



考虑失效相关的圆柱蜗杆传动四阶矩可靠性分析

王智明, 张亚飞*, 宋亚龙

(兰州理工大学 机电工程学院, 甘肃 兰州 730050)

摘 要:为了评估圆柱蜗杆传动机构的可靠性, 利用Taylor级数将蜗杆传动机构功能函数进行展开并得到其前四阶中心矩, 以此作为约束条件, 结合最大熵原理分别得到蜗轮齿面接触强度和齿根弯曲强度结构功能函数的概率密度函数, 在此基础上, 分析了蜗轮齿面接触和齿根弯曲两种失效模式的可靠性。另一方面, 考虑蜗轮齿面接触和齿根弯曲两种失效模式之间的相关性, 建立了其失效相关条件下的可靠性模型, 给出了两种失效模式之间的相关系数和蜗轮总体可靠度。以某减速器蜗轮为例对所提方法通过蒙特卡洛仿真进行了验证。结果表明, 基于四阶矩和最大熵原理的可靠性方法具有较高的精度, 蜗轮两种失效模式之间存在一定的相关性。因此, 考虑失效相关的蜗轮可靠性评估方法对于蜗杆传动的综合可靠性评估具有重要的意义。

关键词:圆柱蜗杆传动; 可靠性; 失效相关; 四阶矩方法; 最大熵原理

中图分类号:TB114

文献标志码:A

文章编号:2096-3246(2020)03-0221-06

Reliability Analysis of Cylindrical Worm Drive Using Fourth-moment Method Considering Failure Correlation

WANG Zhiming, ZHANG Yafei*, SONG Yalong

(School of Mechanical and Electronic Eng., Lanzhou Univ. of Technol., Lanzhou 730050, China)

Abstract: In order to evaluate the reliability of the cylindrical worm drive mechanism, the Taylor series expansion is used to expand the state function of the worm gear mechanism and the first four-order center moments of the structural state function are obtained. Regarding this as a constraint condition, the probability density functions of the worm gear tooth surface contact strength and tooth root bending strength structural state function are obtained by combining the maximum entropy principle. On the basis of the probability density functions, the reliability of the two failure modes of the worm gear is analyzed. On the other hand, considering the correlation between the two failure modes of worm gear tooth surface contact and tooth root bending, the reliability model under failure-related conditions is established, and the correlation coefficient between the two failure modes and the overall reliability of worm gear are given. Taking the worm gear of a reducer as an example, the proposed method is verified by Monte Carlo simulation. The results show that the reliability method based on the fourth moment and the maximum entropy principle has higher precision, and there is a certain correlation between the two failure modes of the worm wheel. Therefore, the failure-related worm wheel reliability assessment method is of great significance for the comprehensive reliability assessment of worm drive.

Key words: cylindrical worm drive; reliability; failure correlation; fourth-order moment method; maximum entropy theory

蜗杆传动具有传动比大、传动平稳、自锁性好等优点, 广泛应用于冶金、矿山、起重等机械设备的减速机构中。在服役过程中, 蜗杆传动机构由于受环

境、载荷以及所用材料等因素的影响往往产生齿面接触疲劳破坏、齿根弯曲断裂、齿面胶合和齿面磨损等失效形式。然而, 由于对磨损和胶合尚无成熟的定

收稿日期:2019-01-02

基金项目:国家自然科学基金项目(51565032)

作者简介:王智明(1969—), 男, 副教授, 博士。研究方向:数控机床的可靠性评估及其预防维修。E-mail: wangzhiming301@sohu.com

* 通信联系人 E-mail: zhang_yf1992@sohu.com

网络出版时间:2020-04-17 08:55:02

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/51.1773.TB.20200416.1138.002.html>

<http://jsuese.ijournals.cn>

<http://jsuese.scu.edu.cn>

量计算方法,因此,在蜗杆传动设计过程中通常按齿面接触强度和齿根弯曲强度计算。由于材料和结构等原因,蜗杆的强度总是高于蜗轮的强度。因此,在蜗杆传动机构可靠性设计中,对蜗轮进行可靠性设计对于保证机械设备的正常运行具有重要的意义。

