一维映射迭代根的非单调性及光滑性

献给张景中、杨路教授 85 华诞

刘鋈¹, 余志恒¹, 曾莹莹^{2*}, 张伟年³

1. 西南交通大学数学学院, 成都 611756;

2. 四川师范大学数学科学学院、可视化计算与虚拟现实四川省重点实验室, 成都 610068;

3. 四川大学数学学院, 成都 610064

E-mail: matliuliu@163.com, yuzhiheng9@163.com, mathyyz@163.com, matzwn@163.com

收稿日期: 2019-12-16; 接受日期: 2020-05-12; 网络出版日期: 2020-08-10; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11501471, 11701476, 11501394, 11701400, 11821001 和 11831012)、四川师范大学 Laurent 数学研究中心和可视化计算与虚拟现实四川省重点实验室资助项目

摘要 迭代根问题是动力系统嵌入流问题的弱问题, 是动态插值方法的基础. 然而, 即使是对一维映射, 迭代根的非单调性和全局光滑性都是困难的问题. 本文介绍这方面的若干新结果, 尤其是关于严格逐段单调连续函数的连续迭代根的存在性和构造, 以及迭代根局部光滑与全局光滑的新进展. 最后给出多项式迭代根这类既严格逐段单调又具光滑性的迭代根的存在条件及计算方法.

关键词 迭代根 严格逐段单调 非单调高度 特征区间 光滑性

MSC (2010) 主题分类 26A18, 37E05, 39B12, 68W30

1 引言

通常, 把拓扑空间 X 上一个连续映射或同胚 $F: X \rightarrow X$ 的迭代称作一个 (离散) 动力系统^[1]. 另一方面, 在研究微分方程 $\dot{x} = g(x)$ 时常常用其对一般初始条件 $x(0) = x_0$ 的唯一解 $x = \varphi(t, x_0)$ 来定义其时间 1- 映射 $x_0 \mapsto \varphi(1, x_0)$, 通过这样的离散化来研究微分方程解的性质. 一个连续的动力系统 (流) 很容易从中抽取离散动力系统, 反过来, 一个离散动力系统能否嵌入到一个连续的动力系统 (流) 中却是个困难的问题. 在拓扑空间 X 上一个动力系统 (X, F) 能否嵌入流, 是看是否存在一个流 $\varphi(t, x)$ 使得其时间 1- 映射 $\varphi(1, x)$ 就是 F . 显然, 离散动力系统比连续动力系统有更多的涵盖.

嵌入流问题是连接离散动力系统和连续动力系统的桥梁 (参见文献 [2-6]). 如果一个同胚映射能嵌入流, 则把这类映射看作 “好映射”, 因为它具有连续动力系统一样的好性质. 比这种映射稍差一点的 “较好映射”, 就是具有分数次迭代的映射. 给定正整数 n 和非空集合 X , 称映射 $f: X \rightarrow X$ 为给定映射 $F: X \rightarrow X$ 的 n 次迭代根或 $1/n$ 次迭代, 如果

$$f^n(x) = F(x), \quad \forall x \in X.$$

英文引用格式: Liu L, Yu Z H, Zeng Y Y, et al. Non-monotonicity and smoothness of iterative roots of one-dimensional mapping (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 43-66, doi: 10.1360/SSM-2019-0308

如果把迭代根看作是映射的分数次迭代的话, 则嵌入流相当于实数次迭代. 类比实数区间上的有理数, 我们知道实数区间上“不好”的数都能被有理数逼近. 然而, 我们的离散动力系统是否都能被“好映射”或“较好映射”逼近呢? 这比实数区间的问题要困难得多. 1990 年, Humke 和 Laczkovich^[7] 证明了有 2 次迭代根的连续区间自映射的全体 $W(2)$ 在连续区间自映射的全体 $\mathcal{C}$ 中不是处处稠密的. 1991 年, Simon^[8] 进一步证明它其实是无处稠密的. 然而, 1992 年, Blokh 在文献 [9, 引理 1] 中表明, $\mathcal{C}$ 中的函数只要保持其中一个区间端点不动就能够被 $W(2)$ 的函数逼近. 尽管这样的“好映射”和“较好映射”非常少, 但人们仍可努力寻找或近似地寻找这样的“好映射”或“较好映射”(参见文献 [10, 11]), 以此将连续动力系统的方法移植到离散动力系统分岔的研究中来.

嵌入流问题有重要的应用背景. 人们常常采用线性回归和多项式插值等技术拟合一组数据, 而当这组数据来源于一个动态过程时, 这样的拟合技术未必反映了数据的动力学本性, 未必符合动力系统的“迭代群”关系. 因此, 嵌入流事实上提供了数据的动态插值方法. 由于嵌入流问题的复杂性, 近几十年来关于嵌入流的结果很少. 然而, 人们同时把关注点也放在其弱问题即映射的迭代根问题上. 映射的迭代根问题成为一类特殊形式的泛函方程—迭代方程问题, 其解的存在性、唯一性、稳定性和光滑性等一系列问题都是有意义的问题. 映射的迭代根同样为动态插值提供技术, 还可用于信息加密, 吸引了信息科学领域的关注 (参见文献 [12, 13]). 在信息时代, 迭代是非常重要的运算或操作, 而从泛函分析角度看, 迭代则是一个重要的非线性算子.

迭代根问题的研究可以追溯到 19 世纪初的 Babbage^[14]. 早期 Abel^[15]、Koenigs^[16]、Schröder^[17] 和后来 Böttcher^[18] 等做出了奠基性的工作. 在 20 世纪后半叶, 迭代根问题得到较大的发展 (参见综述文献 [19, 20]). 1950 年, Isaacs^[21] 针对抽象集上的自映射讨论了迭代根问题. 关于复函数, Kneser^[22] 在前人局部结果^[16] 的基础上于 1950 年对整函数 e^z 的 2 次迭代根给出了全局结果, 而 Rice 等^[23] 于 1980 年对 n 次迭代根给出了全局结果. 关于实函数, Böttcher^[18] 于 1944 年得到了关于递增连续函数的递增迭代根结果. Haïdukov^[24] 于 1958 年给出了其递减迭代根. 1960–1961 年, Kuczma^[25, 26] 对区间上保向自映射和反向自映射给出了迭代根存在的条件和全部无穷多个迭代根的构造. 之后, Kuczma^[27] 和 Kuczma 等^[28] 分别在 1968 年和 1990 年系统阐述了单调迭代根的理论.

关于非单调映射迭代根的研究起步较晚, 即使在一维情形也十分困难. 1983 年, 张景中和杨路^[29] 讨论了严格逐段单调连续函数 (简称 $\mathcal{PM}$ (piecewise monotone) 函数) 的迭代根问题 (参见文献 [30]), 用“特征区间”和“非单调高度” (定义在引理 2.3 的上方) 刻画映射的非单调程度, 并分别针对高度 $= 1$ 和高度 ≥ 2 提出如下公开问题:

(问题 1) 非单调高度为 1 时, 若严格逐段单调连续函数 F 在整个区间上取到特征区间的端点值而在特征区间上取不到此值, 问 F 在什么条件下具有次数小于 $N(F) + 1$ 的迭代根?

(问题 2) 非单调高度大于 1 时, 严格逐段单调连续函数 F 是否存在连续的 $n \leq N(F)$ 次迭代根?

围绕这两个问题, 近三十多年来对 $\mathcal{PM}$ 函数迭代根的研究取得了一系列进展 (如文献 [31–34]). 此外, 1991 年, Blokh 等^[35] 研究了逐段单调连续函数和广义帐篷映射这一特殊情形, 证明了逐段单调连续函数若有 n 次迭代根则必有 n 次逐段单调连续迭代根, 并进一步证明了广义帐篷映射若有 n 次迭代根则该迭代根必为广义帐篷映射. 一维的情形如此困难, 高维就更困难, 除了 Leśniak^[36, 37] 研究了平面上特殊映射的迭代根外, 目前的结果很少.

迭代根的光滑性问题是该领域的又一重要课题. 针对保向映射没有不动点的情形, Böttcher^[18] 于 1944 年指出, 每一个不具有不动点的 C^∞ 映射都具有无穷多个 C^∞ 迭代根. 然而, 映射一旦具有不动点问题就要复杂得多, 这是因为不动点是一个极限集而问题总是出现在极限集处. 针对仅有一个双曲不动点的情形, Kuczma^[38] 于 1963 年利用 C^1 线性化将问题化简, 得到了 C^1 迭代根的存在唯一性

(参见文献 [28, 定理 11.4.2] 和 [31, 推论 3.1]). 此时要求不动点双曲且具有比 C^1 光滑性稍强的光滑性 (如导数的 Hölder 连续性或二阶可微性). 尽管此 C^1 迭代根可 C^1 光滑地从不动点的一个充分小邻域延拓至最大区间 (参见文献 [18]), 但仍认为延拓后的迭代根为一个局部结果, 其中最大区间是指包含一个不动点但在另一个相邻不动点处为开的区间. 在此意义下, 全局 C^1 光滑性是指迭代根在一个以两个相邻不动点为端点的闭区间上的 C^1 光滑性. 因此我们想知道: 一个局部光滑的迭代根能否光滑延拓到另一相邻不动点处, 也就是延拓成全局光滑迭代根呢? 1995 年, Zhang^[4] 指出一个以两个双曲不动点为端点的 C^1 严格递增函数通有地不具有全局 C^1 迭代根. 这说明具有全局 C^1 迭代根的函数是很少的. 很少并非没有. 近十年来, 关于具有全局光滑迭代根甚至可全局光滑嵌入流的函数的研究取得了一系列进展 (参见文献 [5, 6, 10, 39, 40]).

本文介绍近十多年来一维映射迭代根的非单调性和光滑性问题上取得的进展. 第 2 节介绍严格逐段单调连续函数的相关性质, 并介绍非单调高度的概念. 第 3 节针对非单调高度等于 1 的情形介绍特征区间的概念, 并介绍关于严格逐段单调连续函数迭代根的若干公开问题及进展. 第 4 节针对非单调高度大于 1 的情形, 分类介绍迭代根的存在性和构造. 第 5 节介绍单调情形下全局光滑迭代根的进展, 具体讨论不动点双曲时导致全局光滑迭代根通有地不存在的原因、具有全局光滑迭代根的充要条件, 构造出一类可全局光滑嵌入流的函数并给出可全局光滑嵌入流函数的正规形. 最后, 第 6 节介绍多项式迭代根这类既严格逐段单调又具光滑性的迭代根的存在条件及计算方法.

2 严格逐段单调连续函数

令 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$. 假设 $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续映射, 正如文献 [29, 30] 中所定义, 一个点 $c \in (a, b)$ 称为单调点, 如果映射 F 在内点 c 的某邻域内是严格单调的; 否则, c 称为映射 F 的非单调点.

定义 $S(F)$ 为映射 F 的所有非单调点之集. 进一步, 称具有有限多个非单调点的连续函数 $F: I := [a, b] \rightarrow I$ 是严格逐段单调连续函数 (简称 $\mathcal{PM}$ 函数). $\mathcal{PM}(I, I)$ 记为区间 I 上所有连续自映射 $\mathcal{PM}$ 函数全体. 如图 1 所示, 图 1(c) 中函数为严格逐段单调连续函数, 其非单调点个数是有限的; 而图 1(b) 中的函数不是严格逐段单调连续函数, 其非单调点有无穷多个.

引理 2.1^[34] 令 $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 则在集合 $[a, b] \setminus S(F)$ 的每一个连通分支上, 映射 F 都是严格单调的, 并且映射 F 的极值点都是它的非单调点. 特别地, 如果 $S(F) = \emptyset$, 则映射 F 是严格单调的. 此外, 映射 F 在每一个孤立的非单调点处都可以达到极值.

图 1 (a) 严格单调连续函数; (b) 单调连续函数; (c) 严格逐段单调连续函数

引理 2.2^[34] 令 $p, q \in \mathbb{R}$ 使得 $p < q$. 假设映射 $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 和映射 $G : [p, q] \rightarrow \mathbb{R}$ 均是连续映射且 $F([a, b]) \subset [p, q]$, 则

$$S(G \circ F) = S(F) \cup \{c \in (a, b) : F(c) \in S(G)\}.$$

特别地, 复合映射 $G \circ F$ 是严格逐段单调的充要条件是映射 F 和 $G|_{F([a, b])}$ 也是严格逐段单调的.

