = \frac{1}{(1 + |\xi|^2)(1 - L^2)}, \quad (3.5)$$

其中最后一步可由 (1.13) 和 (3.2) 得到. 不等式 (3.5) 表明, 对于任意一个有界常数 $C > 0$, 如果 $\lambda_2/\lambda_1 \leq C$, 那么

$$L^2 \leq 1 - \frac{1}{C(1 + d^2)}. \quad (3.6)$$

另一方面, 从 (1.10) 和 (1.12) 可知, 对于任意的 $\xi \in \Omega$ 和 $\tau \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, 有

$$\sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(\xi, \phi, D\phi) \tau_i \tau_j = c^2(|\tau|^2 + |\xi \cdot \tau|^2) - |(D\phi - \chi\xi) \cdot \tau|^2. \quad (3.7)$$

利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 上式的左端项满足

$$c^2(1 + |\xi|^2)|\tau|^2 \geq \sum_{i,j=1}^2 A_{ij}(\xi, \phi, D\phi) \tau_i \tau_j \geq (c^2 - |D\phi - \chi\xi|^2)|\tau|^2. \quad (3.8)$$

另外, 注意到

$$\begin{aligned} c^2 - |D\phi - \chi\xi|^2 &\geq c^2 - |D\phi - \chi\xi|^2 - (|D\phi|^2|\xi|^2 - |D\phi \cdot \xi|^2) \\ &= c^2 - \left(|D\phi|^2 + |\chi|^2 - \frac{\phi}{1 + |\xi|^2} \right) \\ &= c^2(1 - L^2), \end{aligned} \quad (3.9)$$

将其代入 (3.8) 中, 有

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq \frac{1 + |\xi|^2}{1 - L^2}.$$

这表明, 若 $L^2 \leq 1 - \varepsilon$, 则

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq \frac{1 + d^2}{\varepsilon}.$$

综上, 引理证毕. □

基于上述引理, 下面可以开始证明定理 1.1.

3.1 情形 $\gamma > -1$

情形 $\gamma > -1$ 的证明主要是基于引理 2.1 和 3.1. 为了应用这些结论, 构造下述函数:

$$g = g(\xi) \in C^2(\bar{\Omega}_D).$$

引理 3.2 假设 $\partial^1\Omega_D \in C^2$ 垂直于固壁 W_1 和 W_2 , 则可找到一个函数 $g = g(\xi) \in C^2(\bar{\Omega}_D)$ 和两个仅依赖于区域 Ω_D 的正数 $C_0, C_1 < +\infty$, 使得对于任意的内点 $\xi \in \Omega_D$ 均有

$$\frac{1}{C_0} \text{dist}(\xi, \partial^1\Omega_D) \leq g(\xi) \leq C_0 \text{dist}(\xi, \partial^1\Omega_D), \quad (3.10)$$

$$|Dg(\xi)| + |D^2g(\xi)| \leq C_1, \quad (3.11)$$

而且

$$Dg \cdot \nu_{w_1} = 0, \quad \text{在 } W_1 \text{ 上}, \quad (3.12)$$

$$Dg \cdot \nu_{w_2} = 0, \quad \text{在 } W_2 \text{ 上}. \quad (3.13)$$

证明 首先, 令点 $P'_1 := \frac{1}{2}(O + P_1)$ 和 $P'_2 := \frac{1}{2}(O + P_2)$, 其中 O 是 (ξ_1, ξ_2) 平面上的原点 (参见图 1). 连接这两点使得曲线 $P'_1P'_2$ 与边界 $\partial^1\Omega$ 平行, 并记由曲线 $\partial^1\Omega$ 和 $P'_1P'_2$ 及线段 $P_1P'_1$ 和 $P_2P'_2$ 围成的有界区域为 $\mathcal{D} := P_1P'_1P'_2P_2$.

