

基于统计规律的岩石非稳态蠕变经验模型研究

张亮亮¹, 程桦², 王晓健¹

(1. 安徽理工大学 土木建筑学院, 安徽 淮南 232001; 2. 安徽大学 资源与环境工程学院, 安徽 合肥 230022)

摘要: 针对大多数常规三轴压缩条件下岩石非稳态蠕变模型存在函数复杂、参数较多且不易确定等不足, 基于该条件下 31 组不同类型岩石蠕变试验数据, 构建应变函数和时间函数, 统计、分析得到二者线性关系, 据此建立一种新的岩石非稳态蠕变经验模型, 根据页岩、大理岩、泥岩和砂质页岩 4 种类型岩石在不同应力水平下的蠕变试验数据, 对模型精确性和合理性进行验证。结果表明: 基于统计规律的岩石非稳态蠕变经验模型函数为仅含 4 个模型参数的统一表达式, 其蠕变曲线近似为反“S”型, 蠕变速度曲线近似为正“U”型, 均与实际岩石蠕变规律一致; 页岩、大理岩、泥岩和砂质页岩在不同应力水平下的蠕变试验结果与经验模型理论曲线吻合程度高, 验证了该模型的合理性和精确性, 该模型不仅能描述瞬时弹性应变、衰减蠕变、等速蠕变, 还能描述非线性特征尤为明显的加速蠕变。

关键词: 岩石力学; 蠕变模型; 非稳定蠕变; 线性拟合; 黏弹塑性

中图分类号: TU 45

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2025)01 - 0164 - 10

Research on unsteady creep empirical model of rocks based on statistical laws

ZHANG Liangliang¹, CHENG Hua², WANG Xiaojian¹

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Anhui University of Science and Technology, Huainan, Anhui 232001, China;

2. School of Resources and Environmental Engineering, Anhui University, Hefei, Anhui 230022, China)

Abstract: In view of the shortcomings of most rock unsteady creep models under conventional triaxial compression conditions, such as complex functions, numerous parameters and difficulty in determining, based on 31 sets of unsteady creep test data of different types of rocks, the strain functions and time functions were constructed, and the linear relationship between the two was statistically analyzed. Based on this, a new empirical model for unsteady creep of rocks was established, using creep test data of shale, marble, mudstone and sandy shale at different stress levels to verify the accuracy and rationality of the model. The results show that the empirical model function of rock unsteady creep based on statistical laws is a unified expression containing only four model parameters. Its creep curve is approximately an inverse S-shape, and the creep velocity curve is approximately a positive U-shape, both of which are consistent with the actual rock creep laws. The creep test results of shale, marble, mudstone, and sandy shale at different stress levels are highly consistent with the theoretical curve of the empirical model. Its rationality and accuracy have been verified. The model can not only describe instantaneous elastic strain, attenuation creep, and constant velocity creep, but also describe accelerated creep with particularly obvious nonlinear characteristics.

Key words: rock mechanics; creep model; unsteady creep; linear fitting; viscoelastic plasticity

收稿日期: 2024 - 06 - 11; **修回日期:** 2024 - 08 - 07

基金项目: 安徽省高等学校科学研究重点项目(2023AH051203); 安徽理工大学高层次人才科研启动基金(2022yjrc32); 国家自然科学基金资助项目(52404069)

Supported by the Natural Science Research Project of Anhui Educational Committee(Grant No. 2023AH051203), Scientific Research Foundation for High-level Talents of Anhui University of Science and Technology(Grant No. 2022yjrc32) and National Natural Science Foundation of China(Grant No. 52404069)

作者简介: 张亮亮(1992 -), 男, 2016 年毕业于安徽理工大学土木工程专业, 现任讲师, 主要从事岩石蠕变力学研究方面的教学与研究工作。E-mail: 2022002@aust.edu.cn

DOI: 10.3724/1000-6915.jrme.2024.0453

1 引言

蠕变特性是岩石材料的固有属性, 影响岩体结构的安全性和长期稳定性, 研究岩石蠕变特性对地下工程结构的受力与变形分析、支护结构选型、支护时机确定至关重要^[1]。目前, 针对低应力状态下岩石非稳态蠕变特性的研究, 已经形成了非常系统和成熟的理论, 建立了广义 Kelvin 模型、Burgers 模型、Bingham 模型等经典力学模型。因此, 针对低应力状态下岩石蠕变特性的研究不再赘述, 重点研究高应力状态下岩石非稳态蠕变模型的建立及其参数的确定方法。

岩石非稳态蠕变包括瞬时弹性应变、衰减蠕变、等速蠕变和加速蠕变, 建立能够描述非稳态蠕变过程的力学模型一直是岩石蠕变力学的重点和难点。国内外学者提出了大量针对不同类型岩石在不同应力路径下的力学模型, 呈现出百家争鸣、百花齐放的学术局面。根据建模理论基础不同, 笔者将现有岩石非稳态蠕变模型大致分为以下 4 类。

(1) 经验蠕变模型

岩石经验蠕变模型主要根据试验数据, 从数理统计回归的角度建立蠕变经验方程。如表 1 所示, 常见的岩石经验蠕变模型函数主要有双曲线函数、指数函数、对数函数和幂函数。

表 1 岩石经验蠕变模型

Table 1 Rock empirical creep models

岩石类型	蠕变方程	函数类型	参数个数	参数含义
珊瑚砂 ^[2]	$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{aD}{a-bD} \frac{t}{T+t}$	双曲线函数	4	ε_0 为初始应变, D 为应力偏差, a, b, T 为拟合参数
泥岩 ^[3]	$\varepsilon = A_2 + \frac{A_1 - A_2}{1 + \left(\frac{t}{x_0}\right)^p}$	指数函数	4	A_1, A_2, x_0, p 为拟合参数
	$\varepsilon = a[1 + (1+bt)^c]$	幂函数	3	a, b, c 为拟合参数
辉绿岩 ^[4]	$\varepsilon = a + b \ln(c+t) + dt$	对数函数	4	a, b, c, d 为拟合参数
	$\varepsilon = a + A(1+be^{-ct})$	指数函数	4	a, A, b, c 为拟合参数

(2) 非线性蠕变模型

非线性蠕变模型通过传统元件组合模型基础上串联非线性元件或将非线性元件替换线性元件, 建立能够描述岩石非稳态蠕变过程的力学模型。Y. L. Zhao 等^[5]考虑瞬时塑性变形和非线性黏性变形, 将瞬时弹性体、瞬时塑性体、广义 Kelvin 体和非线