令 $N(F)$ 表示 F 在整个区间 I 上非单调点的个数, 显然, 严格逐段单调连续函数 F 满足下面的关系:

$$0 = N(F^0) \leq N(F) \leq N(F^2) \leq \cdots \leq N(F^n) \leq \cdots.$$

进一步, 映射迭代以后的非单调点个数一旦不发生变化以后, 之后无论再迭代多少次, 非单调点个数仍然不发生改变. 因此, 对给定映射 $F \in \mathcal{PM}(I, I)$, 将满足

$$S(F^k) = S(F^{k+1}) \quad (2.1)$$

的最小整数 k 称为映射 F 的非单调高度 (简称高度), 记为 $H(F)$. 如果这样的 k 不存在, 则将映射的高度定义为 ∞ .

引理 2.3^[29, 30] 令 $F \in \mathcal{PM}(I, I)$ 且 $H(F) = m < \infty$, 则对任意的整数 $i > 0$ 都有 $N(F^m) = N(F^{m+i})$. 此外, 对任意的自然数 k , 有

$$H(F^k) = \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor + \operatorname{sgn}\left(\frac{m}{k} - \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor\right).$$

3 高度为 1 的情形

由定义可知严格逐段单调连续函数具有有限多个非单调点, 那么在区间 I 上观察, 这些非单调点将整个区间划分成有限多个单调子区间. 显然, 映射 F 在每一个子区间上都是严格单调的. 当 $H(F) = 1$ 时, 在这些单调子区间中必然存在一个特殊的子区间 $I' = [a', b']$, 如文献 [29, 30] 所述, 使得它包含 F 的值域并且 F 在此区间上严格单调. 称这样的单调子区间为特征区间, 简记为 $K(F)$.

引理 3.1^[29, 30] 令 $F \in \mathcal{PM}(I, I)$ 且 $H(F) = 1$. 假设映射 F 有连续的 n 次迭代根 f , 其中 n 为大于等于 2 的正整数, 那么,

- (i) F 和 f 在 F 的特征区间 $K(F) = [a', b']$ 上严格单调且映入自身;
- (ii) F 和 f 所有的周期点都在 $K(F)$ 内;
- (iii) $f^n(x) = F(x)$, $\forall x \in K(F)$;
- (iv) 如果整数 $n > N(F) + 1$ 且存在 $x' \in I$ 使得 $F(x') = a'$ 或 $F(x') = b'$, 则 $x' \in K(F)$.

引理 3.2 (参见文献 [29, 定理 4] 和 [30, 定理 3]) 令 $F \in \mathcal{PM}(I, I)$ 并且 $H(F) = 1$. 假设 $K(F)$ 为映射 F 的特征区间, $[m, M]$ 为 F 在整个区间 I 上的值域, $[m', M']$ 为 F 在 $K(F)$ 上的值域. 令 $f_0 : K(F) \rightarrow K(F)$ 为方程 $f^n(x) = F(x)$ 限制在 $K(F)$ 上的连续解, 并且满足 f_0 将区间 $[m, M]$ 映入区间 $[m', M']$, 那么, 映射 f_0 可以作如下的连续延拓:

$$f(x) := \begin{cases} f_0(x), & \forall x \in K(F), \\ F|_{K(F)}^{-1} \circ f_0 \circ F(x), & \forall x \in I \setminus K(F), \end{cases} \quad (3.1)$$

使得对任意的 $x \in I$ 都满足 $f^n(x) = F(x)$.

定理 3.1 ^[29-31] 令 $F \in \mathcal{PM}(I, I)$ 并且 $H(F) = 1$. 假设

- (i) 映射 F 在特征区间 $K(F) = [a', b']$ 上严格单调递增;
- (ii) 映射 F 在整个区间 I 上不能达到 a' 或者 b' , 如果映射 F 在特征区间上不能达到 a' 或者 b' , 那么, 对任意的正整数 $n \geq 2$, 映射 F 有连续的 n 次迭代根. 此外, 对于 $n > N(F) + 1$, 条件 (i) 和 (ii) 是必要的.

定理 3.2 ^[29-31] 令 $F \in \mathcal{PM}(I, I)$ 并且 $H(F) = 1$. 假设

- (i) 映射 F 在特征区间 $K(F) = [a', b']$ 上严格单调递减;
 - (ii) $a' = F(b') < F(a') = b'$ 或者 $a' < F(x) < b', \forall x \in I$,
- 那么, 对任意的奇整数 $n > 0$, 映射 F 有连续的 n 次迭代根.

自然地, 文献 [29, 30] 给出了如下公开问题:

(P1) 当 $H(F) = 1$ 时, 若映射 F 在 $I = [a, b]$ 上取到值 a' 和 b' 而在特征区间 $K(F) = [a', b']$ 上取不到此值, F 在什么条件下具有次数小于 $N(F) + 1$ 的迭代根?

此外, 加拿大滑铁卢大学的 Che Tat Ng 在 2001 年也针对高度为 1 的 $\mathcal{PM}$ 函数提出一个有趣的问题:

(P2) 当 $H(F) = 1$ 时, 映射 F 的全部迭代根是否都可以从特征区间中延拓得到?

文献 [33, 41] 分别于 2011 和 2008 年部分回答了上述公开问题, 它们证明了映射的全部迭代根都是从特征区间延拓出来的, 并给出了迭代根的全部延拓方式.

3.1 针对公开问题 (P1)

首先, 用记号表示以下条件:

- (K^+) F 在特征区间 $K(F) = [a', b']$ 上严格递增;
- (K_0^+) F 只在特征区间 $K(F) = [a', b']$ 上达到 a' 或者 b' ;
- (K^-) F 在特征区间 $K(F) = [a', b']$ 上严格递减;
- (K_0^-) $F(a') = b' > F(b') = a'$ 或 $a' < F(x) < b', \forall x \in I$;
- (CEQ1) $a' = m < M = b', a' < F(a')$ 或 $F(b') < b'$;
- (CEQ2) $a' = m < M < b', a' < F(a')$;
- (CEQ3) $a' < m < M = b', F(b') < b'$;
- (DCEQ1) $a' = m < M = b', a' < F(b') < F(a') < b'$;
- (DCEQ2) $a' = m < M < b', a' < F(b') < F(a') < b'$;
- (DCEQ3) $a' < m < M = b', a' < F(b') < F(a') < b'$,

其中 $m = \min F := \min\{F(x) : x \in I\}$ 且 $M = \max F := \max\{F(x) : x \in I\}$.

定理 3.3 ^[42] 假设 $F \in \mathcal{PM}(I, I)$ 并且 $H(F) = 1$, 并假设 (K^+) 成立但 (K_0^+) 不成立. 那么下面的结论成立:

- (i) 对任意的 $n > 1$, 映射 F 不存在 n 次迭代根 f 使得 f 在特征区间 $[a', b']$ 上递增并且 $H(f) < n$, 特别地, 当 $n = N(F)$ 时 F 不存在迭代根 f 使得 $H(f) \leq n$;
- (ii) 对任意的 $n > 2$, 映射 F 不存在 n 次迭代根 f 使得 f 在特征区间 $[a', b']$ 上递减并且 $H(f) < n - 1$;
- (iii) 如果 F 满足 (CEQ1), 则 F 不存在迭代根 f 使得 f 在特征区间 $[a', b']$ 上递减并且 $H(f) = 1$;

(iv) 如果 F 满足 (CEQ2) (或者 (CEQ3)), 则 F 存在 2 次迭代根 f 使得 f 在特征区间 $[a', b']$ 上递减并且 $H(f) = 1$ 的充要条件是 F 在特征区间上是反序对应且 $F(b') = \max F$ (或者 $F(a') = \min F$).

定理 3.4 ^[43] 假设 $F \in \mathcal{PM}(I, I)$, $H(F) = 1$ 并假设 (K^-) 成立但 (K_0^-) 不成立. 那么下面的结论成立:

(i) 如果 F 满足 (DCEQ1), 则 F 不存在 $n (> 1)$ 次迭代根 f 使得 $H(f) < n$. 特别地, 当 $n = N(F)$ 时, F 存在连续迭代根使得 $H(f) = n$ 的充要条件是 n 是奇数并且非单调点集 $S(F) := \{c_1, \dots, c_n\}$, 其中 $c_1 < \dots < c_n$, 满足以下条件之一:

(i-1) $[a, c_1]$ 为 F 的特征区间并且 $a < F(c_n) < \dots < F(c_3) < F(c_1) < F(a) < F(c_2) < \dots < F(c_{n-3}) < F(c_{n-1}) < c_1$;

(i-2) $[c_n, b]$ 为 F 的特征区间并且 $c_n < F(c_2) < \dots < F(c_{n-3}) < F(c_{n-1}) < F(b) < F(c_n) < F(c_{n-2}) < \dots < F(c_1) = b$.

(ii) 如果 F 满足 (DCEQ2), 则 F 存在 $n = N(F)$ 次连续迭代根 f 使得 $H(f) = n$ 的充要条件是 n 是奇数并且非单调点集 $S(F) := \{c_1, \dots, c_n\}$, 其中 $c_1 < \dots < c_n$, 满足以下条件之一:

(ii-1) $[a, c_1]$ 为 F 的特征区间并且 $a < F(c_n) < \dots < F(c_3) < F(c_1) < F(a) < F(c_2) < \dots < F(c_{n-3}) < F(c_{n-1}) < c_1$;

(ii-2) $[c_n, b]$ 为 F 的特征区间并且 $c_n < F(c_2) < \dots < F(c_{n-3}) < F(b) < F(c_{n-1}) < F(c_n) < F(c_{n-2}) < \dots < F(c_1)$.

(iii) 如果 F 满足 (DCEQ3), 则 F 存在 $n := N(F)$ 次连续迭代根 f 使得 $H(f) = n$ 的充要条件是 n 是奇数并且以下之一成立:

(iii-1) $[a, c_1]$ 为 F 的特征区间并且 $F(c_n) < \dots < F(c_3) < F(c_1) < F(a) < F(c_2) < \dots < F(c_{n-3}) < F(c_{n-1}) < c_1$;

(iii-2) $[c_n, b]$ 为 F 的特征区间并且 $c_n < F(c_2) < \dots < F(c_{n-3}) < F(c_{n-1}) < F(b) < F(c_n) < F(c_{n-2}) < \dots < F(c_1) = b$.

(iv) 如果 F 满足 (DCEQ2) (或 (DCEQ3)), 则 F 不存在 $n (> 2)$ 次迭代根 f 使得 $H(f) \leq n - 2$.

3.2 针对公开问题 (P2)

定理 3.5 ^[33] 假设 $F \in \mathcal{PM}(I, I)$ 并且 $H(F) = 1$, 那么映射 F 的每一个连续迭代根都是从特征区间 $K(F)$ 上的迭代根延拓得到的.

证明 首先, 令 $S(F)$ 为 $\mathcal{PM}$ 映射 F 的所有非单调点构成的集合. $N(F)$ 为映射 F 非单调点的个数. 注意到, F 的非单调点将整个区间 I 划分成 $N(F) + 1$ 个子区间. 定义 I_i 为 F 在区间 I 上的闭子区间并且函数 F 在每一个 I_i 上单调. 称 I_i 为极大单调子区间, 若 $I = \bigcup_{i=0}^{N(F)} I_i$. 进一步称映射 F 存在划分 $I(F) := \{I_i : i = 0, 1, \dots, N(F)\}$.

假设映射 f 为 F 的一个 n 次连续迭代根, 我们断言:

(K1) 对任意的正整数 $i \in \{0, 1, \dots, N(F)\}$, 都存在一个整数 $j \in \{0, 1, \dots, N(F)\}$, 定义为 $j(i)$, 使得 $f(I_i) \subset I_j$;

(K2) $j(i) \neq i$ 除非 $I_i = K(F)$.

反证, 假设存在 $i \in \{0, 1, \dots, N(F)\}$ 使得对任意的 $j = 0, 1, \dots, N(F)$ 都有 $f(I_i) \not\subset I_j$. 由映射 F 的连续性易知, 必然存在两个内点 $x_1, x_2 \in I_i$ 使得 $f(x_1) \in I_k$ 且 $f(x_2) \in I_{k+1}$, 其中 I_k 和 I_{k+1} 为 $I(F)$ 中两个相邻的子区间. 令 $\{c\} = I_k \cap I_{k+1}$, 也就是说点 c 为两个子区间的公共点, 那么由 f 的连续性

得, 在点 x_1 与 x_2 之间必然存在 F 的单调点 x_3 使得

$$f(x_3) = c. \quad (3.2)$$

显然, 正如文献 [30, 第 121 页] 中所示, 可以看到

$$S(f \circ F) = \{x \mid f(x) \in S(F)\} \cup S(F). \quad (3.3)$$

由 (3.2) 可知 $x_3 \in \{x \mid f(x) \in S(F)\}$. 进一步, 可得 $x_3 \in S(f \circ F)$. 另一方面, $x_3 \notin S(F)$. 这意味着

$$N(F) < N(f \circ F).$$

而 $\{N(f^k \circ F) : k = 1, 2, \dots\}$ 是一个递增序列, 也就是说

$$N(f \circ F) \leq N(f^2 \circ F) \leq \dots \leq N(F^2).$$

从而, $N(F) < N(F^2)$, 这与事实 $H(F) \leq 1$ 矛盾. 因此, 断言 (K1) 被证明. 进一步, 如果 $f(I_i) \subset I_i$, 则

$$F(I_i) = f^n(I_i) \subset I_i.$$

由引理 3.1 知 I_i 必须为映射 F 的特征区间, 即 $I_i = K(F)$. 因此, 断言 (K2) 被证明.

