

闪电路径与分形^{*}

任顺平 迟建平 庄洪春

(中国科学院空间科学与应用研究中心 北京 100080)

摘 要

介绍了利用分形学研究雷电所取得的进展,提出了将分形学与雷电特征参数相结合的动态描述雷电的设想.

关键词 闪道—分形—闪电模型

1 引 言

近几年来,雷电的研究越来越广泛、深入、细致,雷电与其它学科的交叉研究已初步形成,闪击路径的机理和分形模型的研究正在兴起.分形动力学作为研究闪击路径和闪击引起的电磁辐射效应的强有力工具受到该领域专家的极大重视^[1,2].研究雷电的动力主要来自于雷电对人类的社会活动、经济活动造成的危害.随着人类对雷电研究的逐渐深入、防雷措施的完善,开发、利用雷电和雷电对人类益处的研究将是未来雷电研究的重要方向之一.

高压气体放电过程与雷电闪击过程都是非常复杂的非线性动力学过程,难以用确定的数学语言刻画.分形学和混沌的创立为定量描述雷电提供了强有力的数学工具.

分形学的初创形式是分形几何学,它是刻画混沌运动的直观几何语言,是更接近现实世界的数学.Mandelbrot^[3]于60年代末70年代初创立现代分形学.分形学的创立是对传统科学的一场革命.将分形学应用到混沌现象的研究之中后发现:分形学已经成为研究非线性自然现象的重要支柱,分形维数是描述混沌的一个重要参数.分形结构的主要外在特性是其自相似性,即从整体分割出任意一个局部,该局部具有与整体相似的结构.分形学透过混乱客观现象和不规则结构自然图形,揭示隐藏在它们背后的局部与整体的本质联系和运动规律.最近的分形学与气体击穿和雷电交叉研究成果证实了分形学对雷电研究的潜力.

2 分形与雷电闪击

2.1 高压击穿的分形结构

绝缘气体、液体和固体的击穿现象非常复杂,常呈现树状、窄的、随机的放电通道,日常中的雷电也是这种复杂结构^[1,2,4].该结构都有一个明显的特征即自相似结构,分形学正是描

^{*} 中国博士后基金资助课题

1997-10-30收到原稿,1998-04-03收到修定稿

述该结构的最好工具^[5].

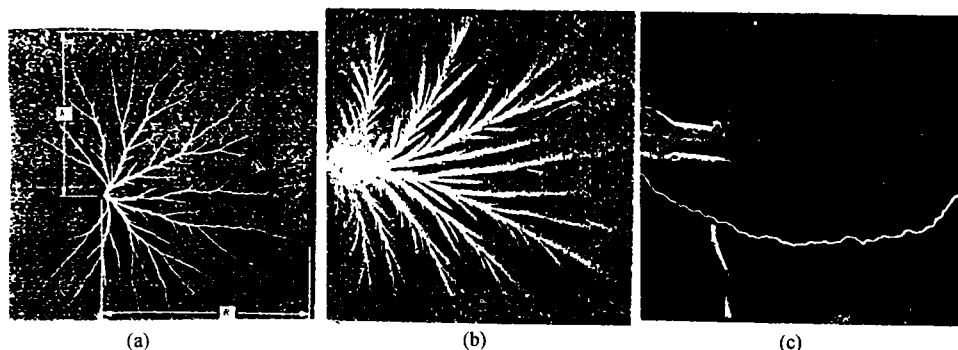


图 1 大气击穿和雷电照片

(a) 正电压放电轴向照片 (b) 负电压击穿轴向照片 (c) 肯尼迪航天发射中心受雷击照片

Fig.1 Pictures of gaseous breakdown and lightning

(a) Picture of positive voltage breakdown (b) Picture of negative voltage breakdown

(c) Picture of lightning observed in Kennidi Space Center

图 1 中的 a、b、c 分别是棒极加正电压、平板电极加负电压使大气击穿的轴向照片、棒极加负电压、平板电极加正电压使大气击穿的轴向照片和美国肯尼迪航天发射中心受雷击的照片.从图中可见,击穿的每一个局部与整体相似,具有丰富的精细结构.这里相似的含义不是几何学中的相似概念,而是人们日常的相似概念,或简单地理解为大体一致.纵观上述观测事实,从定性意义和工程角度考虑,大气击穿放电现象和雷电闪击路径具有分形结构.

