

大气边界层湍流的混沌特性

郭 光 严绍瑾 张培昌

(南京气象学院)

摘要 引用大气边界层湍流资料计算和分析了有关测量混沌的特征量:功率谱, 关联维数, Lyapunov 指数和 Kolmogorov 熵。结果表明:大气边界层湍流是一种混沌运动, 在相空间中为一奇怪吸引子, 为了在相空间中支撑起这样的吸引子, 至少需要由 7—8 阶的确定性非线性偏微分方程(或者说需要由 7—8 个变量)才能对大气湍流进行描述。

关键词 大气边界层, 湍流, 混沌

近些年来, 随着非线性动力学理论的发展和对混沌研究的深入, 混沌的概念愈来愈广泛地用于研究湍流, 使湍流研究在理论本身和研究方法两方面都取得了进展, 为进一步深入地讨论和研究大气边界层湍流的性质和规律提供了条件。首先, 过去人们把湍流这样的随机现象看成是大量自由度系统中外部涨落所造成的, 现在愈来愈清楚, 随机的原因在内部^[1], 湍流的终态将落在一个低维(有限维)的奇怪吸引子上。因此, 用有限个变量完全可以描述湍流。其次, 湍流与混沌一样都具有敏感于初始条件的特性。即初始条件稍有变化, 最终将导致输出毫不相关(混乱的输出), 并且长时间后不可预测。这样, 人们有理由用混沌的概念来解释湍流, 即通过计算系统的分维数、Lyapunov 指数和 Kolmogorov 熵的性质来研究湍流。第三, 在非线性动力学理论中, 根据变量的时间序列重新构造并估计动力学及其特征的方法的建立^[2-5], 使人们有可能根据一些物理量随时间的变化, 来重新恢复系统的动力学, 讨论它们的混沌性态。事实上, 人们利用观测资料的时间序列, 已经发现了一些气候吸引子和天气吸引子, 并且证实了它们具有混沌特性^[6-8]。

基于上述考虑, 本文用大气近地面层湍流的观测资料作功率谱分析, 并计算它们的关

联维数、Lyapunov 指数和 Kolmogorov 熵,以揭示大气边界层湍流的混沌本质。

1 功率谱、分数维、Lyapunov 指数和 Kolmogorov 熵的计算

本文计算所用资料是“重庆市区雾害的形成原因及潜势预警报服务系统研究”课题组,1991年1月11日15时30分用FSY-1风速仪在重庆观测到的三维湍流风速资料,观测的时间间隔为2秒,高度为8米。本文列出的计算结果是用其中 w 分量的一维时间序列得到的,单位为米/秒,序列长度 $N=2700$ 。为方便起见,将该序列记为 $\{x(t)\}$,即

$$x(t_i) = x(t_0 + i\Delta t) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中 t_0 为观测的起始时间, Δt 为观测的时间间隔, N 为序列长度。计算时分别取 N 为900,1800和2700三个长度的时间序列进行比较。

1.1 功率谱

用FFT方法分析 $\{x(t)\}$ 的功率谱,图1是谱图的一部分($a. N=900, b. N=1800, c. N=2700$)。从图1可以看出:小幅度的波动夹杂着不规则的尖峰,没有明显的周期,与白噪声序列功率谱极其相似。由此可以认为,计算所用资料反映出大气湍流运动功率谱具有混沌运动功率谱的特征。

1.2 分数维

维数可以广义理解为描述物理系统所必须的物理量的数目。而事实上,维数不必是整数,分数维是描述相空间中一个不规则的、支离破碎的几何对象。为了从实测的一维时间序列中计算吸引子的维数,必须建立嵌入 m 维相空间 R^m 。我们通过引入一个时间滞后 τ ,重新构造相空间 R^m ,并在这个相空间中恢复原来的动力学系统。即

$$\begin{aligned} \vec{x}_m(t) &= \{x(t_i), x(t_i + \tau), x(t_i + 2\tau), \dots, x(t_i + (m-1)\tau)\} \\ i &= 1, 2, \dots, N - (m-1)\tau \end{aligned} \quad (2)$$