由断言 (K1) 和 (K2) 知, 对任意的 $I_i \in I(F)$, 在 $\{0, 1, \dots, N(F)\}$ 中都存在序列 $\{i_1, \dots, i_{k-1}\}$, 其中 $k \leq \min\{n, N(F)\}$, 使得

$$I_i \xrightarrow{f} I_{i_1} \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} I_{i_{k-2}} \xrightarrow{f} I_{i_{k-1}} \xrightarrow{f} K(F), \quad (3.4)$$

其中 $I \xrightarrow{f} J$ 表示 $f(I) \subset J$. 事实上, (3.4) 定义了一个对应关系

$$\kappa_f : \{0, 1, \dots, N(F)\} \rightarrow \{1, \dots, \min\{n, N(F)\}\}$$

使得 $i \mapsto k$. 这个关系描述的是映射 f 作用在子区间 I_i 上最终进入特征区间需要的次数. 显然, 对 F 的每一个迭代根 f , $\kappa_f(i)$ 的个数被 $i \in \{0, 1, \dots, N(F)\}$ 唯一确定.

考虑 f 限制在每一个子区间 $I_i \in I(F)$ 上. 令 $f_0 := f|_{K(F)}$ 且 $f_i := f|_{I_i}$ 对 $I_i \in I(F) \setminus \{K(F)\}$ 成立. 显然, 由引理 3.1(iii) 知, f_0 是 F 限制在特征区间 $K(F)$ 上的迭代根. 与 (3.3) 相似, 我们知道

$$S(F) = S(f^n) = \{x \mid f^{n-1}(x) \in S(f)\} \cup S(f),$$

则对任意的正整数 $i = 0, 1, \dots, N(F)$, 映射 f_i 在子区间 I_i 上都是严格单调的. 对每一个 $I_i \in I(F)$, 可以找到一个序列 $\{i_1, \dots, i_{k-1}\}$ 满足 (3.4). 由引理 3.1(i) 得 $f_0(I_0) \subset I_0$, 因此, $F(x) = f_0^{n-1} \circ f_{i_{k-1}}(x)$ 对任意的 $x \in I_{i_{k-1}}$ 成立, 进一步推得

$$f_{i_{k-1}} = F|_{K(F)}^{-1} \circ f_0 \circ F|_{I_{i_{k-1}}}. \quad (3.5)$$

同理, $F(x) = f_0^{n-2} \circ f_{i_{k-1}} \circ f_{i_{k-2}}(x)$ 对任意的 $x \in I_{i_{k-2}}$ 成立. 进一步, 利用 (3.5) 可知,

$$\begin{aligned} f_{i_{k-2}} &= f_{i_{k-1}}^{-1} \circ f_0^{-n+2} \circ F|_{I_{i_{k-2}}} \\ &= F|_{I_{i_{k-1}}}^{-1} \circ f_0^{-1} \circ F|_{K(F)} \circ f_0^{-n+2} \circ F|_{I_{i_{k-2}}} \end{aligned}$$

$$= F|_{I_{i_{k-1}}}^{-1} \circ f_0 \circ F|_{I_{i_{k-2}}}, \quad (3.6)$$

由递推可得

$$f_{i_\ell} = F|_{I_{i_{\ell+1}}}^{-1} \circ f_0 \circ F|_{I_{i_\ell}}, \quad \ell = 1, \dots, k-2, \quad (3.7)$$

$$f_i = F|_{I_{i_1}}^{-1} \circ f_0 \circ F|_{I_i}. \quad (3.8)$$

由 (3.5)–(3.8) 知道每一个 f_i ($i = 1, \dots, N(F)$) 都由 F 和 f_0 唯一确定. 因此, 迭代根 f 是由 f_0 从特征区间 $K(F)$ 以下面这种方式延拓得到的:

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x), & \forall x \in K(F), \\ F|_{I_{i_1}}^{-1} \circ f_0 \circ F|_{I_i}(x), & \forall x \in I_i \in I(F) \setminus \{K(F)\}. \end{cases} \quad (3.9)$$

定理得证. $\square$

定理 3.5 的证明中 $\kappa_f(i)$ 描述的是 f 的迭代次数使得 I_i 能够映入特征区间 $K(F)$. 序列 $\{\kappa_f(i) : i = 0, \dots, N(F)\}$ 的最大值实际上就是使得 f 将整个区间 I 映入 $K(F)$ 的最小次数. 因此, 对任意的迭代根 f , 称自然数

$$\ell(f) := \max_{i \in \{0, 1, \dots, N(F)\}} \kappa_f(i)$$

为迭代根 f 的步数. 显然, $\ell(f)$ 被 f 唯一确定并且 $\ell(f) \leq \min\{n, N(F)\}$. 不同的延拓方式确定不同迭代根的步数 ℓ . 为了方便, 称这样的延拓为 ℓ -延拓. 同时, 定义迭代根为 ℓ -延拓的根. 文献 [29, 30] 给出的迭代根就是 1-延拓的. 文献 [41] 证明了某些 $\mathcal{PM}$ 函数 F 不具有 $N(F)$ -延拓的迭代根.

定理 3.6 ^[41] 假设 $F \in \mathcal{PM}(I, I)$ 并且 $H(F) = 1$. 如果 F 在特征区间 $[a', b']$ 上严格单调递增, 并且满足 $N(F) = n > 1$ 和 $\min F = a' < b' = \max F$, 那么 F 不存在迭代根 f 满足 $H(f) = n$.

4 高度大于等于 2 的情形

当 $H(F) > 1$ 时, $\mathcal{PM}$ 函数不存在特征区间, 它的迭代根问题就无法直接转化为单调区间的迭代根问题, 因此要寻找这类函数的迭代根就相对困难. 下面给出前人已经得到的结论.

定理 4.1 ^[29, 30] 假设 $F \in \mathcal{PM}(I, I)$ 且 $H(F) > 1$, 那么对任意整数 $n > N(F)$, 函数 F 没有连续的 n 次迭代根.

证明 假设 F 有连续的 n 次迭代根 f . 自然地, f 也是严格逐段单调连续函数. 由 $H(F) > 1$ 可知 $N(F^2) > N(F)$, 即 $N(f^{2n}) > N(f^n)$. 这意味着 $H(f) > n$ 并且

$$0 = N(f^0) < N(f) < N(f^2) < \dots < N(f^n).$$

因此, $N(f^n) = N(F) \geq n$. 这与定理对 n 的假设矛盾. 证毕. $\square$

自然地, 文献 [29, 30] 给出了如下公开问题:

(P3) 当 $H(F) > 1$ 时, $\mathcal{PM}$ 函数 F 是否存在连续的 $n \leq N(F)$ 次迭代根?

随后, 文献 [32, 44] 针对非单调点个数为 2 的情形讨论该问题, 而文献 [45, 46] 针对一类极值为 0 或 1 的严格逐段扩张自映射研究了这个问题. 2012 年, 文献 [34] 讨论了次数等于非单调点个数的情形, 证明了仅有 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 两类迭代根, 并给出了 $\mathcal{T}_1$ 类迭代根存在的充要条件. 在次数小于非单调点个数的情形, 文献 [47] 讨论了一类具有全局吸收子区间的映射, 并给出了其迭代根存在与不存在的条件. 考虑映射 $F \in \mathcal{PM}(I, I)$ 且假设 $S(F) := \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 为 F 的非单调点集, 其中 $a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b$.

4.1 $n = N(F)$ 的情形

引理 4.1 ^[34] 假设映射 $F \in \mathcal{PM}(I, I)$ 满足 $H(F) \geq 2$ 且 $N(F) \geq 2$. 若映射 $f \in \mathcal{PM}(I, I)$ 是 F 的 $n := N(F)$ 次迭代根, 则 $N(f) = 1$ 且在 $\{1, \dots, n\}$ 中存在置换 $(l_1, \dots, l_n)$ 满足

$$f(c_{l_k}) = c_{l_{k-1}}, \quad k = 2, \dots, n, \quad (4.1)$$

以及 $S(f) = \{c_{l_1}\}$. 进而, f 必为以下两类之一:

$\mathcal{T}_1$ 类: $l_1 = 1$, f 在点 c_1 处达到极小值且 $f(c_1) < c_1$, 或 $l_1 = n$, f 在点 c_n 处达到极大值且 $f(c_n) > c_n$;

$\mathcal{T}_2$ 类: $l_1 = 1$, f 在点 c_1 处达到极大值且 $f(c_1) > c_1$, 或 $l_1 = n$, f 在点 c_n 处达到极小值且 $f(c_n) < c_n$.

定理 4.2 ^[34] 令映射 $F \in \mathcal{PM}(a, b)$ 满足 $H(F) \geq 2$ 且 $N(F) \geq 2$, 则 F 有连续的 $n := N(F)$ 次 $\mathcal{T}_1$ 类迭代根的充要条件是以下几个条件之一成立:

(i) 当 n 为偶数时, $F|_{[a, c_1]}$ 为反序对应,

$$a \leq F(c_n) \leq F(c_{n-2}) \leq \dots \leq F(c_2) \leq F(a) < F(c_1) \leq F(c_3) \leq \dots \leq F(c_{n-1})$$

并且上述不等式中的 “ $\leq$ ” 要么全为 “ $=$ ”, 要么至多有一个 “ $=$ ” 成立, 即在 $F(a) \geq F(c_2)$ 和 $F(c_n) \geq a$ 中有一个等号成立;

(ii) 当 n 为奇数时, $F|_{[a, c_1]}$ 是严格递减的,

$$a \leq F(c_n) \leq \dots \leq F(c_3) \leq F(c_1) < F(a) \leq F(c_2) \leq \dots \leq F(c_{n-1}) \leq c_1$$

并且上述不等式中的 “ $\leq$ ” 要么全为 “ $=$ ”, 要么至多有一个 “ $=$ ” 成立, 即在 $F(a) \leq F(c_2)$ 和 $F(c_n) \geq a$ 中只有一个等号成立;

(iii) 当 n 为偶数时, $F|_{[c_n, b]}$ 为反序对应,

$$c_n \leq F(c_2) \leq \dots \leq F(c_{n-2}) \leq F(c_n) < F(b) \leq F(c_{n-1}) \leq \dots \leq F(c_1) \leq b$$

并且上述不等式中的 “ $\leq$ ” 要么全为 “ $=$ ”, 要么至多有一个 “ $=$ ” 成立, 即在 $F(b) \leq F(c_{n-1})$ 和 $F(c_1) \leq b$ 中只有一个等号成立;

(iv) 当 n 为奇数时, $F|_{[c_n, b]}$ 是严格递减的,

$$c_n \leq F(c_2) \leq \dots \leq F(c_{n-1}) \leq F(b) < F(c_n) \leq F(c_{n-2}) \leq \dots \leq F(c_1) \leq b$$

并且上述不等式中的 “ $\leq$ ” 要么全为 “ $=$ ”, 要么至多有一个 “ $=$ ” 成立, 即在 $F(b) \geq F(c_{n-1})$ 和 $F(c_1) \leq b$ 中只有一个等号成立.

4.2 $n < N(F)$ 的情形

当 $H(F) \geq 2$ 时, 尽管不能找到一个 “特征区间”, 但是仍然可以利用延拓的思想, 在某个单调子区间上找到迭代根, 然后延拓到整个区间 I 上. 基于这样一个目的, 可以看到某些映射存在一个特殊的单调子区间 J , 称为全局吸收区间, 并记为 $\gamma(F)$, 使得映射在区间 J 上是自映射. 对迭代根的讨论有以下 3 种情形:

情形 (I,I): F 和迭代根 f 在 $\gamma(F)$ 上单调递增;

情形 (I,D): F 在 $\gamma(F)$ 上单调递增, 而迭代根 f 在 $\gamma(F)$ 上单调递减;

情形 (D,D): F 和迭代根 f 在 $\gamma(F)$ 上单调递减.

