不含 4- 圈和 9- 圈的平面图是 $(2, 0, 0)$ - 可染的

陈敏*, 戴立峰, 聂静方, 王应前, 俞伟强

浙江师范大学数理与信息工程学院, 金华 321004

E-mail: chenmin@zjnu.cn, 867785421@qq.com, 1220775377@qq.com, yqwang@zjnu.cn, 634653169@qq.com

收稿日期: 2018-05-10; 接受日期: 2018-08-07; 网络出版日期: 2019-01-30; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11271335 和 11471293) 资助项目

摘要 设 $d_1, d_2, \dots, d_k$ 为 k 个非负整数. 若图 G 的顶点集 V 可划分成 k 个子集合 $V_1, V_2, \dots, V_k$, 使得对于任意的 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, 由 V_i 导出的子图 $G[V_i]$ 的最大度至多为 d_i , 则称图 G 是 $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ -可染的. 1976 年, Steinberg 猜想: 不含 4- 圈和 5- 圈的平面图是 $(0, 0, 0)$ - 可染的. 在 Steinberg 猜想的驱动下, 人们证明了以下三个结论:

(1) 对每一个 $i \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, 不含 4- 圈和 i - 圈的平面图是列表 $(1, 1, 1)$ - 可染的;

(2) 对每一个 $i \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, 不含 4- 圈和 i - 圈的平面图是 $(1, 1, 0)$ - 可染的;

(3) 对每一个 $i \in \{5, 6, 7, 8\}$, 不含 4- 圈和 i - 圈的平面图是 $(2, 0, 0)$ - 可染的.

为使结论 (3) 更加完整, 本文证明不含 4- 圈和 9- 圈的平面图是 $(2, 0, 0)$ - 可染的.

关键词 平面图 Steinberg 猜想 后 Steinberg 猜想 $(2, 0, 0)$ - 染色 可约构型 权转移

MSC (2010) 主题分类 05C15

1 引言

设 $d_1, d_2, \dots, d_k$ 是 k 个非负整数, $G = (V, E)$ 是以 V 和 E 分别为顶点集和边集的图. 图 G 的一个 $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ - 染色是一个映射 $\phi: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ 使得顶点导出子图 $G[V_i]$ 的最大度不超过 d_i , 其中 $V_i = \{v \in V \mid \phi(v) = i\}$. 若图 G 存在 $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ - 染色, 则称图 G 是 $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ - 可染的. 显然, $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ - 染色是图的正常顶点染色的一种自然推广. 著名的四色定理^[1,2]断言: 每个平面图都是 $(0, 0, 0, 0)$ - 可染的; 而 Grötzsch 三色定理^[3]则断言: 不含 3- 圈的平面图是 $(0, 0, 0)$ - 可染的.

限制只用三种颜色对平面图的顶点进行染色, Cowen 等^[4]证明了每个平面图都是 $(2, 2, 2)$ - 可染的; Xu^[5]证明了不含相邻 3- 圈和 5- 圈的平面图是 $(1, 1, 1)$ - 可染的. 关于平面图的 $(0, 0, 0)$ - 可染性, Steinberg 于 1976 年提出了一个著名猜想^[6]: 不含 4- 圈和 5- 圈的平面图是 3- 可染的, 即 $(0, 0, 0)$ - 可染的. 令 $\mathcal{F}_l$ 为不含 4- 圈和 l - 圈的平面图族, 其中 $l \geq 5$. 在 Steinberg 猜想的驱动下, Lih 等^[7]证明了当 $l \in \{5, 6, 7\}$ 时, $\mathcal{F}_l$ 中的图都是列表 $(1, 1, 1)$ - 可染的; Dong 和 Xu^[8]证明了对于 $l \in \{8, 9\}$,

英文引用格式: Chen M, Dai L F, Nie J F, et al. Planar graphs without cycles of length 4 or 9 are $(2, 0, 0)$ -colorable (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 317–338, doi: 10.1360/N012018-00129

上述结论也是正确的. 后来, Wang 和 Xu^[9] 证明了不含 4- 圈的平面图是列表 (1, 1, 1)- 可染的; Chen 和 Raspaud^[10] 又将此结果改进为: 不含相邻 4- 圈的平面图是列表 (1, 1, 1)- 可染的; 近来, Wang 和 Xu^[11] 还证明了不含 5- 圈的平面图是 (1, 1, 1)- 可染的.

考虑与 Steinberg 猜想密切相关的特殊情形 $l = 5$, Chang 等^[12] 证明了 $\mathcal{F}_5$ 中的图都是 (4, 0, 0)- 和 (2, 1, 0)- 可染的. 之后, Hill 等^[13] 证明了 $\mathcal{F}_5$ 中的图都是 (3, 0, 0)- 可染的; Hill 和 Yu^[14] 及 Xu 等^[15] 分别独立证明了 $\mathcal{F}_5$ 中的图都是 (1, 1, 0)- 可染的. 最近, Chen 等^[16] 证明了 $\mathcal{F}_5$ 中的图都是 (2, 0, 0)- 可染的. 正当人们热衷于正面证明 Steinberg 猜想时, Cohen-Addad 等^[17] 出人意外地否定了此猜想. 然而, 问题并没有结束, 人们自然要问: 是否存在一个整数 $k \geq 6$ 使得 $\mathcal{F}_k$ 中的平面图都是 (0, 0, 0)- 或者 (1, 0, 0)- 可染的呢? 基于诸多已知结果, 有理由提出以下猜想:

猜想 1.1 (后 Steinberg 猜想) 对于任意 $i \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $\mathcal{F}_i$ 中的图都是 (1, 0, 0)- 可染的.

总结后 Steinberg 猜想的前期研究, 人们已得到如下三个结论:

定理 1.1^[7,8] 对于任意 $i \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $\mathcal{F}_i$ 中的图都是列表 (1, 1, 1)- 可染的.

定理 1.2^[14,15,18-20] 对于任意 $i \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $\mathcal{F}_i$ 中的图都是 (1, 1, 0)- 可染的.

定理 1.3^{[16,21,22]1)} 对于任意 $i \in \{5, 6, 7, 8\}$, $\mathcal{F}_i$ 中的图都是 (2, 0, 0)- 可染的.

本文将致力于解决研究后 Steinberg 猜想之前的唯一剩余情形, 即要证明如下定理:

定理 1.4 $\mathcal{F}_9$ 中的图都是 (2, 0, 0)- 可染的.

本文仅考虑有限简单图. 以下将定义文中常用的一些术语和符号. 若图 G 可以被嵌入到平面上使得边仅在端点处相交, 则称图 G 为可平面图. 可平面图的上述特定嵌入称为平面图. 对于一个平面图 G , 分别用 V 、 E 、 F 和 δ 来表示它的顶点集、边集、面集和最小度. 对于点 $v \in V$, 令 $d(v)$ 表示 v 的度数, 也就是 G 中 v 所关联的边数. 若 $d(v) = k$, 或 $d(v) \geq k$, 或 $d(v) \leq k$, 则分别称 v 为 k - 点, 或 k^+ - 点, 或 k^- - 点. 称边 $xy \in E$ 为 $(d(x), d(y))$ - 边, 并称 x 为 y 的 $d(x)$ - 邻点. 对于面 $f \in F$, 用 $b(f)$ 表示 f 的边界, $d(f)$ 表示 $b(f)$ 的步数, 并称 $d(f)$ 为 f 的度数. 可像点那样, 类似地定义 k^- 、 k^+ - 和 k^- - 面 (或圈). 若 f 的边界点依某时针方向依次排列为 $v_1, v_2, \dots, v_n$, 则记

$$f = [v_1 v_2 \cdots v_n].$$

文中的三角形是指一个 3- 面的边界. 若一个点或一条边关联三角形, 则称它为三角的. 假设 $uv \in E$. 若 uv 是三角的, 则称 u 为 v 的三角邻点; 否则, 称 u 为 v 的一个孤立邻点. 若 3- 点 v 关联 3- 面 f , 则称 v 的不在 f 上的邻点为 v 的外邻点, 或 f 的一个外邻点. 若 v 的外邻点是一个 k - 点, 则称它为 v 的外 k - 邻点. v 的悬挂 3- 面是指不包含 v , 但包含 v 的一个孤立 3- 邻点的 3- 面. v 的悬挂 3- 面上的邻点称为 v 的悬挂 3- 邻点. 对于 $(3, 3, 6^+)$ - 面, 若它的外 5^+ - 邻点的个数为 0、1 或 2, 则分别称它为穷的、半穷的或富的. 最后, 若两个三角形至少有一个公共点, 则称它们相交. 假设 $T = [uvw]$ 和 $T' = [u'vw']$ 为 G 中两个相交三角形. 若它们只有一个公共点 v , 并且没有连接 $\{u, w\}$ 与 $\{u', w'\}$ 中点的边, 则称它们正常相交. 由于 G 没有 4- 圈, 所以, G 中的两个相交三角形总是正常相交的.

2 可约构型

令颜色集 $C = \{1, 2, 3\}$. 对点 v 进行正常染色是指给 v 染的色不能在 v 的邻点上出现. 而对 v 进行 (2, 0, 0)- 染色 (简称染色) 则是指使用 C 中色对 v 进行染色时要求颜色 2 和 3 满足正常染色的要

1) Wang Y, Dai L, Liu P. Planar graphs without cycles of length 4 or 8 are (2, 0, 0)-colorable. Submitted

求, 而颜色 1 在 v 的邻点中至多可出现两次. 若 ϕ 为图 G 的点导出子图 G' 的一个 $(2, 0, 0)$ -染色, 则称 ϕ 为 G 的一个部分 $(2, 0, 0)$ -染色.

假设定理 1.4 不真, 令 G 是定理 1.4 的关于顶点尽可能少的反例, 即 G 不是 $(2, 0, 0)$ -可染的, 但 G 的任意点导出真子图 G' 都有一个 $(2, 0, 0)$ -染色 ϕ . 为了得到 G 的一些结构性质, 通常删去 G 中某些特定的点得到更小的图 G' . 根据 G 的极小性, G' 具有 $(2, 0, 0)$ -染色 ϕ . 若可将染色 ϕ 延拓成 G 的一个 $(2, 0, 0)$ -染色, 则得到矛盾, 从而获得 G 的一个结构性质. 运用这种方法, 文献 [22] 已经获得图 G 的一些结构性质:

引理 2.1 极小反例平面图 G 满足以下性质:

- (1) $\delta(G) \geq 3$;
- (2) G 中的每个 3-点都至少有一个 5^+ -邻点;
- (3) 若 3-点 v 关联一个 $(3, 3, 5^-)$ -面, 则 v 的外邻点为 5^+ -点;
- (4) G 中不存在关联一个 $(3, 4^-, 6)$ -面和两个 $(3, 3, 6)$ -面的 6-点.

为了简化引理 2.3–2.5 的证明过程, 先给出下面这个引理.

引理 2.2 令 $f = [uvw]$ 是 G 中的一个 $(3, 3, 6^+)$ -面使得 $d(u) = d(v) = 3$ 且 $d(w) \geq 6$. 假设 $G - \{w\}$ 有一个 $(2, 0, 0)$ -染色 ϕ . 若 u 的外邻点为 4^- -点, 则存在 $G - \{w\}$ 的另一个 $(2, 0, 0)$ -染色 ϕ' 使得 $\phi'(u) = 1$, 而对于其余的 $x \in N(w) \setminus \{u\}$, 有 $\phi'(x) = \phi(x)$.

证明 记 u' 为 u 的外邻点. 由于 G 不包含 4-圈, 显然有 $u' \notin N(w)$. 如果 $\phi(u) = 1$, 则只需定义 $\phi' = \phi$ 即可. 否则, $\phi(u) \neq 1$. 若 $\phi(u') \neq 1$ 或者 $\phi(u') = 1$ 但 u' 在 ϕ 中至多有一个邻点染颜色 1, 则可直接用颜色 1 重染 u , 从而得到 $G - \{w\}$ 的一个 $(2, 0, 0)$ -染色 ϕ' 满足要求. 设 u' 在 ϕ 中至少有两个邻点染颜色 1. 因为 u' 为 4^- -点, 颜色 2 和 3 中至少有一个不出现在 $N(u') \setminus \{u\}$ 中. 不妨设未出现的这个色为 2. 现在只需给 u' 染色 2, 然后再给 u 重新染颜色 1 即可. $\square$

引理 2.3 设 6-点 $v \in V(G)$. 若 v 关联两个 $(3, 3, 6)$ -面, 则这两个 $(3, 3, 6)$ -面中至少有一个为富的.

证明 令 $f_1 = [vv_1v_2]$ 和 $f_2 = [vv_3v_4]$ 为 v 所关联的两个 $(3, 3, 6)$ -面. 记 v'_1 和 v'_2 分别为 v_1 和 v_2 不在 f_1 上的第三个邻点; v'_3 和 v'_4 分别为 v_3 和 v_4 不在 f_2 上的第三个邻点. 假设 f_1 和 f_2 都不是富的, 即对于每个 $i \in \{1, 2\}$, f_i 都至少有一个 3-点其外邻点为 4^- -点. 不妨设 v_1 和 v_3 是这样两个 3-点. 根据 G 的极小性, $G' = G - \{v, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 有一个 $(2, 0, 0)$ -染色 ϕ . 记 v_5 和 v_6 为 v 的另外两个邻点. 先对 v_1, v_2, v_3 和 v_4 依次进行正常染色. 若 $1 \notin \{\phi(v_5), \phi(v_6)\}$, 则用颜色 1 给 v 染色, 即得 G 的一个 $(2, 0, 0)$ -染色, 矛盾. 假设 $1 \in \{\phi(v_5), \phi(v_6)\}$. 这意味着颜色 2 和 3 中总有一种颜色, 如 3, 不出现在 v_5 和 v_6 上. 根据引理 2.2, 可设 v_1 和 v_3 的颜色均为 1. 对每个 $i \in \{2, 4\}$, 必要时可给 v_i 换染属于 $\{1, 2\}$ 且不同于 v'_i 的颜色. 然后给 v 染颜色 3, 又得 G 的一个 $(2, 0, 0)$ -染色, 矛盾. $\square$

引理 2.4 令 $k \in \{7, 8, 9, 10\}$. 若 k -点 $v \in V(G)$ 关联 $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ 个 $(3, 3, k)$ -面, 则这些 $(3, 3, k)$ -面中至少有一个为富的.

证明 令 $v_1, v_2, \dots, v_k$ 表示 v 的所有邻点并按顺时针依次排列. 令 $f_i = [vv_{2i-1}v_{2i}]$ 为与 v 关联的 $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ 个 $(3, 3, k)$ -面, 其中 $i \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$. 显然, $3 \leq i \leq 5$. 假设与 v 相关联的每个 3-面都不是富的. 由定义可知, 每个 f_i 都有一个 3-点, 不妨设为 v_{2i-1} , 其外邻点为 4^- -点. 令 $G' = G - \{v\}$. 根据 G 的极小性, G' 存在一个 $(2, 0, 0)$ -染色 ϕ . 下面根据 k 的奇偶性进行分类讨论. 先设 $k \in \{7, 9\}$. 此时注意到 v_k 为 v 的孤立邻点. 设 $\phi(v_k) = \alpha$. 根据引理 2.2, 可设 $v_1, v_3, \dots, v_{2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor-1}$ 所染的颜色均为 1. 给 v 染一种属于 $\{2, 3\} \setminus \{\phi(v_k)\}$ 的颜色之后, 必要的话, 给每个 v_i ($i \in \{2, 4, \dots, 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$) 换

染一种属于 $\{1, 2, 3\}$ 且不同于 v 以及 v_i 的外邻点的颜色即可. 再设 $k \in \{8, 10\}$. 根据引理 2.2, 可设 $v_1, v_3, \dots, v_{2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1}$ 的颜色均为 1. 给 v 染颜色 2 之后, 必要时可给下标为 $i \in \{2, 4, \dots, 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$ 的 v_i 点换染一种属于 $\{1, 3\}$ 且不同于 v_i 的外邻点的颜色即可. 无论哪种情形, 都能得到 G 的一个 (2, 0, 0)-染色, 矛盾. $\square$

引理 2.5 令 $k \geq 8$ 为偶数. 若 $v \in V(G)$ 为 k -点, 且关联 $\frac{k}{2} - 1$ 个 $(3, 3, k)$ -面和一个 $(3, 4^+, k)$ -面 $f = [uvw]$, 其中 $d(u) = 3$ 且 u 的外邻点为 4-点, 则 v 所关联的 $(3, 3, k)$ -面中至少有一个是富的.

证明 令 $v_1, v_2, \dots, v_k$ 为 v 的所有邻点并按顺时针依次排列. 设 $f_i = [vv_{2i-1}v_{2i}]$ 为与 v 相关联的 $\frac{k}{2} - 1$ 个 $(3, 3, k)$ -面, 其中 $i \in \{1, 2, \dots, \frac{k}{2} - 1\}$. 设 u' 为 u 的外邻点; v'_j ($j = 1, 2, \dots, k - 2$) 为 v_j 的外邻点. 由题设知, $d(u') \leq 4$. 假设与 v 相关联的 $\frac{k}{2} - 1$ 个 $(3, 3, k)$ -面都不是富的. 根据定义, 不妨设 v_{2i-1} 的外邻点 v'_{2i-1} 为 4-点. 由 G 的极小性, $G - \{v\}$ 有一个 (2, 0, 0)-染色 ϕ . 运用引理 2.2, 可以设 $\phi(v_{2i-1}) = 1$. 若 $1 \in \{\phi(u), \phi(w)\}$, 如 $\phi(u) = 1$, 则只需给 v 染颜色 $a \in \{2, 3\} \setminus \{\phi(w)\}$, 再给每个 v_{2i} 换染一种不同于 a 和 $\phi(v'_{2i})$ 的颜色即可. 假设 $1 \notin \{\phi(u), \phi(w)\}$, 即 $\{\phi(u), \phi(w)\} = \{2, 3\}$, 根据色 2 和 3 的对称性, 不妨设 $\phi(u) = 2, \phi(w) = 3$. 因为 $d(u') \leq 4$, 可以用颜色 1 重染 u , 除非 $\phi(u') = 1$ 并且 u' 至少有两个邻点染 1. 当这种情形发生时, 先用 $\{2, 3\}$ 中不出现在 $N(u')$ 中的一种颜色重染 u' , 进而用颜色 1 重染 u , 然后回到前面的情形加以讨论, 从而总能得到 G 的一个 (2, 0, 0)-染色, 矛盾. $\square$

3 不含 4-圈和 9-圈的 2-连通平面图的结构性质

本节假设 G 是不含 4-圈和 9-圈的 2-连通平面图. 这意味着 G 中所有的面都是简单面, 即面的边界是一个圈. 若 G 中的两个面共享一条边, 则称它们相邻; 若两个相邻的面只有两个公共点, 则称它们正常相邻. 若面 f 与 f' 相邻于公共边 xy , 则用 f_{xy} 来表示 f' .