性黏性体串联, 建立能够描述岩石蠕变和松弛特性的流变模型; 刘开云等^[6]在 Bingham 模型基础上串联一个应变触发非线性黏性元件, 建立了可以描述岩石等速和加速蠕变特性的力学模型; 刘东燕等^[7]在 Burgers 模型基础上串联具有修正与优化功能的 Kelvin 模型, 建立能够反映不同围压下岩石加速蠕变特征的改进黏塑性模型; 杨圣奇和徐鹏^[8]考虑岩石蠕变过程中的裂纹扩展过程, 建立了一种新的非线性蠕变模型。

(3) 损伤蠕变模型

损伤蠕变模型通过在元件组合模型基础上串联非线性损伤体, 或根据有效应力原理将考虑损伤的模型参数替换不考虑损伤的模型参数, 从而建立岩石非稳态蠕变模型。F. Wu 等^[9]考虑了加速蠕变阶段的损伤过程, 建立了能够描述盐岩非线性蠕变特征的损伤模型; H. Z. Liu 等^[10]采用 Kachanov 损伤理论, 将损伤变量引入 Bingham 模型中, 建立一种新的非线性损伤蠕变模型; 张强勇等^[11]开展温度和应力耦合作用下片麻状花岗岩三轴蠕变试验, 建立了考虑热-力耦合作用的热黏弹塑性损伤蠕变模型; 张亮亮和王晓健^[12]将弹性体、非线性 Kelvin 体、黏性体和损伤黏塑性体进行串联, 得到一种新的岩石黏弹塑性损伤蠕变模型。

(4) 分数阶蠕变模型

近年来, 分数阶理论逐渐在岩石非稳态蠕变特性研究中得到应用, 推动了岩石蠕变力学的发展。F. Wu 等^[13]在弹性元件和 Abel 黏壶基础上串联一个分数阶非线性黏壶元件, 该模型能够描述盐岩蠕变加速阶段; 张胜利等^[14]在 Maxwell 模型中引进分数阶 Abel 黏壶, 建立考虑温度影响的分数阶黏弹塑性蠕变损伤模型; H. W. Zhou 等^[15-16]在经典西原蠕变模型基础上引入了分数阶 Abel 黏壶, 用其代替 Newton 黏壶, 建立了适用于描述盐岩非稳态蠕变特性的分数阶模型; 曹建军等^[17]利用 Riemann-Liouville 分数阶积分理论及统计损伤理论改进了传统西原模型, 采用软弱夹层剪切蠕变试验验证了模型的合理性。

岩石蠕变模型不胜枚举, 除上述模型外, 还有基于能量理论^[18]、Weibull 分布理论^[19]、微观理论^[20]等类型的蠕变模型, 此处不再罗列。综上, 现有蠕变模型研究已取得丰富的成果, 但仍存在以下 4 点不足: (1) 大多数经验蠕变模型参数数量均在 3 个以上, 且仅能描述岩石瞬时应变、衰减蠕变和等速蠕变特征, 难以反映加速蠕变阶段的变化规律。(2)

大多数非稳态蠕变力学模型比较复杂，一般由 3 个及以上的元件模型进行串并联而成。如采用弹性模型描述瞬时应变，Kelvin 模型描述衰减蠕变，黏性模型描述等速蠕变，改进的黏塑性模型描述加速蠕变，虽然每部分模型功能及物理意义十分明确，但过多模型的组合致使蠕变方程过于复杂和冗长，不利于工程应用。(3) 组合模型所含元件越多，必然待定模型参数也会越多，如弹性模型、Kelvin 模型、黏性模型和改进的黏塑性模型分别包含至少 1, 2, 1, 3 个模型参数，而过多的参数仅靠有限的试验数据难以精确确定。(4) 大多数模型在推导蠕变方程时都基于叠加原理，将每部分元件模型蠕变方程进行叠加得到非稳态蠕变方程，缺乏一个能够直接描述岩石非稳态蠕变特征的统一、简洁的蠕变方程。

经验蠕变模型具有参数易确定、精度高和蠕变函数形式简单的优点，主要用于描述稳态蠕变，难以描述非稳态蠕变。本文基于不同类型岩石 31 组非稳态蠕变试验数据，统计、分析蠕变应变与时间的数学关系，建立一种岩石非稳态蠕变经验模型，提出了模型参数确定方法，并采用 4 种不同类型岩石蠕变试验数据，对模型的合理性和精确性进行验证，为岩石蠕变特性研究提供新的思路。

2 非稳态蠕变模型的建立

2.1 模型的建立

如图 1 所示，岩石非稳态蠕变曲线形状近似为反“S”型，蠕变速度曲线形状近似为正“U”型。岩石在整个非稳态蠕变过程中，应变随时间始终在增加，而蠕变速度经历首先逐渐减小，然后基本不变，最后逐渐增大的动态变化过程^[21-22]。因此仅依靠经验，难以根据蠕变和蠕变速度的变化特征，直接构建非稳态蠕变应变与时间的关系。而数学基本公式里面，线性函数的表达形式简洁明了，如果能将蠕变应变和时间进行适当的函数变换，然后建立如图 2 所示的蠕变应变函数 $f(\varepsilon)$ 和时间函数 $f(t)$ 的线性关系(k, b 分别为斜率和截距)，再根据线性函数关系推导蠕变应变与时间的表达式，则理论上采用该方法建立的蠕变经验模型能够描述岩石非稳态蠕变过程。