进一步, 为方便讨论有以下假设:

(II-A) $2n \leq m$, $F(c_{m-2n}) = F(c_{m-2n+2})$, 并且

$$\begin{aligned} c_{m-2n} &\leq F(c_m) \leq F(c_{m-2}) \leq \cdots \leq F(c_{m-2n+4}) \leq F(c_{m-2n+2}), \\ F(c_{m-2n+1}) &\leq F(c_{m-2n+3}) \leq \cdots \leq F(c_{m-3}) \leq F(c_{m-1}) \leq c_{m-2n+1}, \end{aligned}$$

其中的 “=” 同时成立或者不成立.

(II-B) $2n \leq m$, $F(c_{2n+1}) = F(c_{2n-1})$ 并且

$$\begin{aligned} c_{2n} &\leq F(c_2) \leq F(c_4) \leq \cdots \leq F(c_{2n-2}) \leq F(c_{2n}), \\ F(c_{2n-1}) &\leq F(c_{2n-3}) \leq \cdots \leq F(c_3) \leq F(c_1) \leq c_{2n+1}, \end{aligned}$$

其中的 “=” 同时成立或者不成立.

(ID-A) n 为偶数并且

$$\begin{aligned} c_{m-n} &\leq F(c_m) \leq F(c_{m-2}) \leq \cdots \leq F(c_{m-n+2}) \leq F(c_{m-n}) \\ &< F(c_{m-n+1}) \leq F(c_{m-n+3}) \leq \cdots \leq F(c_{m-1}) \leq c_{m-n+1}, \end{aligned}$$

其中的 “=” 同时成立, 或者 $c_{m-n} = F(c_m)$ 和 $F(c_{m-n+2}) = F(c_{m-n})$ 之中至多有一个成立.

(ID-B) n 为偶数并且

$$c_n \leq F(c_2) \leq \cdots \leq F(c_{n-2}) \leq F(c_n) < F(c_{n+1}) \leq F(c_{n-1}) \leq \cdots \leq F(c_1) \leq c_{n+1},$$

其中的 “=” 同时成立, 或者 $F(c_{n+1}) = F(c_{n-1})$ 和 $F(c_1) = c_{n+1}$ 之中至多有一个成立.

(DD-A) n 为奇数并且

$$\begin{aligned} c_{m-n} &\leq F(c_m) \leq F(c_{m-2}) \leq \cdots \leq F(c_{m-n+1}) < F(c_{m-n}) \\ &\leq F(c_{m-n+2}) \leq \cdots \leq F(c_{m-1}) \leq c_{m-n+1}, \end{aligned}$$

其中的 “=” 同时成立, 或者 $c_{m-n} = F(c_m)$ 和 $F(c_{m-n}) = F(c_{m-n+2})$ 之中至多有一个成立.

(DD-B) n 为奇数并且

$$c_n \leq F(c_2) \leq \cdots \leq F(c_{n-1}) \leq F(c_{n+1}) < F(c_n) \leq F(c_{n-2}) \leq \cdots \leq F(c_1) \leq c_{n+1},$$

其中的 “=” 同时成立, 或者 $F(c_{n-1}) = F(c_{n+1})$ 和 $F(c_1) = c_{n+1}$ 之中至多有一个成立.

定理 4.3^[47] 假设 $F \in \mathcal{PM}(I)$ 并且高度 $H(F) \geq 2$, 那么 F 有无穷多个次数为 n ($< N(F) = m$) 的连续迭代根, 如果以下条件之一成立:

(i) F 满足 (II-A) 并且对任意的 $i = 0, 1, \dots, m-2n-1$ 有 $F(c_i) \in [c_{m-2n}, c_{m-2n+1}]$, 同时 F 在 $[c_{m-2n}, c_{m-2n+1}]$ 上严格递增而在 $[c_m, c_{m+1}]$ 上没有不动点;

(ii) F 满足 (II-B) 并且对任意的 $i = 2n+2, \dots, m+1$ 有 $F(c_i) \in [c_{2n}, c_{2n+1}]$, 同时 F 在 $[c_{2n}, c_{2n+1}]$ 上严格递增而在 $[c_0, c_1]$ 上没有不动点;

(iii) F 满足 (ID-A), 并且对任意的 $i = 0, 1, \dots, m-n-1$ 有 $F(c_i) \in [c_{m-n}, c_{m-n+1}]$, 同时 F 在 $[c_{m-n}, c_{m-n+1}]$ 上严格递增而在 $[c_m, c_{m+1}]$ 上没有不动点;

(iv) F 满足 (ID-B), 并且对任意的 $i = n+2, \dots, m+1$ 有 $F(c_i) \in [c_n, c_{n+1}]$, 同时 F 在 $[c_n, c_{n+1}]$ 上严格递增而在 $[c_0, c_1]$ 上没有不动点;

(v) F 满足 (DD-A), 并且对任意的 $i = 0, 1, \dots, m-n-1$ 有 $F(c_i) \in [c_{m-n}, c_{m-n+1}]$, 同时 F 在 $[c_{m-n}, c_{m-n+1}]$ 上严格递减而在 $[c_m, c_{m+1}]$ 上没有不动点;

(vi) F 满足 (DD-B), 并且对任意的 $i = n+2, \dots, m+1$ 有 $F(c_i) \in [c_n, c_{n+1}]$, 同时 F 在 $[c_n, c_{n+1}]$ 上严格递减而在 $[c_0, c_1]$ 上没有不动点.

5 迭代根的光滑性

令 $I := [a, b]$. 一个经典结果 (参见文献 [18]) 表明, 区间上严格递增且无不动点的光滑自映射必有光滑迭代根.

定理 5.1 (Bödeadt 定理) $F \in C^\infty(I, I)$, $F(x) > x$ 且导数 $F'(x) > 0$. 那么对任意整数 $n \geq 2$, 函数 F 在 $C^\infty(I, I)$ 中必有 n 次迭代根.

这个结果可利用共轭法, 将 F 共轭于函数 $y = x + 1$, 或利用逐段定义法 (参见文献 [27, 28]) 进行证明. 由于所选取的初始函数有无穷多种选择, 从而可以得到无穷多个满足要求的迭代根. 问题将出在函数的不动点附近. 通常意义下的“局部”是指不动点的一个充分小邻域. 根据保向自映射的性质, 可将具有一个不动点的情形统称为局部情形, 具有两个不动点的情形统称为全局情形 (见图 2(c)). 之所以可以这样定义, 是因为具有一个不动点的情形下的迭代根可由不动点的一个充分小邻域完全决定, 将通常意义下的局部概念进行了推广. 而具有两个及以上不动点的情形可进行分段讨论, 从而, 两个不动点即可代表全局. 同时, 对局部情形而言, 可根据迭代根是否能够从不动点的一个充分小邻域内有限步延拓所得而分为一致局部情形 (见图 2(a)) 和非一致局部情形 (见图 2(b), 称区间 $[a, b]$ 为最大区间) 这两类.

5.1 局部光滑性

如同文献 [4, 5, 28], 考虑端点为两相邻双曲不动点的紧区间上的递增 C^1 自映射的递增 C^1 迭代根. 假设函数 F 满足如下条件:

图 2 (网络版彩图) (a) 一致局部情形; (b) 非一致局部情形; (c) 全局情形

$(H^\alpha) F \in \text{Diff}^1(I)$, $a < F(x) < x$, $x \in (a, b)$, $F'(a) \neq 1$, $F'(b) \neq 1$ 且存在 $\alpha > 0$ 使得

$$F'(x) = F'(a) + O((x-a)^\alpha), \quad x \rightarrow a$$

且

$$F'(x) = F'(b) + O((x-b)^\alpha), \quad x \rightarrow b.$$

这说明函数 F 以 a 和 b 为两相邻双曲不动点且均是 $C^{1,\alpha}$ 的 (也就是说, 其导数为 Hölder 连续). 另外, 位于对角线上方的函数可共轭于此类函数, 接下来不再赘述. 给定 $\lambda_a \in (0, 1)$ 和 $\lambda_b \in (1, +\infty)$, 令

$$\mathcal{V}_\alpha^1(\lambda_a, \lambda_b) := \{F \in C^1(I, I) : F \text{ 满足条件 } (H^\alpha) \text{ 且 } F'(a) = \lambda_a, F'(b) = \lambda_b\}.$$

进而, 对于某 $r \in \mathbb{N}$, 引入由 I 上所有 C^r 自映射所构成的集合 $C^r(I, I)$. 其上的范数定义为

$$\|F\|_r := \sum_{i=0}^r \sup_{x \in I} |F^{(i)}(x)|,$$

其中 $F \in C^r(I, I)$. 再令 $\mathcal{V}_\alpha^r(\lambda_a, \lambda_b) := \mathcal{V}_\alpha^1(\lambda_a, \lambda_b) \cap C^r(I, I)$ 且

$$\mathcal{V}^r(\lambda_a, \lambda_b) := \bigcup_{\alpha > 0} \mathcal{V}_\alpha^r(\lambda_a, \lambda_b). \quad (5.1)$$

通过对以上给定函数的局部线性化可得到:

引理 5.1 (参见文献 [28, 定理 11.4.2] 和 [27, 定理 6.1]) 给定整数 $r \geq 1$, $\mathcal{V}^r(\lambda_a, \lambda_b)$ 中的每一个函数 F 在 $[a, b)$ 和 $(a, b]$ 上都具有唯一的 $n \geq 2$ 次 C^r 迭代根.

以下具体讨论 $r = 1$ 时的情形. 由定义 (5.1) 可知, 对任意一个给定的 $F \in \mathcal{V}^1(\lambda_a, \lambda_b)$, 必存在一个常数 $\alpha > 0$ 使得 $F \in \mathcal{V}_\alpha^1(\lambda_a, \lambda_b)$. 正如文献 [28, 定理 11.4.2] 所陈述的那样, 其唯一迭代根可表示为

$$f_a(x) := \varphi_a^{-1}(\lambda_a^{1/n} \varphi_a(x)), \quad \forall x \in [a, b),$$

或

$$f_b(x) := \varphi_b^{-1}(\lambda_b^{1/n} \varphi_b(x)), \quad \forall x \in (a, b],$$

其中

$$\varphi_a(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_a^{-k} [F^k(x) - a], \quad \forall x \in [a, b), \quad (5.2)$$

$$\varphi_b(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_b^k [F^{-k}(x) - b], \quad \forall x \in (a, b], \quad (5.3)$$

且 φ_a 和 φ_b 分别为 Schröder 方程

$$\varphi(F(x)) = \lambda_i \varphi(x), \quad i = a, b, \quad (5.4)$$

在 $[a, b)$ 和 $(a, b]$ 上满足条件 $\varphi'(a) = 1$ 和 $\varphi'(b) = 1$ 的唯一 C^1 解 (称其为主解). 显然, 方程 (5.4) 的解当 $i = a$ 时一定满足 $\varphi(a) = 0$, 当 $i = b$ 时一定满足 $\varphi(b) = 0$. 事实上, 这是由于 $x = a$ 和 $x = b$ 均为 F 的不动点. 具体地说, 方程 (5.4) 的解 φ 满足 $\varphi(a) = \varphi(F(a)) = \lambda_a \varphi(a)$. 由此及 $\lambda_a \neq 1$ 可得 $\varphi(a) = 0$. 类似地, 可以证明 $\varphi(b) = 0$. 除此之外, 对于 $r \geq 2$ 时的函数 $F \in \mathcal{V}^r(\lambda_a, \lambda_b)$, 由文献 [27, 定理 6.1] 可知, 以上所给出的 f_a 和 f_b 分别为 F 在 $[a, b)$ 和 $(a, b]$ 上的唯一 C^r 迭代根. 进而, 由文献 [28, 定理 3.5.1] 和 [27, 定理 4.5] 的证明可得下面的引理:

引理 5.2 (参见文献 [28, 定理 3.5.1] 和 [27, 定理 4.5]) 对于给定的 $r \geq 1$ 和 $F \in \mathcal{V}^r(\lambda_a, \lambda_b)$, 当 $k \rightarrow +\infty$ 时, 函数列 $\{\lambda_a^{-k}(F^k)^{(r)}(x)\}$ 和 $\{\lambda_b^k(F^{-k})^{(r)}(x)\}$ 分别在 $[a, b)$ 和 $(a, b]$ 的任意紧子区间上一致收敛于 $\varphi_a^{(r)}(x)$ 和 $\varphi_b^{(r)}(x)$.