引理 3.1 若 G 中 8-面与 3-面相邻, 则它们正常相邻.

证明 假设 8-面 $f = [v_1v_2 \cdots v_k]$ 相邻于 3-面 $T = [v_1v_2v]$. 显然, $k \neq 3$; 否则出现 4-圈, 矛盾. 因此 $k \in \{5, 6, 7, 8\}$. 要证明 f 和 T 正常相邻, 只需证明 v 不在 f 上. 若 $v = v_3$, 则 v_2 是一个 2-点, 与引理 2.1(1) 矛盾; 若 $v = v_4$, 则 $v_1v_2v_3v_4v_1$ 是一个 4-圈, 矛盾; 若 $v = v_5$, 则 $v_2v_3v_4v_5v_2$ 是一个 4-圈, 矛盾. 根据对称性, 同理可说明 v 不等同于 v_k, v_{k-1} 和 v_{k-2} , 证毕. $\square$

引理 3.2 在 G 中,

- (1) 3-面不与 3-面或 8-面相邻;
- (2) 7-面至多相邻一个 3-面;
- (3) 6-面至多相邻两个 3-面;
- (4) 5-面至多相邻三个 3-面.

证明 根据假设和引理 3.1, 结论 (1) 显然成立. 现在证明结论 (2). 假设 $f = [v_1v_2 \cdots v_7]$ 相邻两个 3-面, 分别记为 $T = [uv_1v_2]$ 和 $T' = [xyz]$, 其中 $x, y \in V(f)$. 根据引理 3.1, 可得 $u, z \notin V(f)$. 若 $u \neq z$, 则 G 中存在一个通过 u, z 和 f 上所有点的 9-圈, 矛盾. 因此, $u = z$. 根据对称性, 考虑以下三种情形: 当 $xy = v_2v_3$ 时, 4-圈 $uv_1v_2v_3z$ 出现; 当 $xy = v_3v_4$ 时, 4-圈 $uv_1v_2v_3z$ 出现; 当 $xy = v_4v_5$ 时, 4-圈 $uv_2v_3v_4z$ 出现. 无论哪种情形, 总得到矛盾. 类似讨论, 可得结论 (3) 和 (4). $\square$

引理 3.3 设 $T = [uvw]$ 为 G 中的 3-面, 其中 $d(u) \geq 4$. 若 T_{uv} 为 5-面, 则 T_{uw} 不是 5-面.

证明 假设 T_{uw} 也是一个 5-面. 令 $T_{uv} = [uvv_1v_2v_3]$ 和 $T_{uw} = [uww_1w_2w_3]$. 因为 $d(u) \geq 4$ 且 G 为简单图, 故 v, w, w_3 和 v_3 为 u 的 4 个不同的邻点. 根据引理 3.1, 可得 $v \notin V(T_{uw})$ 且

$w \notin V(T_{uv})$. 倘若 $\{v_1, v_2, v_3\} \cap \{w_1, w_2, w_3\} = \emptyset$, 则 G 有 9-圈 $ww_1w_2w_3uv_3v_2v_1vw$, 矛盾. 因此存在 $i, j \in \{1, 2, 3\}$ 使得 $v_i = w_j$. 注意到, $v_3 \neq w_3$. 因为 G 不含 4-圈, $v_1 \notin \{w_1, w_2, w_3\}$ 且 $v_3 \notin \{w_1, w_2\}$, 所以, $v_2 \in \{w_1, w_2, w_3\}$. 但是无论 v_2 与哪个 w_j 相同, 都会导致 4-圈的出现, 矛盾. $\square$

引理 3.4 假设 $f = [uvv_1v_2v_3]$ 和 $g = [vu u_1u_2u_3]$ 为 G 中两个相邻的 5-面. 以下结论成立:

- (1) f 和 g 正常相邻;
- (2) $d(f_{v_1v_2}) \neq 3$;
- (3) 若 $d(u) = 3$, 则 u 不能再关联其他的 5-面;
- (4) 若 $d(u) \geq 4$, 则 $d(g_{uu_1}) \neq 3$.

证明 (1) 假设 f 和 g 不是正常相邻, 那么 $\{u_1, u_2, u_3\} \cap \{v_1, v_2, v_3\} \neq \emptyset$. 由于 $d(u) \geq 3$ 且 G 为简单图, 故有 $u_1 \neq v_3$. 而且 $u_1 \neq v_2, v_1$, 否则 G 中存在 4-圈. 因此, $u_1 \notin \{v_1, v_2, v_3\}$. 根据对称性, $u_3 \notin \{v_1, v_2, v_3\}$, $u_2 \notin \{v_1, v_3\}$. 于是, $u_2 = v_2$. 但此时 G 有 4-圈 $u_3vv_1v_2u_3$, 矛盾.

(2) 假设 $f_{v_1v_2} = [v_1v_2z]$ 为 3-面, 则由引理 3.1 知, $z \notin V(f)$. 若 $z \notin \{u_1, u_2, u_3\}$, 根据结论 (1), G 有 9-圈 $u_1u_2u_3vv_1zv_2v_3uu_1$, 矛盾. 设 $z \in \{u_1, u_2, u_3\}$. 若 $z = v_3$, 则 $u_3vv_1v_2u_3$ 为 4-圈; 若 $z = v_2$, 则 $u_3vv_1u_2u_3$ 为 4-圈; 若 $z = v_1$, 则 $u_1uvv_1u_1$ 为 4-圈. 总得到矛盾.

(3) 假设点 u 还关联另外一个 5-面 h . 由 (1) 知, h 与 f 和 g 均正常相邻. 因此, $V(f) \cup V(g) \cup V(h)$ 构成了一个 9-圈, 矛盾.

(4) 假设 $g_{uu_1} = [uu_1z]$ 是一个 3-面. 根据引理 3.1 知, $z \notin V(g)$. 由结论 (1) 知, f 和 g 为正常相邻. 若 $z \notin \{v_1, v_2, v_3\}$, 则得到一个 9-圈 $zu_1u_2u_3vv_1v_2v_3uz$, 矛盾. 设 z 和某个 v_i 相同, $i \in \{1, 2, 3\}$. 因为 $d(u) \geq 4$, 所以, $z \neq v_3$. 若 $z = v_2$, 则出现 4-圈 uvv_1v_2u , 矛盾. 若 $z = v_1$, 则出现 4-圈 $uv_1v_2v_3u$, 矛盾. $\square$

引理 3.5 设 $f = [vu u_1u_2u_3]$ 为 G 中的 5-面. 若 $g = [uvv_1v_2v_3v_4]$ 为 G 中的 6-面, 则 $u_1 = v_3$ 和 $u_3 = v_2$ 中有且只有一者成立.

证明 若 $V(f) \cap V(g) = \{u, v\}$, 则 G 有 9-圈 $v_1v_2v_3v_4uu_1u_2u_3vv_1$, 矛盾. 因此, $\{u_1, u_2, u_3\} \cap \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \neq \emptyset$. 由于 G 无 4-圈, 因此, $u_2 \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $u_1 \notin \{v_1, v_2\}$, $u_3 \notin \{v_3, v_4\}$. 由于 $d(u) \geq 3$ 及 G 为简单图, 因此, $u_1 \neq v_4$. 同理, $u_3 \neq v_1$. 于是, $u_1 = v_3$ 和 $u_3 = v_2$ 中至少有一者成立. 若两者都成立, 则 G 有 4-圈 $u_3vv_1u_1u_3$, 矛盾. $\square$

引理 3.6 以下结论成立:

(1) 设 $f = [vu u_1u_2u_3]$ 为 G 中的 5-面. 若 $g = [uvv_1v_2v_3v_4]$ 为 G 中的 6-面, $T = [vv_1u_3]$ 为 G 中的 3-面, 则 $u_1 = v_3$.

(2) 设 $f = [vu u_1u_2u_3]$ 为 G 中的 5-面. 若 $g = [uvv_1v_2v_3v_4v_5]$ 为 G 中的 7-面, $T = [vv_1u_3]$ 为 G 中的 3-面, 则 $u_1 = v_4$.

(3) 设 $f = [vu u_1u_2u_3u_4]$ 为 G 中的 6-面. 若 $g = [uvv_1v_2v_3v_4]$ 为 G 中的 6-面, $T = [vv_1u_4]$ 为 G 中的 3-面, 则 $u_1 = v_3$ 和 $u_2 = v_4$ 有且只有一者成立.

证明 (1) 假设 $u_1 \neq v_3$. 根据引理 3.5, 可得 $u_3 = v_2$. 由于 $T = [vv_1u_3]$ 是一个 3-面, G 为简单图, 因此, $v_1v_2 = v_1v_3$. 此表明 G 中仅有面 T 和 g 与 v_1 相关联. 因此, $d(v_1) = 2$, 这与引理 2.1(1) 相矛盾.

(2) 根据引理 3.1 可知, $v_1 \notin V(f)$ 且 $u_3 \notin V(g)$. 若 $\{u_1, u_2\} \cap \{v_2, v_3, v_4, v_5\} = \emptyset$, 则 G 中存在 9-圈 $v_1v_2v_3v_4v_5uu_1u_2u_3v_1$, 矛盾. 否则, $\{u_1, u_2\} \cap \{v_2, v_3, v_4, v_5\} \neq \emptyset$. 若 $u_1 = v_5$, 则 $d(u) = 2$. 这与引理 2.1(1) 矛盾. 若 $u_1 = v_3$, 则出现 4-圈 $u_1uvv_1u_1$; 若 $u_1 = v_2$, 则出现 4-圈 $u_1uvv_1u_1$; 若 $u_2 = v_2$,

则出现 4-圈 $u_2u_3vv_1u_2$; 若 $u_2 = v_3$, 则出现 4-圈 $u_2u_3v_1v_2u_2$; 若 $u_2 = v_4$, 则出现 4-圈 $u_2u_1uv_5u_2$; 若 $u_2 = v_5$, 则出现 4-圈 $u_2u_3vvu_2$. 以上 7 种情形均与假设矛盾. 因此, $u_1 = v_4$.

(3) 由引理 3.1 可知, $v_1 \notin V(f)$ 且 $u_4 \notin V(g)$. 如果 $\{u_1, u_2, u_3\} \cap \{v_2, v_3, v_4\} = \emptyset$, 那么 G 中包含 9-圈 $v_1v_2v_3v_4uu_1u_2u_3u_4v_1$, 矛盾. 否则, 存在 $i \in \{1, 2, 3\}$ 和 $j \in \{2, 3, 4\}$ 使得 $u_i = v_j$. 若 $u_3 = v_2$, 则出现 4-圈 $u_3u_4vv_1u_3$; 若 $u_3 = v_3$, 则出现 4-圈 $u_3u_4v_1v_2u_3$; 若 $u_3 = v_4$, 则出现 4-圈 $u_3u_4vvu_3$. 因此, $u_3 \notin V(g)$. 根据对称性可知, $v_2 \notin V(f)$, 从而, $\{u_1, u_2\} \cap \{v_3, v_4\} \neq \emptyset$. 若 $u_1 = v_4$, 则 $d(u) = 2$, 与引理 2.1(1) 矛盾. 若 $u_2 = v_3$, 则出现 4-圈 $u_2u_1uv_4u_2$, 矛盾. 因此, $u_2 = v_4$ 和 $u_1 = v_3$ 至少有一者成立. 再根据 G 的平面性, $u_2 = v_4$ 和 $u_1 = v_3$ 仅有一者成立. $\square$

引理 3.7 设 G 中 3-点 v 关联三个面 f 、 g 和 h .

(1) 若 f 和 g 都为 5-面, 则 h 为 3-面或 7^+ -面.

(2) 若 f 为 5-面, g 和 h 都为 6^+ -面, 则 g 和 h 中有一个是 7^+ -面.

证明 (1) 显然, $d(h) \neq 4$. 根据引理 3.4(2) 可知, $d(h) \neq 5$. 假设 $d(h) = 6$. 记 $f = [vuu_1u_2u_3]$, $g = [vv_1w_1w_2u_3]$, $h = [uvv_1v_2v_3v_4]$. 由引理 3.4(1) 知, f 和 g 正常相邻, 即 $V(f) \cap V(g) = \{v, u_3\}$. 根据引理 3.5, $u_1 = v_3$ 和 $v_2 = u_3$ 有且只有一者成立. 很明显, $v_2 \neq u_3$, 否则, $u_3v_1w_1w_2u_3$ 是一个 4-圈, 矛盾. 故 $u_1 = v_3$. 若此时 $v_3 = w_1$, 则会出现 4-圈 $u_1u_2u_3w_2w_1$, 矛盾. 因此, $v_3 \neq w_1$. 再一次根据引理 3.5, 可得 $u_3 = v_4$, 这显然与 G 的平面性相矛盾. 所以, h 为 3-面或者 7^+ -面.

(2) 只需证明 g 和 h 不同时为 6-面. 记 $f = [vuu_1u_2u_3]$, $g = [uvv_1v_2v_3v_4]$, $h = [vv_1w_1w_2w_3u_3]$. 对 f 和 g 应用引理 3.5, $u_1 = v_3$ 和 $u_3 = v_2$ 有且只有一者成立. 对 f 和 h 应用引理 3.5, $u_2 = w_2$ 和 $u = w_1$ 有且只有一者成立. 若 $u_3 = v_2$, 根据 G 的平面性, $u_2 \neq w_2$ 且 $u \neq w_1$, 矛盾. 因此, $u_1 = v_3$. 现在圈 $u_1u_2u_3vv_1v_2v_3$ 分离了 u 和 w_1 , 即 $u \neq w_1$. 故 $u_2 = w_2$. 于是, G 中存在一个 5-圈 $u_2u_3vv_1w_1u_2$ 相邻一个 6-面 g , 其公共边为 vv_1 . 显然, $P = vuv_4v_3v_2v_1$ 为 G 中长度为 5 的路. 若 $\{u_3, w_1, w_2\} \cap V(P) = \emptyset$, 则 G 中存在 9-圈 $w_2u_3vvu_4v_3v_2v_1w_1w_2$, 矛盾. 因此, $\{u_3, w_1, w_2\} \cap V(P) \neq \emptyset$. 利用 $u_2 = w_2$, $u_1 = v_3$, 以及 G 无 4-圈, 不难验证 $u_3 \notin V(P)$ 且 $w_1 \notin V(P)$. 于是, $w_2 \in V(P)$. 显然, w_2 不同于 v 、 v_1 和 v_3 ; 若 $w_2 = u$, 则 $vu_3w_3w_2v$ 为 4-圈; 若 $w_2 = v_2$, 则 $vv_1w_2u_3v$ 为 4-圈; 若 $w_2 = v_4$, 则 $u_2u_3vvu_4$ 为 4-圈. 于是, $w_2 \notin V(P)$, 矛盾. 所以, g 和 h 中必有一个 7^+ -面. $\square$

引理 3.8 设 G 中 4-点 v 依次关联面 f_1 、 f_2 、 f_3 和 f_4 .

(1) 若 f_1 和 f_3 都为 3-面, f_2 为 5-面, 则 f_4 为 10^+ -面;

(2) 若 f_1 是唯一的 3-面, f_2 、 f_3 和 f_4 中仅有一个是 5-面, 则剩余的两个面中有一个为 7^+ -面.

证明 (1) 假设 f_4 为 9^- -面. 根据引理 3.2(1) 和 3.2(2) 可知, $d(f_4) \neq 3, 7, 8$. 由于 G 不含 4-圈和 9-圈, 且 G 是 2-连通的, $d(f_4) \neq 4, 9$. 再结合引理 3.3, 可得 $d(f_4) \neq 5$. 下证 $d(f_4) \neq 6$. 假设 $d(f_4) = 6$. 记 $f_1 = [vv_1v_2]$, $f_2 = [vv_2v_3v_4v_5]$, $f_3 = [vv_5v_6]$, $f_4 = [vv_6v_7v_8v_9v_1]$.

由引理 3.1 可知, $v_1, v_6 \notin V(f_2)$ 且 $v_2, v_5 \notin V(f_4)$. 如果 $v_4 = v_7$, 则出现 4-圈 $v_4v_5vv_6v_4$; 如果 $v_4 = v_8$, 则出现 4-圈 $v_4v_5v_6v_7v_4$; 如果 $v_4 = v_9$, 则出现 4-圈 $v_4v_5vv_1v_4$. 由此, $v_4 \notin \{v_7, v_8, v_9\}$. 对称地, $v_3 \notin \{v_7, v_8, v_9\}$. 因此, $\{v_3, v_4\} \cap \{v_7, v_8, v_9\} = \emptyset$. 明显地, 此时 G 中存在 9-圈 $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_9v_1$, 矛盾.

(2) 假设剩余的两个面都是 6^- -面. 根据对称性, 有两种情形需要讨论:

(2.1) $d(f_2) = 5$. 此时 f_3 和 f_4 都为 6^- -面. 注意到, 对每个 $i \in \{3, 4\}$, 有 $d(f_i) \neq 4$. 据引理 3.2(1) 和 3.3 可知, $d(f_4) \neq 3, 5$. 据引理 3.8(1) 和 3.4(4) 可知, $d(f_3) \neq 3, 5$. 因此, $d(f_3) = d(f_4) = 6$. 为方便起见, 设 $f_1 = [vv_1v_2]$, $f_2 = [vv_2v_3v_4v_5]$, $f_3 = [vv_5v_6v_7v_8v_9]$, $f_4 = [vv_9v_{10}v_{11}v_{12}v_1]$. 根据引理 3.5 可知,

$v_2 = v_8$ 和 $v_4 = v_7$ 有且只有一者成立. 若 $v_2 = v_8$, 则出现 4-圈 $v_8v_1vv_9v_8$, 矛盾. 所以, $v_4 = v_7$. 换言之, $v_5v_7 \in E(G)$. 根据引理 3.1 可知, $v_1 \notin V(f_2)$. 注意到, $P = vv_1v_{12}v_{11}v_{10}v_9$ 为 G 中长度为 5 的路. 若 $\{v_5, v_7, v_8\} \cap V(P) = \emptyset$, 则 G 中有 9-圈 $v_7v_5vv_1v_{12}v_{11}v_{10}v_9v_8v_7$, 矛盾. 因此, $\{v_5, v_7, v_8\} \cap V(P) \neq \emptyset$.

显然, $v_5 \neq v, v_1, v_9$. 对 $i = 10, 11, 12$, 观察到圈 $v_4v_3v_2vv_9v_8v_4$ 分离了 v_5 和 v_i . 因此, $v_5 \notin V(P)$.

