Gillespie 所提出一个问题的否定回答

汪军鹏*, 刘仲奎, 杨晓燕

西北师范大学数学与统计学院, 兰州 730070

E-mail: wangjunpeng1218@163.com, liuzk@nwnu.edu.cn, yangxy@nwnu.edu.cn

收稿日期: 2017-04-21; 接受日期: 2017-10-30; 网络出版日期: 2018-07-30; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11761060 和 11361051) 资助项目

摘要 本文引入 Gorenstein n -凝聚环的概念, 证明即使所有左 R -模的 AC-内射复形和所有内射左 R -模的复形对应的同伦范畴是一致的, 环 R 也未必是左凝聚的, 从而否定地回答了 Gillespie (2017) 提出的一个问题.

关键词 Gorenstein n -凝聚环 Gorenstein AC-内射模 AC-内射复形

MSC (2010) 主题分类 16E65, 18G25

1 引言及主要结论

众所周知, 内射模和平坦模可分别由有限生成模通过通常的 Ext 和 Tor 函子来刻画. 若将有限生成模替换为 FP_∞ 型模, 则可得到 absolutely clean 模和 level 模的概念 (参见文献 [1]). 注意到 FP_n -内射模和 FP_n -平坦模的概念分别统一了上述模类, 同时, n -凝聚环的概念统一了 Noetherian 环和凝聚环 (参见文献 [2]).

称一个左 R -模的复形 C 是 AC-内射的, 如果 C 的每个层次上的模都是内射的, 并且每个复形同态 $A \rightarrow C$ 都是零伦的, 其中 A 是一个正合复形且每个循环模都是 absolutely clean 的. Šťovíček [3] 证明了, 若 R 是一个左凝聚环, 则存在同伦范畴间的等式 $K(\text{AC-Inj}) = K(\text{Inj})$, 其中 $K(\text{AC-Inj})$ 和 $K(\text{Inj})$ 分别表示所有左 R -模的 AC-内射复形和所有内射左 R -模的复形对应的同伦范畴. 为了将 Krause 粘合 [4] 推广到任意环上, Gillespie [5] 深入研究了同伦范畴 $K(\text{AC-Inj})$, 举例说明了在一般环上上述等式不再成立, 并提出了如下问题, 即上述 Šťovíček 所证明结论的逆命题是否成立:

问题 1.1 等式 $K(\text{AC-Inj}) = K(\text{Inj})$ 是否能刻画左凝聚环?

Gorenstein 环的概念由 Iwanaga 在文献 [6] 中引入. 作为 Gorenstein 环的一种自然推广, Ding-Chen 环最初由 Ding 和 Chen 在文献 [7] 中以 “ m -FC 环” 的名字引入, 而由 Gillespie 在文献 [8] 中重新命名为 Ding-Chen 环. 本文引入了 Gorenstein n -凝聚环的概念 (其中 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), 统一了这两类环, 研究了 Gorenstein n -凝聚环与问题 1.1 之间的关系, 并给出了问题 1.1 的否定答案.

英文引用格式: Wang J P, Liu Z K, Yang X Y. A negative answer to a question of Gillespie (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1121–1130, doi: 10.1360/SCM-2017-0233

本文结构如下: 第 2 节介绍一些基本概念和基本事实. 第 3 节讨论模的 FP_n -内射维数和 FP_n -平坦维数. 第 4 节引入 Gorenstein n -凝聚环的概念并研究了这类环的 Gorenstein 同调性质. 本节的主要结论如下, 该结论将文献 [9, 定理 1.1(2)] 从 Ding-Chen 推广到任意的 Gorenstein n -凝聚环:

定理 1.2 (= 定理 4.5) 设 R 是一个 Gorenstein n -凝聚环, 其中 $n \geq 2$, 则对任意的左 R -模 M , 以下条件等价:

- (1) M 是 Gorenstein AC-内射的 (或 Ding 内射的, Gorenstein 内射的);
- (2) 存在一个左 R -模的正合序列 $\cdots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中每个 I_i 是内射的.

第 5 节讨论问题 1.1 并给出其否定的答案. 具体地, 我们得到了如下结论.

定理 1.3 (= 定理 5.3 和例 5.4) (1) 设 R 是一个 Gorenstein n -凝聚环, 其中 $n \geq 2$, 则存在等式 $K(\text{Inj}) = K(\text{AC-Inj})$.

- (2) 存在一个 Gorenstein 2-凝聚环 (因而是 Gorenstein n -凝聚的, 其中 $n \geq 2$) 但不是左凝聚的.

2 预备知识

贯穿全文, R 表示具有单位元的结合环, 而所有的左、右 R -模都是酉模. 除非特别声明, 所有的 (R -) 模均是指左 R -模. 我们用 $R\text{-Mod}$ ($\text{Mod-}R$) 表示左 (右) R -模的范畴. 用 $\mathcal{I}$ 、 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{FI}$ 分别表示由所有内射、平坦和 FP -内射的 R -模构成的类. 用 $\text{fd}_R(M)$ 表示一个 (右) R -模 M 的平坦维数. 用 M^+ 表示 (右) R -模 M 的示性模 $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

设 $\mathcal{A}$ 是一个 Abel 范畴. 对每个 $\mathcal{A}$ 中对象的复形

$$C = \cdots \rightarrow C^{m-1} \xrightarrow{\delta_C^{m-1}} C^m \xrightarrow{\delta_C^m} C^{m+1} \xrightarrow{\delta_C^{m+1}} \cdots,$$

分别定义 C 的第 m 个循环、第 m 个边缘和第 m 个同调为 $\text{Ker}(\delta_C^m)$ 、 $\text{Im}(\delta_C^{m-1})$ 和 $\text{Ker}(\delta_C^m)/\text{Im}(\delta_C^{m-1})$, 并分别记为 $Z^m(C)$ 、 $B^m(C)$ 和 $H^m(C)$. 称一个复形 C 是正合的 (或零调的), 如果每个 $H^m(C) = 0$.

设 B 是 $\mathcal{A}$ 中任一对象, $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{A}$ 中任一对象类. 定义 B 的 $\mathcal{X}$ -投射维数 (记为 $\mathcal{X}\text{-pd}(B)$) 如下: $\mathcal{X}\text{-pd}(B) = \inf\{m \in \mathbb{N} \mid \text{存在一个正合复形 } 0 \rightarrow X_{-m} \rightarrow \cdots \rightarrow X_{-1} \rightarrow X_0 \rightarrow B \rightarrow 0, \text{ 其中每个 } X_i \in \mathcal{X}\}$. 若不存在上述正合序列, 则记 $\mathcal{X}\text{-pd}(B) = \infty$. 对偶地可以定义 $\mathcal{X}$ -内射维数.