接着, 引进极坐标变换

$$T_1: r = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}, \quad 0 < r < +\infty \quad \text{和} \quad \theta = \arctan \frac{\xi_2}{\xi_1}, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi,$$

并用 $r = \psi(\theta) > 0$ 表示边界 $\partial^1\Omega_D$ 在极坐标系中对应的表达式. 相应地, 曲线 $P'_1P'_2$ 的表达式为 $r = \psi(\theta)/2$. 为了拉直这两条曲线, 利用变换

$$T_2: \xi_1^T = \theta, \quad \xi_2^T = \frac{r}{\psi(\theta)}.$$

于是, 在平面 (ξ_1^T, ξ_2^T) 中, 区域 $\mathcal{D}$ 和曲线 $\partial^1 \Omega_D$ 分别变为矩形区域 $\mathcal{D}^T$ 和直线段 $\partial^1 \Omega_D^T$.

引进函数 $f \in C^\infty([0, +\infty))$ 满足

$$f(s) = \begin{cases} s, & \text{如果 } s \in \left[0, \frac{1}{4}\right], \\ 1, & \text{如果 } s \geq \frac{3}{8}, \end{cases}$$

且在 $[0, +\infty)$ 上有 $0 \leq f'(s) \leq C$ 和 $0 \leq f''(s) \leq C$, 其中 C 是一个已知的正数. 显然, 函数

$$g^T(\xi^T) = f(\text{dist}(\xi^T, \partial^1 \Omega_D^T)) \quad (3.14)$$

属于 $C^\infty(\mathcal{D}^T)$ 空间, 此处 $\xi^T = (\xi_1^T, \xi_2^T)$. 因此, 可以定义如下的目标函数:

$$g(\xi) = \begin{cases} g^T \circ T_2 \circ T_1(\xi), & \text{当 } \xi \in \bar{\mathcal{D}}, \\ 1, & \text{当 } \xi \in \bar{\Omega}_D \setminus \bar{\mathcal{D}}. \end{cases} \quad (3.15)$$

我们剩下的工作是验证 $g(\xi)$ 满足性质 (3.10)–(3.13). 从 $\partial^1 \Omega_D \in C^2$ 可得函数 $r = \psi(\theta)$ 属于 C^2 空间, 因此, $g(\xi) \in C^2(\bar{\Omega}_D)$. 此外注意到 T_1 和 T_2 均为可逆变换, 于是, 结合 (3.14)、(3.15) 和函数 $f(s)$ 的性质可知 $g(\xi)$ 满足性质 (3.10) 和 (3.11). 另一方面, 因为边界 $\partial^1 \Omega_D$ 垂直于固壁 W_1 和 W_2 , 且函数 $g(\xi)$ 在区域 $\bar{\Omega}_D \setminus \bar{\mathcal{D}}$ 中是常数, 所以, $g(\xi)$ 也满足性质 (3.12) 和 (3.13). $\square$

现在可以来证明定理 1.1(i) 的结论. 根据引理 2.1 和 3.1 中的结论, 只需要考虑区域 Ω_D 中 $L^2 > 1 - \delta_D$ 的点即可, 这里 $\delta_D \in (0, 1/(1 + d_D))$ 是一个常数, 其中 d_D 表示区域 Ω_D 的直径.

令 $g(\xi)$ 为引理 3.2 中构造的函数. 基于性质 (3.11), 可选取适当小的常数 μ 使得

$$\mu(|Dg| + |D^2g|) \leq \delta_D.$$

于是, 由引理 2.2 可知 $L^2 + \mu g$ 无法在 $\Omega_D \cup W_1 \cup W_2$ 上取到极大值. 接着讨论关于 $L^2 + \mu g$ 在原点 O 处的估计. 因为函数 $\phi \in C^1(\bar{\Omega}_D \setminus \partial^1 \Omega_D)$, 且满足边界条件 (1.15) 和 (1.16), 所以, 有 $D\phi(O) = \mathbf{0}$. 又 $c = \sqrt{\rho^{\gamma-1}} > 0$, 因此在原点 O 处有 $L = 0$. 这表明当 μ 适当小时, 在 O 处一定有 $L^2 + \mu g \leq 1$.

另一方面, 由引理 3.2 中的讨论可以看到, 在边界 $\partial^1 \Omega_D$ 上, $g(\xi) = 0$. 于是, 由边界条件 (1.14) 可知, 在 $\partial^1 \Omega_D$ 上, $L^2 + \mu g = 1$.

综上所述, 在 $\bar{\Omega}_D$ 内, $L^2 \leq 1 - \mu g$. 再次运用性质 (3.10) 和引理 3.1, 即可完成定理 1.1(i) 的证明.