设 $v_7 \in V(P)$. 显然, $v_7 \neq v, v_9$. 若 $v_7 = v_1$, 则出现 4-圈 $v_1v_2vv_5v_1$; 若 $v_7 = v_{12}$, 则出现 4-圈 $v_7v_5vv_1v_7$; 若 $v_7 = v_{11}$, 则出现 4-圈 $v_7v_8v_9v_{10}v_7$; 若 $v_7 = v_{10}$, 则出现 4-圈 $v_7v_5vv_9v_7$. 以上每种情形均与 G 不含 4-圈矛盾.

设 $v_8 \in V(P)$. 显然, $v_8 \neq v, v_9$. 若 $v_8 = v_1$, 则出现 4-圈 $v_8v_9vv_2v_8$, 矛盾. 若 $v_8 = v_{12}$, 则出现 4-圈 $v_8v_9v_{10}v_{11}v_8$, 矛盾. 若 $v_8 = v_{11}$, 则出现 9-圈 $v_8v_9vv_5v_4v_3v_2v_1v_{12}v_8$, 矛盾. 若 $v_8 = v_{10}$, 则 $d(v_9) = 2$, 与引理 2.1(1) 矛盾.

(2.2) $d(f_3) = 5$. 此时 f_2 和 f_4 都为 6-面. 显然, $d(f_i) \neq 4$, 其中 $i = 2, 4$. 据引理 3.2(1) 和 3.4(4) 可知, $d(f_2) \neq 3, 5$. 同理, $d(f_4) \neq 3, 5$. 因此, f_2 和 f_4 都是 6-面. 设 $f_1 = [vv_1v_2]$, $f_2 = [vv_2v_3v_4v_5v_6]$, $f_3 = [vv_6v_7v_8v_9]$, $f_4 = [vv_9v_{10}v_{11}v_{12}v_1]$. 根据引理 3.1 可知, $v_1 \notin V(f_2)$, $v_2 \notin V(f_4)$. 对 f_2 和 f_3 应用引理 3.5 可知, $v_3 = v_9$ 和 $v_4 = v_7$ 有且只有一者成立. 若 $v_3 = v_9$, 则 G 中存在 4-圈 $v_3v_2v_1vv_3$, 矛盾. 因此, $v_4 = v_7$. 对 f_3 和 f_4 应用引理 3.5 可知, $v_6 = v_{12}$ 和 $v_8 = v_{11}$ 有且只有一者成立. 由于 $v_4v_3v_2vv_9v_8v_7$ 为分离 v_6 和 v_{12} 的圈, 故 $v_8 = v_{11}$. 注意到, $P = v_7v_6vv_9v_8$ 为 G 中长度为 4 的路. 运用类似于情形 (2.1) 中的讨论方法, 可以证明 $\{v_3, v_2, v_1, v_{12}\} \cap V(P) = \emptyset$, 因此, G 有 9-圈 $v_4v_3v_2v_1v_{12}v_{11}v_9vv_6v_4$, 矛盾. $\square$

在下文的讨论中, 若 3-点 v 依次关联面 f_1, f_2 和 f_3 使得 $d(f_1) \leq d(f_2) \leq d(f_3)$, 则称 v 是一个 $3(d(f_1), d(f_2), d(f_3))$ -点.

引理 3.9 G 只含以下 9 类三角 3-点: (1) $3^{(3,5,5)}$ 、(2) $3^{(3,5,10^+)}$ 、(3) $3^{(3,6,7)}$ 、(4) $3^{(3,6,10^+)}$ 、(5) $3^{(3,7,7)}$ 、(6) $3^{(3,7^+,10^+)}$ 、(7) $3^{(3,5,6)}$ 、(8) $3^{(3,5,7)}$ 和 (9) $3^{(3,6,6)}$. 此外, 若 G 中存在 $3^{(3,5,6)}$ -、 $3^{(3,5,7)}$ - 和 $3^{(3,6,6)}$ -点, 则 G 中存在一个 2-连通点导出子图 H 满足: H 没有 $3^{(3,5,6)}$ -、 $3^{(3,5,7)}$ - 和 $3^{(3,6,6)}$ -点, 且 H 的外面边界为 3-圈.

证明 假设 G 中 3-点 v 依次关联面 f_1, f_2 和 f_3 使得 $d(f_1) = 3$ 且 $d(f_2) \leq d(f_3)$. 由于 G 中不存在 4-圈, 所以, $d(f_3) \geq d(f_2) \geq 5$. 首先假设 $d(f_2) = 5$. 若 $d(f_3) \in \{5, 6, 7\}$, 则分别得到 (1)、(7) 和 (8). 根据引理 3.2(1) 可知, $d(f_3) \neq 8$. 考虑到 G 中不存在 9-面, $d(f_3) \geq 10$, 得到 (2). 设 $d(f_2) = 6$. 若 $d(f_3) \in \{6, 7\}$, 则得到 (9) 和 (3). 同上可知, $d(f_3) \notin \{8, 9\}$, 从而得 (4). 最后假设 $d(f_2) \geq 7$. 若 $d(f_2) = d(f_3) = 7$, 则得 (5). 否则, 鉴于 $d(f_3) \neq 8, 9$, 得到 (6).

假设 G 中存在 $3^{(3,5,6)}$ -、 $3^{(3,5,7)}$ - 或 $3^{(3,6,6)}$ -点 v . 根据引理 3.6 可知, G 中存在一个点导出子图 G' , 其中, G' 以一个 3-圈为外面边界且 G' 不包含 v . 因为 G 为 2-连通, 故 G' 也为 2-连通. 又因为 G 为有限图, 通过有限次归纳可得到 G 的 2-连通点导出子图 H 满足: H 中不存在任何 $3^{(3,5,6)}$ -、 $3^{(3,5,7)}$ - 和 $3^{(3,6,6)}$ -点, 且 H 的外面边界为 3-圈. $\square$

为了简化记号, 引理 3.9 中的第 i -类三角 3-点将简称为 $3^{(i)}$ -点. 例如, $3^{(1)}$ -点即为 $3^{(3,5,5)}$ -点, $3^{(2)}$ -点即为 $3^{(3,5,10^+)}$ -点, 而 $3^{(9)}$ -点则为 $3^{(3,6,6)}$ -点.

4 可分性

设 G 为定理 1.4 的极小反例, 显然, G 为连通图. 称有割点的连通图为可分图, 无割点的连通图为不可分图.

引理 4.1 设 $G = (V, E, F)$ 为定理 1.4 的极小反例, 则 G 可分.

证明 反设 G 不可分, 则 G 是 2- 连通的. 从而, G 中的面都是简单面, 即每个面的边界都是圈. 这样 G 中不存在 4- 面和 9- 面. 接下来, 将根据 $3^{(7)-}$ 、 $3^{(8)-}$ 和 $3^{(9)-}$ 点的存在性进行分类讨论.

首先假设 G 中不存在 $3^{(7)-}$ 、 $3^{(8)-}$ 和 $3^{(9)-}$ 点.

在这种情形下, 定义初始权函数 ω 如下: 对于任意的 $v \in V$, 有 $\omega(v) = d(v) - 6$; 对于任意的 $f \in F$, 有 $\omega(f) = 2d(f) - 6$. 由握手引理 $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| = \sum_{f \in F} d(f)$ 和 Euler 公式 $|V| - |E| + |F| = 2$ 得

$$\sum_{x \in V \cup F} \omega(x) = \sum_{v \in V} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F} (2d(f) - 6) = -12.$$

若可以设计恰当的权转移规则使得权转移结束时所得到的新权 ω' 满足: 对于任意的 $x \in V \cup F$, 有 $\omega'(x) \geq 0$, 则导致矛盾:

$$0 \leq \sum_{x \in V \cup F} \omega'(x) = \sum_{x \in V \cup F} \omega(x) = -12.$$

这个矛盾建立起定理 1.4 的极小反例 G 的可分性.

在给出权转移之前, 需介绍两个新的概念. 设 v 为三角 4- 点. 若 v 只关联一个 $(3, 4, 5^+)$ - 面, 则称 v 为特殊的. 若 v 关联两个不相邻的 3- 面, 则称 v 为弱的. 用 4^s - 和 4^w - 点分别表示特殊 4- 点和弱 4- 点.

权转移规则定义如下:

(R1) 每个 5^+ - 面转权 $\frac{2d(f)-6}{d(f)}$ 到每个相关联的点.

(R2) 设 v 为非三角 3- 点. 若运用 (R1) 之后, v 的新权仍为负数, 则 v 再从相邻的 5^+ - 邻点等额地获得权使得 $\omega'(v) = 0$.

(R3) 设 3- 点 v 相邻 v_1 、 v_2 和 v_3 , $f = [v v_2 v_3]$ 为 3- 面, 其中 $d(v_2) \leq d(v_3)$. 对于 $i \in \{1, 2, 3\}$, 令 q_i 为下述规则中由 v_i 转给 v 的权.

(R3.1) 设 $d(v_1) \geq 5$. 若 v 分别为 $3^{(1)-}$ 、 $3^{(2)-}$ 、 $3^{(3)-}$ 、 $3^{(4)-}$ 、 $3^{(5)-}$ 或 $3^{(6)-}$ 点, 则令 (q_1, q_2, q_3) 分别等于 $(\frac{7}{5}, 0, 0)$ 、 $(\frac{4}{5}, 0, 0)$ 、 $(\frac{6}{7}, 0, 0)$ 、 $(\frac{3}{5}, 0, 0)$ 、 $(\frac{5}{7}, 0, 0)$ 或 $(\frac{16}{35}, 0, 0)$.

(R3.2) 设 $d(v_1) \leq 4$.

(R3.2.1) 若 f 为 $(3, 3, 6^+)$ - 或 $(3, 4^w, 5^+)$ - 面, 且 v 分别为 $3^{(1)-}$ 、 $3^{(2)-}$ 、 $3^{(3)-}$ 、 $3^{(4)-}$ 、 $3^{(5)-}$ 或 $3^{(6)-}$ 点, 则 (q_1, q_2, q_3) 分别等于 $(0, 0, \frac{7}{5})$ 、 $(0, 0, \frac{4}{5})$ 、 $(0, 0, \frac{6}{7})$ 、 $(0, 0, \frac{3}{5})$ 、 $(0, 0, \frac{5}{7})$ 或 $(0, 0, \frac{16}{35})$.

(R3.2.2) 若 f 为 $(3, 4^s, 5^+)$ - 面且 v 为 $3^{(1)-}$ 点, 则 $(q_1, q_2, q_3) = (0, 0, \frac{16}{35})$.

(R3.2.3) 若 f 为 $(3, 5^+, 5^+)$ - 面, 且 v 分别为 $3^{(1)-}$ 、 $3^{(2)-}$ 、 $3^{(3)-}$ 、 $3^{(4)-}$ 、 $3^{(5)-}$ 或 $3^{(6)-}$ 点, 则 (q_1, q_2, q_3) 分别等于 $(0, \frac{7}{10}, \frac{7}{10})$ 、 $(0, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ 、 $(0, \frac{3}{7}, \frac{3}{7})$ 、 $(0, \frac{3}{10}, \frac{3}{10})$ 、 $(0, \frac{5}{14}, \frac{5}{14})$ 或 $(0, \frac{8}{35}, \frac{8}{35})$.

(R4) 4^s - 点给它的三角 3- 邻点转权 $\frac{33}{35}$.

接下来将证明: 对任意的 $x \in V \cup F$, 都有 $\omega'(x) \geq 0$.

设 $f \in F$. 由于 G 为简单图, $d(f) \geq 3$. 注意到, $d(f) \neq 4$. 当 $d(f) = 3$ 时, f 不参与转权, 因此, $\omega'(f) = \omega(f) = 2d(f) - 6 = 0$. 当 $d(f) \geq 5$ 时, 根据 (R1) 可得 $\omega'(f) = (2d(f) - 6) - d(f) \times \frac{2d(f)-6}{d(f)} = 0$.

设 $v \in V$. 根据引理 2.1(1) 可知, $d(v) \geq 3$. 为了方便, 用 m_i 表示与 v 关联的 i - 面的个数. 特别地, 记 $t = m_3$, $p = m_5$. 由于 G 中不存在 4- 圈, $t \leq \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$. 首先, 根据 (R1), 表 1 给出了 5^+ - 面 f 转给与它相关联的点 v 的权数.

以下将通过 10 个断言表明: 对任意的 $v \in V$, 有 $\omega'(v) \geq 0$.

断言 4.1 若 $d(v) = 3$, 则 $\omega'(v) \geq 0$.

表 1 面 f 转给与它相关联的点的权数

$d(f)$	≥ 10	8	7	6	5
权数	$\geq \frac{7}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{8}{7}$	1	$\frac{4}{5}$

证明 显然, $\omega(v) = -3$, $t \leq 1$. 根据引理 2.1(2) 可知, v 至少有一个 5^+ - 邻点. 若 $t = 0$, 则 v 是非三角 3- 点. 根据 (R2) 可知, $\omega'(v) \geq 0$. 下设 $t = 1$. 设 $f = [vv_2v_3]$ 为与 v 相关联的 3- 面, 其中 $d(v_2) \leq d(v_3)$. 记 v_1 为 v 的外邻点. 根据引理 3.9 及 G 无 $3^{(i)}$ - 点, $i = 7, 8, 9$, v 只能属于前 1 至 6 类三角 3- 点中的某一类. 若 $d(v_1) \geq 5$, 由 (R1) 和 (R3.1) 知, $\omega'(v) \geq 0$. 设 $d(v_1) \leq 4$. 若 $d(v_2) \geq 5$, 则 f 为 $(3, 5^+, 5^+)$ - 面, 根据 (R1) 和 (R3.2.3) 知, $\omega'(v) \geq 0$. 设 $d(v_2) \leq 4$. 由引理 2.1(1) 知, $3 \leq d(v_2) \leq 4$. 由引理 2.1(2) 知, $d(v_3) \geq 5$. 若 $d(v_2) = 3$, 根据引理 2.1(3) 可知, $d(v_3) \geq 6$, 即 f 为 $(3, 3, 6^+)$ - 面, 由 (R1) 和 (R3.2.1) 知, $\omega'(v) \geq 0$. 设 $d(v_2) = 4$. 若 v_2 为 4^w - 点, 即 f 为 $(3, 4^w, 5^+)$ - 面, 根据 (R1) 和 (R3.2.1) 知, $\omega'(v) \geq 0$. 设 v_2 为 4^s - 点. 根据定义, f 为 $(3, 4^s, 5^+)$ - 面. 根据 (R4), v_2 转权 $\frac{33}{35}$ 给 v . 若 v 为 $3^{(1)}$ - 点, 根据 (R1) 和 (R3.2.2) 可知, $\omega'(v) \geq -3 + 2 \times \frac{4}{5} + \frac{33}{35} + \frac{16}{35} = 0$. 若 v 不是 $3^{(1)}$ - 点, 根据 (R1) 可知, v 从关联的两个非 3- 面上至少拿权 $\min\{\frac{4}{5} + \frac{7}{5}, 1 + \frac{8}{7}, 1 + \frac{7}{5}, \frac{8}{7} \times 2, \frac{8}{7} + \frac{7}{5}\} = \frac{15}{7}$, 因此, $\omega'(v) \geq -3 + \frac{33}{35} + \frac{15}{7} = \frac{3}{35} > 0$. $\square$

断言 4.2 若 $d(v) = 4$, 则 $\omega'(v) \geq 0$.

证明 此时, $\omega(v) = -2$. 显然, $t \leq 2$. 若 $t = 0$, 则 v 关联 4 个 5^+ - 面, 根据 (R1) 可知, $\omega'(v) \geq -2 + 4 \times \frac{4}{5} = \frac{6}{5} > 0$. 设 $t = 2$. 若 v 不关联任何 5- 面, 根据 (R1) 可知, $\omega'(v) \geq -2 + 2 \times 1 = 0$. 否则, 根据引理 3.8(1) 可知, v 关联一个 5- 面和一个 10^+ - 面, 根据 (R1) 可知, $\omega'(v) \geq -2 + \frac{4}{5} + \frac{7}{5} = \frac{1}{5} > 0$. 最后假设 $t = 1$. 由于 G 无 4- 面, v 关联三个 5^+ - 面. 若 v 不是 4^s - 点, 则根据 (R1) 可知, $\omega'(v) \geq -2 + 3 \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5} > 0$. 设 v 为 4^s - 点. 根据引理 3.3 和 3.4(4) 可知, $p \leq 1$. 若 $p = 0$, 由 (R1) 和 (R4), 有 $\omega'(v) \geq -2 + 1 \times 3 - \frac{33}{35} = \frac{2}{35} > 0$. 否则, $p = 1$. 根据引理 3.8(2), v 必定关联一个 7^+ - 面. 根据 (R1) 和 (R4) 可知, $\omega'(v) \geq -2 + \frac{4}{5} + 1 + \frac{8}{7} - \frac{33}{35} = 0$. $\square$

从现在起, 假设 v 为 k - 点, 其中 $k \geq 5$. 设 v 的邻点按某圈序排列为 $v_1, v_2, \dots, v_k$. 用 f_i 表示由边 vv_i 和 vv_{i+1} 所张成的面, 其中 i 取模 k . 由 (R1) 可知, v 从所关联的 5^+ - 面上得权. 同时, 由规则 (R2) 和 (R3) 可知, v 只给 3- 邻点转权. 由定义可知, 若边 vv_i 不是三角形的, 则 v_i 为 v 的孤立邻点. 若 v 的孤立 3- 邻点关联 3- 面, 则称它为悬挂的. 为便于应用, 将规则 (R2) 和 (R3) 中的相关内容重新改述如下:

观察 4.1 假设 v_i 为 5^+ - 点 v 的 3- 邻点.

(1) 若 v_i 为 v 的悬挂 3- 邻点, 根据 (R3.1), 以及 v_i 为 $3^{(1)}$ -、 $3^{(2)}$ -、 $3^{(3)}$ -、 $3^{(4)}$ -、 $3^{(5)}$ - 或 $3^{(6)}$ - 点, v 分别给 v_i 转权 $\frac{7}{5}$ 、 $\frac{4}{5}$ 、 $\frac{6}{7}$ 、 $\frac{3}{5}$ 、 $\frac{5}{7}$ 或 $\frac{16}{35}$.

(2) 设 v_i 为 v 的孤立非悬挂 3- 邻点. 结合引理 3.7(1) 并运用 (R2) 可得:

(2.1) 当 v_i 关联 2 个 5- 面时, v 给 v_i 转权至多为 $\frac{9}{35}$;

(2.2) 当 v_i 关联 1 个 5- 面时, v 给 v_i 转权至多为 $\frac{2}{35}$;

(2.3) 当 v_i 关联 0 个 5- 面时, v 给 v_i 转权为 0.