由上述建模思路可知，建立岩石非稳态蠕变经验模型的关键在于构建合适的应变函数和时间函数。假设岩石蠕变应变为 ε ，瞬时弹性应变为 ε_e ，

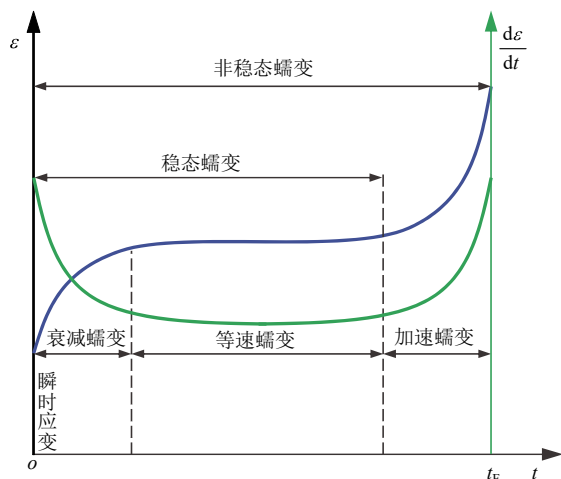


图 1 非稳态蠕变过程

Fig.1 Unsteady creep process

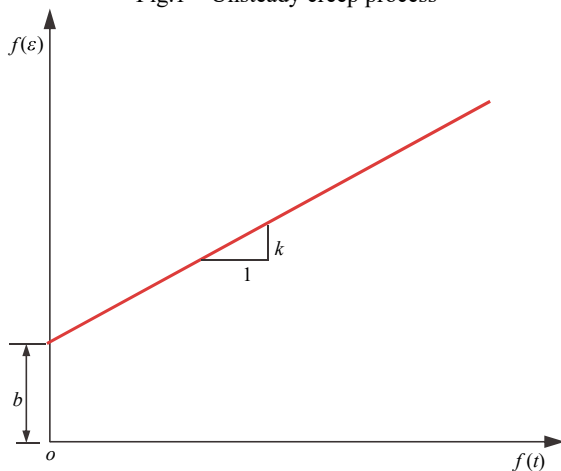


图 2 蠕变函数与时间函数的线性关系

Fig.2 The linear relationship between creep and time function

蠕变时间为 t ，岩石发生蠕变破坏的时间为 t_F ，在观察和拟合大量蠕变试验曲线的基础上，笔者发现不论是非线性蠕变模型、损伤蠕变模型还是分数阶蠕变模型，大多数蠕变方程里均含有 $\left(1 - \frac{t}{t_F}\right)$ ^[23-24]。

因此尝试将该与时间相关的变量作为时间函数，不考虑瞬时应变对非稳态蠕变曲线特征的影响，将 $\varepsilon - \varepsilon_e$ 作为应变函数，通过大量尝试和数据分析发现，该时间函数和应变函数并不是线性关系。然后，尝试构建时间函数和应变函数分别为 $-\ln\left(1 - \frac{t}{t_F}\right)$ 和 $\ln(\varepsilon - \varepsilon_e)$ ，然而，分析表明二者也不满足线性关系。最后，进一步尝试以 $\ln\left[-\ln\left(1 - \frac{t}{t_F}\right)\right]$ 和 $\ln(\varepsilon - \varepsilon_e)$ 为时间函数和应变函数，得到砂岩、盐岩、片岩、花岗岩等不同类型的岩石共计 31 组非稳态蠕变试验数据，并拟合得到二者关系，如图 3 所示。

由图 3 可知，10 组盐岩非稳态蠕变应变和时间

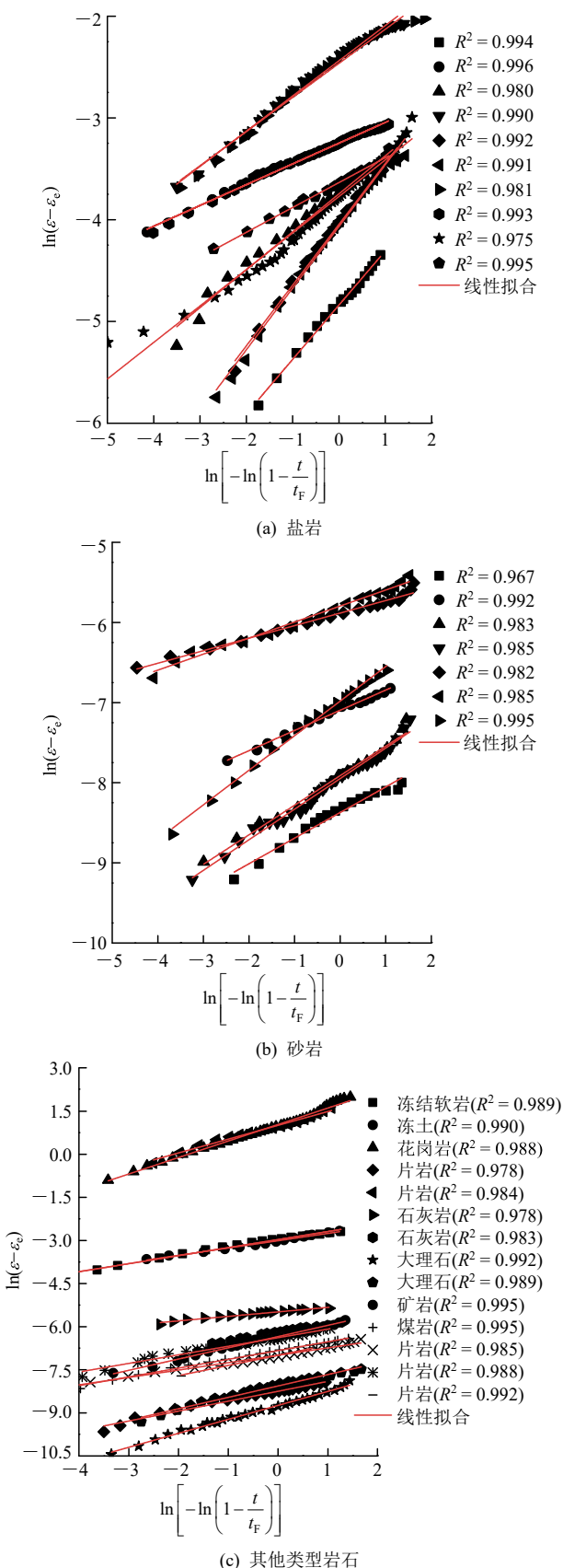


图 3 31 组蠕变试验数据拟合结果

Fig.3 31 sets of creep test data fitting results

经转换后, $\ln\left[-\ln\left(1-\frac{t}{t_F}\right)\right]$ 和 $\ln(\varepsilon - \varepsilon_c)$ 呈明显的线

性关系, 平均相关系数高达 0.989, 7 组砂岩的平均相关系数为 0.984, 片岩、花岗岩、大理石等 8 类岩石的 14 组试验数据平均拟合相关系数为 0.988。由此可见, $\ln\left[-\ln\left(1-\frac{t}{t_F}\right)\right]$ 和 $\ln(\varepsilon - \varepsilon_c)$ 呈线性关系, 故有

$$\ln(\varepsilon - \varepsilon_c) = k \ln\left[-\ln\left(1-\frac{t}{t_F}\right)\right] + b \quad (1)$$

式中: k, b 分别为斜率和截距。

对式(1)两边取指数得

$$\varepsilon - \varepsilon_c = e^{k \ln\left[-\ln\left(1-\frac{t}{t_F}\right)\right] + b} \quad (2)$$

对式(2)进行化简, 得到岩石非稳态蠕变方程为

$$\varepsilon = \varepsilon_c + e^b \left[-\ln\left(1-\frac{t}{t_F}\right)\right]^k \quad (3)$$