3.2 情形 $\gamma = -1$

情形 $\gamma = -1$ 的证明思路源于脚注 1). 为了方便读者, 在此仍给出相对详细的证明过程. 本小节用 W_1 和 W_2 分别表示图 1 中的线段 OP_1 和 OP_2 .

从 (1.7) 和 (1.9) 可以发现, 当 $\gamma = -1$ 时,

$$\begin{aligned} c^2 &= |\nabla_{\mathbf{x}} \Phi|^2 + c_0^2 - K \\ &= |D\phi|^2 + |\phi - D\phi \cdot \xi|^2 + c_0^2 - K. \end{aligned} \quad (3.16)$$

因为三角翼超音速绕流问题中的来流是超音速的, 故不失一般性, 可以选取 $c_0^2 - K = -1$. 于是, 利用 (1.13)、(3.16) 和引理 3.1 可知, 如果存在一个有界常数 C 和一个正数 ε_0 使得函数 ϕ 满足

$$\sqrt{1 + |\xi|^2} + \varepsilon_0 \leq \phi < C, \quad (3.17)$$

$$|D\phi| < C, \quad (3.18)$$

那么方程 (1.10) 是一致椭圆型的.

令

$$w := \frac{\phi}{\sqrt{1+|\xi|^2}}. \quad (3.19)$$

在此变换下, 方程 (1.10) 变为

$$\begin{aligned} & c^2(\Delta w + D^2 w[\xi, \xi]) - (1 + |\xi|^2)D^2 w[Dw + (Dw \cdot \xi)\xi, Dw + (Dw \cdot \xi)\xi] \\ & + 2(w^2 - 1)Dw \cdot \xi + \frac{w(c^2 + w^2 - 1)}{1 + |\xi|^2} = 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

其中

$$c^2 = w^2 - 1 + (1 + |\xi|^2)(|Dw|^2 + |Dw \cdot \xi|^2). \quad (3.21)$$

因为 Ω_D 是有界区域, 所以, 方程 (3.20) 和 (1.10) 有着相同的类型. 再结合引理 2.3 可知, 在区域 Ω_D 内, (3.20) 是椭圆型的, 即 $w > 1$.

不妨用 $\mathcal{N}w$ 来表示方程 (3.20) 的右边. 另外, 对于任意有界的开区域 $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$, 定义如下算子:

$$\mathcal{M}w := Dw \cdot \hat{\nu} + bw, \quad \text{在 } \partial\hat{\Omega} \text{ 上,}$$

其中 $\hat{\nu}$ 表示边界 $\partial\hat{\Omega}$ 的单位外法向量, $b \geq 0$ 是一个关于 ξ 的函数. 于是, 方程 (3.20) 满足如下比较原理 (其证明可参见脚注 1) 中的引理 3.1 和 4.1).

引理 3.3 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界开区域, 它的边界由 $\partial^1\Omega$ 和 $\partial^2\Omega$ 组成, ν 是 $\partial^2\Omega$ 的单位外法向量. 另外, 假定函数 $w_{\pm} \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\bar{\Omega} \setminus \partial^1\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 在区域 Ω 内满足 $w_{\pm} > 1$. 若算子 $\mathcal{N}$ 关于 w_+ 或 w_- 是局部一致椭圆的, 且

$$\mathcal{N}w_- \geq 0, \quad \mathcal{N}w_+ \leq 0, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内,}$$

$$w_- \leq w_+, \quad \text{在 } \partial^1\Omega \text{ 上,}$$

$$\mathcal{M}w_- < \mathcal{M}w_+, \quad \text{在 } \partial^2\Omega \text{ 上,}$$

那么在区域 Ω 内有 $w_- \leq w_+$.