(3) 假设 v_i 是 v 的三角 3- 邻点, $f_i = [vv_iv_{i+1}]$ 为相应的 3- 面. 若 v_i 的外邻点为 5^+ - 点, 则根据 (R3.1) 可知, v 不给 v_i 转权. 下设 v_i 的外邻点是 4^- - 点.

(3.1) 若 v_{i+1} 为 3- 点或 4^w - 点, 根据 (R3.2.1) 以及 v_i 为 $3^{(1)}$ -、 $3^{(2)}$ -、 $3^{(3)}$ -、 $3^{(4)}$ -、 $3^{(5)}$ - 或 $3^{(6)}$ - 点, v 分别给 v_i 转权 $\frac{7}{5}$ 、 $\frac{4}{5}$ 、 $\frac{6}{7}$ 、 $\frac{3}{5}$ 、 $\frac{5}{7}$ 或 $\frac{16}{35}$.

(3.2) 若 v_{i+1} 为 4^s - 点, 根据 (R3.2.2) 以及 v_i 是否为 $3^{(1)}$ - 点, v 给 v_i 转权 $\frac{16}{35}$ 或 0.

(3.3) 若 v_{i+1} 为 5^+ - 点, 根据 (R3.2.3) 以及 v_i 为 $3^{(1)}$ -, $3^{(2)}$ -, $3^{(3)}$ -, $3^{(4)}$ -, $3^{(5)}$ - 或 $3^{(6)}$ - 点, v 分别给 v_i 转权 $\frac{7}{10}$ 、 $\frac{2}{5}$ 、 $\frac{3}{7}$ 、 $\frac{3}{10}$ 、 $\frac{5}{14}$ 或 $\frac{8}{35}$.

根据观察 4.1, 可将 v 转给其 3- 邻点 v_i 的权数从大到小依次排列为 $\frac{7}{5}$ 、 $\frac{6}{7}$ 、 $\frac{4}{5}$ 、 $\frac{5}{7}$ 、 $\frac{7}{10}$ 、 $\frac{3}{5}$ 、 $\frac{16}{35}$ 、 $\frac{3}{7}$ 、 $\frac{2}{5}$ 、 $\frac{5}{14}$ 、 $\frac{3}{10}$ 、 $\frac{9}{35}$ 、 $\frac{8}{35}$ 、 $\frac{2}{35}$ 和 0. 特别注意到, v_i 从 v 得权 $\frac{7}{5}$ 、 $\frac{6}{7}$ 或 $\frac{4}{5}$ 当且仅当 v_i 分别为 $3^{(1)}$ -, $3^{(3)}$ - 或 $3^{(2)}$ - 点.

命题 4.1 假设 v_i 为 5^+ - 点 v 的 $3^{(1)}$ - 邻点, 则 v_{i-2} 、 v_{i-1} 、 v_{i+1} 和 v_{i+2} 都不是 $3^{(1)}$ - 点. 此外,

(1) 若 vv_i 是三角的, 则 v_{i-1} 和 v_{i+1} 中必有一个点从 v 拿权至多 $\frac{2}{35}$;

(2) 若 vv_i 不是三角的, 则 v_{i-1} 和 v_{i+1} 都从 v 拿权至多 $\frac{2}{35}$.

证明 由 $3^{(1)}$ - 点的定义, v_i 关联一个 3- 面和两个 5- 面. 根据边 vv_i 是否为三角的, 分两种情形进行讨论:

(1) 假设 vv_i 是三角的. 不妨设 $T = f_i = [vv_iv_{i+1}]$ 为 vv_i 所关联的 3- 面, 则 $T_{vv_i} = f_{i-1}$ 和 $T_{v_iv_{i+1}}$ 均为 5- 面. 根据引理 3.4(2) 和 3.4(4) 可知, f_{i-2} 既不是 3- 面也不是 5- 面, 故 f_{i-2} 为 6^+ - 面. 因此, v_{i-1} 和 v_{i-2} 都不是 $3^{(1)}$ - 点. 再根据引理 3.3 可知, f_{i+1} 不能为 5- 面. 所以, f_{i+1} 也只能为 6^+ - 面, 从而 v_{i+1} 和 v_{i+2} 也都不是 $3^{(1)}$ - 点. 下面说明 v_{i-1} 从 v 处至多拿权 $\frac{2}{35}$: 根据引理 3.4(2) 可知, v_{i-1} 为非三角 3- 点或 4^+ - 点. 若 $d(v_{i-1}) \geq 4$, 则 v_{i-1} 从 v 处不拿权. 否则 $d(v_{i-1}) = 3$. 此时, v_{i-1} 为 v 的孤立非悬挂点. 根据引理 3.4(2) 和 3.4(3) 可知, v_{i-1} 只能关联一个 5- 面. 根据观察 4.1(2.2) 可知, v_{i-1} 至多从 v 拿权 $\frac{2}{35}$.

(2) 假设 vv_i 不是三角的. 根据 $3^{(1)}$ - 点的定义可知, f_{i-1} 和 f_i 都是 5- 面, 且 v_i 为 v 的悬挂邻点. 根据引理 3.4(4) 可知, f_{i-2} 不是 3- 面. 由引理 3.4(2) 知, 它也不能是 5- 面. 所以, f_{i-2} 是 6^+ - 面, 从而, v_{i-1} 和 v_{i-2} 都不能为 $3^{(1)}$ - 点. 类似地, v_{i+1} 和 v_{i+2} 也不能为 $3^{(1)}$ - 点. 根据引理 3.4(2) 可知, v_{i-1} 不为三角 3- 点. 像情形 (1) 那样, v_{i-1} 和 v_{i+1} 至多从 v 处拿权 $\frac{2}{35}$. $\square$

令 v 为 5^+ - 点. 由 (R1) 可知, v 从各相关联的 5^+ 面中至少拿权 $\frac{4}{5}$. 与此同时, v 仅需给其 3- 邻点转权至多 $\frac{7}{5}$, 其次至多为 $\frac{6}{7}$. 记 m 为 v 的 $3^{(1)}$ - 邻点的个数. 根据命题 4.1 和 $t \leq \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$ 可得

$$\begin{aligned} \omega'(v) &\geq d(v) - 6 + \frac{4}{5}(d(v) - t) - \left(\frac{7}{5} + \frac{2}{35} + \frac{6}{7}\right)m - \frac{6}{7}(d(v) - 3m) \\ &= \frac{33}{35}d(v) - \frac{4}{5}t - 6 + \frac{9}{35}m \\ &\geq \frac{33}{35}d(v) - \frac{4}{5}t - 6 \\ &\geq \frac{19}{35}d(v) - 6. \end{aligned} \quad (4.1)$$

根据 (4.1) 可直接得到下面的断言:

断言 4.3 若 $d(v) \geq 12$, 则 $\omega'(v) > 0$.

断言 4.4 若 $d(v) = 11$, 则 $\omega'(v) > 0$.

证明 显然, $t \leq 5$. 根据 (4.1), 可得 $\omega'(v) \geq \frac{33}{35}d(v) - \frac{4}{5}t - 6 \geq \frac{33}{35} \times 11 - \frac{4}{5} \times 5 - 6 = \frac{13}{35} > 0$. $\square$

断言 4.5 若 $d(v) = 10$, 则 $\omega'(v) \geq 0$.

证明 显然, $t \leq 5$. 若 $t \leq 4$, 则根据 (4.1) 可知, $\omega'(v) \geq \frac{33}{35}d(v) - \frac{4}{5}t - 6 \geq \frac{33}{35} \times 10 - \frac{4}{5} \times 4 - 6 = \frac{8}{35} > 0$. 设 $t = 5$. 根据引理 3.3 可知, $p \leq 2$. 运用引理 3.4(2) 可知, $m = 0$. 因此, $\omega'(v) \geq 10 - 6 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 10 \times \frac{6}{7} = \frac{1}{35} > 0$. $\square$

断言 4.6 若 $d(v) = 9$, 则 $\omega'(v) \geq 0$.

证明 显然, $t \leq 4$. 当 $t \leq 3$ 时, 根据 (4.1) 可得 $\omega'(v) \geq \frac{33}{35}d(v) - \frac{4}{5}t - 6 \geq \frac{33}{35} \times 9 - \frac{4}{5} \times 3 - 6 = \frac{3}{35} > 0$. 设 $t = 4$. 不妨设 f_1, f_3, f_5 和 f_7 均为 3- 面. 根据引理 3.3 可知, f_2, f_4, f_6, f_8 和 f_9 中至多有两个面为 5- 面, 即 $p \leq 2$. 根据引理 3.4(2) 可知, $v_2, v_3, \dots, v_7$ 都不是 $3^{(1)}$ - 点. 结合命题 4.1 可得 $m \leq 1$. 先设 $m = 1$. 若 $p \leq 1$, 根据命题 4.1 可知, $\omega'(v) \geq 9 - 6 + \frac{4}{5} + 4 \times 1 - (\frac{7}{5} + \frac{2}{35}) - 7 \times \frac{6}{7} = \frac{12}{35} > 0$. 若 $p = 2$, 则有 $\omega'(v) \geq 9 - 6 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - (\frac{7}{5} + \frac{2}{35}) - 7 \times \frac{6}{7} = \frac{1}{7} > 0$. 再设 $m = 0$. 若 $p \leq 1$, 则有 $\omega'(v) \geq 9 - 6 + \frac{4}{5} + 4 \times 1 - 9 \times \frac{6}{7} = \frac{3}{35} > 0$. 设 $p = 2$. 若 v 至多相邻 8 个 3- 点, 则 $\omega'(v) \geq 9 - 6 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 8 \times \frac{6}{7} = \frac{26}{35} > 0$. 否则, v 的邻点全是 3- 点. 若 $d(f_k) = 5, k \in \{2, 4, 6, 8, 9\}$, 由于 G 无 $3^{(3,5,i)}$ - 点, $i = 5, 6, 7, 8, 9, v_k$ 和 v_{k+1} 只能为 $3^{(3,5,10^+)}$ - 点, 即它们分别从 v 各拿权 $\frac{4}{5}$. 注意到 f_8 和 f_9 不能同时为 5- 面. 这样, 无论两个 5- 面的位置如何, v 至少有 4 个 3- 邻点各自从 v 处至多得权 $\frac{4}{5}$. 因此, $\omega'(v) \geq 9 - 6 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 5 \times \frac{6}{7} - 4 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{35} > 0$. $\square$

断言 4.7 若 $d(v) = 8$, 则 $\omega'(v) \geq 0$.

证明 易知, $\omega(v) = 2, t \leq 4$. 当 $t \leq 1$ 时, 由 (4.1) 可知, $\omega'(v) \geq \frac{33}{35}d(v) - \frac{4}{5}t - 6 \geq \frac{33}{35} \times 8 - \frac{4}{5} \times 1 - 6 = \frac{26}{35} > 0$. 若 $t = 2$, 根据引理 3.3、3.4(2) 和 3.4(4) 可知, v 至少关联两个 6^+ - 面, 从而 $p \leq 4$. 运用命题 4.1(1) 可得 $\omega'(v) \geq 2 + 2 \times 1 + 4 \times \frac{4}{5} - m \times (\frac{7}{5} + \frac{2}{35}) - \frac{6}{7} \times (8 - 2m) = \frac{12}{35} + \frac{9}{35}m > 0$. 还需讨论 $t = 3$ 和 $t = 4$ 两种情形.

先考虑 $t = 4$. 不妨设 f_i 为 3- 面, $i = 1, 3, 5, 7$. 根据引理 3.3 可知, $p \leq 2$. 再由引理 3.4(2) 可知, $m = 0$. 若 v 至少有两个 4^+ - 邻点, 则 $\omega'(v) \geq 2 + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 6 \times \frac{6}{7} = \frac{16}{35} > 0$. 设 v 至多有一个 4^+ - 邻点, 即 v 至少有 7 个 3- 邻点. 若 v 恰好相邻 8 个 3- 点, 则 v 关联 4 个 $(3, 3, 8)$ - 面. 由引理 2.4 可知, 这些 3- 面中, 必定有一个是富的. 不妨设 f_1 是富的, 即 f_1 的两个外邻点都是 5^+ - 点. 由 (R3.1) 知, v_1 和 v_2 均不从 v 处拿权. 因此, $\omega'(v) \geq 2 + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 6 \times \frac{6}{7} = \frac{16}{35} > 0$. 设 v 恰好相邻 7 个 3- 点. 不妨设 v_1 为 4^+ - 点, 即 f_1 为 $(3, 4^+, 8)$ - 面. 此时其余的 3- 面均为 $(3, 3, 8)$ - 面. 若 v_2 的外邻点为 5^+ - 点, 则 v_1 和 v_2 不从 v 拿权; 若 v_2 的外邻点是 4^- - 点, 根据引理 2.5 可知, 与 v 相关联的三个 $(3, 3, 8)$ - 面中有一个是富的, 从而, v 有三个邻点不从 v 拿权, 总可得 $\omega'(v) > 0$.

再考虑 $t = 3$. 根据引理 3.3、3.4(2) 和 3.4(4) 可知, $p \leq 2$. 若 $p = 0$, 则 $m = 0$, 可得 $\omega'(v) \geq 2 + 5 \times 1 - 8 \times \frac{6}{7} = \frac{1}{7} > 0$. 设 $p = 1$. 根据命题 4.1 可知, $m \leq 1$. 若 $m = 0$, 则 $\omega'(v) \geq 2 + 4 \times 1 + \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - 6 \times \frac{6}{7} = \frac{2}{35} > 0$. 设 $m = 1$. 运用命题 4.1(1) 可得 $\omega'(v) \geq 2 + 4 \times 1 + \frac{4}{5} - (\frac{7}{5} + \frac{2}{35}) - 6 \times \frac{6}{7} = \frac{7}{35} > 0$. 现在设 $p = 2$. 令 f_i 和 f_j 为 v 所关联的两个 5- 面. 由于 $t = 3$ 且与 v 相关联的三个 3- 面彼此不相邻, f_i 和 f_j 中至少有一个面与某一个 3- 面相邻, 如 f_i . 根据引理 3.4(2) 可知, f_i 和 f_j 不相邻, 从而, v_i, v_{i+1}, v_j 和 v_{j+1} 是 4 个不同的点. 由命题 4.1 知 $m \leq 2$. 若 $m = 0$, 则 $\omega'(v) \geq 2 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{6}{7} - 4 \times \frac{4}{5} = \frac{1}{35} > 0$. 若 $m = 1$, 则运用命题 4.1(1) 可知, $\omega'(v) \geq 2 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - (\frac{7}{5} + \frac{2}{35}) - 2 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{6}{7} = \frac{2}{35} > 0$. 设 $m = 2$. 再次运用命题 4.1 可得 $\omega'(v) \geq 2 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times (\frac{7}{5} + \frac{2}{35}) - 4 \times \frac{6}{7} = \frac{9}{35} > 0$. $\square$

断言 4.8 若 $d(v) = 7$, 则 $\omega'(v) \geq 0$.

证明 此时 $\omega(v) = 1$ 且 $t \leq 3$. 若 $t = 0$, 根据 (4.1) 可知, $\omega'(v) \geq \frac{33}{35} \times 7 - \frac{4}{5} \times 0 - 6 = \frac{3}{5} > 0$. 若 $t = 1$, 则 $p \leq 4$, 根据 (4.1) 可得 $\omega'(v) \geq 1 + 2 \times 1 + 4 \times \frac{4}{5} - (\frac{7}{5} + \frac{2}{35} + \frac{6}{7})m - \frac{6}{7}(7 - 3m) = \frac{1}{5} + \frac{9}{35}m \geq \frac{1}{5} > 0$. 尚有 $t = 2$ 和 $t = 3$ 两种情形需要讨论.

先来讨论情形 $t = 3$.

不失一般性, 假设 f_1, f_3 和 f_5 均为 3- 面. 根据引理 3.3 和 3.4(2) 可知, $p \leq 2$. 依定义, v_7 为 v 的孤立邻点. 根据 v_7 是否为 v 的悬挂 3- 邻点, 分两种子情形讨论如下:

(1) v_7 是 v 的悬挂 3- 邻点. 此时, v_7 关联一个异于 f_6 和 f_7 的 3- 面. 由引理 3.4(4) 知, $m = 0$.

运用引理 3.2(1) 和 3.2(2) 可知, f_6 和 f_7 不能为 7- 面和 8- 面. 再加上 G 中无 4- 面和 9- 面, 对每个 $i \in \{6, 7\}$, f_i 为 5- 面、6- 面或为 10^+ - 面. 不妨设 $d(f_6) \leq d(f_7)$. 因为 G 中没有 $3^{(3,5,6)}$ - 点, f_6 和 f_7 中必有一个面为 10^+ - 面, 不妨设 f_7 为 10^+ - 面. 先设 $p \leq 1$. 若存在 $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$, 使得 $d(v_i) \geq 4$, 则有 $\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 2 \times 1 + \frac{4}{5} - \frac{4}{5} - 5 \times \frac{6}{7} = \frac{4}{35} > 0$. 否则, $d(v_i) = 3$ 对所有的 $i = 1, 2, \dots, 6$ 成立. 此时根据引理 2.4 可知, 存在一个富 3- 面 f_k , 其中 $k \in \{1, 3, 5\}$. 由定义可知, f_k 的两个外邻点都是 5^+ - 点, 由 (R3.2.1) 可知, v_k 和 v_{k+1} 都不从 v 处拿权. 因此, $\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 2 \times 1 + \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \times 2 - 4 \times \frac{6}{7} = \frac{11}{35} > 0$. 再设 $p = 2$. 此时, 两个 5- 面只可能为 f_2 和 f_6 . 易知, v_2 、 v_3 和 v_6 从 v 处最多拿权 $\frac{4}{5}$. 于是, $\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{6}{7} = \frac{3}{35} > 0$.

(2) v_7 不是 v 的悬挂 3- 邻点.