在传统蜗轮的设计过程中通常将许用应力、材料影响系数、载荷系数、蜗轮转矩等设计参数视为定值。然而,由于加工误差、材料的分散性以及偶然因素等的影响,蜗轮的尺寸参数、材料参数和载荷等设计参数均存在一定的随机性,该随机性使得传统的定值设计方法难以满足蜗轮的设计要求。因此,考虑设计参数随机性的可靠性设计方法更符合工程实际^[1-3]。在可靠性方法中,应力强度干涉模型广泛用于机械结构和机械设备的可靠性分析,其中基于应力强度干涉模型的一次二阶矩方法是最常用的可靠性方法之一^[4-5]。然而,由于其仅适用于结构功能函数非线性程度不高的情况而限制了其应用范围。当结构功能函数的非线性程度较高时,该方法会产生较大误差甚至得出错误的结果。针对功能函数非线性程度高的问题,文献^[6-8]提出了可靠性高阶矩方法,这些方法明显减小了设计误差。其中,四阶矩方法因考虑了结构功能函数的均值、方差、偏度系数和峰度系数等高阶矩信息而具有较高的精度,广泛应用于汽车零件的可靠性设计^[9-10]。信息熵也叫Shannon熵,是事件不确定性的度量。在给定的约束条件下,所有可能的概率分布存在一个使信息熵取极大值的分布,这就是最大熵原理。由于该概率分布是最小偏见的最佳概率分布,其对于未知的概率分布具有很好的估计效果,因此,其在机械可靠性的分析和可靠度的计算中具有重要的作用^[11-13]。在蜗轮传动可靠性研究方面,周娜等^[14]将可靠性设计理论与灵敏度分析方法相结合,为蜗杆传动的可靠性设计提供了理论依据。Zhao等^[15]提出了一种新的数学方法评估圆柱蜗轮传动的可靠性和灵敏度。因此,针对蜗轮结构功能函数非线性程度较高的特点,采用基于Taylor级数展开的四阶矩方法得到功能函数的前四阶中心矩,以此作为约束条件,结合最大熵原理得到蜗轮结构功能函数的概率密度函数,进而得到蜗轮的可靠度。该方法由于采用了四阶矩方法可显著提高蜗轮的可靠度分析精度。然而,由于蜗轮具有齿面接触疲劳破坏和齿根弯曲断裂两种失效模式,且两种失效模式的功能函数具有某些相同的设计变量,所以两种失效模式间具有一定的相关性,不能简单的把两种失效模式视为相互独立的失效形式。因此,在考虑两种失效模式相关性的基础上对蜗轮进行可靠性分析十分必要。

作者以圆柱蜗杆传动机构为研究对象,考虑其设计参数的随机性,建立了蜗轮齿面接触疲劳和齿根弯曲断裂两种失效模式的可靠性模型。针对其结构功能函数非线性程度较高的特点,结合基于Taylor级数展开的四阶矩方法和最大熵原理分析了蜗轮的可靠性并用蒙特卡洛仿真进行了验证。在此基础上,考虑两种失效模式之间的相关性,建立了蜗轮考虑失效相关的可靠性模型,给出了相关系数和可靠度的计算方法。

1 蜗杆传动失效相关的可靠性分析

1.1 蜗杆传动可靠性模型的建立

在圆柱蜗杆传动机构的设计中,由于材料和结构等原因,蜗杆的强度总是高于蜗轮的强度。因此,为了保证圆柱蜗杆传动的可靠性只需保证蜗轮的可靠性。

蜗轮的齿面接触应力可按式(1)计算:

$$\sigma_H = Z_E Z_p \sqrt{\frac{KT_2}{l^3}} \quad (1)$$

式中, Z_E 为材料弹性影响系数, Z_p 为接触系数, K 为载荷系数, T_2 为蜗轮转矩, l 为蜗轮蜗杆中心距。

设蜗轮的许用接触应力为 $[\sigma_H]$,为了便于计算,将 $[\sigma_H]$ 、 Z_E 、 Z_p 、 K 、 T_2 和 l 依次记为 X_1 、 X_2 、 X_3 、 X_4 、 X_5 和 X_6 。根据应力强度干涉理论,当蜗轮的许用接触应力大于齿面接触应力时蜗轮处于安全状态,可建立蜗轮的齿面接触强度结构功能函数为:

$$Z_1 = g_1(X_1, X_2, \dots, X_6) = [\sigma_H] - \sigma_H = [\sigma_H] - Z_E Z_p \sqrt{\frac{KT_2}{l^3}} \quad (2)$$