为后文讨论所需, 定义两个区域

$$\Lambda_1 := \{\theta_0 < \theta < \pi\}, \quad (3.22)$$

$$\Lambda_2 := \{\theta_0 + \pi < \theta < 2\pi\}, \quad (3.23)$$

其中

$$\theta = \arctan\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right) \in [0, 2\pi).$$

从变换 (3.19) 可以看到边界条件 $L = 1$ 等价于 $w = 1$. 于是, 由问题 1.1 可以推导出如下关于 w

的问题:

$$\begin{cases} \mathcal{N}w = 0, & \text{在 } \Omega_D \text{ 内,} \\ w = 1, & \text{在 } \partial^1\Omega_D \text{ 上,} \\ Dw \cdot \nu_{w_1} = 0, & \text{在 } W_1 \text{ 上,} \\ Dw \cdot \nu_{w_2} = 0, & \text{在 } W_2 \text{ 上.} \end{cases} \quad (3.24)$$

下面开始建立估计 (3.17). 为此目的, 可先利用引理 3.3 来得到函数 w 的 L^∞ 估计.

引理 3.4 假设 $w \in C^0(\bar{\Omega}_D) \cap C^1(\bar{\Omega}_D \setminus \partial^1\Omega_D) \cap C^3(\Omega_D \cup W_1 \cup W_2)$ 是问题 (3.24) 的解且在区域 Ω_D 内满足 $w > 1$. 如果边界 $\partial^1\Omega_D$ 是 C^2 分片光滑的且具有一致严格正的曲率, 那么一定存在一个仅与 Ω_D 有关的常数 C 使得

$$1 < w < C, \quad \text{在 } \bar{\Omega}_D \setminus \partial^1\Omega_D \text{ 内.}$$

特别地, 对于任意远离边界 $\partial^1\Omega_D$ 的子区域 $\Omega_D^{\text{sub}} \subset \Omega_D$, 有

$$1 + \varepsilon_0 \leq w < C,$$

其中正数 $\varepsilon_0 > 0$ 仅与 Ω_D^{sub} 相关.

证明 该证明的主要思路是找到问题 (3.24) 合适的上下解, 然后利用比较原理得到估计. 为此, 先分析方程 $\mathcal{N}w = 0$ 的精确解. 可直接验证对于任意给定的常向量 $\eta \in \mathbb{R}^3$, 函数

$$w^\eta(\xi) = \frac{\eta \cdot (\xi, 1)}{\sqrt{1 + |\xi|^2}} \quad (3.25)$$

是方程 $\mathcal{N}w = 0$ 的一个精确解. 简单计算可得

$$\partial_i w^\eta(\xi) = \frac{\sqrt{1 + |\xi|^2} \eta_i - w^\eta \xi_i}{1 + |\xi|^2}, \quad \text{其中 } i = 1, 2, \quad (3.26)$$

其中 ∂_i 表示 ∂_{ξ_i} . 于是,

$$Dw^\eta(\xi) \cdot \nu_{w_1} = \frac{\tilde{\eta} \cdot \nu_{w_1}}{\sqrt{1 + |\xi|^2}}, \quad Dw^\eta(\xi) \cdot \nu_{w_2} = \frac{\tilde{\eta} \cdot \nu_{w_2}}{\sqrt{1 + |\xi|^2}}, \quad (3.27)$$

其中 $\eta = (\tilde{\eta}, \eta_3) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. 用 $O^{\tilde{\eta}} = (\xi_1, \xi_2)$ 表示 $\eta_3 = 1$ 时 $\tilde{\eta}$ 对应的坐标, 则由 (3.22)、(3.23) 和 (3.27) 可知, 当 $O^{\tilde{\eta}} \in \Lambda_1$ 时, $Dw^\eta \cdot \nu_{w_1}$ 在 W_1 上以及 $Dw^\eta \cdot \nu_{w_2}$ 在 W_2 上的值都是负的; 而当 $O^{\tilde{\eta}} \in \Lambda_2$ 时, 两者的值都是正的.

基于上述分析, 下面重点关注问题 (3.24) 上下解的构造. 关于上解, 考虑集合

$$\Sigma_+ := \{\eta \in \mathbb{R}^3 : O^{\tilde{\eta}} \in \Lambda_2, \text{ 且在 } \partial^1\Omega_D \text{ 上 } w^\eta > 1\}. \quad (3.28)$$

当 $\eta \in \Sigma_+$ 时, 显然, 函数 w^η 满足

$$\begin{cases} \mathcal{N}w^\eta = 0, & \text{在 } \Omega_D \text{ 内,} \\ w^\eta > 1, & \text{在 } \partial^1\Omega_D \text{ 上,} \\ Dw^\eta \cdot \nu_{w_1} > 0, & \text{在 } W_1 \text{ 上,} \\ Dw^\eta \cdot \nu_{w_2} > 0, & \text{在 } W_2 \text{ 上.} \end{cases}$$