根据引理 3.4(4) 可知, v_2 、 v_3 、 v_4 和 v_5 都不能为 $3^{(1)}$ - 点, 且 v_7 至多关联一个 5- 面, 因此, $m \leq 1$. 若 $d(v_7) \geq 4$, 则 v_7 不拿权. 否则, v_7 为 v 的孤立非悬挂 3- 邻点. 由观察 4.1(2.2) 知, v_7 从 v 处仅仅拿权 $\frac{2}{35}$. 因此, v_7 从 v 处至多拿权 $\frac{2}{35}$. 若存在某个 $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ 使得 $d(v_i) \geq 4$, 则 v_i 不从 v 处拿权. 否则, v 所关联的 3- 面都是 $(3, 3, 7)$ - 面. 由引理 2.4 知, 这些 $(3, 3, 7)$ - 面中必有一个是富的, 因此, v 有两个三角邻点不从 v 处拿权. 这样, $v_1, v_2, \dots, v_6$ 中必存在一个点不从 v 处拿权. 先设 $m = 0$. 若 $p \leq 1$, 则 $\omega'(v) \geq 1 + 3 \times 1 + \frac{4}{5} - \frac{2}{35} - 5 \times \frac{6}{7} = \frac{12}{35} > 0$. 否则, $p = 2$. 根据对称性、引理 3.3 和 3.4(4) 可知, 可唯一确定这两个 5- 面为 f_2 和 f_6 . 易见 v_2 和 v_3 分别从 v 处至多拿权 $\frac{4}{5}$. 于是, $\omega'(v) \geq 1 + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{2}{35} - 2 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{6}{7} = \frac{13}{35} > 0$. 再设 $m = 1$. 根据对称性, 不妨令 v_1 为 $3^{(1)}$ - 点. 根据 $3^{(1)}$ - 点的定义可知, f_7 为 5- 面, 与 f_1 相邻于 $v_1 v_2$ 的那个面也是 5- 面. 若 v_2 为 5^+ - 点, 根据 (R3.2.3) 可知, v 转给 v_1 的权为 $\frac{7}{10}$, 因此, $\omega'(v) \geq 1 + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{2}{35} - \frac{7}{10} - 4 \times \frac{6}{7} = \frac{31}{70} > 0$. 若 v_2 为 4- 点, 根据引理 3.4(2) 可知, v_2 仅关联一个 3- 面, 即 v_2 为特殊点. 由观察 4.1(3.2) 可知, v 转给 v_1 的权为 $\frac{16}{35}$. 因此, $\omega'(v) \geq 1 + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{2}{35} - \frac{16}{35} - 4 \times \frac{6}{7} = \frac{32}{35} > 0$. 否则, v_2 是一个 3- 点. 考虑到 $d(f_2) \notin \{5, 6, 7\}$, 由引理 3.9 可知, f_2 为 10^+ - 面, 从而可得 $\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{2}{35} - \frac{7}{5} - 4 \times \frac{6}{7} = \frac{4}{35} > 0$.

再来讨论情形 $t = 2$.

不失一般性, 设 f_1 是一个 3- 面. 根据对称性, 有两种子情形需要讨论.

(1) f_3 为 3- 面. 此时, v_5 、 v_6 和 v_7 均为 v 的孤立邻点. 由引理 3.3 和 3.4(4) 可知, $p \leq 3$. 若 $p = 0$, 则 $m = 0$, 显然有 $\omega'(v) \geq 1 + 5 \times 1 - 7 \times \frac{6}{7} = 0$. 根据 p 的取值, 还需讨论如下三种子情形:

(a) $p = 3$. 此时根据引理 3.4(4) 和 3.3 可知, 只可能是 f_2 、 f_5 和 f_6 为 5- 面. 根据引理 3.4(2) 和 3.4(4) 可知, v_2 、 v_3 、 v_5 和 v_7 都不是 $3^{(1)}$ - 点, 它们分别至多从 v 处拿权 $\frac{4}{5}$. 若 v_6 不是 v 的悬挂 3- 邻点, 根据观察 4.1(2.2) 可知, v_6 至多从 v 处拿权 $\frac{9}{35}$, 从而有 $\omega'(v) \geq 1 + 2 \times 1 + 3 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{4}{5} - \frac{9}{35} - 2 \times \frac{6}{7} = \frac{8}{35} > 0$. 设 v_6 是 v 的悬挂 3- 邻点. 换言之, v_6 为 v 的一个 $3^{(1)}$ - 邻点. 根据引理 3.4(2) 可知, v_5 和 v_7 都不是 v 的悬挂 3- 邻点. 运用观察 4.1(2.1) 可知, $\omega'(v) \geq 1 + 2 \times 1 + 3 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - 2 \times \frac{9}{35} - 2 \times \frac{6}{7} = \frac{6}{35} > 0$.

(b) $p = 1$. 令 f 为 v 所关联的唯一 5- 面. 根据对称性, 可假定 $f \in \{f_2, f_4, f_5\}$.

先设 $f = f_2$. 根据引理 3.4(4) 可知, v_2 和 v_3 都不是 $3^{(1)}$ - 点, 因而 $m = 0$. 易见 v 转给 v_2 和 v_3 的权至多为 $2 \times \frac{4}{5}$. 若 f_4 、 f_5 、 f_6 和 f_7 中有一个为 7^+ - 面, 对照表 1, 该 7^+ - 面至少转权 $\frac{8}{7}$ 给 v , 从而有 $\omega'(v) \geq 1 + \frac{8}{7} + 3 \times 1 + \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - 5 \times \frac{6}{7} = \frac{2}{35} > 0$. 否则, f_4 、 f_5 、 f_6 和 f_7 都是 6- 面. 考虑到 G 中不存在 $3^{(9)}$ - 点, v_5 、 v_6 和 v_7 都不是 v 的悬挂 3- 邻点. 根据观察 4.1(2.2) 知, 它们分别最多从 v 处拿 $\frac{2}{35}$, 从而有 $\omega'(v) \geq 1 + 4 \times 1 + \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{2}{35} - 2 \times \frac{6}{7} = \frac{81}{35} > 0$.

其次设 $f = f_4$. 由命题 4.1 知, $m \leq 1$. 当 $m = 1$ 时, 易得 $\omega'(v) \geq 1 + 4 \times 1 + \frac{4}{5} - (\frac{7}{5} + \frac{2}{35}) - 5 \times \frac{6}{7} = \frac{2}{35} > 0$. 设 $m = 0$. 此时, v_4 和 v_5 分别至多从 v 处拿权 $\frac{4}{5}$. 若 v_5 不是 v 的悬挂 3- 邻点, 由观察 4.1(2.2) 可知, v 至多转 $\frac{2}{35}$ 给 v_5 . 于是, $\omega'(v) \geq 1 + 4 \times 1 + \frac{4}{5} - \frac{4}{5} - \frac{2}{35} - 5 \times \frac{6}{7} = \frac{23}{35} > 0$. 设 v_5 是 v 的一个

悬挂 3- 邻点. 由于 G 中不存在 $3^{(3,5,6)}$ - 点和 $3^{(3,5,7)}$ - 点, 再结合引理 3.2(1) 可知, $d(f_5) \geq 10$. 因此, $\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 3 \times 1 + \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - 5 \times \frac{6}{7} = \frac{11}{35} > 0$.

最后设 $f = f_5$. 易见 $m = 0$. v_5 和 v_6 至多从 v 处拿权 $2 \times \frac{4}{5}$. 若 v_5 和 v_6 都不是 v 的悬挂 3- 邻点, 由观察 4.1(2.1) 知, v_5 和 v_6 最多分别从 v 处拿权 $\frac{9}{35}$, 可得 $\omega'(v) \geq 1 + 4 \times 1 + \frac{4}{5} - 2 \times \frac{9}{35} - 5 \times \frac{6}{7} = 1 > 0$. 设 v_5 和 v_6 中有一个, 如 v_5 , 为 v 的悬挂 3- 邻点, 则 $d(f_4) \geq 10$, 可得 $\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 3 \times 1 + \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - 5 \times \frac{6}{7} = \frac{11}{35} > 0$.

(c) $p = 2$. 根据引理 3.3、3.4 和对称性知, 可确定两个 5- 面的位置仅有以下 4 种可能:

(c1) f_2 和 f_5 为 5- 面. 此时, $m = 0$ 且 v_2 和 v_3 每个都至多从 v 处拿权 $\frac{4}{5}$. 如上, 若 v_5 和 v_6 都不是 v 的悬挂 3- 邻点, 则 $\omega'(v) \geq 1 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{9}{35} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{32}{35} > 0$. 若 v_5 和 v_6 中有一个, 如 v_5 , 为 v 的悬挂 3- 邻点, 则 f_4 为一个 10^+ - 面, 可得 $\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{6}{7} = \frac{6}{35} > 0$.

(c2) f_4 和 f_6 为 5- 面. 此时 v_5 、 v_6 和 v_7 都各自关联一个 6^+ - 面. 因此, 仅有 v_4 可能为 v 的 $3^{(1)}$ - 邻点, 即 $m \leq 1$. 如上, 若 v_6 和 v_7 都不是 v 的悬挂 3- 邻点, 则 $\omega'(v) \geq 1 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - 2 \times \frac{9}{35} - 4 \times \frac{6}{7} = \frac{9}{35} > 0$. 否则, v 至少关联一个 10^+ - 面. 若 $m = 0$, 则有 $\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{8}{35} > 0$; 否则, $m = 1$. 根据命题 4.1, 有 $\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - (\frac{7}{5} + \frac{2}{35}) - 2 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{13}{35} > 0$.

(c3) f_4 和 f_7 为 5- 面. 此时, 仅有 v_1 和 v_4 可能成为 v 的 $3^{(1)}$ - 邻点, 即 $m \leq 2$. 注意到, v_5 和 v_7 分别至多从 v 处拿权 $\frac{4}{5}$. 若 v_5 和 v_7 都不是 v 的悬挂 3- 邻点, 根据引理 3.4(2) 可知, v_5 和 v_7 或为 4^+ - 点或为恰好关联一个 5- 面的 3- 点, 由观察 4.1(2.2) 可知, 它们分别至多从 v 处拿权 $\frac{2}{35}$, 故 $\omega'(v) \geq 1 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{7}{5} - 2 \times \frac{2}{35} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{14}{35} > 0$. 否则, 不妨设 v_5 是 v 的悬挂 3- 邻点. 此时 $d(f_5) \geq 10$, f_5 至少转 $\frac{7}{5}$ 给 v . 另一方面, 此时的 v_4 已经不能成为 $3^{(1)}$ - 点, 否则会与引理 3.4(2) 矛盾. 故 $m \leq 1$. 若 $m = 1$, 则 $\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - (\frac{7}{5} + \frac{2}{35}) - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{13}{35} > 0$, 否则, $m = 0$, 有 $\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{8}{35} > 0$.

(c4) f_5 和 f_6 为 5- 面. 由引理 3.4(2) 可知, v_5 和 v_7 都不能为 v 的悬挂 3- 邻点. 因为 v_6 可能为 $3^{(1)}$ - 点, $m \leq 1$. 当 $m = 1$ 时, 运用命题 4.1(2) 可知, v_5 和 v_7 每个至多从 v 处拿 $\frac{2}{35}$. 因此, $\omega'(v) \geq 1 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - 2 \times \frac{2}{35} - 4 \times \frac{6}{7} = \frac{23}{35} > 0$. 否则, $m = 0$, 根据观察 4.1(2), 有

$$\omega'(v) \geq 1 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{2}{35} - 1 \times \frac{9}{35} - 4 \times \frac{6}{7} > 0.$$

(2) f_4 为 3- 面. 此时 v_3 、 v_6 和 v_7 都是 v 的孤立邻点. 根据引理 3.3 和 3.4(4) 可知, $p \leq 2$. 若 $p = 0$, 则 $m = 0$, 可得 $\omega'(v) \geq 1 + 5 \times 1 - 7 \times \frac{6}{7} = 0$. 尚需讨论以下两种子情形:

(a) $p = 1$. 设 f 为 v 所关联的唯一 5- 面. 根据对称性, 可设 $f \in \{f_2, f_5, f_6\}$.

先设 $f = f_2$. 此时, 只有 v_2 可能成为 v 的 $3^{(1)}$ - 邻点. 因此, $m \leq 1$. 若 v_3 为 v 的悬挂 3- 邻点, 根据引理 3.4(2) 知, $m = 0$. 根据 G 中没有 4- 和 9- 面, 没有 $3^{(3,5,6)}$ - 和 $3^{(3,5,7)}$ - 点, 以及引理 3.3, 可得 $d(f_3) \geq 10$. 对照表 1, f_3 至少转权 $\frac{7}{5}$ 给 v . 同时, v_3 从 v 处至多拿 $\frac{4}{5}$. 所以, $\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 3 \times 1 + \frac{4}{5} - \frac{4}{5} - 6 \times \frac{6}{7} = \frac{9}{35} > 0$. 否则, v_3 不是 v 的悬挂 3- 邻点. 根据引理 3.4(2) 可知, v_3 或为 4^+ - 点或为恰好关联一个 5- 面的 3- 点. 由观察 4.1(2.2) 可知, v_3 至多从 v 处拿权 $\frac{2}{35}$. 因此, $\omega'(v) \geq 1 + 4 \times 1 + \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - \frac{2}{35} - 5 \times \frac{6}{7} = \frac{2}{35} > 0$.

其次设 $f = f_5$. 显然, v_6 不是 $3^{(1)}$ - 点, 但 v_5 可能为 $3^{(1)}$ - 点. 因此, $m \leq 1$. 若 $m = 1$, 由命题 4.1(1) 可得 $\omega'(v) \geq 1 + 4 \times 1 + \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - \frac{2}{35} - 5 \times \frac{6}{7} = \frac{2}{35} > 0$. 设 $m = 0$. 若 v_6 为 v 的悬挂 3- 邻点, 则 $d(f_6) \geq 10$, 从而 f_6 至少转权 $\frac{7}{5}$ 给 v , 同时 v_6 至多从 v 处拿权 $\frac{4}{5}$. 所以, $\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 3 \times 1 + \frac{4}{5} - \frac{4}{5} - 6 \times \frac{6}{7} = \frac{9}{35} > 0$. 设 v_6 不是 v 的悬挂 3- 邻点. 由观察 4.1(2.2) 知, v 仅需要转权 $\frac{2}{35}$ 给 v . 因此, $\omega'(v) \geq 1 + 4 \times 1 + \frac{4}{5} - \frac{2}{35} - 6 \times \frac{6}{7} = \frac{21}{35} > 0$.

最后设 $f = f_6$. 易见, $d(f_i) \notin \{3, 5\}$, $i \in \{5, 7\}$. 于是, v_6 和 v_7 都不是 $3^{(1)}$ - 点, 因此, $m = 0$. 注意到 v_6 和 v_7 分别至多从 v 处拿权 $\frac{4}{5}$. 若 v_6 和 v_7 中至少有一个为 v 的悬挂 3- 邻点, 则 v 至少关联一个 10^+ - 面, 因此, $\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 3 \times 1 + \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - 5 \times \frac{6}{7} = \frac{11}{35} > 0$. 设 v_6 和 v_7 都不是 v 的悬挂 3- 邻点. 由观察 4.1(2.1) 知, v_6 和 v_7 分别至多从 v 处拿权 $\frac{2}{35}$. 因此, $\omega'(v) \geq 1 + 4 \times 1 + \frac{4}{5} - 2 \times \frac{2}{35} - 5 \times \frac{6}{7} = \frac{49}{35} > 0$.

(b) $p = 2$. 根据引理 3.3、3.4(4) 和对称性, 我们有三种子情形需要讨论:

(b1) f_2 和 f_5 为 5- 面. 此时 v_2 和 v_5 可能为 v 的 $3^{(1)}$ - 邻点, 即 $m \leq 2$. 若 v_3 和 v_6 都不是 v 的悬挂 3- 邻点, 根据引理 3.4(2) 可知, v_3 和 v_6 为 4^+ - 点或者是至多关联一个 5- 面的 3- 点, 由观察 4.1(2.2) 可知, 它们分别至多从 v 处拿权 $\frac{2}{35}$, 有 $\omega'(v) \geq 1 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{7}{5} - 2 \times \frac{2}{35} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{14}{35} > 0$. 设 v_3 和 v_6 中至少有一个为 v 的悬挂 3- 邻点. 若 v_3 为 v 的悬挂 3- 邻点, 由引理 3.4(2) 可知, v_2 不可能成为 $3^{(1)}$ - 点, 从而, $m \leq 1$. 同时考虑到 G 中不存在 $3^{(3,5,6)}$ -, $3^{(3,5,7)}$ - 和 $3^{(3,5,8)}$ - 点; 以及 G 中无 4- 面和 9- 面, f_3 是一个 10^+ - 面. 对照表 1, f_3 至少转权 $\frac{7}{5}$ 给 v . 而此时, v_3 至多从 v 处拿权 $\frac{4}{5}$. 若 $m = 1$, 则 $\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{4}{5} - (\frac{7}{5} + \frac{2}{35}) - 4 \times \frac{6}{7} = \frac{11}{35} > 0$. 若 $m = 0$, 则 $\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{8}{35} > 0$. 若 v_6 为悬挂 3- 邻点, 类似讨论可得所要结果.

(b2) f_2 和 f_6 为 5- 面. 显然只有 v_2 可能为 v 的 $3^{(1)}$ - 邻点并且 v_6 和 v_7 分别至多从 v 处拿权 $\frac{4}{5}$. 若 v 的三个孤立邻点 v_3 、 v_6 和 v_7 中至少有一个为悬挂 3- 邻点, 类似于之前的讨论, v 至少关联一个 10^+ - 面. 若 $m = 1$, 则有 $\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - (\frac{7}{5} + \frac{2}{35}) - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{13}{35} > 0$. 若 $m = 0$, 则有 $\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{8}{35} > 0$. 设 v_3 、 v_6 和 v_7 都不是 v 的悬挂 3- 邻点, 即它们分别至多从 v 处拿权 $\frac{9}{35}$, 可得 $\omega'(v) \geq 1 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 1 \times \frac{7}{5} - 3 \times \frac{9}{35} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{30}{35} > 0$.

(b3) f_5 和 f_7 为 5- 面. 注意到此时仅有 v_1 和 v_5 可能为 v 的 $3^{(1)}$ - 邻点, 即 $m \leq 2$. 若 v_6 和 v_7 都不是 v 的悬挂 3- 邻点, 则它们是 4^+ - 点, 或者, 根据引理 3.4(2) 可知, 它们是至多关联一个 5- 面的 3- 点, 根据观察 4.1(2.2) 知, 两者都至多从 v 处拿权 $\frac{2}{35}$, 故有 $\omega'(v) \geq 1 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{7}{5} - 2 \times \frac{2}{35} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{14}{35} > 0$. 否则, 不妨假设 v_6 是 v 的悬挂 3- 邻点. 此时易知 f_6 为 10^+ - 面; 且由引理 3.4(2) 可知, v_5 不是 $3^{(1)}$ - 点, 即 $m \leq 1$. 若 $m = 1$, 则有

$$\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - \left(\frac{7}{5} + \frac{2}{35}\right) - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{13}{35} > 0,$$

否则 $m = 0$, 有 $\omega'(v) \geq 1 + \frac{7}{5} + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{8}{35} > 0$. □

断言 4.9 若 $d(v) = 6$, 则 $\omega'(v) \geq 0$.