蜗轮的齿根弯曲强度可按式(3)计算:

$$\sigma_F = \frac{1.53KT_2}{d_1 d_2 m} Y_{Fa2} Y_\beta \quad (3)$$

式中, σ_F 为齿根弯曲应力, d_1 为蜗杆分度圆直径, d_2 为蜗轮分度圆直径, Y_{Fa2} 为蜗轮齿形系数, Y_β 为螺旋角影响系数, m 为蜗杆模数。

设蜗轮的许用齿根弯曲应力为 $[\sigma_F]$,将 $[\sigma_F]$ 、 K 、 T_2 、 d_1 、 d_2 、 Y_{Fa2} 和 Y_β 依次记为 X_1 、 X_2 、 X_3 、 X_4 、 X_5 、 X_6 和 X_7 。同理,蜗轮的齿根弯曲强度结构功能函数为:

$$Z_2 = g_2(X_1, X_2, \dots, X_7) = [\sigma_F] - \sigma_F = [\sigma_F] - \frac{1.53KT_2}{d_1 d_2 m} Y_{Fa2} Y_\beta \quad (4)$$

1.2 基于四阶矩和最大熵原理的可靠性方法

在可靠性矩方法中,通常把结构功能函数进行Taylor级数展开,通过求解结构功能函数的各阶中心矩对结构进行可靠性评估。改进一次二矩方法是最

常用的可靠性方法,但是其仅适用于非线性程度不高的结构功能函数。而四阶矩方法可以有效地解决结构功能函数非线性程度较高的问题,通过将结构功能函数展开为Taylor级数并保留2次项,利用各随机变量的前四阶矩估计结构功能函数的前四阶矩,在此基础上可对结构进行可靠性分析^[16]。

设含有 n 个随机变量的结构功能函数为:

$$Z = g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (5)$$

式中: $\mathbf{X}$ 为 n 维随机向量; $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为服从正态分布的第 i 个随机变量。

设 X_i 的前四阶中心矩分别为 μ_{X_i1} 、 μ_{X_i2} 、 μ_{X_i3} 、 μ_{X_i4} ,将 Z 在均值 μ_Z 处做Taylor级数展开并保留2次项可得:

$$Z = g(\mu) + (\mathbf{X} - \mu)^T \frac{\partial g}{\partial \mathbf{X}} + \frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mu)^T \frac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{X}^2} (\mathbf{X} - \mu) \quad (6)$$

由式(6)可近似得到结构功能函数 Z 的前四阶中心矩 μ_Z 、 μ_{Z2} 、 μ_{Z3} 、 μ_{Z4} ,其分别为:

$$\mu_Z = E(Z) = g(\mu_X) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 g(\mu_X)}{\partial X_i^2} \mu_{X_i2} \right) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mu_{Z2} = \sigma_Z^2 = E[(Z - \mu_Z)^2] &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial^2 g(\mu_X)}{\partial X_i^2} \right]^2 \mu_{X_i2} + \\ &\sum_{i=1}^n \frac{\partial g(\mu_X)}{\partial X_i} \frac{\partial^2 g(\mu_X)}{\partial X_i^2} \mu_{X_i3} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial^2 g(\mu_X)}{\partial X_i \partial X_j} \right]^2 \times \\ &\mu_{X_i2} \mu_{X_j2} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial^2 g(\mu_X)}{\partial X_i^2} \right]^2 (\mu_{X_i4} - 3\mu_{X_i2}^2) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mu_{Z3} = E[(Z - \mu_Z)^3] &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial^2 g(\mu_X)}{\partial X_i^2} \right]^3 \mu_{X_i3} + \\ &\frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial g(\mu_X)}{\partial X_i} \right]^2 \frac{\partial^2 g(\mu_X)}{\partial X_i^2} (\mu_{X_i4} - 3\mu_{X_i2}^2) + \\ &3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g(\mu_X)}{\partial X_i} \frac{\partial g(\mu_X)}{\partial X_j} \frac{\partial^2 g(\mu_X)}{\partial X_i \partial X_j} \mu_{X_i2} \mu_{X_j2} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mu_{Z4} = E[(Z - \mu_Z)^4] &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial g(\mu_X)}{\partial X_i} \right]^4 (\mu_{X_i4} - 3\mu_{X_i2}^2) + \\ &3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial g(\mu_X)}{\partial X_i} \right]^2 \left[\frac{\partial g(\mu_X)}{\partial X_j} \right]^2 \mu_{X_i2} \mu_{X_j2} \end{aligned} \quad (10)$$