从 (3.25) 可以看出, 对于任一固定的常向量 $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3$, 函数 $w^{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\xi})$ 关于 $\frac{(\xi_1, \xi_2, 1)}{\sqrt{1+|\boldsymbol{\xi}|^2}}$ 与 $\boldsymbol{\eta}$ 的夹角是单调递减的. 因此, 若 $\boldsymbol{\eta} \in \Sigma_+$, 那么对应的函数 $w^{\boldsymbol{\eta}}$ 在区域 Ω_D 内是处处大于 1 的. 特别地, 对于任意的紧子区域 $\Omega_{\text{sub}}^c \subset \Omega_D$, 有

$$w^{\boldsymbol{\eta}} > 1 + \varepsilon, \quad \text{在 } \Omega_{\text{sub}}^c \text{ 内}, \quad (3.29)$$

其中常数 $\varepsilon > 0$ 仅依赖于 Ω_{sub}^c .

由 (3.25)、(3.26) 和 (3.29) 可知, 当 $\boldsymbol{\eta} \in \Sigma_+$ 时, 算子 $\mathcal{N}$ 关于 $w^{\boldsymbol{\eta}}$ 是局部一致椭圆的. 因此, 根据引理 3.3, 在区域 Ω_D 内有 $w \leq w^{\boldsymbol{\eta}}$. 记 w^+ 为所有这些 $w^{\boldsymbol{\eta}}$ 组成集合的下确界, 即

$$w^+ = \inf\{w^{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\eta} \in \Sigma_+\}, \quad (3.30)$$

于是, 在区域 Ω_D 内, $w \leq w^+$, 且在边界 $\partial^1 \Omega_D$ 上, $w^+ \geq 1$. 特别需要指出的是, 边界 $\partial^1 \Omega_D$ 一致严格正的曲率保证了

$$w^+ = 1, \quad \text{在 } \partial^1 \Omega_D \text{ 上}. \quad (3.31)$$

关于下解, 考虑集合

$$\Sigma_- := \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3 : \text{在 } \overline{\partial^1 \Omega_D \cup W_1 \cup W_2} \text{ 上, } w^{\boldsymbol{\eta}} < 1\}, \quad (3.32)$$

并定义

$$w^- := \sup\{w^{\boldsymbol{\eta}} : \boldsymbol{\eta} \in \Sigma_-\}. \quad (3.33)$$

显然, 在 Ω_D 内, $\mathcal{N}w^- \geq 0$.

在此断言, 对于任意的紧子区域 $\Omega_{\text{sub}}^c \subset \Omega_D$, 一定存在一个仅与 Ω_{sub}^c 相关的常数 $\varepsilon_0 > 0$ 使得

$$w^- \geq 1 + \varepsilon_0, \quad \text{在 } \Omega_{\text{sub}}^c \text{ 内}. \quad (3.34)$$

对于任一固定的点 $\boldsymbol{\xi}_0 = (\xi_{10}, \xi_{20}) \in \Omega_{\text{sub}}^c$, 可以选取一个充分小的数 $0 < \varepsilon_0 \ll 1$ 和一个常向量

$$\boldsymbol{\eta}_0 = (1 + \varepsilon_0) \frac{(\xi_{10}, \xi_{20}, 1)}{\sqrt{1 + |\boldsymbol{\xi}_0|^2}}$$

使得 $\boldsymbol{\eta}_0$ 属于集合 Σ_- . 再利用 (3.33), 断言得证.