这个引理表明

$$\begin{aligned}\varphi_a^{(r)}(x) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_a^{-k}(F^k)^{(r)}(x), \quad \forall x \in [a, b), \\ \varphi_b^{(r)}(x) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_b^k(F^{-k})^{(r)}(x), \quad \forall x \in (a, b].\end{aligned}$$

从文献 [28, 定理 3.5.1] 中也可以看出 $\varphi'_a(x) > 0$ 对于所有的 $x \in [a, b)$ 成立, 且 $\varphi'_b(x) > 0$ 对于所有的 $x \in (a, b]$ 成立. 由此表明, f_a 和 f_b 都是严格递增的.

注意到文献 [48] 在要求 F 在不动点处为 2 次可导的前提下也给出了类似结论. 根据 2 次可导的定义, 当 $x \rightarrow a$ 时, 有

$$F'(x) - F'(a) = O(x - a);$$

当 $x \rightarrow b$ 时, 有

$$F'(x) - F'(b) = O(x - b).$$

换句话说, 就是 $\alpha = 1$ 时的条件 (H^α) 被满足. 因此, 本节将主要讨论在 (H^α) 这个更弱假设下的结论, 并且可得到下面的定理:

定理 5.2 ^[39] 对 $\mathcal{V}^1(\lambda_a, \lambda_b)$ 中的函数, 由引理 5.1 所给出的其唯一 n 次 C^1 迭代根的一阶导数在 $[a, b)$ 上一致有界.

事实上, 证明导数 f' 的有界性等价于去证明 f' 在 b 点的一个充分小邻域上的有界性. 证明思路是将点 b 的小邻域中的点通过 F 的迭代, 将其拉回到 $[a, b)$ 的一个紧子区间.

5.2 全局光滑性

对于光滑迭代根的全局存在性, 关键在于局部迭代根是否能够光滑地延拓到另一个相邻不动点. 事实上, 这是一件十分困难的事情. 下面定理表明具有全局 C^1 迭代根的函数是稀缺的, 这是因为这类函数通有地不存在. 给定 $m, M \in [0, +\infty)$, 考虑 $C^1(I, I)$ 的子空间

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^1(I) &= \{F \in C^1(I, I) : F'(x) > 0, \forall x \in I, F(x) \neq x, \forall x \in (a, b), \\ &\quad \text{对 } x = a, b \text{ 有 } F(x) = x, F'(x) \neq 1 \text{ 和 } F''(x) \text{ 存在}\}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^1(I; m, M) &= \{F \in C^1(I, I) : F(a) = a, F(b) = b, m \leq F'(x) \leq M, \\ &\quad |F'(x) - F'(y)| \leq M|x - y|, \forall x, y \in I\},\end{aligned}$$

并赋予其 C^1 范数, 则可得到下面的定理:

定理 5.3 ^[4] 给定整数 $n \geq 2$, 则 $\mathcal{A}^1(I)$ 中的函数通有地不具有 $\mathcal{E}^1(I; m, M)$ 中的 n 次迭代根.

虽然具有全局 C^1 迭代根的函数很稀有, 但这并不代表这类函数不存在. 文献 [5] 通过讨论在不动点附近为线性的这类简单函数, 找到了一类特殊的可全局 C^1 嵌入流的函数, 自然是具有全局 C^1 迭代根的.

定理 5.4 ^[5] 假设 $a < \delta_1 < \delta_2 < b$, 函数 $G : I \rightarrow I$ 满足条件 $G(a) = a$, $G(b) = b$, 且 $G|_{[a, \delta_1]}$ 和 $G|_{[\delta_2, b]}$ 均为线性函数, 那么

- (i) 若 $G(\delta_2) < \delta_1$, 则 G 不能延拓成为一个可在 I 上嵌入 C^1 流的函数;
- (ii) 若 $G(\delta_2) = \delta_1$, 则 G 可延拓成满足条件 (H^α) 且可在 I 上嵌入 C^1 流的函数当且仅当

$$G'(b)^{\delta_1 - b} = G'(a)^{\delta_1},$$

该延拓具有唯一性且由表达式 $F|_{[\delta_1, \delta_2]}(x) = G'(a)\delta_1\{(b - \delta_1)/(b - x)\}^{(b - \delta_1)/\delta_1}$ 给出;

- (iii) 若 $G(\delta_2) > \delta_1$, 则 G 可延拓成无穷多个可在 I 上嵌入 C^1 流的函数.

对于端点附近非线性的更一般函数, 如果在一个小子区间 $J \subset (a, b)$ 上对一个 C^2 函数 $F : I \rightarrow I$ 进行改造, 则可得到一个可 C^1 嵌入流的函数. 显然, 若函数 F 满足条件 (H^α) , 则对所有的 $x \in I$, 以下极限存在:

$$\begin{aligned}\Phi_a(x) &:= \log F'(a) \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f^k(x) - a}{(f^k)'(x)}, \\ \Phi_b(x) &:= -\log F'(b) \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f^{-k}(x) - b}{(f^{-k})'(x)}.\end{aligned}$$

定理 5.5 ^[10] 假设 $\delta_2 \in (a, b)$, $\delta_1 \in (F(\delta_2), \delta_2)$, $H : I \rightarrow [F(\delta_1), F(\delta_2)]$ 为 C^1 单射, $H'(x) > 0$, $H(x) \neq x$, $x \in (\delta_1, \delta_2)$, $H'(\delta_1) = F'(\delta_1)$ 且 $H'(\delta_2) = F'(\delta_2)\Phi_a(\delta_2)/\Phi_b(\delta_2)$, 则存在唯一一个定义在 I 上的可 C^1 嵌入流的函数 $\tilde{F}$ 使得

$$\tilde{F}|_{[\delta_1, \delta_2]} = H \quad \text{且} \quad \tilde{F}(x) = F(x), \quad \forall x \in [0, \delta_1] \cup [F^{-1}(\delta_2), 1].$$

注意到此 C^1 流 $\{\tilde{F}^t, t \in \mathbb{R}\}$ 局部上与 C^1 流 $F|_{[a, b]}$ 和 $F|_{(a, b]}$ 相重合. 若 $\Phi_a(\delta_2) = \Phi_b(\delta_2)$, 定理 5.5 表明存在唯一的可 C^1 嵌入流的函数 $\hat{F}$ 使得

$$\hat{F}(x) = F(x), \quad \forall x \in I \setminus (\delta_2, F^{-1}(\delta_2)).$$

接下来两定理讨论具有两相邻双曲不动点的 C^1 流的正规形问题. 注意到区间 $[a, b]$ 的函数均可共轭到 $[0, 1]$ 上的情形. 考虑函数

$$p^t(x) := \frac{\lambda_0^t x}{(1 + (\lambda_0^{tk} - 1)x^k)^{\frac{1}{k}}}, \quad \forall x \in [0, 1], \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

其中

$$k := -\frac{\log \lambda_1}{\log \lambda_0}.$$

该类函数构成 C^∞ 流, 其中 $(p^t)'(0) = \lambda_0^t$ 且 $(p^t)'(1) = \lambda_1^t$. 可得到以下共轭性质.

定理 5.6 ^[6] 令 F 满足条件 (H^α) 且 $I = [0, 1]$. 若 $\{F^t : I \rightarrow I, t \in \mathbb{R}\}$ 是一个 C^1 流, 则

$$F^t = \Phi^{-1} \circ p^t \circ \Phi, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

其中 $\Phi : I \rightarrow I$ 为形如

$$\Phi(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{F^m(x)}{[(F^m(x_0))^k + (F^m(x))^k]^{\frac{1}{k}}}$$

的微分同胚, 且 $x_0 \in (a, b)$ 为任意常数.

图 3 (网络版彩图) 迭代根的振荡

这一定理是文献 [49] 具有两个双曲不动点的 C^r ($r \geq 2$) 流均是 C^r 共轭的这一结果的推广. 但这一性质对 C^1 微分同胚并不成立.

定理 5.7^[6] 存在满足条件 (H^α) 的 C^1 流, 使得对 $t \neq 0$ 时的 $(F^t)'(0) \neq 1$ 和 $(F^t)'(1) \neq 1$ 不微分共轭于任意流 $\{p^t : I \rightarrow I, t \in \mathbb{R}\}$.

在区间 $I = [a, b]$ 上具有全局 C^1 迭代根的函数甚至可嵌入流的函数之所以罕有, 是因为对给定函数加一个小扰动, 将引起其迭代根的振荡 (见图 3). 振荡的强弱势必会影响到迭代根全局的存在性. 以下将对 $[a, b]$ 上迭代根的导数讨论其有界性. 其一阶导数的有界性已经在定理 5.2 中指出. 为了讨论迭代根的高阶导数, 采用以下记号:

$$\mathcal{G}_n^r(\lambda_a, \lambda_b) := \{F \in \mathcal{V}^r(\lambda_a, \lambda_b) : F \text{ 在 } I \text{ 上具有全局的 } n \text{ 次 } C^1 \text{ 迭代根}\},$$

$$\mathcal{H}_n^r(\lambda_a, \lambda_b) := \{F \in \mathcal{V}^r(\lambda_a, \lambda_b) : F \text{ 在 } I \text{ 上具有全局的 } n \text{ 次 } C^r \text{ 迭代根}\},$$

$$\mathcal{B}_n^r(\lambda_a, \lambda_b) := \{F \in \mathcal{V}^r(\lambda_a, \lambda_b) : F \text{ 在 } [a, b] \text{ 上的 } n \text{ 次 } C^r \text{ 迭代根具有有界的 } r \text{ 阶导数}\},$$

其中 $n, r \geq 2$ 均为整数.

引理 5.3^[39] 给定整数 $n, r \geq 2$, 则

$$\mathcal{H}_n^r(\lambda_a, \lambda_b) = \mathcal{B}_n^r(\lambda_a, \lambda_b) = \mathcal{G}_n^r(\lambda_a, \lambda_b).$$

这个引理告诉我们全局 C^1 迭代根的存在性是至关重要的, 它可表明全局 C^r ($r \geq 2$) 迭代根的存在性. 对给定函数加扰后, 其迭代根的振荡强弱在其不同阶数导数的体现上差距巨大, 其一阶导数必有界, 而高阶导数却大不同. 当且仅当具有全局光滑迭代根时其高阶导数才有界.

定理 5.8^[39] 给定整数 $k, r \geq 2$, $\mathcal{V}^r(\lambda_a, \lambda_b)$ 中函数在 $[a, b]$ 上的唯一 n 次 C^r 迭代根通有地具有无界的 r 阶导数.

6 多项式迭代根

利用前面几节的结果, 即使获得了迭代根的存在性, 但想通过解析方式给出迭代根的计算方法却十分困难. 一类形式简单又易于计算的非单调映射就是多项式. 然而, 迄今为止, 多项式映射的迭代根

计算问题也远没有解决. Weierstrass 逼近定理告诉我们, 任意有界闭区间上的 C^0 函数总可以用多项式来逼近, 而多项式又是可计算的. 因此, 多项式映射的迭代根问题也得到了广泛关注.

首先考虑次数为 k 的单变元复多项式映射

$$F(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

其中 $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{C}$, $a_k \neq 0$. 是否每个 $k (\geq 0)$ 次复多项式映射都有迭代根? 答案是否定的.

(i) 当 $k = 0$ 时, 映射 $F(x) \equiv a_0$, 显然 F 是它自身的任意次的迭代根, 即对任意的 $n \geq 1$, 有 $F^n = F$.

(ii) 当 $k = 1$ 时, 映射 $f: \mathbb{C} \ni x \rightarrow ax + b \in \mathbb{C}$ 有任意次的迭代根, 其中 $a \neq 0$. 事实上, 若 $a \neq 1$, 则令 $c := a^{1/n}$, $d := b/(1 + c + \cdots + c^{n-1}) = b(1 - c)/(1 - a)$, 并且定义 $f(x) = cx + d$, 则 f 就是 F 的一个 n 次迭代根; 若 $a = 1$, 即 $F(x) = x + b$, 显然, $f(x) = x + \frac{b}{n}$ 是 F 的一个 n 次迭代根; 若 $b = 0$, 则多项式映射 $f(x) = \alpha x$ (α 是 n 次单位根) 是 $F(x) = x$ 的 n 次迭代根. 由此看到, 线性映射 F 有至少 n 个不同的 n 次迭代根, 并且这些迭代根也是线性映射. 实际上, 恒同映射 $F(x) = x$ 有无穷多个形如 $f(x) = -x + b$ ($b \in \mathbb{C}$) 的 2 次迭代根.