式(3)为经验模型的蠕变方程, 该模型的合理性需从蠕变和蠕变速度两方面进行验证。

2.2 蠕变分析

假设 $\varepsilon_c = 0.0019$, $b = 0.2$, $t_F = 50$, 根据式(3)得到不同 k 值条件下岩石非稳态蠕变曲线, 结果如图 4 所示。

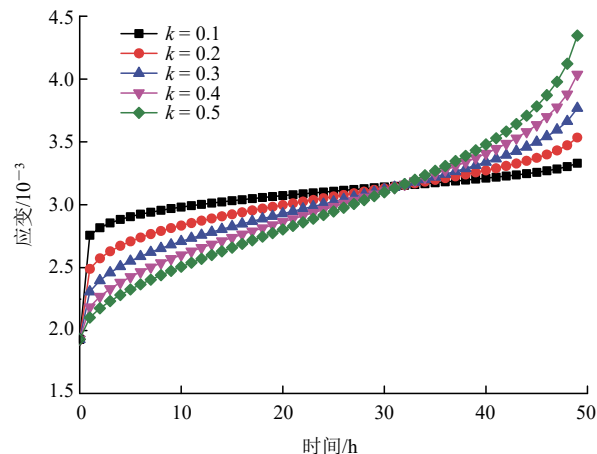


图 4 不同 k 岩石非稳态蠕变曲线

Fig.4 Unsteady creep curves of rocks with different k values

由图 4 可知, 由于瞬时弹性应变与时间无关, 因此不同 k 值条件下蠕变曲线起点一致。不同 k 值岩石非稳态蠕变均随时间的增加而增加, 包含瞬时弹性应变、衰减蠕变、等速蠕变和加速蠕变阶段, 蠕变曲线均近似为反“S”型, 与实际岩石蠕变曲线形态基本一致。随着 k 值的增大, 非稳态蠕变曲线越陡峭, 在衰减蠕变和等速蠕变阶段, 某一时刻对应的应变随 k 值的增大而减小, 在加速蠕变阶段,

某一时刻对应的应变随 k 值的增大而增大。表明在未进入加速蠕变之前, k 值越大, 岩石变形越不明显, 进入加速蠕变阶段后, k 值越大, 岩石变形越明显。因此, k 值与岩石非稳态蠕变曲线的形态密切相关, 可以通过改变 k 值以调整曲线斜率, 使其与实际岩石蠕变曲线形状更加吻合。

假设 $\varepsilon_c = 0.0019$, $k = 0.2$, $t_F = 50$, 根据式(3)得到不同 b 值条件下岩石非稳态蠕变曲线, 结果如图 5 所示。

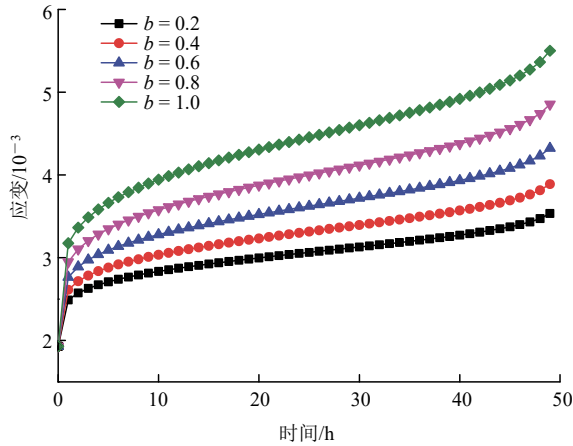


图 5 不同 b 值岩石非稳态蠕变曲线

Fig.5 Unsteady creep curves of rocks with different b values

由图 5 可知, 随着 b 值增大, 相同时刻的蠕变应变呈非线性增大特征, 即按照由下到上顺序模型蠕变曲线变得越来越稀疏。同时, 相同时刻的蠕变速率也越来越大, 加速蠕变特征越来越明显, 起始点的出现越来越早。因此, b 值对岩石非稳态蠕变曲线的形态影响较小, 主要影响蠕变量, 因此可以通过改变 b 值调整蠕变值, 使其与实际岩石蠕变曲线更加吻合。

2.3 蠕变速度分析

将式(3)对时间进行求导, 得到岩石蠕变速度 ε' 和加速度 ε'' 分别为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon' &= \frac{ke^b}{t_F - t} \left[-\ln \left(1 - \frac{t}{t_F} \right) \right]^{k-1} \\ \varepsilon'' &= \frac{ke^b}{(t_F - t)^2} \cdot \left[-\ln \left(1 - \frac{t}{t_F} \right) \right]^{k-1} \left\{ 1 + (k-1) \left[-\ln \left(1 - \frac{t}{t_F} \right) \right]^{-1} \right\} \end{aligned} \right\} (4)$$

假设 $b = 0.2$, $t_F = 50$, 根据式(4)得到不同 k 值条件下岩石非稳态蠕变速度曲线, 结果如图 6 所示。

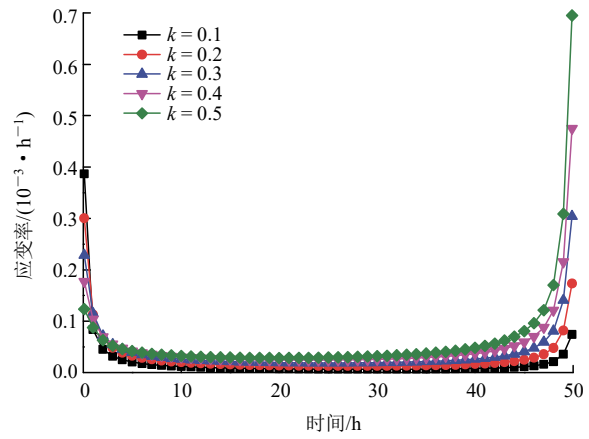


图 6 不同 k 岩石非稳态蠕变速度曲线

Fig.6 Unsteady creep velocity curves of rocks with different k values

由图 6 可知, 在蠕变开始很短时间内, k 值越大, 蠕变速度越小, 随后蠕变速度随 k 值的增大而增大。 k 值对岩石非稳态蠕变速度曲线的形态影响较小, 主要影响加速阶段蠕变速度, 可以通过改变 k 值调整加速蠕变阶段的应变增长速度。不同 k 值条件下, 非稳态蠕变速度曲线均经历首先逐渐减小, 然后基本不变, 最后逐渐增大的动态变化过程, 曲线形状近似为正“U”型, 与实际岩石蠕变速度变化规律一致。