由 (3.34) 和函数 w^- 的连续性可知, 在 Ω_D 内有 $w^- > 1$, 在 $\overline{\partial^1 \Omega_D \cup W_1 \cup W_2}$ 上有 $w^- \geq 1$. 此外由 w^- 的定义可知其在 $\overline{\partial^1 \Omega_D \cup W_1 \cup W_2}$ 上小于等于 1. 于是, 有

$$w^- = 1, \quad \text{在 } \overline{\partial^1 \Omega_D \cup W_1 \cup W_2} \text{ 上}. \quad (3.35)$$

这表明在线段 W_1 上 $Dw^- \cdot \boldsymbol{\nu}_{w_1} < 0$, 在线段 W_2 上 $Dw^- \cdot \boldsymbol{\nu}_{w_2} < 0$. 另一方面, 从 (3.25)、(3.26) 和 (3.34) 可以推断出算子 $\mathcal{N}$ 关于 w^- 是局部一致椭圆的. 因此, 综合上述讨论并应用引理 3.3 可得

$$w \geq w^-, \quad \text{在 } \Omega_D \text{ 内}. \quad (3.36)$$

最后, 改进在原点 O 和 $W_1 \cup W_2$ 处的估计. 为此, 考虑集合

$$\tilde{\Sigma}_- := \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3 : O\tilde{\boldsymbol{\eta}} \in \Lambda_1, \text{ 且在 } \partial^1 \Omega_D \text{ 上, } w^{\boldsymbol{\eta}} < 1\}.$$

显然, 当 $\boldsymbol{\eta} \in \tilde{\Sigma}_-$ 时, 函数 w^η 满足

$$\begin{cases} \mathcal{N}w^\eta = 0, & \text{在 } \Omega_D \text{ 内,} \\ w^\eta < 1, & \text{在 } \partial^1\Omega_D \text{ 上,} \\ Dw^\eta \cdot \boldsymbol{\nu}_{w_1} < 0, & \text{在 } W_1 \text{ 上,} \\ Dw^\eta \cdot \boldsymbol{\nu}_{w_2} < 0, & \text{在 } W_2 \text{ 上.} \end{cases}$$

关系式 (3.34) 和 (3.36) 表明算子 $\mathcal{N}$ 关于 w 是局部一致椭圆的. 因此, 再次利用引理 3.3 有, 若 $\boldsymbol{\eta} \in \tilde{\Sigma}_-$, 那么对于任意一个子区域 $\Omega_D^{\text{sub}} \subset \Omega_D$, 当 w^η 在其上处处大于 1 时, 函数 w^η 就是问题 (3.24) 的一个下解, 即在 Ω_D^{sub} 上有 $w \geq w^\eta$. 取 $\tilde{w}^-$ 为所有这些 w^η 组成集合的上确界. 于是, 在区域 Ω_D 内有 $w \geq \tilde{w}^-$. 类似关系式 (3.34) 的证明方法, 可以找到一个仅依赖于 Ω_D^{sub} 的常数 $\varepsilon_0 > 0$, 使得在点 O 和 $W_1 \cup W_2$ 处满足 $\tilde{w}^- \geq 1 + \varepsilon_0$. $\square$

由上述引理立得

$$\sqrt{1 + |\boldsymbol{\xi}|^2} < \phi^- \leq \phi \leq \phi^+ < C, \quad \text{在 } \bar{\Omega}_D \setminus \partial^1\Omega_D \text{ 内,} \quad (3.37)$$

$$\phi = \phi^\pm, \quad \text{在 } \partial^1\Omega_D \text{ 上,} \quad (3.38)$$

其中 $\phi^\pm = \sqrt{1 + |\boldsymbol{\xi}|^2} w^\pm$, 常数 C 仅与区域 Ω_D 相关.

接着, 基于前面的讨论, 建立 Lipschitz 估计 (3.18).

引理 3.5 假设函数 ϕ 是问题 1.1 的解且在区域 Ω_D 上有 $\phi > \sqrt{1 + |\boldsymbol{\xi}|^2}$. 如果边界 $\partial^1\Omega_D$ 是 C^2 分片光滑的且具有一致严格正的曲率, 那么一定存在一个仅与区域 Ω_D 有关的常数 C 使得

$$\|D\phi\|_{L^\infty(\Omega_D)} < C. \quad (3.39)$$

证明 首先, 考虑函数 ϕ 在边界 $\partial^1\Omega_D$ 上的估计. 从 (3.37) 和 (3.38) 可以看出

$$\|D\phi\|_{L^\infty(\partial^1\Omega_D)} \leq \|D\phi^+\|_{L^\infty(\partial^1\Omega_D)}. \quad (3.40)$$

另外, 由 (3.26) 和 (3.30) 并注意到 $\phi^+ = \sqrt{1 + |\boldsymbol{\xi}|^2} w^+$, 发现上式的右端被一个仅与 Ω_D 有关的常数 C 所控制.