2.2 气体放电的分形仿真

为了分析描述绝缘气体、液体和固体的击穿放电模式,最简单的理想情况是二维辐射放电,如图 2a 所示.该图称为 Lichtenberg 图,是在 2mm 厚玻璃夹层内 0.3MPa 的 SF_6 气体、加高压脉冲电压 $30\text{kV} \times 1\mu\text{s}$ 形成.Niemeyer 等人对此图进行了详细分析^[1].根据 Mandelbrot 提出的分形维数的概念,得到半径 r 内和半径上的放电通道分岔数 $N(r)$ 与半径 r 和分形维数 D 有

$$N(r) \propto r^D. \quad (1)$$

该式亦可改为 $N(r)$ 的微分形式,即

$$n(r) \propto dN(r) / dr \propto r^{(D-1)}, \quad (2)$$

经过仔细数分岔数,得到图 2(a) 的分维数为 1.7 左右.

为了研究绝缘放电的特性,Niemeyer 等人提出了格点式随机模型,并在计算机上给予仿真,该方法被称为 DBM.DBM 的主要算法如图 2(b) 所示.具体步骤如下:

(1) 图 2(b) 给出运行几步的放电仿真,已经放电点用黑点显示,新放电点与旧放电点用细线相连,图中每一格点的电位 φ 由离散 Laplace 方程求取,边界条件为放电点的电位 $\varphi = 0$,圆外的电位 $\varphi = 1$.

(2) 每一步放电过程是:在已放电格点周围存在的未放电格点都是可能放电点,在图 2(b) 中用白圈表示,与已放电点用细虚线连接.

(3) 这些新的可能放电点的放电概率 p 正比于其局部电场,因为击穿点(i,k 黑格点)的

电位 $\phi_{ik} = 0$, 可能击穿点(i' , k' 白圈)的电位 $\phi_{i'k'}$, 所以, 击穿概率为:

$$p(i, k \rightarrow i', k') = \frac{(\phi_{i'k'})^\eta}{\sum (\phi_{i'k'})^\eta} \quad (3)$$

其中 η 为功率指数, $\phi_{i'k'}$ 满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (4)$$

Laplace 方程的离散形式为

$$\phi_{ik} = \frac{1}{4}(\phi_{i+1,k} + \phi_{i-1,k} + \phi_{i,k+1} + \phi_{i,k-1}). \quad (5)$$

以此模型仿真绝缘体击穿现象取得了很好的结果, 图 2(c)显示了当 $\eta = 1$, 运行 5000 步的仿真结果, 分形维数 $D = 1.75 \pm 0.02$.