设 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的对象类. 称二元组 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是一个余挠对, 如果 $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^\perp$ 且 $\mathcal{X} = {}^\perp\mathcal{Y}$, 这里 $\mathcal{X}^\perp = \{A \in \mathcal{A} \mid \text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, A) = 0, \forall X \in \mathcal{X}\}$, 类似地, 可定义 ${}^\perp\mathcal{Y}$. 称余挠对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是遗传的, 如果对任意的 $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$ 及任意的 $m \geq 1$, 都有 $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^m(X, Y) = 0$. 称余挠对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是完备的, 如果对任意的 $A \in \mathcal{A}$, 都存在两个 $\mathcal{A}$ 中的短正合序列 $0 \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow A \rightarrow 0$ 和 $0 \rightarrow A \rightarrow Y' \rightarrow X' \rightarrow 0$, 其中 $X, X' \in \mathcal{X}$ 且 $Y, Y' \in \mathcal{Y}$.

给定 $\mathcal{A}$ 中的一个对象 A 和一个对象类 $\mathcal{X}$. A 的一个 $\mathcal{X}$ -预覆盖定义为一个同态 $\alpha: X \rightarrow A$, 使得 $X \in \mathcal{X}$ 并且对任意的 $X' \in \mathcal{X}$, 序列 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X', X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X', A) \rightarrow 0$ 是正合的. 称一个 $\mathcal{X}$ -预覆盖 $\alpha: X \rightarrow A$ 是一个 $\mathcal{X}$ -覆盖, 如果满足 $\alpha f = \alpha$ 的自同态 $f: X \rightarrow X$ 都是一个同构. 称 $\mathcal{A}$ 中一个对象类 $\mathcal{X}$ 是一个 (预) 覆盖类, 如果 $\mathcal{A}$ 中每个对象都具有一个 $\mathcal{X}$ -(预) 覆盖. 对偶地, 可以定义 $\mathcal{X}$ -(预) 包络和一个 (预) 包络类. 称一个余挠对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是完全的, 如果 $\mathcal{X}$ 是一个覆盖类且 $\mathcal{Y}$ 是一个包络类.

设 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. 以下概念和事实参见文献 [1, 2].

- (1) 称一个 R -模 M 是有限 n -表示的, 如果 M 具有一个如下形式的投射分解:

$$P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

其中每个 P_i 都是有限生成投射的. 用 $\mathcal{FP}_n$ 表示由所有有限 n -表示 R -模构成的类. 注意到当 $n = 0, 1$ 时, 有限 n -表示模分别就是有限生成模和有限表示模. 称一个 R -模 M 是 $\mathcal{FP}_\infty$ 型的, 如果 M 是有限 ∞ -表示的.

(2) 称一个环 R 是左 n -凝聚的, 如果每个有限 n -表示 R -模都是有限 $(n+1)$ -表示的. 注意到左 0-凝聚环和左 1-凝聚环分别就是左 Noetherian 环和左凝聚环. 同时, 任意环都是左、右 ∞ -凝聚的. 存在如下环类的真包含关系图 (参见文献 [2, 第 1255 页]):

$$0\text{-Coh} \subsetneq 1\text{-Coh} \subsetneq 2\text{-Coh} \subsetneq \cdots \subsetneq n\text{-Coh} \subsetneq \cdots,$$

其中 $n\text{-Coh}$ 表示所有左 n -凝聚环构成的类.

(3) 称一个 R -模 E (或右 R -模 H) 是 $\mathcal{FP}_n$ -内射 (或 $\mathcal{FP}_n$ -平坦) 的, 如果对任意 $T \in \mathcal{FP}_n$, 都有 $\text{Ext}_R^1(M, E) = 0$ (或 $\text{Tor}_1^R(H, T) = 0$). 分别用 $\mathcal{FP}_n\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{FP}_n\mathcal{F}$ 表示由所有 $\mathcal{FP}_n$ -内射 R -模和 $\mathcal{FP}_n$ -平坦 R -模构成的类. 注意到 $\mathcal{FP}_0$ -内射和 $\mathcal{FP}_1$ -内射模分别就是通常的内射和 $\mathcal{FP}$ -内射模, $\mathcal{FP}_0$ -平坦和 $\mathcal{FP}_1$ -平坦模都是通常的平坦模. 称一个 R -模 M 是 absolutely clean (或 level) 的, 如果 M 是 $\mathcal{FP}_\infty$ -内射 (或 $\mathcal{FP}_\infty$ -平坦) 的. 用 $\mathcal{AC}$ (或 $\mathcal{L}$) 表示由所由 absolutely clean (或 level) R -模构成的类.

本节的最后给出一些 Gorenstein 同调模的概念.

称一个 R -模 M 是 Gorenstein 内射^[10] 的 (或 Ding 内射^[8, 11] 的、Gorenstein AC-内射^[1] 的), 如果存在一个由内射 R -模构成的 $\text{Hom}_R(\mathcal{I}, -)$ 正合的 (或 $\text{Hom}_R(\mathcal{FI}, -)$ 正合的、 $\text{Hom}_R(\mathcal{AC}, -)$ 正合的) 正合序列 $\cdots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \cdots$, 使得 $M \cong \text{Im}(I_0 \rightarrow I^0)$. 分别用 $\mathcal{GI}$ 、 $\mathcal{DI}$ 和 $\mathcal{GI}_{\text{ac}}$ 表示由所有 Gorenstein 内射、Ding 内射和 Gorenstein AC-内射 R -模构成的类.

3 模的 $\mathcal{FP}_n$ -内射和 $\mathcal{FP}_n$ -平坦维数

贯穿全文, 若不特殊说明, n 总是属于集合 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

本节研究 R -模的 $\mathcal{FP}_n$ -内射维数和 $\mathcal{FP}_n$ -平坦维数并刻画 Gorenstein AC-内射 R -模.

定义 3.1 设 M 是一个 R -模, N 是一个右 R -模. 定义 M 的 $\mathcal{FP}_n$ -内射维数和 N 的 $\mathcal{FP}_n$ -平坦维数 (记为 $\mathcal{FP}_n\text{-id}_R(M)$ 和 $\mathcal{FP}_n\text{-fd}_R(N)$) 如下:

$$\mathcal{FP}_n\text{-id}_R(M) = \inf\{m \in \mathbb{N} \mid \text{Ext}_R^{m+1}(X, M) = 0, \forall X \in \mathcal{FP}_n\},$$

$$\mathcal{FP}_n\text{-fd}_R(N) = \inf\{m \in \mathbb{N} \mid \text{Tor}_R^{m+1}(N, X) = 0, \forall X \in \mathcal{FP}_n\}.$$

显然, 当 $n = 0, 1$ 时, 模的 $\mathcal{FP}_n$ -内射维数分别是通常的内射维数和 $\mathcal{FP}$ -内射维数, 模的 $\mathcal{FP}_n$ -平坦维数都是模的平坦维数. 本节着重讨论 $n > 1$ 的情形.