根据Jaynes最大熵原理,最大熵的概率密度函数可表示为:

$$f_X(x) = \exp\left(-\sum_{i=0}^m a_i x^i\right) \quad (11)$$

式中, $a_0, a_1, \dots, a_m$ 为待定参数。

根据概率论相关理论,对于给定的随机变量 $\mathbf{X}$,其前 i 阶中心矩可以表示为:

$$\mu_{X_i} = E[(\mathbf{X} - \mu_X)^i] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^i f_X(x) dx \quad (12)$$

设 μ_{X0} 为 $\mathbf{X}$ 的第0阶矩,则由式(12)可得到 $\mathbf{X}$ 的前四阶矩的表达式为:

$$\mu_{X0} = 1, \mu_{X1} = 0, \mu_{X2} = \sigma_X^2, \mu_{X3} = C_S \sigma_X^3, \mu_{X4} = C_K \sigma_X^4 \quad (13)$$

式中, σ_X 为标准差, C_S 为偏态系数, C_K 为峰度系数。

为了便于计算,把随机变量 $\mathbf{X}$ 转换为标准随机变量,令 $\mathbf{Y} = (\mathbf{X} - \mu_X)/\sigma_X$,由式(12)知, $\mathbf{Y}$ 的前四阶矩分别为:

$$\mu_{Y0} = 1, \mu_{Y1} = 0, \mu_{Y2} = 1, \mu_{Y3} = C_S, \mu_{Y4} = C_K \quad (14)$$

根据式(12)和式(14),将随机变量 $\mathbf{Y}$ 的前四阶矩作为约束条件可得到积分方程组:

$$\begin{aligned} \mu_{Y^i} = E(Y^i) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^i f_Y(y) dy = \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} y^i \exp\left(-\sum_{i=0}^m a_i y^i\right) dy, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (15)$$

式中, $f_Y(y)$ 为随机变量 Y 的概率密度函数。

根据式(15)中得到的参数 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 ,则结构的失效概率为:

$$\begin{aligned} P_f = P(\mathbf{Y} \leq 0) &= \\ &\int_{-\infty}^{-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}} \exp\left(-\sum_{i=0}^m a_i y^i\right) dy, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (16)$$

结构的可靠度为:

$$R = 1 - P_f \quad (17)$$

1.3 考虑蜗轮两种失效模式失效相关的可靠性分析

蜗轮具有齿面接触疲劳和齿根弯曲断裂两种失效模式,对于这类两种失效模式或者多种失效模式的机械零件来说,其通常将各种失效模式视为是相互独立的,其可靠度可表示为:

$$R = R_1 R_2 \cdots R_n \quad (18)$$

由于各失效模式之间的内在联系,具有两种或多种失效模式的机械零件往往具有一定的相关性^[17-18]。考虑到蜗轮两种失效模式的结构功能函数含有相同的设计参数 K 和 T_2 ,因此,其具有一定的相关性。若仅认为蜗轮的两种失效模式是相互独立的,显然不符合工程实际情况。因此,考虑失效相关条件下的蜗轮可靠性评估十分必要。

根据式(5)可得其两种失效模式之间的相关系数为:

$$\begin{aligned} \rho_{Z_1 Z_2} &= \frac{\text{cov}(Z_1, Z_2)}{\sigma_{Z_1} \sigma_{Z_2}} = \\ &\frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_1(\mu_{X_i})}{\partial X_i} \frac{\partial g_2(\mu_{X_i})}{\partial X_i} \sigma_{X_i}^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g_1(\mu_{X_i})}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \right)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g_2(\mu_{X_i})}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \right)^2}} \end{aligned} \quad (19)$$

式中, $\text{cov}(Z_1, Z_2)$ 为随机变量 Z_1 和 Z_2 的协方差。

根据概率论相关理论,具有相关性的两正态随机变量 Z_1 和 Z_2 其概率密度为:

$$f(Z_1,Z_2)=\frac{1}{2\pi(\det(C))^{1/2}}\times$$
$$\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{Z}-\boldsymbol{\mu})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{Z}-\boldsymbol{\mu})\right] \quad (20)$$