(iii) 当 $k = 2$ 时, 因为 2 次多项式的次数 $k = 2$ 是一个素数, 所以, 2 次多项式映射没有任意次的多项式迭代根. 另一方面, Rice 等^[23] 证明了一个重要的结果, 即任何一个 2 次复多项式映射没有任何形式的迭代根.

定理 6.1^[23] 设 $F(z)$ 是一个 2 次复多项式映射, 则不存在任何映射 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, 使得 $f^n = F$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$.

注意到以上结果成立依托于其基域, 例如, 对于某些实 2 次多项式映射存在 2 次迭代根, 参见文献 [50].

(iv) 当 $k = 3$ 时, 由于 3 次多项式的次数 $k = 3$ 仍是一个素数, 所以 3 次多项式映射仍旧没有多项式迭代根. 在文献 [51, 定理 4] 中, Choczewski 和 Kuczma 证明了 3 次复多项式在某一特定条件下不存在任何形式的 2 次迭代根, 但在该定理的证明过程中文献 [51, 第 6 页, 第 (20) 式] 被 Strycharz-Szemberg 和 Szemberg (参见文献 [52, 第 4 页]) 验证是错误的, 以至于我们不能判定在该定理的条件下 3 次复多项式映射是否有 2 次迭代根.

(v) 当 $k = 4$ 时, 显然某些 4 次多项式映射是由 2 次多项式映射经过 2 次迭代得到的, 但并非任何一个 4 次多项式映射都可以由 2 次多项式映射迭代 2 次得到, 一个自然的问题是, 我们怎么区分出哪些 4 次多项式映射是由 2 次多项式映射迭代 2 次得到的呢? 1988 年, Schweizer 和 Sklar^[53] 利用基于线性共轭的多项式的不变量与等价类给出了 4 次复多项式映射存在多项式迭代根的充要条件.

定理 6.2^[53] 4 次复多项式映射

$$F(x) := \tilde{a}_4 x^4 + \tilde{a}_3 x^3 + \tilde{a}_2 x^2 + (\tilde{a}_1 + 1)x + \tilde{a}_0, \quad \tilde{a}_4 \neq 0 \quad (6.1)$$

具有多项式迭代根当且仅当存在 $\tilde{a}_4$ 的一个立方根 γ 使得 $4\tilde{a}_4 A_4 = A_2^2 + 2\gamma A_2$ 并且 $A_3 = -1$, 其中

$$A_m := \sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i}{4^i} \binom{4-m+i}{i} \left(\frac{\tilde{a}_3}{\tilde{a}_4} \right)^i \tilde{a}_{4-m+i}, \quad m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

2011 年, Strycharz-Szemberg 和 Szemberg^[52] 证明了在找寻一般的 4 次复多项式映射的迭代根时实际上只需寻找规范化的 4 次复多项式映射 (即首项系数为 1 的 4 次复多项式) 的迭代根, 并用 Gröbner 基的方法给出了规范形式下 4 次复多项式映射存在多项式迭代根的充要条件及迭代根的具体形式. 我们将他们的结果叙述如下.

引理 6.1 ^[52] 设 $g(z) := b_d z^d + b_{d-1} z^{d-1} + \cdots + b_1 z + b_0$ ($b_d \neq 0$) 是一个次数为 d 的复多项式映射, 则存在规范化多项式映射 g_k 和线性映射 $L = az + b$ ($a \neq 0$) 使得 g_k 线性共轭于 g , 即 $g_k = L^{-1} \circ g \circ L$.

众所周知, 在共轭意义下, 迭代根的存在性是不变的. 事实上, 若假设 $\gamma = \varphi^n$ 成立, 且 λ 是任意双射, 则 $\lambda^{-1} \circ \varphi \circ \lambda$ 是 $\lambda^{-1} \circ \gamma \circ \lambda$ 的 n 次迭代根. 因此, 在考虑 g 的迭代根的存在性时, 只需考虑其规范化形式 g_k 的迭代根的存在性, 于是有以下结论.

定理 6.3 ^[52] 设 $g(z) = z^4 + b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0$ 是一个规范化的 4 次复多项式, 则存在 2 次复多项式 $f(z) = z^2 + a_1 z + a_0$, 使得 $f^2 = g$ 当且仅当

$$b_0 = \frac{1}{64}(b_3^4 - 8b_2 b_3^2 - 12b_3^2 + 16b_2^2 + 32b_2 - 16b_3), \quad b_1 = -\frac{1}{8}(b_3^3 - 4b_2 b_3),$$

并且

$$a_1 = \frac{1}{2}b_3, \quad a_0 = -\frac{1}{8}b_3^2 - \frac{1}{4}b_3 + \frac{1}{2}b_2.$$

此外, 针对上述定理中给出的迭代根的几何轨迹, 文献 [52] 还进一步对规范化的 4 次复多项式的多项式迭代根进行了几何分类.

6.1 一维多项式映射

如上所知, 前人在研究 4 次多项式迭代根时通过约化的方法将多项式规范化, 进而讨论了其规范形式的多项式迭代根. 不同于前人的方法, 文献 [54] 针对一般的一维多项式映射讨论其迭代根的存在性. 众所周知, 一个 k (≥ 1) 次多项式经过 n (≥ 1) 次迭代过后为 k^n 次多项式, 因此, 存在多项式迭代根的映射只能是 k^n ($k \geq 1, n \geq 1$) 次多项式, 即

$$F(x) = a_{k^n} x^{k^n} + a_{k^n-1} x^{k^n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad (6.2)$$

其中 $a_{k^n} \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, \dots, k^n$. 不失一般性, 考虑 F 的多项式形式的 n 次迭代根. 文献 [54] 借助 Gröbner 基理论 ^[55-59] 和计算机代数系统 Singular ^[60] 对相应的代数簇进行不可约分解, 并最终给出了一维多项式映射存在多项式 n 次迭代根的充要条件及迭代根的具体形式.

我们知道, 映射 $f: \mathbb{C} \ni x \rightarrow ax + b \in \mathbb{C}$ (其中 $a \neq 0$) 有任意次的迭代根, 因此, 这里首先考虑 $k = 2$ 和 $n = 2$ 的情形, 即 F 为 4 次多项式时, 其系数应该满足什么样的条件它才存在多项式迭代根? 文献 [54] 给出了如下结果.

定理 6.4 ^[54] 4 次多项式

$$F(x) := a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_4 \neq 0 \quad (6.3)$$

存在多项式 2 次迭代根当且仅当

$$a_0 = \frac{4\alpha(8a_2a_4^2 - 3a_3^2a_4) - 8a_2a_3^2a_4 + 16a_2^2a_4^2 - 16a_3a_4^2 + a_3^4}{64a_4^3}, \quad a_1 = \frac{a_3(4a_2a_4 - a_3^2)}{8a_4^2}.$$

F 的多项式迭代根的形式为

$$f(x) := \alpha x^2 + \frac{a_3\alpha^{-2}}{2}x + \frac{4a_2\alpha^{-2} - 2a_3a_4^{-1} - a_3^2\alpha^{-5}}{8},$$

其中 α 为 a_4 的任一立方根.

定理 6.4 与 Schweizer 和 Sklar 的结果 (定理 6.2) 是等价的. 事实上, 经过简单的计算可知,

$$\begin{aligned} h_1 &:= A_3 + 1 = 8\tilde{a}_1\tilde{a}_4^2 - 4\tilde{a}_4\tilde{a}_3\tilde{a}_2 + \tilde{a}_3^3 + 8\tilde{a}_4^2, \\ h_2 &:= 4\tilde{a}_4A_4 - A_2^2 - 2\gamma A_2 \\ &= (-32\tilde{a}_4^2\tilde{a}_2 + 12\tilde{a}_4\tilde{a}_3^2)\gamma + 64\tilde{a}_0\tilde{a}_4^3 - 16\tilde{a}_3\tilde{a}_1\tilde{a}_4^2 + 16\tilde{a}_3^2\tilde{a}_2\tilde{a}_4 - 3\tilde{a}_3^4 - 16\tilde{a}_2^2\tilde{a}_4^2. \end{aligned}$$

注意到 $a_i = \tilde{a}_i$, $i = 0, 2, 3, 4$, 并且 $a_1 = \tilde{a}_1 + 1$, 其中 $\tilde{a}_i$ 是 (6.1) 的系数, a_i 是 (6.3) 的系数. 据此, 立即可得

$$h_1 = 8a_1a_4^2 - 4a_4a_3a_2 + a_3^3 = 0,$$

并且

$$64a_4^3a_0 - 4\alpha(8a_2a_4^2 - 3a_3^2a_4) + 8a_2a_3^2a_4 - 16a_2^2a_4^2 + 16a_3a_4^2 - a_3^4 - h_2 = 2a_3h_1 = 0,$$

这就意味着定理 6.4 与 6.2 是等价的.

在定理 6.4 中令 $a_4 = 1$, 将得到 F 有多项式迭代根 (迭代指数为 2) 当且仅当

$$a_0 = \frac{a_3^4 - 8a_2a_3^2 - 12a_3^2\alpha + 32a_2\alpha + 16a_2^2 - 16a_3}{64}, \quad a_1 = -\frac{a_3^3 - 4a_2a_3}{8}, \quad (6.4)$$

其中 α 是 1 的任意立方根. 易知条件 (6.4) 与 Strycharz-Szemberg 和 Szemberg 的结果 (定理 6.3) 是等价的.

进一步, 考虑 (6.2) 中 $k = 2$ 和 $n = 3$ 的情形, 即 F 有如下形式:

$$F(x) := a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad (6.5)$$

其中 $a_0, \dots, a_8 \in \mathbb{C}$ 并且 $a_8 \neq 0$. 关于 8 次多项式映射 F 的多项式 3 次迭代根, 文献 [54] 给出了如下结果.

定理 6.5 ^[54] F 存在多项式 3 次迭代根, 即存在多项式 f 使得 $f^3 = F$ 当且仅当

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{a_7}{1048576a_8^5} \{ (32768a_6^3a_8^4 + 15360a_7^4a_6a_8^2 - 38912a_7^2a_6^2a_8^3 - 2016a_7^6a_8)\beta^5 \\ &\quad + (12544a_7^4a_8^3 + 65536a_6^2a_8^5 - 57344a_6a_7^2a_8^4)\beta^3 \\ &\quad + (-114688a_7^2a_8^5 + 262144a_6a_8^6)\beta - 864a_7^6a_6a_8 + 81a_7^8 - 131072a_7a_8^6 \\ &\quad + 4096a_6^4a_8^4 + 3456a_7^4a_6^2a_8^2 - 6144a_7^2a_6^3a_8^3 \}, \\ a_1 &= \frac{a_7}{32768a_8^6\beta^2} \{ (512a_6^3a_8^3 - 576a_6^2a_7^2a_8^2 + 216a_6a_7^4a_8 - 27a_7^6)\beta^2 + 336a_7^4a_8^2 \\ &\quad + 2048a_6^2a_8^4 - 1664a_6a_7^2a_8^3 \}, \\ a_2 &= \frac{1}{1024a_8^4\beta^2} \{ (9a_7^4a_6 + 64a_6^3a_8^2 - 48a_7^2a_6^2a_8)\beta^2 - 176a_6a_7^2a_8^2 + 28a_7^4a_8 + 256a_6^2a_8^3 \}, \\ a_3 &= \frac{a_7}{1024a_8^3\beta^2} \{ (-128a_6a_7^2a_8 + 21a_7^4 + 192a_6^2a_8^2)\beta^2 - 112a_7^2a_8^2 + 256a_6a_8^3 \}, \\ a_4 &= \frac{1}{512a_8^3\beta^2} \{ (-48a_6a_7^2a_8 - 7a_7^4 + 192a_6^2a_8^2)\beta^2 - 112a_7^2a_8^2 + 256a_6a_8^3 \}, \\ a_5 &= \frac{a_7}{32a_8^2} (24a_6a_8 - 7a_7^2). \end{aligned}$$

它的多项式迭代根可以由下式表示:

$$f(x) := \beta x^2 + \frac{a_7 \beta^{-6}}{4} x + \frac{8a_6 \beta^{-6} - 4a_7 a_8^{-1} - 3a_7^2 \beta^{-13}}{32},$$

其中 β 是 a_8 的任一 7 次方根.

事实上, 通过以上两个定理的证明 (参见文献 [54]) 可以看到, 以上用于判定 4 和 8 次多项式映射的多项式迭代根的存在性并计算出该迭代根的方法同样适用于 k^n ($k \geq 2, n \geq 4$) 次多项式映射.

6.2 平面二次多项式映射

高维多项式映射的迭代根问题比一维要复杂得多, 然而文献 [61] 给出了平面 2 次多项式映射迭代 n ($n \geq 2$) 次后保持次数不变的条件, 这算是找到了一类复杂映射中相对简单的映射. 我们可以尝试解决这类映射的迭代根问题.