由文献 [2, 定理 5.5 和 5.6] 知, 一个环 R 是左 n -凝聚的当且仅当 R -模类 $\mathcal{FP}_n\mathcal{I}$ 是内射可解的, 也当且仅当右 R -模类 $\mathcal{FP}_n\mathcal{F}$ 是投射可解的, 因此, 按照通常的同调方法, 可得到如下两个引理.

引理 3.2 设 R 是一个左 n -凝聚环, M 是一个 R -模, 则对任意非负整数 m , 以下陈述等价:

- (1) $\mathcal{FP}_n\text{-id}_R(M) \leq m$;
- (2) 对任意的 R -模 $F \in \mathcal{FP}_n$ 及任意的 $i > m$, 都有 $\text{Ext}_R^i(F, M) = 0$;
- (3) 对任意的 R -模 $F \in \mathcal{FP}_n$, 都有 $\text{Ext}_R^{m+1}(F, M) = 0$;
- (4) 存在 R -模的正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \cdots \rightarrow E^m \rightarrow 0$, 其中每个 $E^i \in \mathcal{FP}_n\mathcal{I}$;
- (5) 对于每个 R -模的正合序列 $0 \rightarrow M \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \cdots \rightarrow E^{m-1} \rightarrow C \rightarrow 0$, 如果每个 E^i 属于 $\mathcal{FP}_n\mathcal{I}$, 那么 C 也属于 $\mathcal{FP}_n\mathcal{I}$.

引理 3.3 设 R 是一个左 n -凝聚环, M 是一个右 R -模, 则对任意非负整数 m , 以下陈述等价:

- (1) $\text{FP}_n\text{-fd}_R(M) \leq m$;
- (2) 对任意的右 R -模 $F \in \mathcal{FP}_n$ 及任意的 $i > m$, 都有 $\text{Tor}_R^i(M, F) = 0$;
- (3) 对任意的右 R -模 $F \in \mathcal{FP}_n$, 都有 $\text{Tor}_R^{m+1}(M, F) = 0$;
- (4) 存在右 R -模的正合序列 $0 \rightarrow H_m \rightarrow \cdots \rightarrow H_1 \rightarrow H_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中每个 $H_i \in \mathcal{FP}_n\mathcal{F}$;
- (5) 对于每个右 R -模的正合序列 $0 \rightarrow K \rightarrow H_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow H_1 \rightarrow H_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 如果每个 H_i 属于 $\mathcal{FP}_n\mathcal{F}$, 那么 K 也属于 $\mathcal{FP}_n\mathcal{F}$.

注 3.4 设 R 是一个左 n -凝聚环, 则由引理 3.2 可知定义 3.1 中定义的 FP_n -内射维数和 FP_n -平坦维数分别与 $\mathcal{FP}_n\mathcal{I}$ -内射维数和 $\mathcal{FP}_n\mathcal{F}$ -投射维数一致. 因此, 后文中将这些相同的维数统一称为 FP_n -内射维数和 FP_n -平坦维数. 同时, 模类 $\mathcal{AC}$ (或 $\mathcal{L}$) 在任意环上是内射可解的 (或是投射可解的). 从而, FP_∞ -内射维数和 FP_∞ -平坦维数分别与 $\mathcal{AC}$ -内射维数和 $\mathcal{L}$ -投射维数一致. 因此, 后文中将这些相同的维数分别称为 absolutely clean 维数和 level 维数, 并分别用 $\text{AC-dim}_R(M)$ 和 $\text{L-dim}_R(M)$ 表示一个 (右) R -模 M 的 absolutely clean 维数和 level 维数.

由文献 [2, 命题 3.5 和 3.6] 可知, 在任意环上, 一个模 M 是 FP_n -内射 (或 FP_n -平坦) 的当且仅当 M^+ 是 FP_n -平坦 (或 FP_n -内射) 的. 下面引理给出这一事实的维数版本.

引理 3.5 设 R 是一个环, M 是一个 R -模, $n \geq 2$.

- (1) 以下条件对任意的非负整数 m 等价:
 - (i) $\text{FP}_n\text{-fd}_R(M) \leq m$;
 - (ii) $\text{FP}_n\text{-id}_R(M^+) \leq m$.
- (2) 若 R 是一个左 n -凝聚环, 则以下条件对任意的非负整数 m 等价:
 - (iii) $\text{FP}_n\text{-id}_R(M) \leq m$;
 - (iv) $\text{FP}_n\text{-fd}_R(M^+) \leq m$.

特别地, 对任意环 R , 都有 $\text{AC-dim}_R(M) \leq m$ 当且仅当 $\text{L-dim}_R(M^+) \leq m$.

证明 设 T 是任意一个有限 n -表示左 (或右) R -模.

(1) 由伴随同构 $\text{Tor}_{i \geq 1}^R(T, M)^+ \cong \text{Ext}_R^{i \geq 1}(T, M^+)$ 可知 (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

(2) 由 R 的左 n -凝聚性及文献 [2, 定理 3.4] 可知, 存在同构 $\text{Ext}_R^{i \geq 1}(T, M)^+ \cong \text{Tor}_{i \geq 1}^R(T, M^+)$. 同时, 对任意环 R 和任意的 FP_∞ 型 R -模 T , 都有如下同构:

$$\text{Ext}_R^{i \geq 1}(T, M)^+ \cong \text{Tor}_{i \geq 1}^R(T, M^+).$$

因此, (iii) $\Leftrightarrow$ (iv), 并且最后一个结论也成立. □

众所周知, 纯子模和纯商模是同调代数中的重要概念. 下面引理讨论纯子模和纯商模的 FP_n -内射维数和 FP_n -平坦维数 ($n \geq 2$).

引理 3.6 设 R 是一个环, M 和 S 是 R -模且 S 是 M 的纯子模, $n \geq 2$.