可以证明:只要 m 足够大,重建的系统(2)与原来的动力学系统的几何性质等价^[2]。

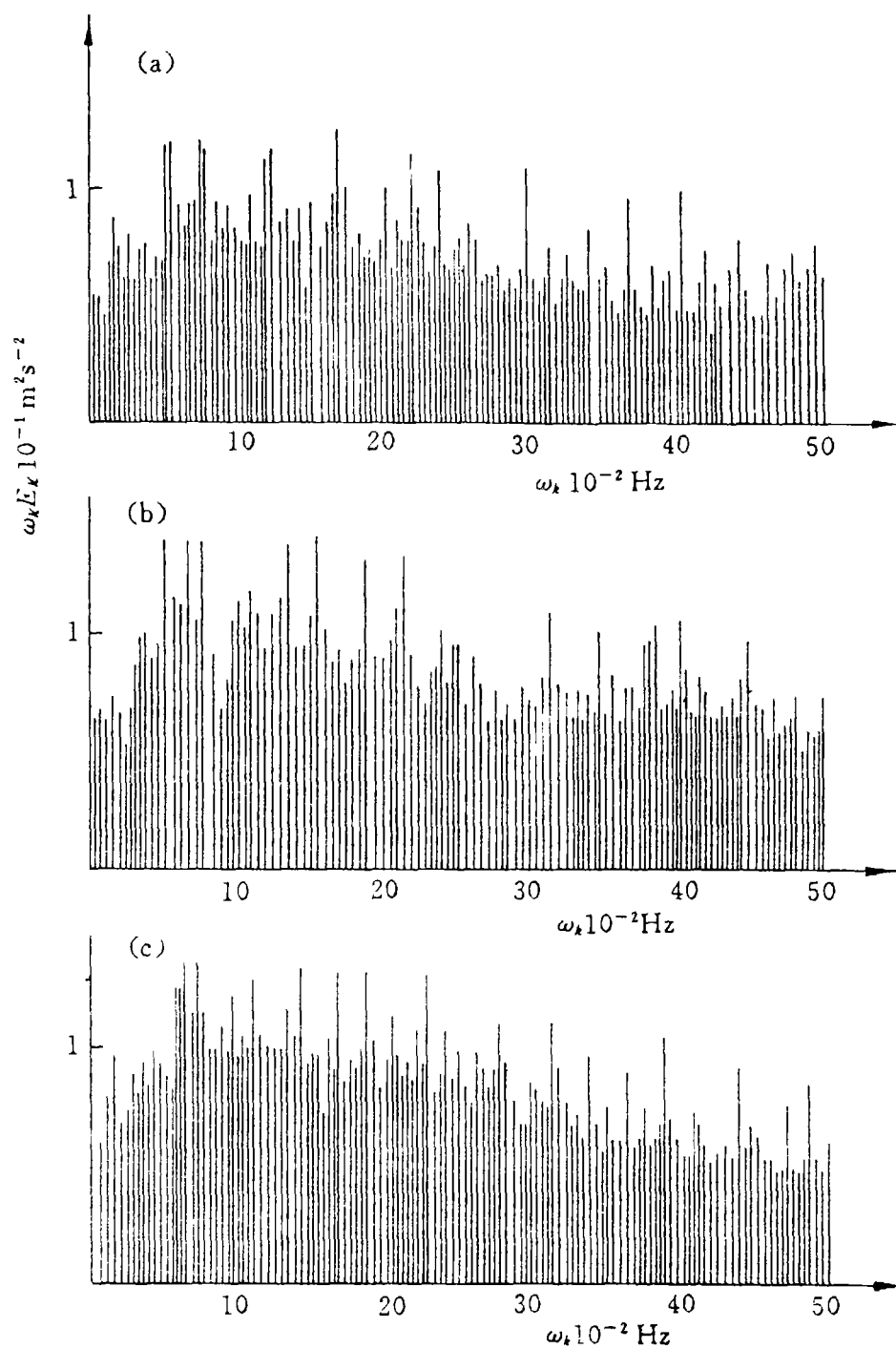
Grassberger 和 Procaccia^[3]曾经给出了一个应用单变量时间序列估计吸引子维数的方法,其要点为:首先建立系统(2),并计算它的关联系数

$$C_m(\epsilon) = \frac{1}{N'} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N'} \theta(\epsilon - |\vec{x}_m(t_i) - \vec{x}_m(t_j)|) \quad (3)$$

其中 $\theta(y)$ 是 Heaviside 函数

$$\theta(y) = \begin{cases} 1 & y > 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