证明 此时, $\omega(v) = 0$. 显然, $t \leq 3$. 根据 t 的取值, 需考虑以下 4 种情形:

(1) $t = 0$. 若 $p \leq 4$, 则 v 至少关联两个 6^+ - 面. 根据命题 4.1 知, $\omega'(v) \geq 2 \times 1 + 4 \times \frac{4}{5} - m \times (\frac{7}{5} + \frac{2}{35}) - (6 - 2m) \times \frac{6}{7} \geq 2 \times 1 + 4 \times \frac{4}{5} - 6 \times \frac{6}{7} = \frac{2}{35} > 0$. 否则, $p \geq 5$. 根据引理 3.4(2) 知, v 的邻点都不是悬挂 3- 邻点, 运用观察 4.1(2) 可知, 这些邻点均至多从 v 处拿权 $\frac{9}{35}$, 从而, $\omega'(v) \geq 6 \times \frac{4}{5} - 6 \times \frac{9}{35} = \frac{114}{35} > 0$.

(2) $t = 1$. 不妨设 $d(f_1) = 3$. 根据引理 3.3 和 3.4(4) 可知, $p \leq 3$. 下面根据 p 的值, 考虑 4 种子情形:

(a) $p = 0$. 显然 $m = 0$. 若 v 至少关联一个 7^+ - 面, 则 $\omega'(v) \geq \frac{8}{7} + 4 \times 1 - 6 \times \frac{6}{7} = 0$. 否则, 对每个 $i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, 都有 $d(f_i) = 6$. 因为 G 中不存在 $3^{(3,6,6)}$ - 点, v 的孤立邻点都不是悬挂 3- 邻点. 由观察 4.1(2.2) 知, 每个 v_i 至多从 v 处拿 $\frac{9}{35}$, 其中 $i \in \{3, 4, 5, 6\}$. 于是, $\omega'(v) \geq 5 \times 1 - 2 \times \frac{6}{7} - 4 \times \frac{9}{35} = \frac{79}{35} > 0$.

(b) $p = 1$. 记 f 为 v 所关联的 5- 面. 根据对称性, 可假设 $f \in \{f_2, f_3, f_4\}$. 先设 $f \neq f_2$, 即 $f \in \{f_3, f_4\}$. 显然, $m = 0$. 若 f 上的两个 v 的邻点都不是悬挂 3- 邻点, 据观察 4.1(2) 可知, 它们分别至多从 v 处拿 $\frac{9}{35}$, 因此, $\omega'(v) \geq 4 \times 1 + \frac{4}{5} - 2 \times \frac{9}{35} - 4 \times \frac{6}{7} = \frac{4}{7} > 0$. 否则 f 上至少有一个点

为 v 的悬挂 3- 邻点, 易知 v 至少关联一个 10^+ - 面, 从而有 $\omega'(v) \geq \frac{7}{5} + 3 \times 1 + \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{6}{7} = \frac{6}{35} > 0$. 再设 $f = f_2$. 根据引理 3.3 可知, f_6 为 6^+ - 面. 显然, v 的邻点中只有 v_2 可能为 $3^{(1)}$ - 点, 即 $m \leq 1$. 若 $m = 0$, 即 v_2 不是 $3^{(1)}$ - 点. 显然, v_2 至多从 v 处拿权 $\frac{4}{5}$. 若 v_3 不是 v 的悬挂 3- 邻点, 则 $\omega'(v) \geq 4 \times 1 + \frac{4}{5} - \frac{4}{5} - \frac{9}{35} - 4 \times \frac{6}{7} = \frac{11}{35} > 0$. 否则, v_3 是一个 $3^{(3,5,10^+)}$ - 点, 可得 $\omega'(v) \geq \frac{7}{5} + 3 \times 1 + \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{6}{7} = \frac{6}{35} > 0$. 设 $m = 1$, 即 v_2 是 $3^{(1)}$ - 点. 根据引理 3.4(2) 可知, v_3 不是 v 的悬挂 3- 邻点, 根据观察 4.1(2) 可知, v 至多给 v_3 转权 $\frac{9}{35}$. 若 $d(v_1) \geq 4$, 则 v_1 不从 v 处得权, 有 $\omega'(v) \geq 4 \times 1 + \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - \frac{9}{35} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{4}{7} > 0$. 设 v_1 为 3- 点. 易知 v_1 为 $3^{(3,5,10^+)}$ - 点, 可得 $\omega'(v) \geq \frac{7}{5} + 3 \times 1 + \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - \frac{4}{5} - \frac{9}{35} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{6}{35} > 0$.

(c) $p = 2$. 记 P_1 与 P_2 为 v 所关联的两个 5- 面. 先设 P_1 和 P_2 相邻. 由引理 3.4(4) 并结合对称性可假定 $P_1 = f_3$ 且 $P_2 = f_4$. 由引理 3.4(2) 知, v_3 和 v_5 都不为 v 的悬挂 3- 邻点. 若 v_4 也不是 v 的悬挂 3- 邻点, 根据观察 4.1(2) 可知, v_3, v_4 和 v_5 分别最多拿权 $\frac{9}{35}$. 因此, $\omega'(v) \geq 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{9}{35} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{44}{35} > 0$. 否则, v_4 为 v 的 $3^{(1)}$ - 邻点. 由命题 4.1(2) 可知, v_3 和 v_5 分别最多拿权 $\frac{2}{35}$, 因此, $\omega'(v) \geq 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - 2 \times \frac{2}{35} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{18}{35} > 0$. 再设 P_1 和 P_2 不相邻. 根据引理 3.3 可知, f_2 和 f_6 中至多有一个为 5- 面. 若 f_2 和 f_6 都不是 5- 面, 则 $P_1 = f_3, P_2 = f_5$. 注意到此时 $m = 0$. 若对每个 $i \in \{3, 4, 5, 6\}$, v_i 都不是 v 的悬挂 3- 邻点, 由观察 4.1(2) 可知, 这些 v_i 分别至多从 v 处拿权 $\frac{9}{35}$, 有 $\omega'(v) \geq 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{9}{35} - 2 \times \frac{6}{7} = \frac{13}{7} > 0$. 否则, 存在 $i \in \{3, 4, 5, 6\}$ 使得 v_i 是悬挂 3- 邻点. 如前易知, v 至少关联一个 10^+ - 面, 从而有 $\omega'(v) \geq \frac{7}{5} + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{6}{7} = \frac{3}{35} > 0$. 设 f_2 和 f_6 中恰好有一个为 5- 面. 根据对称性, 不妨设 $P_1 = f_2$ 为 5- 面, 则 $P_2 \in \{f_4, f_5\}$. 注意到仅有 v_2 可能成为 $3^{(1)}$ - 点. 若 v_2 是 $3^{(1)}$ - 点, 则 v_1 或为 4^+ - 点, 或为使得 f_6 为 10^+ - 面的 3- 点; 根据引理 3.4(2) 可知, v_3 不能成为 v 的悬挂 3- 邻点. 若 v_1 为 4^+ - 点, 则有 $\omega'(v) \geq 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - \frac{9}{35} - \frac{6}{7} - 2 \times \frac{4}{5} = \frac{17}{35} > 0$; 否则, $\omega'(v) \geq \frac{7}{5} + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - \frac{4}{5} - \frac{9}{35} - \frac{6}{7} - 2 \times \frac{4}{5} = \frac{3}{35} > 0$. 设 v_2 不是 $3^{(1)}$ - 点. 易见 v_2 至多从 v 处拿权 $\frac{4}{5}$. 若 v_3 不是 v 的悬挂 3- 邻点, 则 $\omega'(v) \geq 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{4}{5} - \frac{9}{35} - 2 \times \frac{6}{7} = \frac{8}{35} > 0$. 否则, v_3 是一个 $3^{(3,5,10^+)}$ - 点. 可得 $\omega'(v) \geq \frac{7}{5} + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{6}{7} = \frac{3}{35} > 0$.

(d) $p = 3$. 根据引理 3.3 和 3.4(4) 并结合对称性可知, 仅需讨论下述两种情形:

(d1) f_3, f_4 和 f_5 为 5- 面. 根据引理 3.4(2) 可知, v 的孤立邻点都不是悬挂 3- 邻点, 由观察 4.1(2) 可知, v_3, v_4, v_5 和 v_6 分别至多拿权 $\frac{9}{35}$. 此外, v_1 和 v_2 都不可能为 v 的 $3^{(1)}$ - 邻点, 它们最多分别从 v 处拿权 $\frac{6}{7}$. 因此, $\omega'(v) \geq 2 \times 1 + 3 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{9}{35} - 2 \times \frac{6}{7} = \frac{61}{35} > 0$.

(d2) f_2, f_4 和 f_5 为 5- 面. 根据引理 3.4(2) 知, v_4 和 v_6 都不能为 v 的悬挂 3- 邻点. 易见仅 v_2 和 v_5 能成为 $3^{(1)}$ - 点. 若 v_2 是 $3^{(1)}$ - 点, 则 v_1 或为 4^+ - 点, 或为使得 f_6 为 10^+ - 面的 3- 点. 若 v_1 为 4^+ - 点, 则 $\omega'(v) \geq 2 \times 1 + 3 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{7}{5} - 3 \times \frac{9}{35} = \frac{39}{35} > 0$; 否则, $\omega'(v) \geq \frac{7}{5} + 1 + 3 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{7}{5} - 3 \times \frac{9}{35} - \frac{4}{5} = \frac{3}{7} > 0$. 设 v_2 不是 $3^{(1)}$ - 点, 则 v_2 至多拿权 $\frac{4}{5}$. 再注意到 v_3 也最多拿权 $\frac{4}{5}$. 若 v_5 不是 $3^{(1)}$ - 点, 根据观察 4.1(2) 可知, 它最多拿权 $\frac{9}{35}$, 有 $\omega'(v) \geq 2 \times 1 + 3 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{9}{35} - \frac{6}{7} = \frac{41}{35} > 0$. 设 v_5 是 $3^{(1)}$ - 点, 由命题 4.1(2), 有 $\omega'(v) \geq 2 \times 1 + 3 \times \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - 2 \times \frac{2}{35} - 2 \times \frac{4}{5} - \frac{6}{7} = \frac{3}{7} > 0$.

(3) $t = 2$. 若 v 所关联的两个 3- 面都是 $(3, 3, 6)$ - 面, 由引理 2.3 知, 这两个 3- 面中有一个是富的, 由观察 4.1(3) 知, 富 3- 面上的两个 3- 点都不从 v 拿权. 否则, v 所关联的两个 3- 面中有一个 3- 面为 $(3^+, 4^+, 6)$ - 面. 此时其上的 4^+ - 点也不从 v 拿权. 因此, v 至少有一个位于 3- 面上的邻点不从 v 处拿权. 不妨设 f_1 是一个 3- 面, T 是 v 所关联的另一个 3- 面. 根据对称性, 需讨论两种子情形:

(a) $T = f_3$. 根据引理 3.3 和 3.4(4) 知, $p \leq 2$. 根据命题 4.1 知, $m \leq 2$.

先设 v_5 和 v_6 都不是 v 的悬挂 3- 邻点. 由观察 4.1(2.2) 知, v_5 和 v_6 分别最多从 v 处拿权 $\frac{2}{35}$. 若 $m \leq 1$, 则 $\omega'(v) \geq 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - 2 \times \frac{2}{35} - 2 \times \frac{6}{7} = \frac{13}{35} > 0$. 否则, $m = 2$. 根据引理 3.4(2)

知, v_2 和 v_3 都不是 $3^{(1)}$ - 点. 于是, v_1 和 v_4 是 $3^{(1)}$ - 点. 此时, f_4 和 f_6 都为 5- 面, 即 $p = 2$. 易见, 对于 $i \in \{2, 3\}$, v_i 或为 4^+ - 点, 或为使得 f_2 是 10^+ - 面的 3 - 点. 若 v_2 和 v_3 都不是 3 - 点, 则 $\omega'(v) \geq 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{7}{5} - 2 \times \frac{2}{35} = \frac{26}{35} > 0$. 否则, v_2 和 v_3 中至少有一个为 3 - 点. 则 $\omega'(v) \geq \frac{7}{5} + 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{7}{5} - 2 \times \frac{2}{35} - \frac{6}{7} = \frac{8}{35} > 0$.

其次设 v_5 和 v_6 中恰好有一个, 不妨设是 v_5 , 为 v 的悬挂 3 - 邻点. 此时 v_6 或为 4^+ - 点, 或 (根据引理 3.4(2)) 为至多关联一个 5- 面的非悬挂 3 - 邻点. 根据观察 4.1(2.2), v_6 至多从 v 处拿权 $\frac{2}{35}$. 另一方面, 由引理 3.4(2) 知, 仅有 v_1 可能成为 $3^{(1)}$ - 点. 若 $m = 0$, 则 $\omega'(v) \geq 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{2}{35} - 4 \times \frac{6}{7} = \frac{4}{35} > 0$. 否则, $m = 1$, 即 v_1 为 $3^{(1)}$ - 点. 此时 f_6 为 5- 面. 由引理 3.3 知, f_2 为 6^+ - 面. 若 v_2 为 5^+ - 点, 由观察 4.1(3.3) 知, v_1 至多从 v 处拿权 $\frac{7}{10}$, 因此, $\omega'(v) \geq 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{7}{10} - \frac{2}{35} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{19}{70} > 0$. 若 v_2 为 3 - 点, 则 $d(f_2) \geq 10$, v_2 和 v_3 均至多从 v 处拿权 $\frac{4}{5}$. 因此, $\omega'(v) \geq \frac{7}{5} + 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - \frac{2}{35} - \frac{4}{5} - 2 \times \frac{6}{7} = \frac{1}{35} > 0$. 设 v_2 为 4 - 点. 若 v_2 为 4^s - 点, 则 v_2 不拿权, 根据观察 4.1(3.2) 知, v_1 至多从 v 处拿权 $\frac{16}{35}$, 因此, $\omega'(v) \geq 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{2}{35} - \frac{16}{35} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{18}{35} > 0$. 否则 v_2 为 4^w - 点. 根据引理 3.2 知, f_2 为 10^+ - 面. 因此, $\omega'(v) \geq \frac{7}{5} + 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - \frac{2}{35} - 2 \times \frac{6}{7} - \frac{4}{5} = \frac{1}{35} > 0$.

最后设 v_5 和 v_6 都为 v 的悬挂 3 - 邻点. 根据引理 3.4(2) 和 3.4(4) 知, $m = 0$. 由引理 3.2(2) 知, v_5 和 v_6 都不是 $3^{(3,6,7)}$ - 点, 根据观察 4.1 知, v_5 和 v_6 均至多从 v 处拿权 $\frac{4}{5}$. 进一步, 易知 f_4 、 f_5 和 f_6 中至少有一个为 10^+ - 面. 若 $p \leq 1$, 则有 $\omega'(v) \geq \frac{7}{5} + 2 \times 1 + \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{1}{35} > 0$. 设 $p = 2$. 根据引理 3.3 和 3.4 知, 只能出现两种情形: 或 f_2 和 f_5 为 5- 面, 或 f_4 和 f_6 为 5- 面. 若 f_2 和 f_5 为 5- 面, 显然, $d(f_4) \geq 10$ 且 $d(f_6) \geq 10$. 因此, $\omega'(v) \geq 2 \times \frac{7}{5} + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{8}{35} > 0$. 设 f_4 和 f_6 为 5- 面. 此时有 $d(f_5) \geq 10$. 若 $d(v_1) \geq 4$ 且 $d(v_4) \geq 4$, 则 $\omega'(v) \geq \frac{7}{5} + 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{6}{7} = \frac{24}{35} > 0$. 若 $d(v_1) = 3$ 且 $d(v_4) \geq 4$, 则 v_2 只能是 4^+ - 点或是一个 $3^{(3,6^+,10^+)}$ - 点. 因此, v_2 至多从 v 处拿权 $\frac{5}{7}$. 可得 $\omega'(v) \geq \frac{7}{5} + 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{4}{5} - \frac{5}{7} - \frac{6}{7} = \frac{1}{35} > 0$. 若 $d(v_1) = 3$ 且 $d(v_4) = 3$, 同理可知, v_3 至多拿权 $\frac{5}{7}$. 结合之前的断言, v_1 、 v_2 、 v_3 和 v_4 中至少有一个点不拿权, 得到 $\omega'(v) \geq \frac{7}{5} + 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - \frac{5}{7} = \frac{3}{35} > 0$.

(b) $T = f_4$. 此时 v_3 和 v_6 为 v 的两个孤立邻点. 根据引理 3.3 和 3.4(4) 知, $p \leq 2$.

先设 v_3 和 v_6 都是 v 的悬挂 3 - 邻点. 根据引理 3.4(2) 知, v_1 不是 $3^{(1)}$ - 点; 根据引理 3.4(4) 知, v_6 也不是 $3^{(1)}$ - 点. 由对称性, $m = 0$. 易知, 对 $i \in \{2, 3\}$, $d(f_i) \notin \{3, 4, 7, 8, 9\}$; 又因 G 不含 $3^{(3,5,6)}$ - 和 $3^{(3,6,6)}$ - 点, f_2 和 f_3 中至少有一个是 10^+ - 面. 类似地, f_5 和 f_6 中至少有一个是 10^+ - 面. 这样, v_3 和 v_6 分别至多从 v 处拿权 $\frac{4}{5}$. 因此, $\omega'(v) \geq 2 \times \frac{7}{5} + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{8}{35} > 0$.

其次设 v_3 和 v_6 都不是 v 的悬挂 3 - 邻点. 此时, 对每个 $i \in \{3, 6\}$, v_i 或为 4^+ - 点, 或为 v 的至多关联一个 5- 面的非悬挂 3 - 邻点. 由观察 4.1(2.2) 知, v_i 至多拿权 $\frac{2}{35}$. 若 f_1 和 f_4 都是 $(3, 3, 6)$ - 面, 根据引理 2.3 知, f_1 和 f_4 中至少有一个, 设是 f_1 , 是富的. 根据观察 4.1(3.3) 知, v 不给 v_1 和 v_2 转权. 因为 $m \leq 2$, 所以, $\omega'(v) \geq 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{7}{5} - 2 \times \frac{2}{35} = \frac{24}{35} > 0$. 否则, v 在 f_1 和 f_4 上至少有一个 4^+ - 邻点. 若 v 在 f_1 和 f_4 上至少有两个 4^+ - 邻点, 则 $\omega'(v) \geq 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{2}{35} - 2 \times \frac{7}{5} = \frac{24}{35} > 0$. 设 v 在 f_1 和 f_4 上恰有一个 4^+ - 邻点, 不妨设是 v_2 . 若 $m \leq 1$, 则 $\omega'(v) \geq 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{2}{35} - \frac{7}{5} - 2 \times \frac{6}{7} = \frac{13}{35} > 0$. 否则 $m = 2$. 由命题 4.1 知, 仅 v_1 和 v_4 可能为 v 的两个 $3^{(1)}$ - 邻点. 这意味着 f_3 和 f_6 都为 5- 面. 根据引理 3.3 知, f_2 和 f_5 只能为 6^+ - 面. 再考虑到 $d(v_5) = 3$, $d(f_5) \geq 10$. 因此, $\omega'(v) \geq \frac{7}{5} + 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{7}{5} - \frac{4}{5} - 2 \times \frac{2}{35} = \frac{2}{7} > 0$.