假设 $k = 0.2$, $t_F = 50$, 根据式(4)得到不同 b 值条件下岩石非稳态蠕变速度曲线, 结果如图 7 所示。

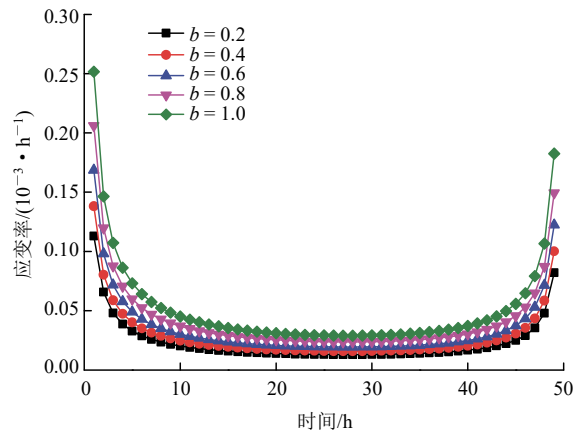


图 7 不同 b 值岩石非稳态蠕变速度曲线

Fig.7 Unsteady creep velocity curves of rocks with different b values

由图 7 可知, b 值越大, 蠕变速度越大, 且在衰减蠕变阶段和加速蠕变阶段, 岩石蠕变速度增长幅度明显大于等速蠕变阶段。与 k 值影响规律类似, b 值对岩石非稳态蠕变速度曲线的形态影响较小, 主要影响衰减蠕变和加速蠕变速度, 可以通过改变

b 值调整这 2 个蠕变阶段的应变增长速度。不同 b 值条件下, 蠕变速度曲线形状近似为正“U”型, 与实际岩石蠕变速度变化规律一致。

根据式(4)求得岩石蠕变加速度为 0 的临界时刻 t_a 为

$$t_a = [1 - \exp(k - 1)]t_F \quad (5)$$

由式(4)可知, 当蠕变时间未达到该临界值时, 蠕变加速度恒小于 0, 说明此阶段岩石蠕变速度逐渐减小; 当蠕变时间处于该临界值与岩石发生蠕变破坏时间之间时, 蠕变加速度恒大于 0, 说明此阶段岩石蠕变速度随时间逐渐增大。因此, 蠕变加速度为 0 的时刻, 既是岩石蠕变速度最小的时刻, 同时也是加速蠕变阶段的起始时刻。

上述分析表明, 岩石非稳态蠕变经验模型并不能严格满足岩石蠕变速度变化规律, 尤其是等速蠕变过程中蠕变速度特征。但王军保等^[25]表明所谓等速蠕变, 并非是蠕变速度严格保持不变, 只是变化幅度比较小。从图 6 和 7 也可以看出, 等速蠕变阶段的蠕变速度相对于衰减蠕变阶段和加速蠕变阶段变化非常小。

综上, 从蠕变和蠕变速度角度分析了岩石非稳态蠕变经验模型的合理性, 发现不同 k 和 b 值条件下蠕变和蠕变速度随时间的变化规律均与实际情况基本一致, 因此该经验模型用于描述岩石非稳态蠕变过程是合理、可行的。

3 模型参数确定

由式(3)可知, 岩石非稳态经验蠕变模型主要包含 ε_c , t_F , b , k 四个参数, 其中, 瞬时弹性应变可以根据胡克定律确定。岩石发生蠕变破坏的时间 t_F 是岩石蠕变重要的力学参数, 对准确预测岩石破坏时间具有重要意义, 同时该参数对岩石非稳态蠕变曲线的影响也十分明显。

假设 $\varepsilon_c = 0.0019$, $k = 0.2$, $b = 0.2$, 根据式(3)得到不同 t_F 值条件下岩石非稳态蠕变曲线, 结果如图 8 所示。

由图 8 可知, t_F 值不影响岩石非稳态蠕变曲线形态, 但直接影响岩石进入加速蠕变阶段的时间和最终发生蠕变破坏的时间。 t_F 值越小, 岩石稳态蠕变阶段持续的时间越短, 发生蠕变破坏所需的时间越短。 t_F 值越大, 衰减阶段和等速阶段蠕变速度越小, 蠕变曲线越平缓, 加速阶段蠕变和蠕变速度均随时间的增大而迅速增加。由图 8 还可知, t_F 值越

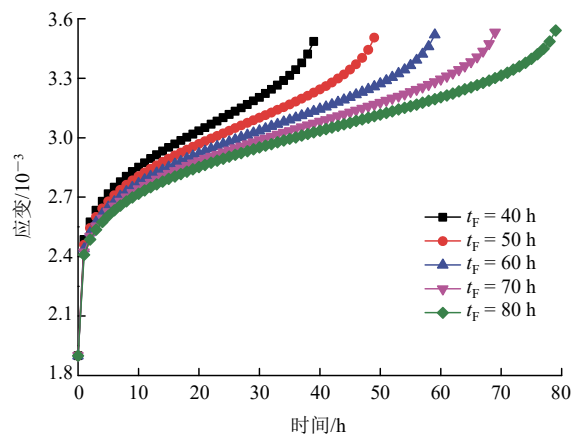


图 8 不同 t_F 岩石非稳态蠕变曲线

Fig.8 Unsteady creep curves of rocks with different values of t_F

小, 岩石越容易发生破坏, 因此该参数与应力水平密切相关, 且二者呈负相关。

目前, 国内外学者针对岩石长期强度开展了大量研究, 但是针对岩石蠕变破坏时间等的相关研究并没有引起足够的重视, 该参数确定方法主要包括以下 3 种。

(1) 试验法

通过声发射装置收集岩石变形破坏过程中微裂纹产生后发出的弹性波, 然后根据这些特征参数预测蠕变破坏时间。周孙基等^[26]根据岩石蠕变过程中的累积损伤和应变 2 种观测响应量, 建立破坏时间预测模型:

$$\ddot{\Omega}\dot{\Omega}^{-\alpha} = \beta\eta^{\frac{1}{\beta}} \quad (6)$$

式中: Ω 为累积损伤和应变 2 种观测响应量; $\dot{\Omega}$, $\ddot{\Omega}$ 分别为 Ω 对时间的一阶、二阶导数; α , β , η 均为模型系数。由于在实际应用中 β 的实际取值是未知的, 因此该模型具有一定局限性。