$N' = N - (m-1)\tau$ 是相点的个数, $|\vec{x}_m(t_i) - \vec{x}_m(t_j)|$ 表示吸引子上相关点 $\vec{x}_m(t_i)$ 与 $\vec{x}_m(t_j)$ 之间的距离, ϵ 为一给定的正值。实际上, $C_m(\epsilon)$ 是一个累积距离分布函数,它描述了相空

图1 大气潮流风速 ω 分量时间序列的功率谱图

间 R^m 中吸引子上两点之间的距离小于 ϵ 的概率。于是,对于足够大的 m ,当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时有标度律^[9]

$$C_m(\epsilon) \propto \epsilon^{D_2} \quad (4)$$

$$D_2 = \frac{|\ln C_m(\epsilon)|}{|\ln(\epsilon)|} \quad (5)$$

D_2 称为关联维数,它是 Housdorff 维数 D_0 和信息维 D_1 的一个下限^[3],即有 $D_0 \geq D_1 \geq D_2$ 。 D_2 比 D_0 和 D_1 容易计算,在大多数情况下是这些量的很好近似,我们就用 D_2 作为吸引子维数的估计值。

为了保证各个滞后坐标相互独立,选取时间序列的退相关时间作为滞后时间 τ 的值。就本文截取的序列长度 ($N=900, 1\,800, 2\,700$),而言,其退相关时间分别为 $\tau=9$ 秒、10 秒、25 秒。计算结果表明:只要 τ 在退相关时间附近取值,系统的动力学特征量对于 τ 都有稳定的值。图 2 给出了对数坐标系中 $\ln C_m(\epsilon) - \ln(\epsilon)$ 曲线,从图中看出:三种情况 ($a. N=$

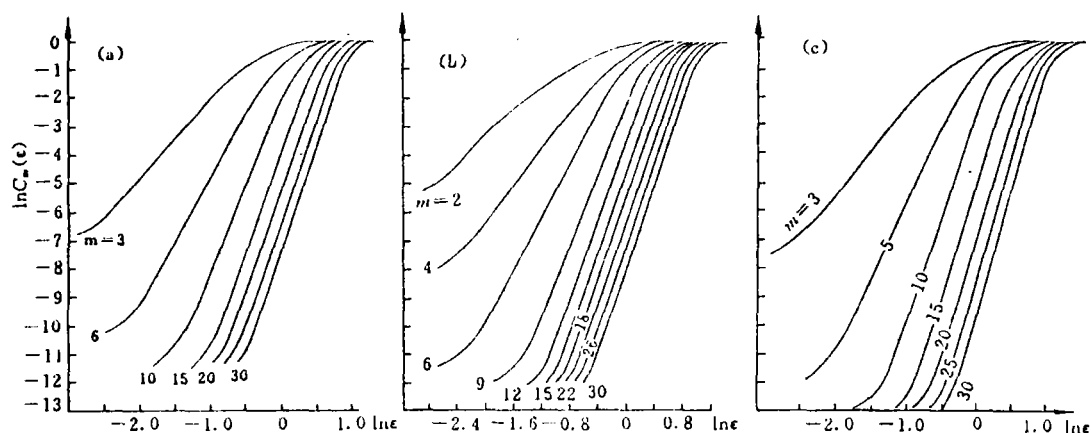


图 2 对应于不同嵌入维数 m 的累积分布函数 $C_m(\epsilon)$

900, $b. N=1\,800$, $c. N=2\,700$) 的曲线都满足(4)式的标度律,在标度区中直线部分的斜率随着嵌入维数的增加而趋于收敛。这点从图 3 也可看得更清楚。显然, D_2 对 m 来说是收敛的。 m 足够大时 D_2 趋于定值(饱和值)是具有动力吸引子的序列与随机序列的重大区别,后者的特点是 $D_2 - m$ 曲线与对角线 $D_2 = m$ 虽然有所偏离,但不会趋于饱和值(表 1)。有理由认为:本文所用的大气近地面层风速时间序列能够反映出大气湍流的动力学性质。

表 1 D_2 和 m_∞ 的计算值

N	900	1800	2700	平均值
D_2	6.9	6.9	7.4	7.1 ± 0.2
m_∞	15	12	15	14.0 ± 1.3

1.3 Lyapunov 指数及其提取

Eckmann 和 Ruelle^[10]系统地阐述了混沌和奇怪吸引子的遍历理论。本文按照 Eckmann 和 Ruelle 的理论和 Wolf^[5]的算法,计算 Lyapunov 指数。