最后设 v_3 和 v_6 中恰好有一个, 设是 v_6 , 为 v 的悬挂 3 - 邻点. 由于 v_3 或为 4^+ - 点或为至多关联一个 5- 面的 3 - 点, 它至多从 v 处拿权 $\frac{2}{35}$. 易知, f_5 和 f_6 中至少有一个为 10^+ - 面, v_6 至多从 v 处拿权 $\frac{4}{5}$. 根据引理 3.4(2) 知, v_1 和 v_5 都不是 $3^{(1)}$ - 点. 根据命题 4.1 知, v_2 和 v_4 中仅有一者可能为 $3^{(1)}$ - 点, 即 $m \leq 1$. 回顾 v 的三角邻点中至少有一个不从 v 处拿权. 若 $m = 1$, 则 $\omega'(v) \geq \frac{7}{5} + 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - \frac{4}{5} - \frac{2}{35} - 2 \times \frac{6}{7} = \frac{1}{35} > 0$, 否则, $m = 0$, 有 $\omega'(v) \geq \frac{7}{5} + 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{2}{35} - \frac{4}{5} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{20}{35} > 0$.

(4) $t = 3$. 注意到 G 不含相邻 3- 面, 可设 f_1 、 f_3 和 f_5 为 3- 面. 根据引理 3.3 知, $p \leq 1$. 根据引理 3.4(2) 知, $m = 0$. 若 v 至少有三个 4^+ - 邻点, 则 $\omega'(v) \geq 2 \times 1 + \frac{4}{5} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{8}{35} > 0$. 设 v 至多有两个 4^+ - 邻点. 换言之, v 至少关联一个 $(3, 3, 6)$ - 面. 根据引理 2.1(4) 知, v 至多关联两个 $(3, 3, 6)$ - 面. 若 v 恰好关联两个 $(3, 3, 6)$ - 面, 根据引理 2.3 知, 有一个 $(3, 3, 6)$ - 面为富的, 因此, 这个 $(3, 3, 6)$ - 面上的两个 3- 点都不从 v 拿权. 这时 v 至少有三个邻点不从 v 拿权, 如上, $\omega'(v) \geq \frac{8}{35} > 0$. 设 v 关联一个 $(3, 3, 6)$ - 面和两个 $(3, 4^+, 6)$ - 面. 不妨假设, f_1 是 $(3, 3, 6)$ - 面. 若 v 的两个 4^+ - 邻点都是 5^+ - 点, 根据 (R3.2.3), $\omega'(v) \geq 2 \times 1 + \frac{4}{5} - 2 \times \frac{6}{7} - 2 \times \frac{3}{7} = \frac{8}{35} > 0$. 设 v 的两个 4^+ - 邻点中至多有一个是 5^+ - 点. 为方便起见, 设 $f_3 = [uvw]$ 是一个 $(3, 4, 6)$ - 面, 其中 $d(w) = 4$, $f_5 = [u'vw']$ 是一个 $(3, 4^+, 6)$ - 面, 其中 $d(w') \geq 4$.

先考虑 $d(w') \geq 5$. 根据 (R3.2.3) 知, u' 从 v 至多拿权 $\frac{3}{7}$. 若 w 为 4^s - 点, 由于 u 不是 $3^{(1)}$ - 点, 由观察 4.1(3.2) 知, u 不从 v 处拿权, 从而, v 有三个邻点不从 v 拿权, $\omega'(v) > 0$ 显然成立. 设 w 为 4^w - 点. 注意到此时 w 关联两个 3- 面, 与 vw 相关联的那个非 3- 面的面, 设为 g , 相邻着三个 3- 面. 由引理 3.2 知, 它或为 5- 面或为 10^+ - 面. 若 $d(g) \geq 10$, 则 $\omega'(v) \geq \frac{7}{5} + 1 + \frac{4}{5} - 3 \times \frac{6}{7} - \frac{3}{7} = \frac{1}{5} > 0$. 否则, $d(g) = 5$. 此时与 vu 相关联的非 3- 面 g' 为 6- 或 10^+ - 面. 根据 G 不含 $3^{(3,6,6)}$ - 点和引理 3.2 知, u 为 $3^{(3,6^+,10^+)}$ - 点. 由 (R3.2.1) 知, u 至多从 v 处拿权 $\frac{3}{5}$, 从而有 $\omega'(v) \geq 2 \times 1 + \frac{4}{5} - 2 \times \frac{6}{7} - \frac{3}{7} - \frac{3}{5} = \frac{2}{35} > 0$.

再考虑 $d(w') = 4$. 注意到 w 和 w' 要么是 4^s - 要么是 4^w - 点. 若其中之一, 如 w , 是 4^s - 点, 由于 $m = 0$, 根据观察 4.1(3.2) 知, u 从 v 处不拿权, 从而有 $\omega'(v) \geq 2 \times 1 + \frac{4}{5} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{8}{35} > 0$. 设 w 和 w' 都是 4^w - 点. 与前面一样的讨论可知, u 和 u' 各至多从 v 处拿权 $\frac{3}{5}$. 无论 u 、 w 、 u' 和 w' 在 v 的周围如何分布, 必定可以找到一个与 v 相关联的非 3- 面是 10^+ - 面. 从而, $\omega'(v) \geq \frac{7}{5} + 1 + \frac{4}{5} - 2 \times \frac{6}{7} - 2 \times \frac{3}{5} = \frac{22}{35} > 0$. $\square$

断言 4.10 若 $d(v) = 5$, 则 $\omega'(v) \geq 0$.

证明 此时, $\omega(v) = -1$. 由命题 4.1 知, $m \leq 1$. 显然, $t \leq 2$. 下面根据 t 的值, 讨论三种情形:

(1) $t = 0$. 为了方便, 记 n 为 v 的悬挂 3- 邻点的个数. 根据 n 的值, 考虑以下 4 种子情形:

(a) $n \leq 2$. 若 $m = 0$, 由观察 4.1(2) 知, 每个非悬挂 3- 邻点至多拿权 $\frac{9}{35}$, 因此, $\omega'(v) \geq -1 + 5 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{9}{35} - 2 \times \frac{6}{7} = \frac{18}{35} > 0$. 设 $m = 1$. 根据引理 3.4(2) 知, v 至少关联两个 6^+ - 面. 运用命题 4.1(2) 可得 $\omega'(v) \geq -1 + 2 \times 1 + 3 \times \frac{4}{5} - (\frac{7}{5} + 2 \times \frac{2}{35}) - \frac{6}{7} - \frac{9}{35} = \frac{27}{35} > 0$.

(b) $n = 5$. 根据引理 3.4(2) 知, $m = 0$. 易知 v 至少关联三个 10^+ - 面, 且每个悬挂 3- 邻点从 v 处至多拿权 $\frac{4}{5}$. 因此, $\omega'(v) \geq -1 + 3 \times \frac{7}{5} + 2 \times \frac{4}{5} - 5 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5} > 0$.

(c) $n = 4$. 不妨设 v_1 、 v_2 、 v_3 和 v_4 都是悬挂 3- 邻点. 由引理 3.4(2) 可知, v 至多关联两个非相邻的 5- 面. 因此, $m = 0$. 易知 v 至少关联一个 10^+ - 面. 由观察 4.1(2) 知, 非悬挂 3- 邻点 v_5 至多拿权 $\frac{9}{35}$. 因此, $\omega'(v) \geq -1 + \frac{7}{5} + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 4 \times \frac{6}{7} - \frac{9}{35} = \frac{11}{35} > 0$.

(d) $n = 3$. 若 v 的三个悬挂 3- 邻点依某圈序相继出现, 不妨设它们是 v_1 、 v_2 和 v_3 , 易知 f_1 和 f_2 中至少有一个是 10^+ - 面. 根据引理 3.4(2), $m = 0$, $p \leq 2$, 可得 $\omega'(v) \geq -1 + \frac{7}{5} + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{6}{7} - 2 \times \frac{9}{35} = \frac{32}{35} > 0$. 否则, 不妨设 v_1 、 v_2 和 v_4 为 v 的悬挂 3- 邻点. 根据引理 3.4(2) 知, $p \leq 3$. 若 $p = 3$, 根据引理 3.4(2) 知, 只能是 f_1 、 f_3 和 f_4 为 5- 面. 此时仅 v_4 为 $3^{(1)}$ - 点, 根据命题 4.1(2) 有 $\omega'(v) \geq -1 + 2 \times 1 + 3 \times \frac{4}{5} - (\frac{7}{5} + 2 \times \frac{2}{35}) - 2 \times \frac{6}{7} = \frac{6}{35} > 0$. 设 $p \leq 2$, 若 $m = 0$, 则 $\omega'(v) \geq -1 + 3 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{6}{7} - 2 \times \frac{9}{35} = \frac{18}{35} > 0$. 否则, $m = 1$ 且仅 f_3 和 f_4 为 5- 面, v_4 为 $3^{(1)}$ - 点. 由于 G 无 $3^{(3,6,6)}$ - 点, v 至少关联一个 7^+ - 面, 可得

$$\omega'(v) \geq -1 + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} + 1 \times \frac{8}{7} - \left(\frac{7}{5} + 2 \times \frac{2}{35} \right) - 2 \times \frac{6}{7} = \frac{18}{35} > 0.$$

(2) $t = 1$. 不妨设 f_1 为 v 所关联的唯一 3- 面. 根据引理 3.3 和 3.4(2) 知, $p \leq 2$. 注意到 $m \leq 1$. 下面根据 m 的取值, 考虑两种子情形:

(a) $m = 0$. 根据观察 4.1(1) 知, v 给每个邻点至多转权 $\frac{6}{7}$. 若 f_1 为 $(3, 3, 5)$ - 面或 $(4^+, 4^+, 5)$ - 面, 根据引理 2.1(3) 和观察 4.1(3) 知, v_1 和 v_2 均不从 v 处拿权, 因此, $\omega'(v) \geq -1 + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{6}{7} = \frac{1}{35} > 0$. 设 f_1 为 $(3, 4^+, 5)$ - 面, 其中 $d(v_1) = 3$, $d(v_2) \geq 4$. 注意到 v 不需要给 v_2 转权. 设 n 为 v 的悬挂 3- 邻点的个数. 显然, $n \leq 3$. 若 $n \leq 1$, 由观察 4.1(2) 知, v 的两个非悬挂 3- 邻点分别至多拿权 $\frac{9}{35}$, 从而有 $\omega'(v) \geq -1 + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{6}{7} - 2 \times \frac{9}{35} = \frac{13}{35} > 0$. 尚需讨论 $n = 2$ 和 $n = 3$ 两种子情形:

先考虑 $n = 3$ 的子情形. 此时, v_3 、 v_4 和 v_5 都是 v 的悬挂 3- 邻点. 先断言: v 至少关联两个 10^+ - 面. 令 $i \in \{2, 3, 4, 5\}$. 由引理 3.2 知, $d(f_i) \notin \{7, 8\}$. 由假设, $d(f_i) \notin \{4, 9\}$. 这样, f_i 为 5-、6- 或 10^+ - 面. 若 f_3 和 f_4 同为 10^+ - 面, 则断言成立. 若 $d(f_3) \geq 10$ 且 $d(f_4) \in \{5, 6\}$, 则 f_5 既不是 5- 面也不是 6- 面; 否则会出现 $3^{(3,5,5)}$ - 点、 $3^{(3,5,6)}$ - 点或 $3^{(3,6,6)}$ - 点, 矛盾. 因此, $d(f_5) \geq 10$, 断言成立. 若 $d(f_3) \in \{5, 6\}$ 且 $d(f_4) \in \{5, 6\}$, 则会导致 v_4 成为 $3^{(3,5,5)}$ - 点、 $3^{(3,5,6)}$ - 点或 $3^{(3,6,6)}$ - 点, 同样得到矛盾, 因此断言成立. 另一方面, 对于每个悬挂 3- 邻点而言, 它既不会是 $3^{(3,5,5)}$ - 点也不会是 $3^{(3,6,7)}$ - 点, 从而, 它最多从 v 处拿权 $\frac{4}{5}$. 因此, $\omega'(v) \geq -1 + 2 \times \frac{4}{5} + 2 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{4}{5} - \frac{6}{7} = \frac{1}{7} > 0$.

再考虑 $n = 2$ 的子情形. 此时 v 有一个非悬挂邻点至多从 v 处拿权 $\frac{9}{35}$. 若 $p = 0$, 则

$$\omega'(v) \geq -1 + 4 \times 1 - 3 \times \frac{6}{7} - \frac{9}{35} = \frac{6}{35} > 0.$$

设 $p = 1$. 若 v 至多有两个邻点从 v 拿 $\frac{6}{7}$, 则 $\omega'(v) \geq -1 + 3 \times 1 + \frac{4}{5} - 2 \times \frac{6}{7} - \frac{4}{5} - \frac{9}{35} = \frac{1}{35} > 0$. 否则, v_1 和 v 的两个悬挂 3- 邻点都是 $3^{(3,6,7)}$ - 点. 因此, v 至少关联一个 7^+ - 面, 可得 $\omega'(v) \geq -1 + 2 \times 1 + \frac{8}{7} + \frac{4}{5} - 3 \times \frac{6}{7} - \frac{9}{35} = \frac{4}{35} > 0$. 最后设 $p = 2$. 根据引理 3.3 知, f_2 和 f_5 中至多只有一个 5- 面. 根据引理 3.4(2) 和 3.4(4) 知, 与 v 相关联的这两个 5- 面不相邻. 因此, 这两个 5- 面或是 f_2 和 f_4 , 或是 f_5 和 f_3 . 当 $d(f_2) = d(f_4) = 5$ 时, v_3 、 v_4 和 v_5 均不能成为 $3^{(3,6,7)}$ - 点. 这意味着仅有 v_1 可能拿权 $\frac{6}{7}$. 另外, 鉴于 $n = 2$, v_3 和 v_4 中必有一个为悬挂 3- 邻点. 由于 G 中不包含 $3^{(3,5,6)}$ - 点和 $3^{(3,5,7)}$ - 点, 因此, $d(f_3) \notin \{6, 7\}$. 再结合 G 无 4- 圈和 9- 圈, 可得 $d(f_3) \geq 10$. 所以, $\omega'(v) \geq -1 + 1 + \frac{7}{5} + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - \frac{6}{7} - \frac{9}{35} = \frac{2}{7} > 0$. 当 $d(f_3) = d(f_5) = 5$ 时, 由于 v_1 、 v_3 、 v_4 和 v_5 均不是 $3^{(3,6,7)}$ - 点, v 没有邻点从 v 拿权 $\frac{6}{7}$. 因为 v_4 和 v_5 中必有一个为 v 的悬挂 3- 邻点, $d(f_4) \geq 10$, 从而有 $\omega'(v) \geq -1 + 1 + \frac{7}{5} + 2 \times \frac{4}{5} - 3 \times \frac{4}{5} - \frac{9}{35} = \frac{12}{35} > 0$.

(b) $m = 1$. 根据引理 3.4(4) 知, f_2 和 f_3 不能同时为 5- 面, 因此, v_3 不是 $3^{(1)}$ - 点. 同理, v_5 也不是 $3^{(1)}$ - 点. 因此, v 的唯一 $3^{(1)}$ - 邻点或为 v_1 或为 v_4 .

先设 v_4 为 v 的 $3^{(1)}$ - 邻点. 此时, f_3 和 f_4 都是 5- 面. 由命题 4.1(2) 知, v_3 和 v_5 分别至多从 v 处拿权 $\frac{2}{35}$. 若 v_1 和 v_2 中至少有一个是 4^+ - 点, 则由权规则知该 4^+ - 点不从 v 拿权. 否则, $d(v_1) = d(v_2) = 3$, 根据引理 2.1(3) 知, v_1 和 v_2 的外邻点均为 5^+ - 点, 因而, 由规则 (R3.1) 知, 它们也都不从 v 拿权. 所以,

$$\omega'(v) \geq -1 + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - 2 \times \frac{2}{35} - 1 \times \frac{6}{7} = \frac{8}{35} > 0.$$

再设 v_1 是 v 的 $3^{(1)}$ - 邻点, 即 f_5 为 5- 面. 根据引理 3.4(2) 知, v_5 不会是 v 的悬挂 3- 邻点. 而且当它是 3- 点时, 它仅关联一个 5- 面. 由观察 4.1(2.2) 知, v_5 至多从 v 处拿权 $\frac{2}{35}$. 若 $d(v_2) = 3$, 根据引理 2.1(3) 知, v_1 和 v_2 的外邻点均是 5^+ - 点, 根据 (R3.1) 知, 它们都不从 v 处拿权, 可得

$$\omega'(v) \geq -1 + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - 2 \times \frac{6}{7} - \frac{2}{35} = \frac{29}{35} > 0.$$

设 v_2 为 4^+ - 点, 则 v_2 不从 v 处拿权. 令 n 为 v 的悬挂 3- 邻点的个数. 若 $n \leq 1$, 则至多只有一个邻点拿权 $\frac{6}{7}$. 根据观察 4.1(2) 知, $\omega'(v) \geq -1 + 2 \times 1 + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - \frac{6}{7} - \frac{2}{35} - \frac{9}{35} = \frac{1}{35} > 0$. 否则 $n = 2$, 即 v_3 和 v_4 都是 v 的悬挂 3- 邻点. 此时, 由引理 3.2(2) 知, f_2 和 f_3 都不能为 7- 面. 这意味着 v_3 至多拿权 $\frac{4}{5}$. 鉴于 G 中不存在 $3^{(3,5,6)}$ - 点与 $3^{(3,6,6)}$ - 点的假设, f_2 和 f_3 中至少有一个为 10^+ - 面. 若 $p = 1$, 则 $\omega'(v) \geq -1 + \frac{7}{5} + 1 \times 2 + \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - \frac{6}{7} - \frac{4}{5} - \frac{2}{35} = \frac{3}{35} > 0$. 否则 $p = 2$. 根据引理 3.3 和 3.4(2) 知, 与 v 相关的异于 f_5 的那个 5- 面只能是 f_3 . 根据 G 中不存在 $3^{(3,5,6)}$ - 和 $3^{(3,5,7)}$ - 点, v_3 和 v_4 均为 $3^{(3,5,10^+)}$ - 点, 从而各至多从 v 拿权 $\frac{4}{5}$. 因此,

$$\omega'(v) \geq -1 + 2 \times \frac{7}{5} + 2 \times \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - 2 \times \frac{4}{5} - \frac{2}{35} = \frac{12}{35} > 0.$$

(3) $t = 2$. 不妨设 $d(f_1) = d(f_3) = 3$. 根据引理 3.3 和 3.4(4) 知, $p \leq 1$. 下面根据 v_5 是否为 v 的悬挂 3- 邻点分类讨论.