各参数分别为:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}=[z_1\ z_2]^T, \\ \boldsymbol{\mu}=[\mu_1\ \mu_2]^T, \\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (21)$$

式中, z_1 、 z_2 为函数变量, μ_1 、 μ_2 为分别为随机变量 Z_1 和 Z_2 的均值, σ_1 、 σ_2 为分别为标准差, ρ 为随机变量 Z_1 和 Z_2 的相关系数。

因此,蜗轮的总体可靠度为:

$$R=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}f(z_1,z_2)dz_1dz_2 \quad (22)$$

2 工程实例分析

某减速器闭式圆柱蜗杆传动机构,输入功率 $P=7.5\text{ kW}$,传动比 $i=30$,蜗杆的转速 $n=1\ 450\text{ r/min}$,传动效率为 $\eta=0.8$,要求寿命为 $12\ 000\text{ h}$ 。考虑传动功率不大,蜗杆采用45钢,为了得到较好的耐磨性,齿面需淬火使其硬度达到 $45\sim 55\text{ HRC}$ 。蜗轮采用铸锡磷青铜ZCuSn10P1,轮芯采用HT100制造。由于蜗轮蜗杆中心距 l 、蜗杆分度圆直径 d_1 、蜗轮分度圆直径 d_2 等尺寸仅在公差范围内变动,变动范围较小,故取其变差系数为 0.015 。由于蜗杆模数都是标准化的,故将其视为常数且有 $m=8$ 。蜗轮其它设计参数的均值、标准差和变差系数如表1和2所示。

表 1 蜗轮齿面接触强度各随机变量的均值、标准差和变差系数

参数	$[\sigma_F]$	Z_E	Z_p	K	T_2	l
均值	218	160	2.740	1.210	1 185 517	200
标准差	10.900	5.280	0.090	0.040	59 276	3.000
变差系数	0.050	0.033	0.033	0.033	0.050	0.015

表 2 蜗轮齿根弯曲强度各随机变量的均值、标准差和变差系数

参数	$[\sigma_F]$	K	T_2	d_1	d_2	Y_{Fa2}	Y_β
均值	36	1.21	1 185 517	80	328	2.87	0.919
标准差	1.900	0.040	59 276	1.200	4.920	0.273	0.030
变差系数	0.050	0.033	0.050	0.015	0.015	0.033	0.033

设表1和2中各随机变量均服从正态分布,故可得各随机变量的偏度系数为0和峰度系数为3。根据式(2)和(4),蜗轮齿面接触强度功能函数的1阶偏导数和2阶偏导数分别为:

$$\frac{\partial g_1(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial \mathbf{X}}=\left[\frac{\partial g_1(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial [\sigma_H]},\frac{\partial g_1(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial Z_E},\frac{\partial g_1(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial Z_p},\frac{\partial g_1(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial K},\right.$$
$$\left.\frac{\partial g_1(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial T_2},\frac{\partial g_1(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial l}\right]=[1.000\ 0,-1.160\ 3,-67.751\ 9,$$
$$-76.710\ 8,-0.000\ 1,1.392\ 3];$$

$$\frac{\partial^2 g_1(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial \mathbf{X}_i^2}=$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.423\ 4 & -0.479\ 4 & 0 & 0.008\ 7 \\ 0 & -0.423\ 4 & 0 & -27.996\ 7 & 0 & 0.508\ 1 \\ 0 & -0.479\ 4 & -27.996\ 7 & 31.698\ 7 & 0 & 0.575\ 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.008\ 7 & 0.508\ 1 & 0.575\ 3 & 0 & -0.017\ 4 \end{bmatrix}。$$