按定义切空间的 Lyapunov 指数 LE 为

$$LE = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\dot{\omega}(t)\| \quad (6)$$

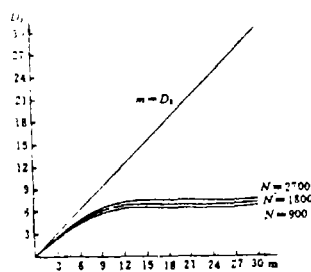
$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \lim_{\|\delta \vec{x}(0)\| \rightarrow 0} \ln \frac{\|\delta \vec{x}(t)\|}{\|\delta \vec{x}(0)\|}$$

其中 $\dot{\omega}(t)$ 是轨道切向量, $\delta \vec{x}(0)$ 和 $\delta \vec{x}(t)$ 分别是初始时刻和 t 时刻的轨道偏差。若 $\dot{\omega}(t)$ 的基为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$, 那么, 对 $\dot{\omega}(t)$ 的基底的每个分量按 (6) 式计算 LE , 就得到了 m 个 Lyapunov 特征指数谱, 按大小排列有 $LE_1 \geq LE_2 \geq \dots \geq LE_m$ 。(6) 式表明, LE 表示初始时刻的小扰动量(或 m 维相体元)长时间增长或收缩的平均速度, 则 $LE_i (i=1, 2, \dots, m)$ 表示体积元在 i 方向上的平均伸缩率, 显然, $LE_i > 0$ 说明该方向趋于膨胀。对于一个耗散的动力学系统, 若含一个以上的正指数, 则系统存在奇怪吸引子。表明由任意一种不确定性所规定的系统初态经过长时间演变后, 无法预测其状态, 即为混沌状态。

在实际问题中, 最大的特征指数 LE_1 有重要意义。它不仅是判断系统是否具有混沌行为的极好指标, 而且是 Lyapunov 指数谱中最容易计算的一个分量。本文只计算 LE_1 , 用 LE_1 的特性讨论系统在相空间中的几何结构特征。

用时间序列计算 LE_1 的算法是由 Wolf 提出的, 其要点是: 重建相空间, 在相空间中计算吸引子上两个非常接近的相点 $\vec{x}_n(t_i)$ 和 $\vec{x}_m(t_j)$ 构成的向量长度在 T 时间内的平均伸缩率, 即

$$LE_1^{(n)} = \frac{1}{T} \log_2 (L_{i+1}/L_i)$$

图 3 关联维数 D_2 随嵌入维数 m 的变化

其中 $L_i = |\vec{x}_m(t_i) - \vec{x}_m(t_j)|$, $L_{i+1} = |\vec{x}_m(t_i + \tau) - \vec{x}_m(t_j + \tau)|$, 它们的平均收缩率为最大的 Lyapunov 指数估计值。即有

$$LE_1 = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S \frac{1}{T} \log_2(L_{i+1}/L_i) \quad (7)$$

式中 T 为步长, S 为总步数。

表 2 不同参数^{*}值下最大 Lyapunov 指数

LE_1 的计算值, 单位: 比特/秒

N	T(s)				
	2	6	10	14	18
900	0.210	0.075	0.036	0.030	0.013
1800	0.259	0.091	0.012	0.040	0.027
2700	0.281	0.103	0.062	0.045	0.034

* N 是原序列的长度; T 是演变步长; LE_1 是最大的 LE 指数, 嵌入维数 $m=8$

从表 2 中看出: (1) $LE_1 > 0$, 这与理论分析一致。当 $T=2$ 秒时, LE_1 的值在 $+0.2$ — $+0.3$ 之间; 当 $T>2$ 秒时, LE_1 的数值都在 $+0.1$ 左右或 $+0.1$ 以下。(2) LE_1 与原序列长度 N (或转化为嵌入空间的点数) 有一定的关系。一般说来序列长, 对应的 LE_1 大些。