先设 v_5 为 v 的悬挂 3- 邻点. 根据引理 3.4(2) 和 3.4(4) 知, $m = 0$. 根据引理 3.2 及无 4- 和 9- 圈的假设, 对每个 $i \in \{2, 4, 5\}$, f_i 为 5-、6- 或 10^+ - 面. 进一步, f_4 和 f_5 中至少有一个为 10^+ - 面, 这是因为 v_5 不是 $3^{(3,5,5)}$ -、 $3^{(3,5,6)}$ - 或 $3^{(3,6,6)}$ - 点. 记 $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. 若 S 中至少有三个顶点不从 v 处拿权, 则有 $\omega'(v) \geq -1 + \frac{7}{5} + 1 + \frac{4}{5} - \frac{4}{5} - \frac{6}{7} = \frac{19}{35} > 0$. 设 S 中至多仅有两个顶点不从 v 处拿权. 显然, S 中 4^+ - 点的个数至多为 2. 若 f_1 和 f_3 都为 $(3, 3, 5)$ - 面. 根据引理 2.1(3) 知, S 中每个点的外邻点全是 5^+ - 点, 根据观察 4.1(3) 知, 它们都不从 v 处拿权, 矛盾. 若 f_1 是 $(3, 3, 5)$ - 面, f_3 是 $(3^+, 4^+, 5)$ - 面, 则 v_3 和 v_4 中至少有一个 4^+ - 点不拿权. 同样地, v_1 和 v_2 的外邻点也都是 5^+ - 点, 因而, 它们也不从 v 处拿权, 矛盾. 设 f_1 和 f_3 都为 $(3, 4^+, 5)$ - 面. 若 f_1 和 f_3 中至少有一个为 $(3, 5^+, 5)$ - 面, 由观察 4.1(3.3) 可知该 $(3, 5^+, 5)$ - 面上的 3- 点至多从 v 处拿权 $\frac{3}{7}$, 因此, $\omega'(v) \geq -1 + \frac{7}{5} + 1 + \frac{4}{5} - \frac{6}{7} - \frac{4}{5} - \frac{3}{7} = \frac{4}{35} > 0$. 设 f_1 和 f_3 都为 $(3, 4, 5)$ - 面. 令 $d(v_{i_1}) = 3$, $d(v_{j_1}) = 4$, $d(v_{i_2}) = 3$, $d(v_{j_2}) = 4$, 其中 $\{i_1, j_1\} = \{1, 2\}$, $\{i_2, j_2\} = \{3, 4\}$. 若 v_{i_1} 和 v_{i_2} 中至少有一个点不从 v 处拿权, 则 $\omega'(v) \geq -1 + \frac{7}{5} + 1 + \frac{4}{5} - \frac{6}{7} - \frac{4}{5} = \frac{19}{35} > 0$. 否则, 根据观察 4.1(3.2) 知, v_{j_1} 和 v_{j_2} 必都为 4^w - 点. 结合 4^w - 点的定义, 再运用引理 3.2(4), $v_{i_1}v_{j_1}$ 和 $v_{i_2}v_{j_2}$ 都不与 7- 面相关联, 即 v_{i_1} 和 v_{i_2} 都不是 $3^{(3,6,7)}$ - 点, 因而, 它们至多从 v 处拿权 $\frac{4}{5}$. 若 $d(f_2) \geq 10$, 则 $\omega'(v) \geq -1 + 2 \times \frac{7}{5} + \frac{4}{5} - 3 \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5} > 0$. 否则, $d(f_2) \in \{5, 6\}$. 运用引理 3.2(3) 和 3.2(4) 可知, v_2 和 v_3 中必有一个点, 如 v_2 , 不是 4^w - 点. 根据观察 4.1(3.2), v_1 不从 v 处拿权, 从而有 $\omega'(v) \geq -1 + \frac{7}{5} + 1 + \frac{4}{5} - 2 \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5} > 0$.

再设 v_5 不是 v 的悬挂 3- 邻点. 由引理 3.4(2) 知, v_2 和 v_3 都不是 $3^{(1)}$ - 点. 当 v_5 为 4^+ - 点时, 它不从 v 处得权. 若 v_5 为 3- 点, 则它至多关联一个 5- 面. 由观察 4.1(2.2) 知, 它最多从 v 处拿权 $\frac{2}{35}$. 记 $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. 若 S 中至少有三个点不从 v 处拿权, 则 $\omega'(v) \geq -1 + 2 \times 1 + \frac{4}{5} - \frac{7}{5} - \frac{2}{35} = \frac{12}{35} > 0$. 仿上一情形的讨论, 可设 f_1 为 $(3, 4, 5)$ - 面, f_3 为 $(3, 4^+, 5)$ - 面. 先设 f_3 为 $(3, 5^+, 5)$ - 面. 由观察 4.1(3.3) 知, 该面上的 3- 点至多拿权 $\frac{7}{10}$. 若 f_1 上的 3- 点不是 $3^{(1)}$ - 点, 则它至多拿权 $\frac{6}{7}$, 可得 $\omega'(v) \geq -1 + 2 \times 1 + \frac{4}{5} - \frac{7}{10} - \frac{6}{7} - \frac{2}{35} = \frac{13}{70} > 0$. 设 f_1 上的 3- 点为 $3^{(1)}$ - 点, 即 v_1v_2 关联的异于 f_1 的那个面为 5- 面. 此时根据引理 3.4(2) 可知, f_1 上的 4- 点不为 4^w - 点, 即为 4^s - 点. 根据观察 4.1(3.2) 可知, v 至多给在 f_1 上的 3- 点转权 $\frac{16}{35}$, 因此, $\omega'(v) \geq -1 + 2 \times 1 + \frac{4}{5} - \frac{16}{35} - \frac{7}{10} - \frac{2}{35} = \frac{41}{70} > 0$. 再设 f_3 为 $(3, 4, 5)$ - 面. 若 v 有两个 4^s - 邻点, 则根据观察 4.1(3.2) 可知, $\omega'(v) \geq -1 + 2 \times 1 + \frac{4}{5} - 2 \times \frac{16}{35} - \frac{2}{35} = \frac{29}{35} > 0$. 否则 v 至少有一个 4^w - 邻点. 根据引理 3.4(2) 知, 对 $i \in \{1, 3\}$, 一旦 f_i 上有 4^w - 点, 则 f_i 上的 3- 点不是 $3^{(1)}$ - 点, 即这样的 3- 点至多从 v 拿权 $\frac{6}{7}$. 因此, $\omega'(v) \geq -1 + 2 \times 1 + \frac{4}{5} - 2 \times \frac{6}{7} - \frac{2}{35} = \frac{15}{35} > 0$. $\square$

至此, 已经证明了: 若 2- 连通图 G 为定理 1.4 的极小反例, 则 G 中至少存在一个 $3^{(3,5,6)}$ - 点, 或 $3^{(3,5,7)}$ - 点, 或 $3^{(3,6,6)}$ - 点. 由引理 3.9 知, G 中必然有一个 2- 连通点导出子图 H , H 以一个 3- 圈

为边界且 H 中不再有 $3^{(3,5,6)}$ -、 $3^{(3,5,7)}$ - 和 $3^{(3,6,6)}$ - 点. 显然, H 仍为平面图. 令 $f_0 = [v_1 v_2 v_3]$ 为 H 的无界面. 下面对 $H = (V(H), E(H), F(H))$ 进行权转移导出矛盾. 定义初始权函数 ω_H 如下: 对于 $v \in V(H)$, 令 $\omega_H(v) = d_H(v) - 6$; 对于 $f \in F(H)$, 令 $\omega_H(f) = 2d_H(f) - 6$, 则有

$$\sum_{v \in V(H)} (d_H(v) - 6) + \sum_{f \in F(H)} (2d_H(f) - 6) = -12.$$

定义 $E(H) \setminus E(f_0)$ 的边为内边. 权转移规则如下:

(r1) 令 $v \in V(f_0)$. 假设 vu 是一条非三角内边.

(r1.1) 设 u 不关联 3- 面.

(r1.1.1) 若 u 恰好关联两个 5- 面, 则 v 转权 $\frac{9}{35}$ 给 u ;

(r1.1.2) 若 u 恰好关联一个 5- 面, 则 v 转权 $\frac{2}{35}$ 给 u .

(r1.2) 设 u 关联一个 3- 面.

(r1.2.1) 若 u 为 $3^{(1)}$ - 点, 则 v 转权 $\frac{7}{5}$ 给 u ;

(r1.2.2) 否则, v 转权 $\frac{6}{7}$ 给 u .

(r2) f_0 不给 $v \in V(f_0)$ 转权.

(r3) 对于任意的 $x \in V(H) \cup F(H) \setminus (f_0 \cup V(f_0))$, 执行前面定义的规则 (R1)–(R4).

设权转移之后得到的新权为 ω'_H . 显然, 仿照之前的讨论可以证明: 在运用规则 (r1)–(r3) 后, 对于所有的 $x \in V(H) \cup F(H) \setminus (f_0 \cup V(f_0))$, 都有 $\omega'_H(x) \geq 0$. 对于 f_0 , 运用规则 (r2), 可得 $\omega'_H(f_0) = \omega_H(f_0) = 2 \times 3 - 6 = 0$.

下面考虑 $v_i \in V(f_0)$ 的新权. 记 m 为 H 中与 v_i 相邻的 $3^{(1)}$ - 点的个数, t 为 H 中与 v_i 相关联的 3- 面的个数 (除 f_0 外). 由于 H 中不含相邻 3- 面, 因此, $t \leq \lfloor \frac{d_H(v_i)-2}{2} \rfloor$. 根据命题 4.1 并运用权转移规则 (r1) 和 (r3), 可得

$$\begin{aligned} \omega'_H(v_i) &\geq \omega_H(v_i) + \frac{4}{5}(d_H(v_i) - 1 - t) - \left(\frac{7}{5} + \frac{2}{35}\right)m - \frac{6}{7}(d_H(v_i) - 2 - 2m) \\ &= \frac{19}{35}d_H(v_i) + \frac{9}{35}m - \frac{4}{5}t - \frac{178}{35} \\ &\geq \frac{19}{35}d_H(v_i) - \frac{4}{5}t - \frac{178}{35} \\ &\geq \frac{19}{35}d_H(v_i) - \frac{30}{7}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

鉴于 H 为 2- 连通, 有 $d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) \geq 8$. 因此,

$$\omega'_H(f_0) + \sum_{i \in \{1,2,3\}} \omega'_H(v_i) \geq 0 + \frac{19}{35} \times 8 - \frac{30}{7} \times 3 = -\frac{298}{35}.$$

得到如下矛盾:

$$0 \leq \sum_{v \in V(H) \setminus V(f_0)} (d_H(v) - 6) + \sum_{f \in F(H) \setminus \{f_0\}} (2d_H(f) - 6) \leq -12 - \left(-\frac{298}{35}\right) = -\frac{122}{35}.$$

由此, 引理 4.1 证毕. □

5 不可分性

引理 5.1 令 $G = (V, E, F)$ 为定理 1.4 的极小反例, 则 G 为不可分图.

证明 假设 G 为可分图, 则 G 中存在割点. 选择 G 的一个只有一个割点 t^* 的终端块 B . 根据引理 2.1(1) 知 B 为 2- 连通. 若 B 中存在某个 $3^{(7)}$ -、 $3^{(8)}$ - 或 $3^{(9)}$ - 点, 根据引理 3.9 知, B 中一定包含一个 2- 连通的点导出子图 H' , 使得 H' 的外边界是一个 3- 圈且 H' 中不再有 $3^{(7)}$ -、 $3^{(8)}$ - 和 $3^{(9)}$ - 点. 对 H' 如同引理 4.1 中对 H 那样进行权转移可得矛盾. 设 B 中不存在 $3^{(7)}$ -、 $3^{(8)}$ - 和 $3^{(9)}$ - 点. 令 f^* 为 B 的外面. 因为 B 为 2- 连通, 所以, B 中的每个面的边界都构成一个圈. 而且 B 中的每个顶点 v 都恰好关联 $d_B(v)$ 个不同的面. 由于 B 中不存在 4- 圈和 9- 圈, 因此, B 中不存在 4- 面和 9- 面. 并且, 引理 2.1–2.5 和 3.1–3.9 中已给出的关于 G 的结构性质对于 B 来说只在涉及 t^* 时有可能不成立. 因此, 对于 $V(B) \cup F(B)$ 中的每个元素, 定义初始权函数为 $\omega_B(v) = d_B(v) - 6$, 当 $v \in V(B)$; $\omega_B(f) = 2d_B(f) - 6$, 当 $f \in F(B)$. 对于任意 $x \in V(B) \cup F(B) \setminus \{t^*\}$, 运用权转移规则 (R1)–(R4) 可证明新权 $\omega'_B(x) \geq 0$. 而对于 t^* , 运用规则 (r1). 由 (4.2) 可知新权 $\omega'_B(t^*) \geq \frac{19}{35} \times 2 - \frac{30}{7} = -\frac{112}{35}$, 由此得到如下矛盾:

$$0 \leq \sum_{v \in V(B) \setminus \{t^*\}} (d_B(v) - 6) + \sum_{f \in F(B)} (2d_B(f) - 6) \leq -12 - \left(-\frac{112}{35}\right) = -\frac{308}{35}.$$

引理 5.1 证毕. □

显然, 引理 5.1 与 4.1 矛盾, 此矛盾完成定理 1.4 的证明.

参考文献

- Appel K, Haken W. Every planar map is four colorable. Part I: Discharging. Illinois J Math, 1977, 21: 429–490
- Appel K, Haken W. Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility. Illinois J Math, 1977, 21: 491–567
- Grötzsch H. Ein dreifarbensatz für dreikreisfreie netze auf der kugel. Math Nat Reihe, 1959, 8: 109–120
- Cowen L J, Cowen R H, Woodall D R. Defective colorings of graphs in surfaces: Partitions into subgraphs of bounded valency. J Graph Theory, 1986, 10: 187–195
- Xu B. On $(3, 1)^*$ -coloring of plane graphs. SIAM J Discrete Math, 2009, 23: 205–220
- Steinberg R. The state of the three color problem. Ann Discrete Math, 1993, 55: 211–248
- Lih K W, Song Z, Wang W, et al. A note on list improper coloring planar graphs. Appl Math Lett, 2001, 14: 269–273
- Dong W, Xu B. A note on list improper coloring of plane graphs. Discrete Appl Math, 2009, 157: 433–436
- Wang Y, Xu L. Improper choosability of planar graphs without 4-cycles. SIAM J Discrete Math, 2013, 27: 2029–2037
- Chen M, Raspaud A. On $(3, 1)^*$ -choosability of planar graphs without adjacent short cycles. Discrete Appl Math, 2014, 162: 159–166
- Wang Y, Xu J. Decomposing a planar graph without cycles of length 5 into a matching and a 3-colorable graph. European J Combin, 2015, 43: 98–123
- Chang G J, Havet F, Montassier M, et al. Steinberg's conjecture and near-colorings. <http://hal.inria.fr/inria-00605810/en/>, 2018
- Hill O, Smith D, Wang Y, et al. Planar graphs without 4-cycles or 5-cycles are $(3, 0, 0)$ -colorable. Discrete Math, 2013, 313: 2312–2317
- Hill O, Yu G. A relaxation of Steinberg's conjecture. SIAM J Discrete Math, 2013, 27: 584–596
- Xu L, Miao Z, Wang Y. Every planar graph with cycles of length neither 4 nor 5 is $(1, 1, 0)$ -colorable. J Comb Optim, 2014, 28: 774–786
- Chen M, Wang Y, Liu P, et al. Planar graphs with cycles of length neither 4 nor 5 are $(2, 0, 0)$ -colorable. Discrete Math, 2016, 339: 886–905
- Cohen-Addad V, Hebdige M, Král' D, et al. Steinberg's conjecture is false. J Combin Theory Ser B, 2017, 122: 452–456

- 18 Dai L, Wang Y, Xu J. Every planar graph without cycles of length 4 or 9 is $(1, 1, 0)$ -colorable. *Discrete Math*, 2017, 340: 2108–2122
- 19 Wang Y, Xu J. Improper colorability of planar graphs without prescribed short cycles. *Discrete Math*, 2014, 322: 5–14
- 20 徐灵姬, 王应前. 既不含 4-圈又不含 6-圈的平面图的非正常染色. *中国科学: 数学*, 2013, 43: 15–24
- 21 刘配配, 王应前. 不含 4-圈与 7-圈的平面图是 $(2, 0, 0)$ -可染的. *中国科学: 数学*, 2014, 44: 1153–1164
- 22 Wang Y, Xu J. Planar graphs with cycles of length neither 4 nor 6 are $(2, 0, 0)$ -colorable. *Inform Process Lett*, 2013, 113: 659–663

Planar graphs without cycles of length 4 or 9 are $(2, 0, 0)$ -colorable

Min Chen, Lifeng Dai, Jingfang Nie, Yingqian Wang & Weiqiang Yu

Abstract Let $d_1, d_2, \dots, d_k$ be k non-negative integers. A graph G is $(d_1, d_2, \dots, d_k)$ -colorable, if V , the vertex set of G , can be partitioned into subsets $V_1, V_2, \dots, V_k$ such that the graph $G[V_i]$ induced by V_i has the maximum degree at most d_i for $i = 1, 2, \dots, k$. In 1976, Steinberg conjectured that every planar graph without cycles of length 4 or 5 is $(0, 0, 0)$ -colorable. Motivated by Steinberg's conjecture, a number of authors proved the following three conclusions: (1) for every $i \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, every planar graph without cycles of length 4 or i is list $(1, 1, 1)$ -colorable; (2) for every $i \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, every planar graph without cycles of length 4 or i is $(1, 1, 0)$ -colorable; (3) for every $i \in \{5, 6, 7, 8\}$, every planar graph without cycles of length 4 or i is $(2, 0, 0)$ -colorable. To make Conclusion (3) neat as Conclusions (1) and (2), we prove that planar graphs without cycles of length 4 or 9 are $(2, 0, 0)$ -colorable.

Keywords planar graph, Steinberg's conjecture, post Steinberg's conjecture, $(2, 0, 0)$ -coloring, reducibility, discharging

MSC(2010) 05C15

doi: 10.1360/N012018-00129