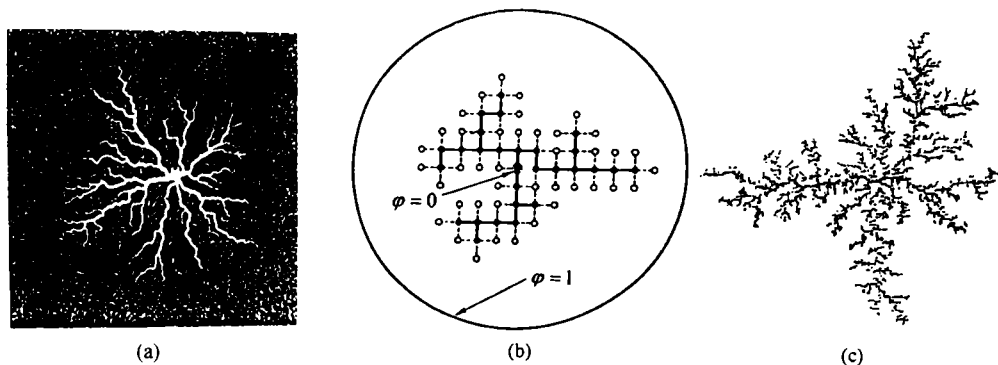


图 2 平面气体放电仿真

(a) 平面气体放电照片 (b) 仿真方法示意图 (c) 5000 步仿真结果

Fig.2 Simulation of gaseous surface discharge

(a) Picture of gaseous surface discharge (b) Illustration of simulated method

(c) Simulated result about 5000 steps

3 分形闪道与电磁场辐射

闪道模型的研究不但对了解雷电有帮助, 而且可以通过模型仿真闪道的辐射效应验证通讯、控制、电子测量仪器的抗干扰能力, 找出它们抗干扰的薄弱环节, 采取有力措施提高它们的抗电磁干扰性能. Femia 等人^[6]利用分形学描述了雷电放电路径, 使闪电回击电磁辐射场仿真推进了一大步, 找出了弯曲闪道与辐射场复杂程度的内在联系, 即闪道的分形维数与辐射场的分形维数一致.

数学上, 分形闪道具有无限精细的自相似结构, 在工程精度上而言, 只要在满足一定精度的基础上, 即认为其是分形的. 假定闪道由 N 段方向任意、长短以一定概率分布的直线组成. 生成这样一种弯曲的具有分形特点的闪道常采用中点置换法^[7], 图 3 为分形维数为 1.2 时, 仿真的 x - z 和 y - z 平面分形闪道 (x - y 平面表示大地, z 代表垂直高度). 中点置换法具体步骤如下:

设空间闪道上的任意一点为 $r = r_c$ 表示为空间高度的函数:

$$r_c(z) = x(z) \mathbf{x} + y(z) \mathbf{y} + z(z) \mathbf{z}. \quad (6)$$

其中 $x(z)$ 和 $y(z)$ 表示空间水平面的两个垂直坐标, 它们是以 z 为自变量的分形曲线; $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ 分别是空间坐标 x, y, z 方向的单位矢量.

为了简化, 设定 $x(z)$ 和 $y(z)$ 是具有相同概率分布、相同分形维数的独立随机变量. 这里仅就 $x(z)$ 的分形生成阐述分形闪道的生成方法.

中点置换法是借助布朗运动的增量具有自相似性来实现分形闪道的. 设随机过程 $B(t)$ 为布朗运动, 则该过程有两个性质: (1) 增量 $B(t_2) - B(t_1)$ 服从高斯分布; (2) 均方增量正比于时间的变化, 即

$$E[|B(t_2) - B(t_1)|^2] \propto |t_2 - t_1|. \quad (7)$$

B 的增量具有统计自相似也就是 $B(t_0 + t) - B(t_0)$ 及 $\frac{1}{\sqrt{r}} (B(t_0 + rt) - B(t_0))$ 对 $\forall t_0$ 及 $r > 0$ 有相同的有限维数.

不相关高斯白噪声 W 的积分就是满足上述性质的布朗运动, 即

$$B(t) = \int_{-\infty}^t W(s) ds. \quad (8)$$

此处的随机过程 $W(t)$ 是不相关的, 并服从正态分布 $N(0, 1)$, 由此产生的布朗运动的分形维数为 1.5.

中点置换法产生分形维数为 1.5 的分形曲线, 实现 $x(z)$ 坐标的具体步骤: 第一步, 将闪道高度在 z 轴上归一化, $x(0) = 0$; 第二步, 以高斯分布 $N(0, \sigma^2)$ 选取 $x(1)$ 则有: $\text{Var}(x(1) - x(0)) = \sigma^2$. 由布朗运动的定义得:

$$\text{Var}(x(t_2) - x(t_1)) = |t_2 - t_1| \sigma^2. \quad (9)$$

其中 $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$, 设 $x(1/2)$ 为 $x(0)$ 与 $x(1)$ 的平均值再加上一个满足高斯分布 $(0, \Delta_1^2)$ 的随机偏置 D_1 , 可以推得所生成 $x(1/2)$ 的满足式 (4), 其数学表达式为