同理,蜗轮齿面弯曲强度功能函数的1阶偏导数和2阶偏导数分别为:

$$\frac{\partial g_2(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial \mathbf{X}}=\left[\frac{\partial g_2(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial [\sigma_F]},\frac{\partial g_2(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial K},\frac{\partial g_2(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial T_2},\frac{\partial g_2(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial d_1},\right.$$
$$\left.\frac{\partial g_2(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial d_2},\frac{\partial g_2(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial Y_{Fa2}},\frac{\partial g_2(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial Y_\beta}\right]=[1.000\ 0,-22.789\ 9,$$
$$0,0.344\ 7,0.084\ 1,-9.608\ 3,-30.006\ 3];$$

$$\frac{\partial^2 g_2(\boldsymbol{\mu}_X)}{\partial \mathbf{X}_i^2}=$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2849 & 0.0695 & -7.9407 & -24.7986 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2849 & 0 & -0.0086 & -0.0011 & 0.1201 & 0.3751 \\ 0 & 0.0695 & 0 & -0.0011 & -0.0005 & 0.0293 & 0.0915 \\ 0 & -7.9407 & 0 & 0.1201 & 0.0293 & 0 & -10.4552 \\ 0 & -24.7986 & 0 & 0.3751 & 0.0915 & -10.4552 & 0 \end{bmatrix}。$$

把蜗轮齿面接触强度和齿根弯曲强度功能函数的1阶偏导数和2阶偏导数分别代入式(7)、(8)、(9)和(10),则蜗轮齿面接触强度功能函数的前四阶中心矩为: $\mu_{Z_11}=32.364\ 8$, $\mu_{Z_12}=242.109\ 2$, $\mu_{Z_13}=-185.251\ 5$, $\mu_{Z_14}=1.755\ 8\times 10^5$ 。

同理,蜗轮齿根弯曲强度功能函数的前四阶中心矩为: $\mu_{Z_21}=32.364\ 8$, $\mu_{Z_22}=242.109\ 2$, $\mu_{Z_23}=-6.923\ 8$, $\mu_{Z_24}=619.928\ 7$ 。

由式(13)可得到蜗轮齿面接触强度功能函数的峰度系数和偏度系数分别为: $C_{SZ_1}=-0.049\ 2$, $C_{KZ_1}=2.995\ 4$ 。

蜗轮齿面弯曲强度功能函数的峰度系数和偏度

系数分别为: $C_{SZ_2} = -0.126\ 5, C_{KZ_2} = 2.982\ 6$ 。

根据式 (14) 和 (15), 蜗轮两种功能函数概率密度函数的参数值 $a_i (i=0, 1, 2, 3, 4)$ 如表 3 和 4 所示。

表 3 齿面接触强度功能函数概率密度函数的参数

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
0.000 5	0.008 3	0.497 6	-0.024 9	0.920 0

表 4 齿面弯曲强度功能函数概率密度函数的参数

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
0.002 8	0.012 8	0.487 8	-0.066 9	0.924 4

根据式 (16) 和 (17) 可得到蜗轮齿面接触强度和齿根弯曲强度的可靠度分别为 $R_H = 0.98$ 和 $R_F = 0.986\ 7$ 。为了验证本文方法的精度, 利用蒙特卡洛方法分别仿真 1 000 000 次视为精确值, 其值分别为 0.979 8 和 0.995 4。对比结果可知, 蜗轮齿面接触强度可靠度的误差仅为 0.02%, 非常接近精确值, 而蜗轮齿根弯曲强度可靠度的误差为 0.87%。常用的改进一次二阶矩方法 (设计验算点法) 计算的齿面接触强度和齿根弯曲强度可靠度分别为 0.979 5 和 0.983 0, 其相对误差分别为 0.03% 和 1.25%, 为了得到精确的结果其需要迭代的次数分别为 4 和 6。因此, 所提方法具有较高的求解精度且不需要迭代计算。

若将蜗轮齿面接触和齿根弯曲失效两种失效模式视为相互独立的失效形式, 根据式 (18) 可知, 蜗轮总体的可靠度为: $R = R_1 \times R_2 = 0.975\ 3$ 。

考虑蜗轮两种失效模式之间的相关性, 由式 (2) (4) 和 (19) 可得其相关系数为 $\rho_{z_1 z_2} = 0.155\ 9$ 。

显然, 由于蜗轮齿面接触和齿根弯曲两种功能函数存在相同的随机变量, 导致两种失效模式存在一定的相关性, 这会对蜗轮的总体可靠性产生一定的影响。

根据式 (20)、(21) 可得到考虑蜗轮失效相关的概率密度函数。自变量 z_1 在区间 $[-50, 100]$ 和自变量 z_2 在区间 $[-50, 50]$ 的概率密度函数的图像如图 1 所示。