1.4 Kolmogorov 熵

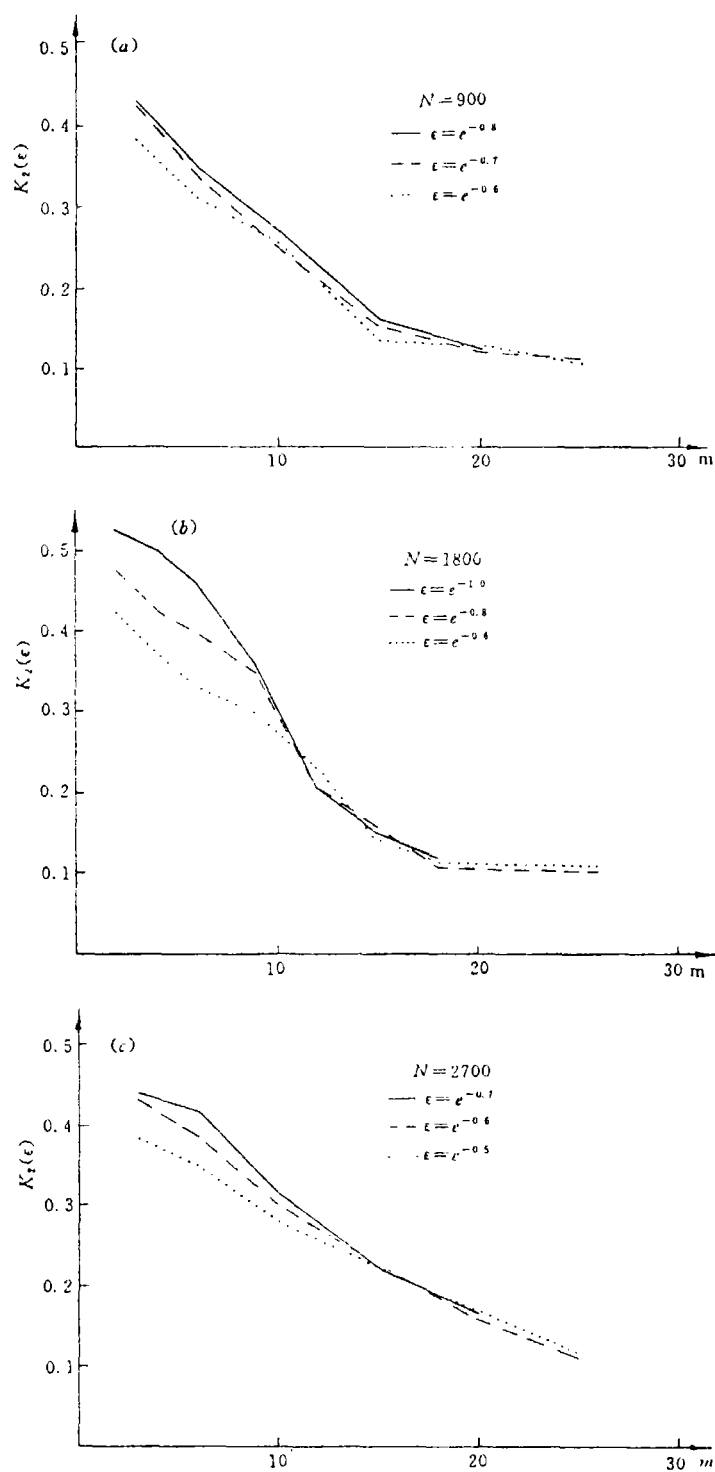
在混沌和奇怪吸引子的遍历理论中, 除了上述的分数维和特征指数之外, Kolmogorov 熵 (简称 K 熵) 也是一个重要的物理量。用 K 熵的数值可以直接分辨系统的运动状态。 $K=0$, 运动为有序; $K \rightarrow \infty$, 运动为随机状态; 当 K 值介于零和无穷大之间, 对应的系统便是作混沌运动。

直接从实测的一维时间序列 $\{x(t_i)\}$ 来估计 K 值的近似方法是由 Grassberger 和 Procaccia^[4] 提出的。其要点为: 按 (2) 式重建相空间, 并按 (3) 式计算 m 维和 $(m+R)$ 维关联函数 $C_m(\epsilon)$ 和 $C_{m+R}(\epsilon)$, 在 m 足够大, $\epsilon \rightarrow 0$ 条件下, 可以得到二阶 Reyni 熵 K_2

$$K_2(\epsilon) = \frac{1}{kR} \ln \frac{C_m(\epsilon)}{C_{m+R}(\epsilon)} \quad (8)$$

式中 k 为时间序列的取样间隔。这里可以证明^[4] K_2 保持了 K 的主要性质, 我们用 K_2 来研究系统的性质, 它的倒数 $T = \frac{1}{K_2}$ 则是表征系统可预报的时间尺度。