$$x\left(\frac{1}{2}\right) - x(0) = \frac{1}{2} [x(1) - x(0)] + D_1; \quad (10)$$

$$\Delta_1^2 = \frac{1}{4} \sigma^2.$$

第三步, 令 $x\left(\frac{1}{4}\right) - x(0) = \frac{1}{2} \left[x\left(\frac{1}{2}\right) - x(0) \right] + D_2$. 同样, $x(1/4) - x(0)$ 及 $x(1/2) - x(1/4)$ 服从零均值高斯分布, 按布朗运动的分布仍可推得

$$\Delta_2^2 = \frac{1}{8} \sigma^2. \quad (11)$$

以此类推, 第 n 次置换的高斯分布的标准方差为

$$\Delta_n^2 = \frac{1}{2^{n+1}} \sigma^2.$$

(12)

如此即可产生分形维数为 1.5 的闪电通道。

更一般分形维数闪道的生成,选取分形布朗运动, $B(t)$ 满足下式:

$$Var(B(t_2) - B(t_1)) = |t_2 - t_1|^{2H} \sigma^2.$$

(13)

具体实现中仅改变中点置换的偏置, D_n 有方差为

$$\Delta_n^2 = \frac{\sigma^2}{(2^n)^{2H}} (1 - 2^{2H-2}).$$

(14)

引进(13)、(14)式生成的分形闪道的分形维数为

$$D = 2 - H.$$

(15)

理论上,式(13)、(14)不能生成真正的分形布朗运动,但在工程中,它确实能很好地、有效地近似布朗运动。

在建立分形闪道的基础上,利用经典的电磁辐射场处理方法: Fraunhofer 近似方法和假设流经闪道的电流是双指数脉冲电流,将曲折的闪道看成 N 段直线导体,忽略内部损耗,假设大地是平面导体,流经闪道的电流为双指数脉冲形式^[8,9],给出曲折闪道的分形辐射效应。图 4 是闪道分形维数为 1.2

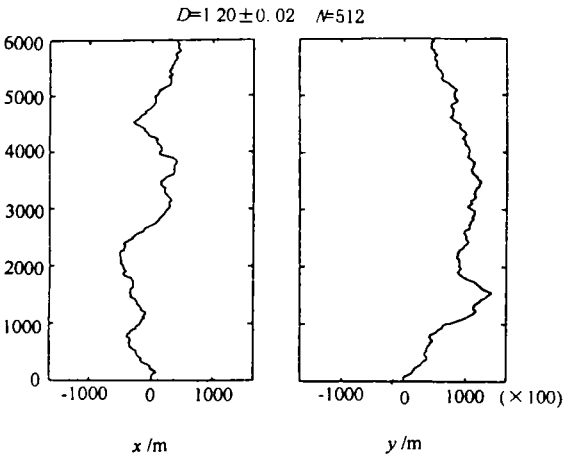


图 3 x - z 和 y - z 平面分形闪道

Fig.3 Fractal lightning channel in x - z and y - z

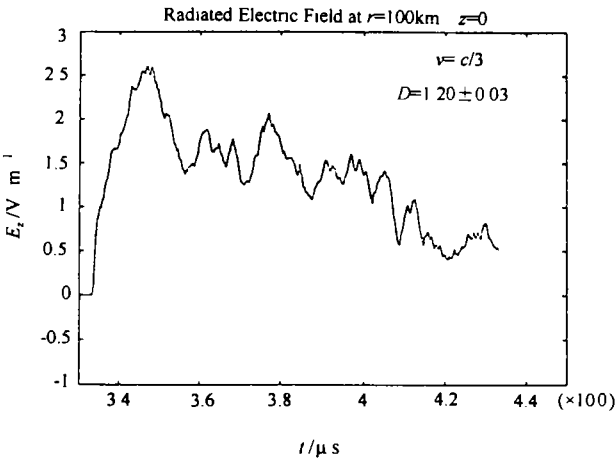


图 4 100km 处的仿真垂直辐射电场

Fig.4 The vertical component of the radiated electric field at 100km away from the channel foot