然后, 重点关注区域内部的估计. 观察方程 (1.12), 直接计算可知函数 $\frac{1}{2}|D\phi|^2$ 满足

$$\mathbf{A} : D^2 \left(\frac{1}{2} |D\phi|^2 \right) = \sum_{k=1}^2 (D\phi_k)^T \cdot \mathbf{A} \cdot (D\phi_k) + \sum_{i,j,k=1}^2 A_{ij} \phi_k \phi_{ijk}, \quad (3.41)$$

这里, 上标 T 表示转置. 将方程 $\mathbf{A} : D^2\phi = 0$ 关于 ξ_k 求导并在其两端同时乘上 ϕ_k , 有

$$\sum_{i,j=1}^2 \partial_k (A_{ij}) \phi_{ij} \phi_k + \sum_{i,j=1}^2 A_{ij} \phi_k \phi_{ijk} = 0. \quad (3.42)$$

利用关系式 (3.42), 方程 (3.41) 可改写为

$$\mathbf{A} : D^2 \left(\frac{1}{2} |D\phi|^2 \right) = \sum_{k=1}^2 (D\phi_k)^T \cdot \mathbf{A} \cdot (D\phi_k) + \sum_{k=1}^2 h_k(\boldsymbol{\xi}, \phi, D\phi) \partial_k \left(\frac{1}{2} |D\phi|^2 \right), \quad (3.43)$$

其中

$$h_k(\boldsymbol{\xi}, \phi, D\phi) = - \sum_{i,j=1}^2 \partial_i(A_{kj}) \frac{\phi_i}{\phi_j}. \quad (3.44)$$

引理 2.3 表明方程 (1.12) 在区域 Ω_D 内是椭圆型的. 这等价于矩阵 $\mathbf{A}$ 是一个正定阵, 即

$$\sum_{k=1}^2 (D\phi_k)^T \cdot \mathbf{A} \cdot (D\phi_k) > 0. \quad (3.45)$$

根据上面这些性质, 我们断言, 如果 $|D\phi|^2$ 不是一个常函数, 那么它一定不能在区域 Ω_D 内部取到极大值. 事实上, 对于任意的内点 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0 \in \Omega_D$, 从 (3.41)、(3.43) 和 (3.45) 可以看到, 当 $D\phi(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0) = \mathbf{0}$, 或者 $\partial_1\phi(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0)$ 和 $\partial_2\phi(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0)$ 均不等于 0 时, 断言中的结论是成立的. 因此, 仅需讨论 $\partial_1\phi(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0)$ 或 $\partial_2\phi(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0)$ 为 0 的情形即可. 对于这两种情形, 均可在 (ξ_1, ξ_2) 平面上选取一个适当的旋转变换使得在新坐标系中对应 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_0$ 的点上, $\partial_1\phi \neq 0$ 且 $\partial_2\phi \neq 0$. 又注意到, 方程 (1.12) 和函数 $|D\phi|^2$ 都具有旋转不变性, 于是, 在经过旋转变换后的新坐标系中, (3.43) 仍成立. 再次利用 (3.45), 我们便可证明断言.

最后处理边界 $W_1 \cup W_2$ 和原点 O . 因为方程 (1.12) 和边界条件 (1.14)–(1.16) 的形式在旋转变换下是保持不变的. 于是类似引理 2.2 中的方法, 可以将线段 W_1 和 W_2 上的点当作区域 Ω_D 的内点来处理. 而对于原点 O , 我们发现 W_1 和 W_2 上单位外法向量的方向是不同的, 且在 W_1 上, $D\phi \cdot \boldsymbol{\nu}_{w_1} = 0$; 在 W_2 上, $D\phi \cdot \boldsymbol{\nu}_{w_2} = 0$, 因此, $D\phi(O) = \mathbf{0}$. 这意味着函数 $|D\phi|^2$ 的最大值只会在边界 $\partial^1\Omega_D$ 上取到, 即

$$\|D\phi\|_{L^\infty(\Omega_D)} \leq \|D\phi\|_{L^\infty(\partial^1\Omega_D)}. \quad (3.46)$$

利用此估计和边界估计 (3.40), 引理证毕. $\square$

结合前面的讨论以及引理 3.4 和 3.5 即可完成定理 1.1(ii) 的证明.