(2) 速度倒数法

速度倒数法由 M. Satio^[27]首次提出, 期预测模型如下:

$$\lg t_F = c - m \lg v \quad (7)$$

式中: v 为速率; c , m 为常量。该模型所含参数较少, 但主要用于滑坡的破坏时间预测, 是否适用于岩石非稳态蠕变破坏时间的预测还需进一步研究。

(3) 损伤力学法

一般认为在不考虑岩石赋存环境影响的条件下, 岩石蠕变破坏时间仅是应力的函数, 根据 Kachanov 材料蠕变损伤率理论^[28], 岩石发生蠕变破

坏的时间 t_F 为

$$t_F = \frac{1}{C(1+\nu)\sigma^\nu} \quad (8)$$

式中: C, ν 为岩石的材料常数, 可以根据不同应力蠕变试验结果拟合得到。

通过不同应力水平下岩石非稳态蠕变试验曲线, 可以确定出岩石材料常数 C, ν 。剩余参数 k, b 可根据解析法和拟合法进行确定。

3.1 解析法

根据岩石非稳态蠕变曲线特征及特征点试验数据确定模型参数的解析法, 近年来逐渐被广泛采用^[29-30], 该方法不依赖于全部的试验数据, 具有明确的模型参数求解函数表达式。根据式(5)得到进入加速蠕变阶段时刻和蠕变破坏时间的关系, 据此得到参数 k 的表达式为

$$k = 1 + \ln\left(1 - \frac{t_a}{t_F}\right) \quad (9)$$

当 $t = t_a$ 时, $\varepsilon = \varepsilon_a$, 根据式(3)有

$$\varepsilon_a = \varepsilon_c + e^b \left[-\ln\left(1 - \frac{t_a}{t_F}\right) \right]^k \quad (10)$$

根据式(10)得到参数 b 的表达式为

$$b = \ln(\varepsilon_a - \varepsilon_c) - k \ln\left[-\ln\left(1 - \frac{t_a}{t_F}\right) \right] \quad (11)$$

3.2 拟合法

拟合法具有精度高、操作简便的优点, 是确定岩石蠕变参数常用的一种方法。首先假定一组模型参数初始值 k^0, b^0 , 然后根据 m 组 (t_i, ε_i) 试验数据, 将 t_i 代入经验蠕变方程, 得到理论值 $\tilde{\varepsilon}_i$ 。为使理论值与试验值尽可能的接近, m 组试验数据与理论值的差的平方和取最小值, 即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sum_{i=1}^m [\varepsilon_i - \tilde{\varepsilon}_i(t_i, k^0, b^0)]^2}{\partial k^0} &= 0 \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^m [\varepsilon_i - \tilde{\varepsilon}_i(t_i, k^0, b^0)]^2}{\partial b^0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

根据式(12)进行参数迭代求解, 直到满足精度要求为止。Matlab, Origin 等数据处理软件能够快捷地实现非稳态蠕变曲线的拟合过程, 且获得的参数精度高, 因此多采用数据软件反演模型参数。

4 模型验证

采用常规三轴压缩条件下页岩^[31]、大理岩^[32]、泥岩^[8]和砂质页岩^[33]4 种类型岩石蠕变试验数据, 验证岩石非稳态蠕变经验模型的合理性与精确性。结合试验数据, 采用解析法得到模型参数, 如表 2 所示, 将模型参数代入式(3), 得到经验模型理论曲线, 并与试验曲线进行对比, 结果如图 9 所示。

表 2 模型参数

Table 2 Model parameters

岩石类型	σ/MPa	$\varepsilon_c / 10^{-3}$	$\varepsilon_a / 10^{-3}$	t_a / h	t_F / h	k	b
页岩 ^[31]	55.00	1.799	3.633	100.58	278.54	0.552	1.05
	65.00	2.175	3.739	28.40	86.31	0.601	1.00
大理岩 ^[32]	42.40	0.638	0.800	0.08	0.18	0.401	-1.61
	84.50	1.558	1.760	0.31	0.71	0.420	-1.37
	50.00	5.901	8.881	9.93	19.75	0.301	1.20
泥岩 ^[8]	60.00	7.021	10.116	6.12	12.36	0.316	1.25
	70.00	8.402	11.859	3.97	8.19	0.338	1.38
	52.82	1.814	2.239	7.89	15.22	0.269	-0.77
砂质页岩 ^[33]	55.37	1.882	2.318	4.27	8.28	0.276	-0.74
	56.64	1.954	2.373	3.08	5.91	0.262	-0.79
	58.31	2.024	2.426	1.80	3.51	0.279	-0.82

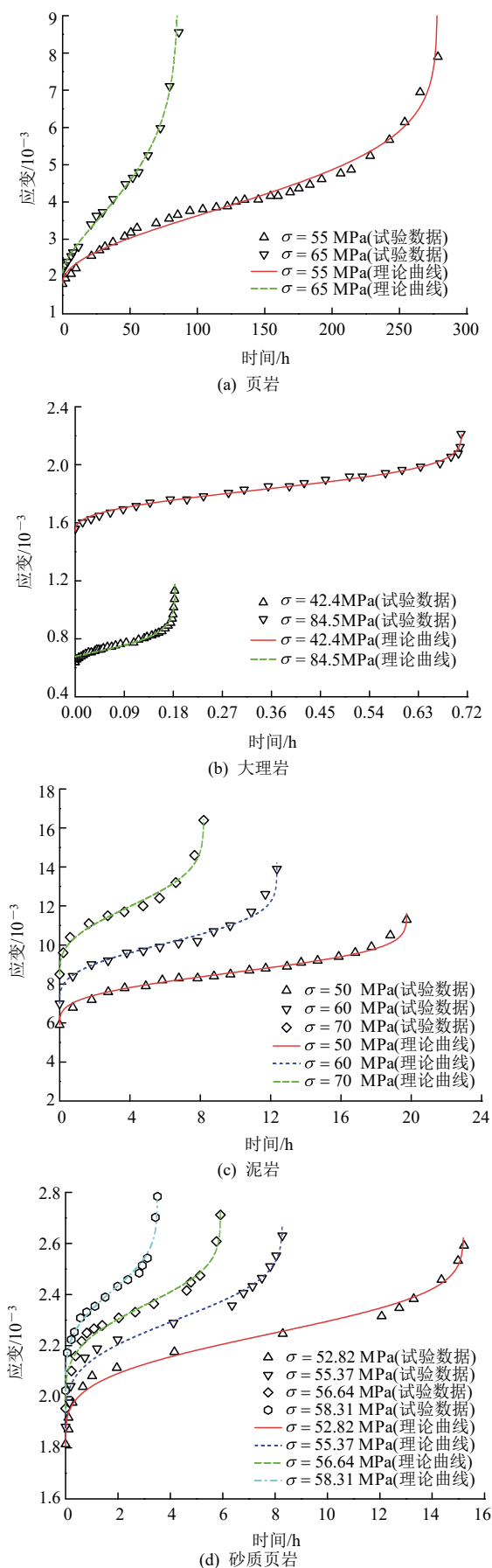


图 9 试验结果与模型理论曲线的对比

Fig.9 Comparison between experimental results and model theoretical curves

从图 9 可知，4 种不同类型岩石在不同应力水平下的蠕变试验结果均与经验模型理论曲线基本一致，该模型不仅能描述页岩、大理岩、泥岩和砂质页岩的瞬时弹性应变、衰减蠕变、等速蠕变，还能描述非线性特征尤为明显的加速蠕变，蠕变数值和蠕变速度变化规律与试验结果吻合程度高，验证了本文基于统计规律建立的岩石非稳态蠕变经验模型的合理性和精确性。而且，相对于传统元件组合模型而言，经验模型函数为仅含 4 个参数的统一表达式，在保证模型精度的前提下，该模型具有形式简洁、待定参数少和便于工程应用的优点。