图 4 给出了 ϵ 分别取几个较小值时, $K_2(\epsilon) - m$ 的曲线。可以看出, $K_2(\epsilon)$ 对 m 来说是收敛的。同时, 把 $K_2(\epsilon)$ 对 ϵ 进行平均得到的 $\bar{K}_2 - m$ 曲线 (图略) 仍然是对 m 收敛的。因

图4 Kolmogorov 熵的估计值 $K_2(\epsilon)$ 随嵌入维数 m 的变化

此,只要 ϵ 取值很小,嵌入维数 m 取得足够大,用(7)式得到的 K_2 值是收敛、稳定和可靠的。表 3 给出了 K_2 和 T 的计算结果。

表 3 K_2 和 T 的计算结果

	N			平 均 值
	900	1800	2700	
K_2 (比特/秒)	0.102	0.097	0.105	0.101 ± 0.002
$T = \frac{1}{K_2}$ (秒)	9.80	10.31	9.52	9.88 ± 0.33

2 讨论和结论

本文利用大气边界层内测得的风速时间序列计算了有关测量混沌的特征量功率谱 $E(w)$ 、关联维数 D_2 、Lyapunov 指数 LE_1 和 Kolmogorov 熵的近似值 K_2 。计算结果如表 4。

表 4 混沌特征量的计算结果

特 征 参 量	结 果	性 质
功率谱 $E(w)$	如 图 1	具有混沌运动功率谱的特征
关联维数 D_2	6.9—7.4	分数值
LE_1 ($T=2$ 秒)	+0.2—+0.3	$LE_1 > 0$
K_2	+0.105—+0.11	$0 < K_2 < \infty$

* T 为演变步长, LE_1 和 K_2 的单位均为比特/秒

上述结果表明:大气边界层风速时间序列具有混沌运动功率谱的特征;关联维数是一个分数值;对于不同序列长度 N 和不同演变步长 T ,最大的 Lyapunov 指数 LE_1 的值都大于零;二阶 Kolmogorov 熵 K_2 是大于零的有限值。这些特征参量从不同的角度表征了大气边界层湍流的混沌特性。因此有充分的理由认为:大气湍流是一种混沌运动,在相空间中为一奇怪吸引子。用混沌的概念来解释和研究湍流无论从理论上还是从方法上都是湍流研究的重大进展,它为研究大气运动和湍流提供了新的途径。

最后需要说明:由于所用资料仅是大气边界层内风速垂直分量的时间序列,而且参数的取值也有限,因而本文的计算结果带有一定的局限性。鉴于目前国内外关于大气湍流与混沌的理论研究尚在深入,继续在这方面作更多的探索很有必要。

参 考 文 献

- 1 刘式达. 气象学报, 1990, 48, 117—121
- 2 Takens F. *Lecture notes in mathematics*, Berlin, Springer, 1981, 898, 366—381
- 3 Grassberger P, Procaccia I. *Physica*, 1983, 9D, 189—208
- 4 Grassberger P, Procaccia I. *Physical Review (A)*, 1983, 28, 2591—2593
- 5 Wolf A, Swift JB, Swinney HL, Vastano JA. *Physica*, 1985, 16D, 285—317
- 6 Nicolis C, Nicolis G. *Nature*, 1984, 311, 529—532
- 7 杨培才, 陈烈庭. 大气科学, 1990, 14, 64—71
- 8 Freadrich K. *JAS*, 1987, 44, 722—728
- 9 严绍瑾, 彭永清. 非平衡态理论与大气科学, 学苑出版社, 1989, 307—308
- 10 Eckmann JP, Ruelle D. *Rev of Mod Physics*, 1985, 57, 617—656

THE CHAOTIC CHARACTERISTICS OF THE ATMOSPHERIC BOUNDARY LAYER TURBULENCE

Guo Guang Yan Shaojin Zhang Peichang

(Nanjing Institute of Meteorology)

Abstract By using turbulence data obtained from the atmospheric boundary layer, the characteristic quantities describing chaos in respect of power spectra, correlation dimension, Lyapunov exponents and Kolmogorov entropy are calculated and analyzed. Results show that the atmospheric turbulence is a chaotic motion and possess strange attractors in phase space, and a deterministic nonlinear differential equation with at least 7—8 orders (or 7—8 variables) for holding the strange attractors in phase space is needed to describe the turbulence.

Key words atmospheric boundary layer, turbulence, chaos