(1) 存在如下维数不等式:

$$\text{FP}_n\text{-fd}_R(S) \leq \text{FP}_n\text{-fd}_R(M) \quad \text{和} \quad \text{FP}_n\text{-fd}_R(M/S) \leq \text{FP}_n\text{-fd}_R(M).$$

(2) 若 R 是一个左 n -凝聚环, 则以下维数不等式成立:

$$\text{FP}_n\text{-id}_R(S) \leq \text{FP}_n\text{-id}_R(M) \quad \text{和} \quad \text{FP}_n\text{-id}_R(M/S) \leq \text{FP}_n\text{-id}_R(M).$$

特别地, 对任意环 R , 都有维数不等式:

$$\text{AC-dim}_R(S) \leq \text{L-dim}_R(M) \quad \text{和} \quad \text{AC-dim}_R(M/S) \leq \text{L-dim}_R(M).$$

证明 由短正合序列 $0 \rightarrow S \rightarrow M \rightarrow M/S \rightarrow 0$ 的纯性可知有如下可裂的短正合序列:

$$0 \rightarrow (M/S)^+ \rightarrow M^+ \rightarrow S^+ \rightarrow 0.$$

该序列可以诱导另外两个可裂的短正合序列, 其中 $i \geq 1$, $0 \rightarrow \text{Tor}_{i+1}^R((M/S)^+, T) \rightarrow \text{Tor}_{i+1}^R(M^+, T) \rightarrow \text{Tor}_{i+1}^R(S^+, T) \rightarrow 0$, $0 \rightarrow \text{Ext}_R^{i+1}(T, (M/S)^+) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+1}(T, M^+) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+1}(T, S^+) \rightarrow 0$. 从而可得如下维数不等式: $\text{FP}_n\text{-fd}_R(S^+) \leq \text{FP}_n\text{-fd}_R(M^+)$ 和 $\text{FP}_n\text{-fd}_R((M/S)^+) \leq \text{FP}_n\text{-fd}_R(M^+)$, 以及 $\text{FP}_n\text{-id}_R(S^+) \leq \text{FP}_n\text{-id}_R(M^+)$ 和 $\text{FP}_n\text{-id}_R((M/S)^+) \leq \text{FP}_n\text{-id}_R(M^+)$. 因此, 分别由引理 3.5(1) 和 3.5(2) 可得所证的不等式. $\square$

设 m 是一个非负整数. 记 $\overline{\mathcal{FP}_n\mathcal{F}_m}$ 为由所有 FP_n -平坦维数不超过 m 的 R -模构成的类.

命题 3.7 设 R 是一个环, $n \geq 2$.

(1) 模类 $\mathcal{FP}_n\mathcal{I}$ 是一个覆盖类而模类 $\mathcal{FP}_n\mathcal{F}$ 是一个预包络类.

(2) 二元组 $(\overline{\mathcal{FP}_n\mathcal{F}_m}, \overline{\mathcal{FP}_n\mathcal{F}_m}^\perp)$ 形成 $R\text{-Mod}$ 中一个完全的余挠对, 并且当 R 是右凝聚环时该余挠对还是遗传的.

证明 (1) 由文献 [2, 推论 3.7] 易知模类 $\mathcal{FP}_n\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{FP}_n\mathcal{F}$ 均对纯子模、纯商模、直和以及直积都封闭. 因此, 由文献 [12, 定理 2.5 和注 2.6] 可知, 模类 $\mathcal{FP}_n\mathcal{I}$ 是一个覆盖类而模类 $\mathcal{FP}_n\mathcal{F}$ 是一个预包络类.

(2) 根据引理 3.6 可得模类 $\overline{\mathcal{FP}_n\mathcal{F}_m}$ 关于纯子模和纯商模均封闭. 另一方面, 由定义易知模类 $\overline{\mathcal{FP}_n\mathcal{F}_m}$ 包含 ${}_R R$ 并且对直和及扩张封闭. 从而, 由文献 [12, 定理 3.4] 可知, 二元组 $(\overline{\mathcal{FP}_n\mathcal{F}_m}, \overline{\mathcal{FP}_n\mathcal{F}_m}^\perp)$ 构成一个完全的余挠对. 最后, 假设 R 是一个右 n -凝聚环, 则由文献 [2, 定理 5.6] 可知模类 $\mathcal{FP}_n\mathcal{F}$ 是投射可解的. 从而由引理 3.3 容易验证模类 $\overline{\mathcal{FP}_n\mathcal{F}_m}$ 是投射可解的. 因此, 余挠对 $(\overline{\mathcal{FP}_n\mathcal{F}_m}, \overline{\mathcal{FP}_n\mathcal{F}_m}^\perp)$ 是遗传的. $\square$

设 R 是一个环, M 是一个 R -模. 由文献 [2, 推论 4.2] 和命题 3.7(1), 我们可建立一个 $\text{Hom}_R(\mathcal{AC}, -)$ -正合的复形 $\cdots \rightarrow A_1 \rightarrow A_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中每个 $A_i \in \mathcal{AC}$; 以及一个 $\text{Hom}_R(-, \mathcal{AC})$ -正合的复形 $0 \rightarrow M \rightarrow A^0 \rightarrow A^1 \rightarrow \cdots$, 其中每个 $A^i \in \mathcal{AC}$ (这两个复形分别称为 M 的左、右 $\mathcal{AC}$ -分解, 这些分解并不要求上述复形是正合的). 于是, 由文献 [13, 定义 8.2.13] 可知, 函子 $\text{Hom}_R(-, -)$ 是通过 $\mathcal{AC} \times \mathcal{AC}$ 左平衡的. 从而可以构造函数 $\text{Hom}_R(-, -)$ 的左导出函子, 记为 $\text{Ext}_m^{\mathcal{AC}}(-, -)$. 计算该导出函子时可以用第一个变元的右 $\mathcal{AC}$ -分解, 也可以用第二个变元的左 $\mathcal{AC}$ -分解.

在本节最后, 我们用模的 $\mathcal{AC}$ -分解刻画 Gorenstein $\mathcal{AC}$ -内射模.

引理 3.8 设 R 是一个环, M 是一个 R -模, 则以下陈述等价:

(1) M 是 Gorenstein $\mathcal{AC}$ -内射的.

(2) M 有一个正合的左 $\mathcal{AC}$ -分解 $\cdots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中每个 $I_i \in \mathcal{I}$, 并且对任意的 $H \in \mathcal{AC}$ 及任意的 $i \geq 1$, 都有 $\text{Ext}_R^i(H, M) = 0$.

(3) M 有一个正合的左 $\mathcal{AC}$ -分解 $\cdots \rightarrow A_1 \rightarrow A_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 并且对任意的 $H \in \mathcal{AC}$ 和任意的 $i \geq 1$, 都有 $\text{Ext}_R^i(H, M) = 0$.