5 结 论

- (1) 基于 31 组岩石非稳态蠕变试验数据，统计分析得到蠕变函数与时间函数的线性关系，据此建立了岩石非稳态蠕变经验模型。
- (2) 建立的经验模型函数为仅含 4 个参数的统一表达式，克服了元件组合模型需要分段处理的缺点，其蠕变和蠕变速度规律与实际蠕变规律基本一致，可用于描述岩石非稳态蠕变过程。同时，该模型表达式非常简单，方便应用。
- (3) 采用不同类型岩石蠕变试验数据对经验模型合理性和精确性进行验证，结果表明该模型理论曲线与试验结果基本一致，能够描述岩石非稳态蠕变全过程，尤其是能反映加速蠕变。

参考文献(References):

[1] 张亮亮, 王晓健. 考虑黏弹性应变分离的岩石复合蠕变模型研究[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2021, 52(5): 1 655 - 1 665. (ZHANG Liangliang, WANG Xiaojian. Study on composite creep model of rock considering viscoelastic plastic strain separation[J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2021, 52(5): 1 655 - 1 665.(in Chinese))

[2] 薛 鹏, 周先齐, 蔡燕燕, 等. 饱和珊瑚砂三轴蠕变特性及经验模型[J]. 岩土工程学报, 2020, 42(增2): 255 - 260.(XUE Peng, ZHOU Xianqi, CAI Yanyan, et al. Triaxial creep characteristics and empirical model for saturated coral sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2020, 42(Supp.2): 255 - 260.(in Chinese))

[3] 张泽林, 吴树仁, 王 涛, 等. 甘肃天水泥岩剪切蠕变行为及其模型研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2019, 38(增2): 3 603 - 3 617. (ZHANG Zelin, WU Shuren, WANG Tao, et al. Study on shear creep behavior and its model of mudstone in Tianshui, Gansu Province[J].

- Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2019, 38(Supp.2): 3 603 - 3 617.(in Chinese)
- [4] 贺如平, 张强勇, 王建洪, 等. 大岗山水电站坝区辉绿岩脉压缩蠕变试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(12): 2 495 - 2 503. (HE Ruping, ZHANG Qiangyong, WANG Jianhong, et al. study on compressive creep test on diabasic dike at dam site of Dagangshan hydropower station[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(12): 2 495 - 2 503.(in Chinese))
- [5] ZHAO Y L, WANG Y X, WANG W J, et al. Modeling of non-linear rheological behavior of hard rock using triaxial rheological experiment[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2017, 93: 66 - 75.
- [6] 刘开云, 薛永涛, 周 辉. 基于改进 Bingham 模型的软岩参数非定常三维非线性黏弹塑性蠕变本构研究[J]. 岩土力学, 2018, 39(11): 4 157 - 4 164.(LIU Kaiyun, XUE Yongtao, ZHOU Hui. Study on 3D nonlinear visco-elastic-plastic creep constitutive model with parameter unsteady of soft rock based on improved Bingham model[J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, 39(11): 4 157 - 4 164.(in Chinese))
- [7] 刘东燕, 谢林杰, 虞晓峰, 等. 不同围压作用下砂岩蠕变特性及非线性黏弹塑性模型研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2017, 36(增 2): 3 705 - 3 712.(LIU Dongyan, XIE Linjie, TUO Xiaofeng, et al. Creep properties of sandstone under different confining pressures and research on a nonlinear viscoelasto-plastic creep model[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2017, 36(Supp.2): 3 705 - 3 712.(in Chinese))
- [8] 杨圣奇, 徐 鹏. 一种新的岩石非线性流变损伤模型研究[J]. 岩土工程学报, 2014, 36(10): 1 846 - 1 854.(YANG Shengqi, XU Peng. A new nonlinear rheological damage model for rock[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, 36(10): 1 846 - 1 854.(in Chinese))
- [9] WU F, CHEN J, ZOU Q L. A nonlinear creep damage model for salt rock[J]. International Journal of Damage Mechanics, 2019, 28(5): 758 - 771.
- [10] LIU H Z, XIE H Q, HE J D, et al. Nonlinear creep damage constitutive model for soft rocks[J]. Mechanics of Time-dependent Materials, 2017, 21(1): 73 - 96.
- [11] 张强勇, 向 文, 江力宇, 等. 片麻状花岗岩热黏弹塑性损伤蠕变模型及应用研究[J]. 土木工程学报, 2017, 50(8): 88 - 97.(ZHANG Qiangyong, XIANG Wen, JIANG Liyu, et al. A thermal-visco-elastoplastic damage creep model for gneissic granite and its practical application[J]. China Civil Engineering Journal, 2017, 50(8): 88 - 97.(in Chinese))
- [12] 张亮亮, 王晓健. 岩石黏弹塑性损伤蠕变模型研究[J]. 岩土工程学报, 2020, 42(6): 1 085 - 1 092.(ZHANG Liangliang, WANG Xiaojian. Viscoelastic-plastic damage creep model for rock[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2020, 42(6): 1 085 - 1 092.(in Chinese))
- [13] WU F, LIU J, ZOU Q, et al. A triaxial creep model for salt rocks based on variable-order fractional derivative[J]. Mechanics of Time Dependent Materials, 2021, 25(1): 101 - 118.
- [14] 张胜利, 梁卫国, 肖 宁, 等. 考虑温度的盐岩分数阶黏弹塑性蠕变损伤模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2022, 41(增 2): 3 198 - 3 209. (ZHANG Shengli, LIANG Weiguo, XIAO Ning, et al. A fractional viscoelastic- plastic creep damage model for salt rock considering temperature effect[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2022, 41(Supp.2): 3 198 - 3 209.(in Chinese))
- [15] ZHOU H W, WANG C P, HAN B B, et al. A creep constitutive model for salt rock based on fractional derivatives[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2011, 48(1): 116 - 121.
- [16] 周宏伟, 王春萍, 段志强, 等. 基于分数阶导数的盐岩流变本构模型[J]. 中国科学: 物理学力学天文学, 2012, 42(3): 310 - 318.(ZHOU Hongwei, WANG Chunping, DUAN Zhiqiang, et al. Time-based fractional derivative approach to creep constitutive model of salt rock[J]. Scientia Sinica Physica, Mechanica and Astronomica, 2012, 42(3): 310 - 318.(in Chinese))
- [17] 曹建军, 胡 斌, 王泽祺, 等. 基于分数阶积分的软弱夹层蠕变损伤模型研究[J]. 岩土力学, 2024, 45(2): 454 - 464.(CAO Jianjun, HU Bin, WANG Zeqi, et al. Creep damage model of weak interlayer based on fractional order integral[J]. Rock and Soil Mechanics, 2024, 45(2): 454 - 464.(in Chinese))
- [18] 辛亚军, 李梦远. 岩石分级加载蠕变的能量耗散与变形机制研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2016, 35(增 1): 2 883 - 2 897.(XIN Yajun, LI Mengyuan. Study on deformation mechanism and energy dissipation of rock creep under step loading[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2016, 35(Supp.1): 2 883 - 2 897. (in Chinese))
- [19] 丁靖洋, 周宏伟, 李 潮, 等. 基于 Weibull 分布的盐岩分数阶蠕变本构模型研究[J]. 固体力学学报, 2013, 34(5): 473 - 480.(DING Jingyang, ZHOU Hongwei, LI Chao, et al. The fractional derivative approach to creep constitutive model of salt rock based on Weibull distribution[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2013, 34(5): 473 - 480.(in Chinese))
- [20] 李晓照, 贾亚星, 张骥烁, 等. 脆性岩石蠕变裂纹成核宏观细观力学机制研究[J]. 力学学报, 2021, 53(4): 1 059 - 1 069.(LI Xiaozhao, JIA Yaxing, ZHANG Qishuo, et al. A study on micro-macro mechanisms of crack nucleation during creep in brittle rocks[J].

- Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(4): 1 059 - 1 069.(in Chinese)
- [21] 于冰冰, 李 清, 赵桐德, 等. 基于应力与时间双阈值的岩石全时态非线性蠕变损伤模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2023, 42(8): 1 928 - 1 944.(YU Bingbing, LI Qing, ZHAO Tongde, et al. Full-time nonlinear creep damage model of fractured rock mass based on stress-time double threshold[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2023, 42(8): 1 928 - 1 944.(in Chinese))
- [22] 刘文博, 张树光. 基于应力和时间双重影响下岩石蠕变模型研究[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2020, 51(8): 2 256 - 2 265.(LIU Wenbo, ZHANG Shuguang. Research on rock creep model based on dual effects of stress and time[J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2020, 51(8): 2 256 - 2 265.(in Chinese))
- [23] CAO P, WEN Y D, WANG Y X, et al. Study on nonlinear damage creep constitutive model for high-stress soft rock[J]. Environmental Earth Sciences, 2016, 75: 900 - 908.
- [24] 张亮亮, 王晓健. 一种新的岩石非线性损伤蠕变模型[J]. 应用力学学报, 2020, 37(1): 372 - 377.(ZHANG Liangliang, WANG Xiaojian. A new nonlinear damage creep model of rocks[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2020, 37(1): 372 - 377.(in Chinese))
- [25] 王军保, 刘新荣, 宋战平, 等. 基于反 S 函数的盐岩单轴压缩全过程蠕变模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2018, 37(11): 2 446 - 2 459.(WANG Junbao, LIU Xinrong, SONG Zhanping, et al. A whole process creeping model of salt rock under uniaxial compression based on inverse S function[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2018, 37(11): 2 446 - 2 459.(in Chinese))
- [26] 周孙基, 程 磊, 王立伟, 等. 连续损伤力学基临界奇异指数与破坏时间预测[J]. 力学学报, 2019, 51(5): 1 372 - 1 380.(ZHOU Sunji, CHENG Lei, WANG Liwei, et al. Continuum damage mechanics-based critical singularity exponent and failure time prediction[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2019, 51(5): 1 372 - 1 380.(in Chinese))
- [27] SAITO M. Forecasting time of slope failure by tertiary creep[C]// Proceedings of the 7th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Mexico: [s. n.], 1969: 677 - 683.
- [28] KACHANOV M. Effective elastic properties of cracked solids: critical review of basic concepts[J]. Applied Mechanics Reviews, 1992, 45(8): 304 - 335.
- [29] 刘开云, 薛永涛, 周 辉. 基于改进 Bingham 模型的软岩参数非定常三维非线性黏弹塑性蠕变本构研究[J]. 岩土力学, 2018, 39(11): 4 157 - 4 164.(LIU Kaiyun, XUE Yongtao, ZHOU Hui. Study on 3D nonlinear visco-elastic-plastic creep constitutive model with parameter unsteady of soft rock based on improved Bingham model[J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, 39(11): 4 157 - 4 164.(in Chinese))
- [30] 刘文博, 张树光, 黄 翔, 等. 基于蠕变曲线对称的蠕变模型研究及参数敏感性分析[J]. 煤炭科学技术, 2024, 52(7): 48 - 56.(LIU Wenbo, ZHANG Shuguang, HUANG Xiang, et al. Study on symmetric creep model based on creep curves and parametric sensitivity analysis[J]. Coal Science and Technology, 2024, 52(7): 48 - 56.(in Chinese))
- [31] 袁 林, 高召宁, 孟祥瑞. 岩石的非线性西原流变模型及其应用[J]. 西北地震学报, 2012, 34(4): 331 - 334.(YUAN Lin, GAO Zhaoning, MENG Xiangrui. The nonlinear improvement of Nishihara rheological model in petrology and its analysis[J]. Northwestern Seismological Journal, 2012, 34(4): 331 - 334.(in Chinese))
- [32] LIU J F, WANG L, PEI J L, et al. Experimental study on creep deformation and long-term strength of unloading-fractured marble[J]. European Journal of Environmental and Civil Engineering, 2015, 9(Supp.1): 97 - 107.
- [33] CAO W G, CHEN K, TAN X, et al. A novel damage-based creep model considering the complete creep process and multiple stress levels[J]. Computers and Geotechnics, 2020, 124: 103599.