众所周知, 线性映射在迭代后仍为线性映射, 而非线性映射哪怕是一维映射在迭代后其形式将变得十分复杂. 例如, logistic 映射 $f(x) = \mu x(1 - x)$, 其迭代多次后非单调点个数由一个变为多个, 动力学性质变得十分复杂. 这是因为 f 迭代后次数不断增高, 不再保持 2 次多项式的形式. 然而, 高维情形下, 尽管必然包含一维的现象, 却存在彼此消涨的情形. 例如, 平面 2 次映射 $\Lambda: (x, y) \mapsto (x, y + x^2)$, 用数学归纳法可以证明 Λ 的 n 次迭代为 $\Lambda^n: (x, y) \mapsto (x, y + nx^2)$, 仍为平面 2 次映射. 我们认为该映射是 n 次保次的. 显然, 一维多项式映射不可能保次.

记 $\mathcal{F}_\lambda: \mathbb{C}^{12} \times \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^2$ 为平面 2 次多项式映射, 即

$$\mathcal{F}_\lambda: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 \\ b_0 + b_1 y + b_2 x + b_3 y^2 + b_4 yx + b_5 x^2 \end{bmatrix},$$

其中

$$\lambda = (\lambda^1, \lambda^2) \in \mathbb{C}^{12}, \quad \lambda^1 = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5), \quad \lambda^2 = (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5).$$

将 $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ 称为 $\mathcal{F}_\lambda$ 的参数空间, 并把 $\mathcal{F}_\lambda$ 表达式中变量 x 或 y 的最高次数称为平面多项式 $\mathcal{F}_\lambda$ 的次数. 类似一维映射迭代的定义, 仍然记 $\mathcal{F}_\lambda^0 = \text{id}$ 和 $\mathcal{F}_\lambda^n = \mathcal{F}_\lambda \circ \mathcal{F}_\lambda^{(n-1)}$. 称平面多项式映射 $\mathcal{F}_\lambda$ 迭代后具有 k 次保次性 (k -th degree-preserving), 如果将其作 k ($k \in \mathbb{N}_+$) 次迭代后所得到的多项式 $\mathcal{F}_\lambda^k$ 的次数小于或等于 $\mathcal{F}_\lambda$ 的次数.

引理 6.2 ^[61] $\mathcal{F}_\lambda$ 是 2 次保次的平面多项式映射当且仅当

$$\lambda \in A_{ij}, \quad (i, j) \in \{(m, n) : m, n = 1, 2, 3\} \cup \{(4, 1), (4, 2)\},$$

其中

$$\begin{aligned} A_{11} &:= \{\beta : a_3 = a_4 = a_5 = b_3 = b_4 = b_5 = 0\}, \\ A_{12} &:= \{\beta : a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0, b_3 = b_5 = 0, b_4 \neq 0\}, \\ A_{13} &:= \{\beta : b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0, a_3 = a_5 = 0, a_4 \neq 0\}, \\ A_{21} &:= \{\beta : a_3 = a_4 = a_5 = b_3 = b_4 = 0, b_5 \neq 0\}, \\ A_{22} &:= \{\beta : a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0, b_3 = 0, b_4 b_5 \neq 0\}, \\ A_{23} &:= \left\{ \beta : a_5 = b_3 = 0, a_1 = -\frac{b_2 b_4}{b_5}, a_2 = -\frac{b_1 b_4}{b_5}, a_3 = -b_4, a_4 = -\frac{b_4^2}{b_5}, b_4 b_5 \neq 0 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{31} &:= \{\beta : a_3 = a_4 = b_3 = b_4 = b_5 = 0, a_5 \neq 0\}, \\
 A_{32} &:= \{\beta : b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0, a_3 = 0, a_4 a_5 \neq 0\}, \\
 A_{33} &:= \left\{ \beta : a_3 = b_5 = 0, b_1 = -\frac{a_2 a_4}{a_5}, b_2 = -\frac{a_1 a_4}{a_5}, b_3 = -a_4, b_4 = -\frac{a_4^2}{a_5}, a_4 a_5 \neq 0 \right\}, \\
 A_{41} &:= \left\{ \beta : a_1 = \frac{a_3 b_2}{b_5}, a_4 = -\frac{a_5 b_5^2 + a_3^3}{a_3 b_5}, b_1 = \frac{a_2 b_5}{a_3}, b_3 = \frac{a_5 b_5}{a_3}, \right. \\
 &\quad \left. b_4 = -\frac{a_5 b_5^2 + a_3^3}{a_3^2}, a_5 \neq \frac{a_3^3}{b_5^2}, a_3 a_5 b_5 \neq 0 \right\}, \\
 A_{42} &:= \left\{ \beta : a_4 = -\frac{2a_3^2}{b_5}, a_5 = \frac{a_3^3}{b_5^2}, b_3 = \frac{a_3^2}{b_5}, b_4 = -2a_3, a_5 b_5 \neq 0 \right\}.
 \end{aligned}$$

尽管寻找一般平面多项式映射的迭代根是困难的, 但利用引理 6.2 提供的 11 个条件寻找 2 次保次平面多项式映射仍是可行的. 为了简洁地展示证明方法而避免过于复杂的符号计算过程, 以下仅讨论平面 2 次齐次多项式映射的多项式 2 次迭代根. 考虑平面 2 次齐次多项式映射

$$F_\gamma : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 \\ b_3 y^2 + b_4 yx + b_5 x^2 \end{bmatrix},$$

其中

$$\gamma = (\gamma^1, \gamma^2) \in \mathbb{C}^6, \quad \gamma^1 = (a_3, a_4, a_5), \quad \gamma^2 = (b_3, b_4, b_5).$$

显然, F_γ 的多项式 2 次迭代根 f_β 只能是平面 2 次多项式映射, 即

$$f_\beta : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 x^2 + c_4 xy + c_5 y^2 \\ d_0 + d_1 y + d_2 x + d_3 y^2 + d_4 yx + d_5 x^2 \end{bmatrix},$$

其中

$$\beta = (\beta^1, \beta^2) \in \mathbb{C}^{12}, \quad \beta^1 = (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5), \quad \beta^2 = (d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5).$$

定理 6.6 ^[54] F_γ 不存在保次条件 A_{11} 、 A_{12} 、 A_{13} 、 A_{22} 、 A_{23} 、 A_{32} 、 A_{33} 和 A_{41} 型的多项式迭代根. F_γ 具有保次条件 A_{21} 型的多项式迭代根当且仅当

$$\gamma \in \Gamma_1 := \{\gamma : a_4 = a_5 = 0, 4b_3 b_5 + 2a_3 b_4 - b_4^2 = 0, a_3 b_3 \neq 0\}.$$

F_γ 具有保次条件 A_{31} 型的多项式迭代根当且仅当

$$\gamma \in \Gamma_2 := \{\gamma : b_4 = b_5 = 0, 4a_5 a_3 + 2a_4 b_3 - a_4^2 = 0, a_3 b_3 \neq 0\}.$$

F_γ 具有保次条件 A_{42} 型的多项式迭代根当且仅当

$$\gamma \in \Gamma_3 := \{\gamma : a_4 b_4 - 4a_5 b_5 = 0, b_4^2 - 2a_3 b_4 + 2a_4 b_5 - 4b_3 b_5 = 0, a_4^2 - 2a_4 b_3 + 2a_5 b_4 - 4a_3 a_5 = 0\}.$$

进而, 当 $\gamma \in \Gamma_1$ 时, F_γ 的多项式迭代根为

$$f_\beta : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{b_4}{2a_3} x + \frac{b_3}{a_3} y \\ -\frac{b_4^2}{4a_3 b_3} x + \frac{b_4}{a_3} y - \frac{a_3^2}{b_3} x^2 \end{bmatrix};$$

当 $\gamma \in \Gamma_2$ 时, F_γ 的多项式迭代根为

$$f_\beta : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{a_4}{b_3}x - \frac{a_4^2}{4a_3b_3}y - \frac{b_3^2}{a_3}y^2 \\ \frac{a_3}{b_3}x + \frac{a_4}{2b_3}y \end{bmatrix}.$$

注意到, 定理 6.6 没有给出当 $\gamma \in \Gamma_3$ 时 F_γ 的多项式迭代根的表达式. 尽管定理 6.6 表明 Γ_3 是 F_γ 在保次条件 A_{42} 下存在二次多项式迭代根的充要条件, 但由于普通电脑的内存局限, 文献 [54] 中未能计算出这种类型的迭代根.

定理 6.6 的证明 设 f_β 是 F_γ 的一个多项式 2 次迭代根. 只需要考虑引理 6.2 中给出的 11 个 2 次保次条件, 即仅需考虑满足引理 6.2 中 11 类保次条件的迭代根. 计算 f_β 的 2 次迭代并令 $f_\beta^2 = F_\gamma$, 比较等式两边的系数, 得到如下多项式代数系统 (algebraic polynomial system, APS):

$$\begin{aligned} T_1 &:= c_4c_3d_5 + c_5d_5^2 + c_3^3 = 0, \\ T_2 &:= 2c_3^2c_4 + c_4^2d_5 + c_4c_3d_4 + 2c_5d_4d_5 = 0, \\ &\vdots \\ T_{30} &:= d_4c_0d_0 + d_0 + d_1d_0 + d_2c_0 + d_3d_0^2 + d_5c_0^2 = 0, \end{aligned}$$

其中系统 APS 中的每个多项式均为有理数域 $\mathbb{Q}$ 中的不可约多项式. 显然, F_γ 不存在保次条件 A_{11} 型的迭代根, 因为线性映射经过任意次迭代均不可能为 2 次多项式映射. 另外, 注意到 A_{12} 和 A_{13} , A_{21} 和 A_{31} , A_{22} 和 A_{32} , 以及 A_{23} 和 A_{33} 关于变元 c_i 和 d_i 具有相同的对称性, 例如, 将保次条件 A_{12} 中的 c_i 和 d_i 位置互换, 将得到保次条件 A_{13} , 因此, 如果得到了关于保次条件 A_{12} 的一个结果, 仅需互换 c_i 和 d_i 位置便可得到关于保次条件 A_{13} 的一个结果. 综上所述, 这里仅需考虑 A_{13} 、 A_{31} 、 A_{32} 、 A_{33} 、 A_{41} 和 A_{42} 型的多项式迭代根.

将保次条件 A_{13} 、 A_{32} 、 A_{33} 和 A_{41} 分别代入多项式代数系统 APS, 可以得到 4 个半代数系统: APS_1 、 APS_2 、 APS_3 和 APS_4 . 对于以上 4 个半代数系统, 应用计算机代数系统 Singular 中的命令 `minAssGTZ` 计算它们对应代数系统的约化 Gröbner 基. 例如, 对于 APS_3 , 计算它对应代数系统的约化 Gröbner 基, 将得到 (i) $b_3 = b_4 = b_5 = 0$ 或者 (ii) $c_4c_5 = 0$. 显然, (i) 与 b_3 、 b_4 和 b_5 不全为 0 矛盾, (ii) 与保次条件 A_{33} 中的限制 $c_4c_5 \neq 0$ 矛盾. 因此, 半代数系统 APS_3 无解, 即 F_γ 不存在保次条件 A_{33} 型的多项式迭代根. 采用同样的做法, 可以得到半代数系统 APS_i ($i = 1, 2, 4$) 也无解.

将保次条件 A_{31} 代入代数系统 APS, 得到一个半代数系统, 记为 APS_5 . 利用 Singular 中的命令 `eliminate` 消去 APS_5 对应的代数系统中的变元 c_i ($i = 0, 1, 2$) 和 d_j ($j = 0, 1, 2, 5$), 并用命令 `minAssGTZ` 计算消去变元过后的代数系统的约化 Gröbner 基, 可以得到定理 6.6 中的集合 Γ_2 . 反过来, 又将 Γ_2 中的条件代入 APS_5 , 重新计算 APS_5 对应的代数系统的约化 Gröbner 基可以得到

$$\begin{aligned} c_0 = c_3 = c_4 = d_0 = d_3 = d_4 = d_5 = 0, \quad c_1 &= \frac{a_4}{b_3}, \\ c_2 &= -\frac{a_4^2}{4a_3b_3}, \quad c_5 = -\frac{b_3^2}{a_3}, \quad d_1 = \frac{a_4}{2b_3}, \quad d_2 = \frac{a_3}{b_3}, \end{aligned}$$

由以上结果立即可得定理 6.6 中 A_{31} 型多项式迭代根的表达式.