(4) M 有一个正合的左 $\mathcal{AC}$ -分解 $\cdots \rightarrow A_1 \rightarrow A_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 并且对任意满足 $\text{AC-dim}_R(H) < \infty$ 的 R -模 H 和任意的 $i \geq 1$, 都有 $\text{Ext}_R^i(H, M) = 0$.

而且, 若 R 满足 $\text{AC-dim}_R({}_R R) < \infty$, 则以上条件还等价于

(5) 对任意满足 $\text{AC-dim}_R(H) < \infty$ 的 R -模 H 及任意的 $i \geq 1$, 都有 $\text{Ext}_R^i(H, M) = 0$.

证明 显然有 (2) $\Rightarrow$ (3) 和 (4) $\Rightarrow$ (5). 由维数转移得 (3) $\Rightarrow$ (4). 运用通常的同调方法得 (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(4) $\Rightarrow$ (2). 只需说明 M 有一个正合的左 $\mathcal{AC}$ -分解 $\cdots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中每个 I_i 是内射的. 由命题 3.7(1) 知 M 有一个 $\mathcal{AC}$ -覆盖 $f: E_0 \rightarrow M$. 考虑短正合序列

$$0 \rightarrow E_0 \xrightarrow{\iota} I_0 \rightarrow C_0 \rightarrow 0,$$

其中 I_0 是内射的, 则由文献 [1, 引理 5.6] 可知 $C_0 \in \mathcal{AC}$. 于是, $\text{Ext}_R^1(C_0, M) = 0$, 从而存在同态 $g: I_0 \rightarrow M$ 使得 $g\iota = f$. 进而由 f 的 $\mathcal{AC}$ -预覆盖性可知, 存在同态 $h: I_0 \rightarrow E_0$ 使得 $fh = g$. 由此可得 $fhu = f$. 于是, 由 f 的 $\mathcal{AC}$ -覆盖性知 hu 是一个同构. 因而 E_0 是内射的. 对任意的 $A \in \mathcal{AC}$, 容易验证序列 $0 \rightarrow \text{Hom}_R(A, \text{Ker} f) \rightarrow \text{Hom}_R(A, E_0) \rightarrow \text{Hom}_R(A, \text{Im} f) \rightarrow 0$ 是正合的, 从而 $\text{Ext}_R^1(A, \text{Ker} f) = 0$. 因此, $\text{Ker} f$ 也有一个 $\mathcal{AC}$ -覆盖: $I_1 \rightarrow \text{Ker} f$, 其中 I_1 是内射的. 重复这一证明过程可得 M 的一个左 $\mathcal{AC}$ -分解

$$\cdots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

其中每个 I_i 是内射的. 另一方面, 由 (4) 中正合序列可得 $\text{Ext}_{i \geq 0}^{\mathcal{AC}}({}_R R, M) = 0$ 且 $\text{Ext}_0^{\mathcal{AC}}({}_R R, M) \cong M$. 于是, 上述 M 的左 $\mathcal{AC}$ -分解还是正合的.

(5) $\Rightarrow$ (2). 由 (4) $\Rightarrow$ (2) 的证明可知, M 有如下左 $\mathcal{AC}$ -分解:

$$\mathbf{E} = \cdots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

其中每个 I_i 是内射的. 设 R -模 N 满足 $\text{AC-dim}_R(N) = m < \infty$, 则对 m 进行数学归纳可得复形 $\mathbf{E}$ 是 $\text{Hom}_R(N, -)$ -正合的. 特别地, $\text{Hom}_R({}_R R, \mathbf{E})$ 是正合的. 这说明 $\mathbf{E}$ 也正合. $\square$

4 Gorenstein n -凝聚环

本节介绍 Gorenstein n -凝聚环的概念并刻画这类环上的 Gorenstein $\mathcal{AC}$ -内射模.

定义 4.1 (1) 设 m 是一个非负整数. 称一个环 R 是满足条件 $(m\text{-FP}_n\text{I-F})$ 的, 如果每个 FP_n -内射左、右 R -模的平坦维数都不超过 m .

(2) 称一个环 R 是 Gorenstein n -凝聚的, 如果 R 是一个双边 n -凝聚环, 并且存在一个非负整数 m , 使得 R 是满足条件 $(m\text{-FP}_n\text{I-F})$ 的.

注 4.2 (1) Gorenstein 0-凝聚环和 Gorenstein 1-凝聚环分别是 Gorenstein 环和 Ding-Chen 环.

(2) 由预备知识中关于环的 n -凝聚性的包含关系可得如下环类的包含关系:

$$\text{G-0-Coh} \subseteq \text{G-1-Coh} \subseteq \text{G-2-Coh} \subseteq \cdots \subseteq \text{G-}n\text{-Coh} \subseteq \cdots,$$

其中 $\text{G-}n\text{-Coh}$ 表示由所有 Gorenstein n -凝聚环构成的类.

(3) 每个弱整体维数有限的双边 n -凝聚环是 Gorenstein n -凝聚的.

注意到当 $n = 0, 1$ 时 Gorenstein n -凝聚环就是 Gorenstein 环和 Ding-Chen 环. 这些环的性质参见文献 [6, 7, 13, 14]. 本节主要讨论 $n \geq 2$ 的情形. 由文献 [13, 定理 9.1.10] 可知, 在任意 Gorenstein 环上, 一个模的平坦维数有限当且仅当其内射维数有限. 由文献 [14, 命题 3.16] 可知, 在任意 Ding-Chen 环上, 一个模的平坦维数有限当且仅当其 FP -内射维数有限. 下述引理给出这些事实的 Gorenstein n -凝聚环 ($n \geq 2$) 对应版本.

引理 4.3 设 R 是一个满足条件 $(m\text{-FP}_n\text{-I-F})$ 的 Gorenstein n -凝聚环, 其中 $n \geq 2$, m 是一个非负整数, 则对任意的 R -模 M , 以下陈述等价:

- (1) $\text{fd}_R(M) < \infty$;
- (2) $\text{fd}_R(M) \leq m$;
- (3) $\text{FP}_n\text{-fd}_R(M) < \infty$;
- (4) $\text{FP}_n\text{-fd}_R(M) \leq m$;
- (5) $\text{FP}_n\text{-id}_R(M) < \infty$;
- (6) $\text{FP}_n\text{-id}_R(M) \leq m$.

证明 显然有 $(2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3)$ 、 $(2) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3)$ 和 $(6) \Rightarrow (5)$.