时,距闪击落地点 100km 处的垂直电磁场. 其分形维数为 1.2 ± 0.03 . 从仿真结果可见,闪道分形维数与其辐射场分形维数基本一致. 闪电的机理非常复杂,动力学方法需要的背景信息很难收集完整,而分形学的方法不但需要信息少,在一定程度上可以说是从微观上精确地描述了闪击.

4 设想及展望

分形学描述闪电的研究仅处于探索和验证阶段,分形闪击模型仍处于描述静态闪道的状态. 虽然如此,分形学应用于闪电研究的初步结果和人们的直观感觉都表明:分形学必将在闪电研究方面发挥越来越重要的作用. 随着闪电参数测量的精确、参数统计分布的确定和对机理的了解,“动态统计分形闪电模型”必将得到发展. “动态统计分形闪电模型”是作者自定义的新模型,其主要意思是在统计闪电重要物理参量基础上,利用分形思想刻画每一过程,这些过程按时间发展顺序逐步进行. 该模型将涉及以下几个过程:在已知空间正负电荷量 Q_+ (Q_-)、正负电荷分布半径 σ_{+a} (σ_{-a}) 和 σ_{+b} (σ_{-b}) 及击穿场强 E_{im} 、终止场强 E_{end} 的条件下,可以计算闪电的初始击穿;了解场强、电荷与击穿距离的统计关系,可以计算每一梯式先导的长度;当了解场强与闪击方向的统计关系时,可以确定下一步雷电的传输方向;了解每步先导的电荷传输速率和统计分布,就可以计算每步先导的停顿时间及传输距离;整个过程的分形连接即形成该闪电模型. 总之雷电的机理研究、参数测量和统计有大量的工作要做,在此基础上才可能将分形学更好地应用于雷电研究之中.

参 考 文 献

- [1] Niemeyer L, Pietronero L, Wiesmann H J. Fractal dimension of dielectric breakdown. *Phys. Rev. Lett.*, 1984, **52**(12):1033—1036.
- [2] Vecchi G, Labate D, Canavero F. Fractal approach to lightning radiation on a tortuous. *Radio Sci.*, 1994, **29**(4):691—704
- [3] Mandelbrot B B, Ness J W. Fractional brownian motion, fractional noises and brownian and applications. *SIAMRev.*, 1968, **10**(4):578—598
- [4] Uman M A, Krider E P. A review of natural lightning: experimental data and modeling. *IEEE Transaction Electromagnetic Compatibility*, 1982, **24**(2):79—112
- [5] Wilson C T R. On some determinations of the sign and magnitude of electric discharges in lightning flashes. *Proc. Roy. Soc.*, 1991, **82A**:555—574
- [6] Femia N, Niemeyer L, Tucci V. Fractal characteristics of electrical discharges: experiments simulatons. *J. Phys.*, 1993, **26D**:619—627
- [7] Peitgen H O, Saupe D. The science of fractal images. New York: Springer-Verlag, 1988.312
- [8] LeVine D M, Meneghini R. Simulation of radiation from lightning return strokes: The effect of tortuosity. *Radio Sci.*, 1978a, **13**(5):801—809
- [9] Nucci C A, Diendprfor G, Uman M A, Rachidi F, Ianoz M, Mazzetti C. Lightning return stroke current models with specified channel-base current: a review and comparison. *J. Geophys. Res.*, 1990, **95D**(12): 20395—20408

LIGHTNING CHANNELS AND FRACTALS

REN Shunping CHI Jianping ZHUANG Hongchun

(Center for Space Science and Applied Research, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

Abstract

The paper introduces the relationship between fractal and lightning in some detail and a new idea about fractal dynamic lightning model is put forward.

Key words Lightning channel, Fractals, Channel model