致谢 在本文的完成过程中, 陈恕行教授和陈贵强教授给出了许多宝贵的意见, 在此两位作者对其表示衷心的感谢.

参考文献

- 1 Babaev D A. Numerical solution of the problem of supersonic flow past the lower surface of a delta wing. AIAA J, 1963, 1: 2224–2231
- 2 Chen S. Linear approximation for supersonic flow past a delta wing. Arch Ration Mech Anal, 1997, 140: 319–333
- 3 Chen S, Yi C. Global solutions for supersonic flow past a delta wing. SIAM J Math Anal, 2015, 47: 80–126
- 4 Gad-el-Hak M, Ho C M. The pitching delta wing. AIAA J, 1985, 23: 1660–1665
- 5 Fowell L R. Exact and approximate solutions for the supersonic delta wing. J Aeronautical Sci, 1956, 23: 709–720
- 6 Hui W H. Supersonic and hypersonic flow with attached shock waves over delta wings. Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci, 1971, 325: 251–268
- 7 Miller D S, Wood R M. Leaside flows over delta wings at supersonic speeds. J Aircraft, 1984, 21: 680–686
- 8 Voskresenskii G P. Numerical solution of the problem of supersonic gas flow past an arbitrary delta wing surface in the compression region. Fluid Dyu, 1968, 3: 90–95
- 9 Kamenshchik A, Moschella U, Pasquier V. An alternative to quintessence. Phys Lett B, 2001, 511: 265–268
- 10 Popov V A. Dark energy and dark matter unification via superfluid Chaplygin gas. Phys Lett B, 2010, 686: 211–215
- 11 Serre D. Multidimensional shock interaction for a Chaplygin gas. Arch Ration Mech Anal, 2009, 191: 539–577
- 12 Serre D. Three-dimensional interaction of shocks in irrotational flows. Confluentes Math, 2011, 3: 543–576
- 13 Chen S, Qu A. Riemann boundary value problems and reflection of shock for the Chaplygin gas. Sci China Math, 2012, 55: 671–685
- 14 Chen S, Qu A. Two-dimensional Riemann problems for Chaplygin gas. SIAM J Math Anal, 2012, 44: 2146–2178

- 15 Lai G, Sheng W. Elementary wave interactions to the compressible Euler equations for Chaplygin gas in two dimensions. *SIAM J Appl Math*, 2016, 76: 2218–2242
- 16 Elling V, Liu T P. The ellipticity principle for self-similar potential flows. *J Hyperbolic Differ Equ*, 2005, 2: 909–917
- 17 Chen G Q, Feldman M. *The Mathematics of Shock Reflection-Diffraction and von Neumann’s Conjectures*. Princeton-Oxford: Princeton University Press, 2018

The ellipticity principle for the 3-D steady potential flow in conical coordinates

Bingsong Long & Chao Yi

Abstract In this paper, we consider the 3-D steady potential flow for a compressible gas with pressure satisfying $p'(\rho) = \rho^{\gamma-1}$, where ρ is the density and $\gamma \geq -1$ is a constant. The potential equation is of mixed type in conical coordinates, and the type is completely determined by a pseudo-Mach number L with $L < 1$ (resp. $L > 1$) corresponding to elliptic (resp. hyperbolic) regions. We first establish an ellipticity principle: for $\gamma \geq -1$, the equation is elliptic in the interior of a parabolic-elliptic region; in particular, when $\gamma > -1$, there exists a domain-dependent function $\delta_0 > 0$ such that $L \leq 1 - \delta_0$. Then applying this ellipticity principle, we further prove that for $\gamma \geq -1$, the equation is uniformly elliptic in any subregion that is strictly away from the degenerate boundary.

Keywords 3-D steady potential flow, mixed type equation, ellipticity principle, parabolic-elliptic region, degenerate boundary

MSC(2020) 35L65, 35L67, 35J25, 35J70, 76N10

doi: 10.1360/SSM-2020-0142