$(5) \Rightarrow (2)$. 设 $\text{FP}_n\text{-id}_R(M) = k < \infty$, 则由引理 3.2 可知, 存在一个正合序列

$$0 \rightarrow M \rightarrow A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \cdots \rightarrow A_k \rightarrow 0,$$

其中每个 A_i 是 FP_n -内射的. 注意到每个 A_i 的平坦维数都不超过 m , 从而 $\text{fd}_R(M) \leq m$.

$(3) \Rightarrow (6)$. 设 $\text{FP}_n\text{-fd}_R(M) = k < \infty$, 则由引理 3.5 可知, $\text{FP}_n\text{-id}_R(M^+) = k < \infty$. 从而, 由 $(5) \Rightarrow (2)$ 的证明可知, $\text{FP}_n\text{-fd}_R(M^+) \leq m$. 因此, 再由引理 3.5 可知, $\text{FP}_n\text{-id}_R(M^{++}) = \text{FP}_n\text{-fd}_R(M^+) \leq m$. 考虑如下纯短正合序列:

$$0 \rightarrow M \rightarrow M^{++} \rightarrow M^{++}/M \rightarrow 0,$$

从而, 由引理 3.6 可知, $\text{FP}_n\text{-id}_R(M) \leq \text{FP}_n\text{-id}_R(M^{++}) \leq m$. □

在下文中, 若 R 是一个 Gorenstein n -凝聚环 ($n \geq 2$), 则用 $\mathcal{W}$ 表示由所有满足引理 4.3 中等价条件的 R -模构成的类. 以下推论可由引理 4.3 和命题 3.7 直接得到.

推论 4.4 设 R 是一个 Gorenstein n -凝聚环, 其中 $n \geq 2$, M 是一个 R -模, 则存在一个短正合序列 $0 \rightarrow K \rightarrow W \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 $W \in \mathcal{W}$, 而 $K \in \mathcal{W}^\perp$.

设 $\mathcal{A}$ 是一个具有足够内射对象的 Abel 范畴, $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{A}$ 的对象类. 根据文献 [15, 定义 3.4], 称一个完备的余挠对 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是内射的, 如果 $\mathcal{X}$ 是有厚度的, 并且 $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ 与 $\mathcal{A}$ 中所有内射对象构成的类一致, 其中称 $\mathcal{X}$ 是有厚度的, 如果 $\mathcal{X}$ 对直和因子封闭, 并且在一个 $\mathcal{A}$ 中的短正合序列中, 若任意两项属于 $\mathcal{X}$, 则第三项也属于 $\mathcal{X}$.

Gillespie 在文献 [9, 定理 1.1(2)] 中证明了, 在任意 Ding-Chen 环上, 一个模 M 是 Ding 内射的当且仅当存在一个正合序列 $\cdots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中每个 I_i 是内射的, 从而有模类的等式 $\mathcal{DI} = \mathcal{GI}$. 下述定理将上述事实从 Ding-Chen 环推广到任意的 Gorenstein n -凝聚环.

定理 4.5 设 R 是一个 Gorenstein n -凝聚环, 其中 $n \geq 2$, M 是一个 R -模, 则以下条件等价:

- (1) M 是 Gorenstein AC-内射的;
- (2) M 是 Ding 内射的;
- (3) M 是 Gorenstein 内射的;
- (4) 存在一个正合序列 $\cdots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中每个 I_i 是内射的;
- (5) $M \in \mathcal{W}^\perp$.

证明 显然有 $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$. $(1) \Leftrightarrow (5)$. 注意到在左 n -凝聚环上有等式 $\mathcal{AC} = \mathcal{FP}_n\mathcal{I}$. 因此, 显然有 $(1) \Rightarrow (5)$. 另一方面, 由于模类 $\mathcal{W}$ 对满同态的核封闭, 从而, 条件 (5) 蕴含着对任意具

有有限 absolutely clean 维数的 R -模 H 及任意的 $i \geq 1$, 都有 $\text{Ext}_R^i(M, H) = 0$. 因此, 由引理 3.8 可知 (5) $\Rightarrow$ (1).

(4) $\Rightarrow$ (1). 由 (4) 可建立一个内射 R -模的正合序列

$$\mathbf{I} = \cdots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \cdots$$

使得 $M = \text{Im}(I_0 \rightarrow I^0)$. 对任意的 R -模 N , 令 $S^0 N$ 表示集中于 0 层次的复形 $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow N \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$. 同时用 $\mathcal{X}$ 表示所有由 Gorenstein AC-内射 R -模形成的正合复形构成的类. 注意到由文献 [15, 事实 10.2] 知, 二元组 $({}^\perp \mathcal{GI}_{\text{ac}}, \mathcal{GI}_{\text{ac}})$ 是 $R\text{-Mod}$ 中的一个内射的余挠对. 从而, 由文献 [15, 命题 7.2] 可知, $({}^\perp \mathcal{X}, \mathcal{X})$ 是 $\text{Ch}(R)$ 中的一个内射的余挠对. 设 $W \in \mathcal{W}$, 则由引理 4.3 知 $\text{fd}_R(W) < \infty$. 下面对 $\text{fd}_R(W)$ 进行数学归纳来证明 $S^0 W$ 属于 ${}^\perp \mathcal{X}$. 若 $\text{fd}_R(W) = 0$, 则由文献 [9, 推论 3.4(2)] 知 $S^0 W$ 属于 ${}^\perp \mathcal{X}$. 设 $\text{fd}_R(W) > 0$. 考虑 R -模的短正合序列

$$0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow W \rightarrow 0,$$

其中 P 是投射的, 则 $\text{fd}_R(K) \leq \text{fd}_R(W) - 1$. 于是, 由归纳假设可知 $S^0 K$ 属于 ${}^\perp \mathcal{X}$. 另一方面, 由文献 [9, 推论 3.4(2)] 知 $S^0 P$ 属于 ${}^\perp \mathcal{X}$. 因此, 由 ${}^\perp \mathcal{X}$ 的有厚度性可知 $S^0 W$ 属于 ${}^\perp \mathcal{X}$. 从而,

$$0 = \text{Ext}_{\text{Ch}(R)}^1(S^0(W), \mathbf{I}) \cong \text{Ext}_R^1(W, M).$$

所以, 由 (1) $\Leftrightarrow$ (5) 知 M 是 Gorenstein AC-内射的. $\square$

5 问题 1.1 的否定回答

本节研究 $\text{K}(Inj)$ 与 $\text{K}(AC\text{-}Inj)$ (即所有内射 R -模的复形和所有 R -模的 AC-内射复形对应的同伦范畴) 之间的关系. 特别地, 我们给出问题 1.1 的否定答案.