由式 (22) 可得到考虑蜗轮失效相关的总体可靠度为 $R_Z = 0.968\ 2$ 。由前面的计算结果可知, 未考虑蜗轮两种失效模式相关性时的可靠性计算结果为 0.975 3, 可见, 和考虑相关性的计算结果相比, 两者相对误差为 0.73%。

在本实例中, 蜗轮的齿面接触强度的可靠度相

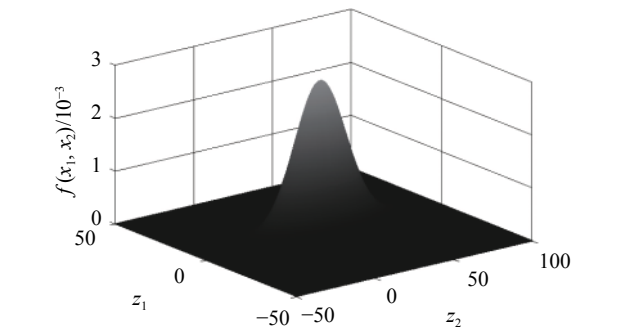


图 1 考虑失效相关的蜗轮概率密度函数随自变量 z_1 和 z_2 的变化

Fig. 1 Variation of the probability density function of the worm gear with the independent variables z_1 and z_2 considering failure correlation

对于齿面弯曲强度的可靠度较低。根据齿面接触结构功能函数的设计参数可知: 一方面, 可选用较好的材料以提高齿面接触许用应力值; 另一方面, 考虑各设计参数均为随机变量, 也可通过减小控制各设计参数的分散性提高蜗轮的可靠性。此外, 保持良好的润滑状态、良好的散热方式、采用变位蜗轮等都可在一定程度上提高蜗轮的可靠性。

3 结 论

考虑蜗轮设计参数的随机性, 结合基于 Taylor 级数展开的四阶矩方法和最大熵原理分析了蜗轮齿面接触和齿根弯曲两种失效模式, 考虑两种失效模式之间的相关性, 给出了其失效相关的相关系数和考虑失效相关的可靠度计算方法, 得出的结论如下:

- 1) 蜗轮齿面接触和齿根弯曲两种失效模式之间存在一定的相关性, 其相关性对于蜗轮的总体可靠度有一定的影响。传统可靠性方法把两种失效模式视为相互独立, 其可靠性估计相对乐观。
- 2) 结合基于 Taylor 级数展开的四阶矩方法和最大熵原理的可靠性方法具有较高的精度。另一方面, 蜗轮齿根弯曲强度的可靠度高于齿面接触强度的可靠度, 在设计过程中, 要注重齿面接触强度的可靠性设计。

参考文献:

[1] Shen W, Yan R, Barltrop N, et al. A method of determining structural stress for fatigue strength evaluation of welded joints based on notch stress strength theory[J]. *International Journal of Fatigue*, 2016, 90: 87–98.

[2] Eryilmaz S, Tütüncü G Y. Stress strength reliability in the presence of fuzziness[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, 282: 262–267.

[3] Wang Zheng, Wang Zengquan. Method for calculating the B10 reliable life of mechanical components of vehicle en-