将前文提到的对称性运用于保次条件 A_{31} 和 A_{21} , 立即可得集合 Γ_1 , 以及在保次条件 A_{21} 下,

$$c_0 = c_3 = c_4 = c_5 = d_0 = d_3 = d_4 = 0, \quad c_1 = \frac{b_4}{2a_3},$$

$$c_2 = \frac{b_3}{a_3}, \quad d_1 = \frac{b_4}{a_3}, \quad d_2 = -\frac{b_4^2}{4a_3b_3}, \quad d_5 = -\frac{a_3^2}{b_3}.$$

同样, 由以上结果立即可得定理 6.6 中 A_{21} 型多项式迭代根的表达式.

最后, 将保次条件 A_{42} 代入代数系统 APS, 得到半代数系统 APS₇. 利用计算机代数系统 Singular 中的命令 eliminate 消去 APS₅ 对应的代数系统中的变元 c_i ($i = 0, 1, 2, 3$) 和 d_j ($j = 0, 1, 2, 5$), 并用命令 minAssGTZ 计算消去变元过后的代数系统的约化 Gröbner 基, 可以得到定理 6.6 中的集合 Γ_3 . 证毕. $\square$

尽管本文最后以二维多项式映射的迭代根计算作为结尾, 但本文的主要部分仍然是关于一维的. 对于一维映射, 当非单调高度 ≥ 2 时, 不具有全局吸收子区间的严格逐段单调连续函数其迭代根存在性仍是不清楚的, 目前尚无答案. 对于二维及以上的情形, 甚至连一些基本问题, 如二维非齐次多项式映射的多项式迭代根、某些具有实际背景的映射 (如 Hénon 映射以及二维 logistic 映射) 的迭代根求解问题等都没有被回答.

参考文献

- 1 Katok A, Hasselblatt B. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1996
- 2 Fort M K. The embedding of homeomorphisms in flows. Proc Amer Math Soc, 1955, 6: 960–967
- 3 Karlin S, McGregor J. Embeddability of discrete time simple branching processes into continuous time branching processes. Trans Amer Math Soc, 1968, 132: 115–136
- 4 Zhang W. A generic property of globally smooth iterative roots. Sci China Ser A, 1995, 38: 267–272
- 5 Zdun M C, Zhang W. Koenigs embedding flow problem with global C^1 smoothness. J Math Anal Appl, 2011, 374: 633–643
- 6 Krassowska D, Zdun M C. On iteration groups of C^1 -diffeomorphisms with two fixed points. J Math Anal Appl, 2011, 382: 204–213
- 7 Humke P D, Laczkovich M. Approximations of continuous functions by squares. Ergodic Theory Dynam Systems, 1990, 10: 361–366
- 8 Simon K. The set of second iterates is nowhere dense in C . Proc Amer Math Soc, 1991, 111: 1141–1150
- 9 Blokh A M. The set of all iterates is nowhere dense in $C([0, 1], [0, 1])$. Trans Amer Math Soc, 1992, 333: 787–798
- 10 Zdun M C. On approximative embeddability of diffeomorphisms in C^1 -flows. J Difference Equ Appl, 2014, 20: 1427–1436
- 11 Kuznetsov Y A. Elements of Applied Bifurcation Theory, 3rd ed. New York: Springer, 2010
- 12 Iannella N, Kindermann L. Finding iterative roots with a spiking neural network. Inform Process Lett, 2005, 95: 545–551
- 13 Kindermann L. Computing iterative roots with neural networks. In: Proceedings of the Fifth International Conference on Neural Information Processing. Tokyo: Ohmsha, 1998, 713–715
- 14 Babbage C. An essay towards the calculus of functions. Philos Trans R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci, 1815, 105: 389–423
- 15 Abel N H. Détermination d'une fonction au moyen d'une équation qui ne contient qu'une seule variable. In: Oeuvres Complètes, II. Christiania: Grøndahl & Søn, 1981, 36–39
- 16 Koenigs G. Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles. Ann Sci École Norm Sup (4), 1884, 3: 3–41
- 17 Schröder E. Ueber iterirte Functionen. Math Ann, 1870, 3: 296–322
- 18 Bödewadt U T. Zur Iteration reeller Funktionen. Math Z, 1943, 49: 497–516
- 19 Baron K, Jarczyk W. Recent results on functional equations in a single variable, perspectives and open problems. Aequationes Math, 2001, 61: 1–48
- 20 Targonski G. Progress of iteration theory since 1981. Aequationes Math, 1995, 50: 50–72
- 21 Isaacs R. Iterates of fractional order. Canad J Math, 1950, 2: 409–416

- 22 Kneser H. Reelle analytische Lösungen der Gleichung $\phi(\phi(x)) = e^x$ und verwandter Funktionalgleichungen. *J Reine Angew Math*, 1950, 187: 51–57
- 23 Rice R E, Schweizer B, Sklar A. When is $f(f(z)) = az^2 + bz + c$? *Amer Math Monthly*, 1980, 87: 252–263
- 24 Haĭdukov P I. On searching a function from a given iterate (in Russian). *Uč Zap Buriatsk Ped Inst*, 1958, 15: 3–28
- 25 Kuczma M. On monotonic solutions of a functional equation (I). *Ann Polon Math*, 1960, 9: 295–297
- 26 Kuczma M. On monotonic solutions of a functional equation (II). *Ann Polon Math*, 1961, 10: 161–166
- 27 Kuczma M. *Functional Equations in a Single Variable*. Monografie Matematyczne 46. Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1968
- 28 Kuczma M, Choczewski B, Ger R. *Iterative Functional Equations*. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 32. Cambridge: Cambridge University Press, 1990
- 29 Zhang J, Yang L. Iterative roots of a piecewise monotone continuous self-mapping (in Chinese). *Acta Math Sinica Chin Ser*, 1983, 26: 398–412 [张景中, 杨路. 论逐段单调连续函数的迭代根. *数学学报*, 1983, 26: 398–412]
- 30 Zhang W. PM functions, their characteristic intervals and iterative roots. *Ann Polon Math*, 1996, 65: 119–128
- 31 Zhang J, Yang L, Zhang W. Some advances on functional equations. *Adv Math China*, 1995, 24: 385–405
- 32 Sun T, Xi H. Iterative solutions of functions of type N on an interval (in Chinese). *J Math Study*, 1996, 29: 40–45 [孙太祥, 席鸿建. 区间上 N 型函数的迭代根. *数学研究*, 1996, 29: 40–45]
- 33 Liu L, Zhang W. Non-monotonic iterative roots extended from characteristic intervals. *J Math Anal Appl*, 2011, 378: 359–373
- 34 Liu L, Jarczyk W, Li L, et al. Iterative roots of piecewise monotonic functions of nonmonotonicity height not less than 2. *Nonlinear Anal*, 2012, 75: 286–303
- 35 Blokh A M, Coven E, Misiurewicz M, et al. Roots of continuous piecewise monotone maps of an interval. *Acta Math Univ Comenian (NS)*, 1991, 60: 3–10
- 36 Leśniak Z. Constructions of fractional iterates of Sperner homeomorphisms of the plane. In: *Iteration Theory* (Batschuns, 1992). River Edge: World Scientific, 1996, 182–192
- 37 Leśniak Z. On fractional iterates of a homeomorphism of the plane. *Ann Polon Math*, 2002, 79: 129–137
- 38 Kuczma M. On the Schröder equation. *Rozprawy Mat*, 1963, 34: 1–50
- 39 Zeng Y, Zhang W, Zhang W. How violently do smooth iterative roots oscillate? *J Math Anal Appl*, 2015, 421: 1207–1224
- 40 Zhang W, Zeng Y, Jarczyk W, et al. Local C^1 stability versus global C^1 unstability for iterative roots. *J Math Anal Appl*, 2012, 386: 75–82
- 41 Li L, Yang D, Zhang W. A note on iterative roots of PM functions. *J Math Anal Appl*, 2008, 341: 1482–1486
- 42 Li L, Zhang W. The question on characteristic endpoints for iterative roots of PM functions. *J Math Anal Appl*, 2018, 458: 265–280
- 43 Li L, Liu L. Decreasing case on characteristic endpoints question for iterative roots of PM functions. *J Difference Equ Appl*, 2019, 25: 396–407
- 44 Sun T. Iterative roots of anti- N -type functions on the interval (in Chinese). *J Math Study*, 2000, 33: 274–284 [孙太祥. 区间上反 N 型函数的迭代根. *数学研究*, 2000, 33: 274–284]
- 45 Zhang G. Conjugation and iterative roots of a class of self-mappings of a line segment (I) (in Chinese). *Chinese Ann Math Ser A*, 1992, 13: 33–40 [张广远. 一类线段自映射的共轭与迭代根 (I). *数学年刊*, 1992, 13: 33–40]
- 46 Zhang G. Conjugation and iterative roots of a class of self-mappings of a line segment (II) (in Chinese). *Chinese Ann Math Ser A*, 1992, 13: 473–478 [张广远. 一类线段自映射的共轭与迭代根 (II). *数学年刊*, 1992, 13: 473–478]
- 47 Liu L, Li L, Zhang W. Open question on lower order iterative roots for PM functions. *J Difference Equ Appl*, 2018, 24: 825–847
- 48 Zhang J, Yang L, Zhang W. *Iterative Equations and Embedding Flow* (in Chinese). Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1998 [张景中, 杨路, 张伟年. 迭代方程与嵌入流. 上海: 上海科技教育出版社, 1998]
- 49 Belitskii G, Tkachenko V. *One-dimensional Functional Equations*. Operator Theory: Advances and Applications, 144. Basel: Birkhäuser Verlag, 2003
- 50 Bronshtein E M. On an iterative square root of a quadratic trinomial. In: *Geometric Problems in the Theory of Functions and Sets*. Kalinin: Kalinin Gos Univ, 1989, 24–27
- 51 Choczewski B, Kuczma M. On iterative roots of polynomials. In: *Iteration Theory* (Lisbon, 1991). Singapore: World Scientific, 1992, 59–67

- 52 Strycharz-Szemberg B, Szemberg T. Geometry of the locus of polynomials of degree 4 with iterative roots. *Cent Eur J Math*, 2011, 9: 338–345
- 53 Schweizer B, Sklar A. Invariants and equivalence classes of polynomials under linear conjugacy. In: *Contributions to General Algebra*. Vienna: Holder-Pichler-Tempsky, 1988, 253–257
- 54 Yu Z, Yang L, Zhang W. Discussion on polynomials having polynomial iterative roots. *J Symbolic Comput*, 2012, 47: 1154–1162
- 55 Buchberger B. Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal. PhD Thesis. Austria: University of Innsbruck, 1965
- 56 Gianni P, Trager B, Zacharias G. Gröbner bases and primary decomposition of polynomial ideals. *J Symbolic Comput*, 1988, 6: 149–167
- 57 Becker T, Weispfenning V. Gröbner Bases: A Computational Approach to Commutative Algebra. New York: Springer-Verlag, 1993
- 58 Cox D. Introduction to Gröbner bases. *Proc Sympos Appl Math*, 1998, 53: 1–24
- 59 Wang D, Mou C, Li X, et al. *Polynomial Algebra (in Chinese)*. Beijing: Higher Education Press, 2010 [王东明, 牟晨琪, 李晓亮, 等. 多项式代数. 北京: 高等教育出版社, 2010]
- 60 Decker W, Greuel G-M, Pfister G, et al. Singular 3-1-1—a computer algebra system for polynomial computations. [Http://www.singular.uni-kl.de](http://www.singular.uni-kl.de), 2010
- 61 Chen X, Shi Y, Zhang W. Planar quadratic degree-preserving maps and their iteration. *Results Math*, 2009, 55: 39–63

Non-monotonicity and smoothness of iterative roots of one-dimensional mapping

Liu Liu, Zhiheng Yu, Yingying Zeng & Weinian Zhang

Abstract The problem of iterative roots is a weak version of embedding flows, which is a basis of dynamic interpolation. However, even for one-dimensional mappings, it is still difficult to discuss the non-monotonicity and smoothness of their iterative roots. In this paper, some new results are introduced, especially for the existence and construction of continuous iterative roots of strictly piecewise monotone and continuous mappings, and for smoothness of iterative roots about local and global cases. Finally, as a special class of strictly piecewise monotone and smooth mappings, polynomials are discussed and the conditions of existence with calculation methods of their iterative roots are given.

Keywords iterative root, strictly piecewise monotone, non-monotonicity height, characteristic interval, smoothness

MSC(2010) 26A18, 37E05, 39B12, 68W30

doi: 10.1360/SSM-2019-0308