首先回顾一些 $\text{Ch}(R)$ 中的概念和记号. 设 X 和 Y 是 R -模的复形. 记 $\text{Hom}(X, Y)$ 为 X 和 Y 的 homomorphism 复形:

$$\cdots \longrightarrow \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_R(X^k, Y^{k+m}) \xrightarrow{\delta^m} \prod_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(X^k, Y^{k+m+1}) \longrightarrow \cdots,$$

其中 δ^m 定义为

$$\delta^m((f^k)_{k \in \mathbb{Z}}) = (\delta_Y^{k+m} f^k - (-1)^m f^{k+1} \delta_X^k)_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \forall (f^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}(X, Y)^m.$$

称一个复形同态 $f: X \rightarrow Y$ 是零伦的, 如果 $f \in B^0(\text{Hom}(M, N))$.

称一个复形 C 是 AC-内射的, 如果每个 C^m 是内射的, 并且每个复形同态 $A \rightarrow C$ 是零伦的, 其中 A 是一个正合复形且每个循环模都是 absolutely clean 的.

设 $\mathcal{X}$ 是一个 R -模的类. 根据文献 [16], 记 $\text{dw}\tilde{\mathcal{X}}$ 为所有满足每个 $X^m \in \mathcal{X}$ 的复形 X 构成的类.

设 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 是 $R\text{-Mod}$ 中的一个余挠对, C 是一个复形. 以下概念由 Gillespie 在文献 [17] 中引入.

(1) 称 C 是一个 $\mathcal{X}$ 复形, 如果 C 是正合的, 并且每个 $Z^i C$ 都属于 $\mathcal{X}$.

(2) 称 C 是一个 $\mathcal{Y}$ 复形, 如果 C 是正合的, 并且每个 $Z^i C$ 都属于 $\mathcal{Y}$.

(3) 称 C 是一个 $dg\text{-}\mathcal{X}$ 复形, 如果每个 C^i 都属于 $\mathcal{X}$, 并且对任意的 $\mathcal{Y}$ 复形 Y , homomorphism 复形 $\text{Hom}(C, Y)$ 是正合的.

(4) 称 C 是一个 $dg\mathcal{Y}$ 复形, 如果每个 C^i 都属于 $\mathcal{Y}$, 并且对任意的 $\mathcal{X}$ 复形 X , homomorphism 复形 $\text{Hom}(X, C)$ 是正合的.

分别用 $\tilde{\mathcal{X}}$ 、 $\tilde{\mathcal{Y}}$ 、 $dg\tilde{\mathcal{X}}$ 和 $dg\tilde{\mathcal{Y}}$ 表示所有 $\mathcal{X}$ 复形、 $\mathcal{Y}$ 复形、 $dg\mathcal{X}$ 复形和 $dg\mathcal{Y}$ 复形构成的类.

下述引理讨论 $dw\widetilde{\mathcal{GI}}_{ac}$ 与 $dg\widetilde{\mathcal{GI}}_{ac}$ 的关系, 该引理是证明定理 5.3 的关键.

引理 5.1 设 R 是一个 Gorenstein n -凝聚环, 其中 $n \geq 2$, C 是一个复形, 则以下条件等价:

- (1) $C \in dw\widetilde{\mathcal{GI}}_{ac}$;
- (2) $C = Z^0 \mathbf{I}$, 其中 $\mathbf{I}$ 是一个由 $\tilde{\mathcal{I}}$ 中复形构成的 $\text{Hom}_{\text{Ch}(R)}(\tilde{\mathcal{AC}}, -)$ -正合的正合序列;
- (3) 每个 $C^m \in \mathcal{GI}_{ac}$, 并且对任意的 $A \in \tilde{\mathcal{AC}}$, $\text{Hom}(A, C)$ 是正合的;
- (4) $C \in dg\widetilde{\mathcal{GI}}_{ac}$.

证明 显然有 (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). 由文献 [18, 定理 3.2] 可知 (3) $\Leftrightarrow$ (2).

(1) $\Rightarrow$ (4). 由定理 4.5 可知 $\mathcal{GI}_{ac} = \mathcal{W}^\perp$. 下证 $\mathcal{W} = {}^\perp \mathcal{GI}_{ac}$. 注意到显然有 $\mathcal{W} \subseteq {}^\perp \mathcal{GI}_{ac}$. 反之, 设 $M \in {}^\perp \mathcal{GI}_{ac}$, 则由推论 4.4 可知, 存在如下 R -模的短正合序列:

$$0 \rightarrow W' \rightarrow W \rightarrow M \rightarrow 0,$$

其中 $W \in \mathcal{W}$ 而 $W' \in \mathcal{W}^\perp$, 从而 $\text{Ext}_R^1(M, W') = 0$. 于是 $M \in \mathcal{W}$. 这说明 ${}^\perp \mathcal{GI}_{ac} \subseteq \mathcal{W}$. 因此, 二元组 $(\mathcal{W}, \mathcal{GI}_{ac})$ 形成 $R\text{-Mod}$ 中的一个余挠对. 由文献 [15, 事实 10.2] 知该余挠对是内射的. 从而, 由文献 [15, 命题 7.2] 可知, $({}^\perp dw\widetilde{\mathcal{GI}}_{ac}, dw\widetilde{\mathcal{GI}}_{ac})$ 是 $\text{Ch}(R)$ 中的一个内射的余挠对. 设复形 $X \in \tilde{\mathcal{W}}$, 则由引理 4.3 可知, 存在一个非负整数 m , 使得每个 $X^i \in R\text{-Mod}$ 都满足 $\text{fd}_R(X^i) \leq m$. 于是, X 在 $\text{Ch}(R)$ 中的平坦维数 (即所有 $X^i \in R\text{-Mod}$ 的平坦维数的上确界) 亦有限. 因而, 由文献 [9, 推论 3.3] 可知, X 属于 ${}^\perp dw\widetilde{\mathcal{GI}}_{ac}$. 所以, $\text{Hom}(X, C)$ 是正合的. 这说明 $C \in dg\widetilde{\mathcal{GI}}_{ac}$. $\square$

注 5.2 Gorenstein 内射复形、Ding 内射复形和 Gorenstein AC-内射复形概念分别由 García^[19]、Yang 等^[20] 及 Bravo 和 Gillespie^[18] 引入. 由文献 [21, 命题 2.8] 可知, $dw\widetilde{\mathcal{GI}}$ 与所有 Gorenstein 内射复形构成的类一致. 因此, 综合文献 [18, 定理 3.2]、[20, 定理 3.20]、定理 4.5 和引理 5.1 可得, 在任意 Gorenstein n -凝聚环上, 一个复形 C 是 Ding 内射的 (或 Gorenstein AC-内射的) 当且仅当每个 C^m 是 Ding 内射的 (或 Gorenstein AC-内射的), 并且由所有 Gorenstein 内射复形、Ding 内射复形和 Gorenstein AC-内射复形构成的类一致. 这些事实将文献 [9, 定理 1.2(2)] 从 Ding-Chen 环推广到任意的 Gorenstein n -凝聚环.