- gine based on the stress-strength interference[J].*Chinese Journal of Mechanical Engineering*,2014,50(16):47–53.[王正,王增全.基于应力-强度干涉的车用发动机机械零部件 B10 寿命计算方法[J].*机械工程学报*,2014,50(16):47–53.]
- [4] Xie Liyang.Issues and commentary on mechanical reliability theories,methods and models[J].*Chinese Journal of Mechanical Engineering*,2014,50(14):27–35.[谢里阳.机械可靠性理论、方法及模型中若干问题评述[J].*机械工程学报*,2014,50(14):27–35.]
- [5] Huang Xianzhen,Hu Sen,Zhang Yimin.On the calculation method for the reliability of chatter stability in CNC milling[J].*Journal of Northeastern University(Natural Science)*,2017,38(5):675–679.[黄贤振,胡森,张义民.铣削加工颤振稳定性可靠度的计算方法[J].*东北大学学报(自然科学版)*,2017,38(5):675–679.]
- [6] Meng Guangwei,Feng Yiyu,Zhou Liming,et al.Structural reliability analysis based on Taylor–Edgeworth series[J].*Journal of South China University of Technology(Natural Science Edition)*,2016,44(4):130–134.[孟广伟,冯昕宇,周立明,等.基于 Taylor–Edgeworth 级数的结构可靠性分析[J].*华南理工大学学报(自然科学版)*,2016,44(4):130–134.]
- [7] Zhao Y G,Ono T,Kato M.Second-order third-moment reliability method[J].*Journal of Structural Engineering*,2002,128(8):1087–1090.
- [8] Liu Zhe,Tao Fenghe,Jia Changzhi.Reliability sensitivity analysis of the drive shaft and optimize based on fourth-moment technique[J].*Journal of Mechanical Strength*,2017,39(4):848–852.[刘喆,陶凤和,贾长治.基于四阶矩的车辆传动轴可靠性灵敏度分析及结构改进[J].*机械强度*,2017,39(4):848–852.]
- [9] Yang Z,Zhang Y M,Huang X Z,et al.Reliability-based robust optimization design of automobile components with non-normal distribution parameters[J].*Chinese Journal of Mechanical Engineering*,2013,26(4):823–830.
- [10] Liu Yu,Li Tianxiang,Liu Kuo,et al.Chatter reliability of turning processing system based on fourth moment method[J].*Chinese Journal of Mechanical Engineering*,2016,52(20):193–200.[刘宇,李天翔,刘阔,等.基于四阶矩法车削颤振可靠性研究[J].*机械工程学报*,2016,52(20):193–200.]
- [11] Xia Xintao,Zhu Wenhuan,Meng Yanyan,et al.Reliability evaluation method based on failure data with poor information[J].*Journal of Aerospace Power*,2016,31(4):974–985.[夏新涛,朱文焕,孟艳艳,等.基于乏信息失效数据的可靠性评估方法[J].*航空动力学报*,2016,31(4):974–985.]
- [12] Zhou Chunxiao,Wang Ruiqiong,Nie Zhaokun,et al.Probabilistic modelling of dynamic response of underwater vehicle structure via maximum entropy method[J].*Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*,2018,50(1):114–123.[周春晓,汪锐琼,聂肇坤,等.基于最大熵方法的水下航行体结构动力响应概率建模[J].*力学学报*,2018,50(1):114–123.]
- [13] Lai Xiongming,Wang Cheng,Zhang Yong,et al.Application of maximum entropy method in reliability computation[J].*Chinese Journal of Computational Mechanics*,2015,32(1):41–47.[赖雄鸣,王成,张勇,等.最大熵法在可靠度计算中的应用[J].*计算力学学报*,2015,32(1):41–47.]
- [14] Zhou Na,Zhang Yimin,Lu Chunmei.Parametric sensitivity in reliability analysis of worm-drive [J].*Journal of Vibration (Measurement & Diagnosis)*,2012,32(Supp1):98–102.[周娜,张义民,吕春梅.非正态分布参数的蜗杆传动可靠性灵敏度设计[J].*振动(测试与诊断)*,2012,32(增刊1):98–102.]
- [15] Zhao Y,Zhang Y.Reliability design and sensitivity analysis of cylindrical worm pairs[J].*Mechanism & Machine Theory*,2014,82(24):218–230.
- [16] 张明.结构可靠度分析-方法与程序[M].北京:科学出版社,2009:91–93.
- [17] Zuo F J,Yu L,Mi J,et al.Reliability analysis of gear transmission with considering failure correlation[J].*Lexical Semantic Relations:Theoretical and Practical Perspectives*,2015,17(4):617–623.
- [18] Sun Y T,Liu C,Zhang Q,et al.Multiple failure modes reliability modeling and analysis in crack growth life based on JC method[J].*Mathematical Problems in Engineering*,2017(1):1–5.

(编辑 黄小川)

引用格式: Wang Zhiming,Zhang Yafei,Song Yalong.Reliability analysis of cylindrical worm drive using fourth-moment method considering failure correlation[J].*Advanced Engineering Sciences*,2020,52(3):221–226.[王智明,张亚飞,宋亚龙.考虑失效相关的圆柱蜗杆传动四阶矩可靠性分析[J].*工程科学与技术*,2020,52(3):221–226.]