下面定理是本文的主要结论.

定理 5.3 设 R 是一个 Gorenstein n -凝聚环, 其中 $n \geq 2$, 则存在等式 $K(\text{Inj}) = K(\text{AC-Inj})$.

证明 只需证明一个复形 C 属于 $dw\tilde{\mathcal{I}}$ 当且仅当 C 是 AC-内射的. 必要性显然. 下证充分性. 设 $C \in dw\tilde{\mathcal{I}}$, 则由引理 5.1 可知, 对任意的 $A \in \tilde{\mathcal{AC}}$, $\text{Hom}(A, C)$ 是正合的. 从而, 对任意的 $A \in \tilde{\mathcal{AC}}$, 任意复形同态 $A \rightarrow C$ 是零伦的. 所以, C 是 AC-内射的. $\square$

设 m 和 d 是非负整数. Costa^[22] 称一个交换环 R 是一个 (m, d) -环, 如果所有有限 m -表示 R -模的投射维数都不超过 d . 由文献 [22, 定理 2.2] 知每个 (m, d) -环是交换的 $\max\{m, d\}$ -凝聚环. 这一事实有助于得到如下例子, 该例子给出了问题 1.1 的否定回答.

例 5.4 设 E 是 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 通过可数次拷贝直和后按照分量分别作加法和乘法得到的一个环. 令 R 是按如下方式定义的一个环:

- (1) R 中元素形式为二元组 (a, e) , 其中 $a \in \mathbb{Z}$, $e \in E$;
- (2) R 中加法规则为按分量相加;

(3) R 中加法规则为 $(a, e)(a', e') = (aa', ae' + a'e + ee')$, 其中 (a, e) 和 (a', e') 是 R 中任意两个元素,

则由文献 [23, 例 2.3] 知, R 是一个弱整体维数为 1 的交换环, 但不是 (左) 凝聚的. 另一方面, 由文献 [23, 注 3.11] (或文献 [22, 例 6.5]) 知 R 是一个 $(2, 1)$ - 环. 从而, 由文献 [22, 定理 2.2] 知 R 是一个交换的 2- 凝聚环. 所以, 由注 4.2(3) 知 R 是一个 Gorenstein 2- 凝聚环. 于是, 由定理 5.3 知 R 满足等式 $K(Inj) = K(AC-Inj)$. 然而, R 不是左凝聚的.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵意见, 使得该论文在行文和内容上都有很大的提升.

参考文献

- 1 Bravo D, Gillespie J, Hovey M. The stable module category of a general ring. ArXiv:1405.5768, 2014
- 2 Bravo D, Pérez M A. Finiteness conditions and cotorsion pairs. J Pure Appl Algebra, 2017, 6: 1249–1267
- 3 Šťovíček J. On purity and applications to coderived and singularity categories. ArXiv:1412.1615, 2014
- 4 Krause H. The stable derived category of a Noetherian scheme. Compos Math, 2005, 141: 1128–1162
- 5 Gillespie J. On the homotopy category of AC-injective complexes. Front Math China, 2017, 12: 97–115
- 6 Iwanaga Y. On rings with finite self-injective dimension. Comm Algebra, 1979, 7: 393–414
- 7 Ding N Q, Chen J L. Coherent rings with finite self-FP-injective dimension. Comm Algebra, 1996, 24: 2963–2980
- 8 Gillespie J. Model structures on modules over Ding-Chen rings. Homology Homotopy Appl, 2010, 12: 61–73
- 9 Gillespie J. On Ding injective, Ding projective and Ding flat modules and complexes. Rocky Mountain J Math, 2017, 47: 2641–2673
- 10 Enochs E E, Jenda O M G. Gorenstein injective and projective modules. Math Z, 1995, 220: 611–633
- 11 Mao L X, Ding N Q. Gorenstein FP-injective and Gorenstein flat modules. J Algebra Appl, 2008, 4: 497–506
- 12 Holm H, Jørgensen P. Cover, precover and purity. Illinois J Math, 2008, 52: 691–703
- 13 Enochs E E, Jenda O M G. Relative Homological Algebra. Berlin: Walter de Gruyter, 2000
- 14 Ding N Q, Chen J L. The flat dimension of injective modules. Manuscripta Math, 1996, 78: 165–177
- 15 Gillespie J. Gorenstein complexes and recollements from cotorsion pairs. Adv Math, 2016, 291: 859–911
- 16 Gillespie J. Cotorsion pairs and degreewise homological model structures. Homology Homotopy Appl, 2008, 10: 283–304
- 17 Gillespie J. The flat model structure on $\text{Ch}(R)$. Trans Amer Math Soc, 2004, 356: 3369–3390
- 18 Bravo D, Gillespie J. Absolutely clean, level, and Gorenstein AC-injective complexes. Comm Algebra, 2016, 44: 2213–2233
- 19 García J R. Covers and Envelopes in the Category of Complexes of Modules. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 1999
- 20 Yang G, Liu Z K, Liang L. Model structures on categories of complexes over Ding-Chen rings. Comm Algebra, 2013, 41: 50–69
- 21 Yang X Y, Liu Z K. Gorenstein projective, injective, and flat complexes. Comm Algebra, 2011, 39: 1705–1721
- 22 Costa D L. Parameterizing families of non-Noetherian rings. Comm Algebra, 1994, 22: 3997–4011
- 23 Kabbaj S E, Mahdou N. Trivial extensions defined by coherent-like conditions. Comm Algebra, 2004, 32: 3937–3953

A negative answer to a question of Gillespie

Junpeng Wang, Zhongkui Liu & Xiaoyan Yang

Abstract In this paper, we introduce the notion of Gorenstein n -coherent rings and obtain that, even if the homotopy categories of all AC-injective complexes of left R -modules and all complexes of injective left R -modules coincide, R is not necessarily left coherent. This gives a negative answer to a question posed by Gillespie (2017).

Keywords Gorenstein n -coherent ring, Gorenstein AC-injective module, AC-injective complex

MSC(2010) 16E65, 18G25

doi: 10.1360/SCM-2017-0233