论文

基于SBFEM和样条插值的多边形偶应力/应变梯度理论单元

陈娟¹, 李崇君^{2*}

1. 东北财经大学数学学院, 大连 116025;

2. 大连理工大学数学科学学院, 大连 116024

*联系人, E-mail: chongjun@dlut.edu.cn

收稿日期: 2020-05-08; 接受日期: 2020-07-17; 网络出版日期: 2021-02-24

国家自然科学基金(编号: 11572081, 11871137)和辽宁省高等学校创新人才基金(编号: LR2017054, LCR2018001)资助项目

摘要 偶应力/应变梯度理论刻画材料在细观或微观尺度的应变非局部化现象的理论, 其基本方程是在传统连续体力学二阶微分方程基础上增加含有材料长度参数的四阶微分方程. 偶应力/应变梯度理论有限元的节点参数包含位移的函数值和导数值, 并由 C^{0-1} 和 C^1 增强片检验要求单元对位移函数满足2次完备性和 C^0 连续. 相比三角形和四边形单元, 构造具有高阶完备性的多边形单元形状函数更有难度, 目前还缺少用于求解偶应力和应变梯度理论的多边形单元的研究. 本文采用比例边界有限元方法(SBFEM)和基于离散Kirchhoff理论的多边形薄板样条单元(DKPS)相结合的方法, 构造用于求解偶应力/应变梯度理论的多边形单元(SBFEMd3-DKPSd2). 分别用SBFEM中环向3次单元和DKPS单元计算单元应变和应变梯度的刚度矩阵, 避免了单元形状函数表达式的计算, 并满足偶应力/应变梯度理论片检验的要求. 数值算例显示, 该单元对凸多边形、非凸多边形和1-irregular退化的网格都有很好的计算精度.

关键词 边形单元, 偶应力/应变梯度理论, 比例边界有限元, 样条插值基函数, 单元刚度矩阵

PACS: 02.60.Cb, 02.60.Ed, 02.70.Dh, 46.70.De

1 引言

经典连续体力学理论采用理想化模型, 建立在材料均匀、连续分布的假设基础上. 而事实上, 材料总是含有夹杂、微裂纹或晶格位错等微缺陷. 当试件尺寸降低到一定程度, 会出现传统连续体力学不能解释的尺度效应现象^[1]. 为了修正连续体力学^[2], 引发了对非局部理论(Nonlocal Theory)^[3,4]、偶应

力(Couple Stress)^[5-7]和应变梯度理论(Strain Gradient)^[8,9]的研究, 获得了一些与经典理论不同的结果^[10,11]. 偶应力和应变梯度理论的基本方程是在连续体力学二阶微分方程基础上增加含有材料特征长度参数的四阶微分方程, 这与连续体力学的基本方程有本质的不同, 给实际应用的有限元方法带来了新的问题. 原本在连续体力学中的应变只含位移的一阶导数, 薄板的应变只含位移的二阶导数. 现在,

引用格式: 陈娟, 李崇君. 基于SBFEM和样条插值的多边形偶应力/应变梯度理论单元. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2021, 51: 054602

Chen J, Li C-J. A polygonal element for couple stress/strain gradient elasticity based on SBFEM and spline interpolation (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2021, 51: 054602, doi: [10.1360/SSPMA-2020-0168](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2020-0168)

偶应力/应变梯度有限元中应变同时出现了位移的一阶和二阶导数, 要求节点参数包括位移的函数值和导数值. 此外, Soh和陈万吉^[12,13]的研究表明, 偶应力/应变梯度理论的分片检验函数应是满足体力为零的平衡方程的2次位移函数, 这还要求单元对位移函数满足2次完备性和 C^0 连续, 目前用于求解偶应力/应变梯度理论的绝大部分单元都不能通过新提出的分片检验. 随后, 借助分片检验的理论分析, 多个满足分片检验条件的三角形和四边形偶应力/应变梯度理论单元被陆续提出^[12,14-18]. 近年来, 国内外学者将不同的有限元方法用于构造求解偶应力/应变梯度理论问题的高精度单元^[19-23].

在单元构造方面, 相比三角形和四边形单元, 平面多边形单元具有更好的网格剖分灵活性, 也常常用于二维有限元方法中^[24-29], 但构造具有高阶完备性的多边形单元形状函数则更有难度, 目前还缺少用于求解偶应力和应变梯度理论的多边形单元的研究.

对于三角形或四边形单元, 通常采用多项式插值基函数和等参变换构造形状函数, 但对于多边形单元, 这两种方法都失效. 目前的研究中, 多边形单元主要采用有理插值方法, 通常只有线性完备性^[30-33], 不能满足偶应力/应变梯度理论分片检验的要求.

此外, 在多边形单元的应用中, 为了增加剖分灵活性, 还需要考虑两种情况, 非凸多边形单元或者退化的多边形单元, 如图1(a)和(b)所示, 而通常的多边形单元都只能处理凸多边形单元. 退化多边形单元是指有多个相邻的顶点共线的情形, 例如, 图1(b)中三个相邻顶点 P_{i-1} , P_i , P_{i+1} 共线, 称为1-irregular退

化. 事实上, 这种退化情况经常出现在三角形或者四边形单元的自适应有限元计算中. 当对某个单元进行局部细分而相邻单元不细分时, 会使其相邻的未细分单元边中出现悬节点. 包含悬节点的单元即可看成是三个相邻顶点共线的退化多边形单元. 在自适应方法中, 悬节点会破坏单元之间的协调性(连续性), 需要对网格进行修正、或者增加一些额外的计算.

1997年, Song和Wolf^[34,35]提出了比例边界有限元方法(The Scaled Boundary Finite Element Method, SBFEM), 是一种基于任意多边形单元求解弹性力学方程的数值方法. 与传统有限元方法的全离散格式有很大不同, SBFEM是半离散半解析的方法. 在每个单元内部选取“比例中心”, 并只对单元边界进行离散插值, 在单元内部连接“比例中心”和边界节点的连线上选取含有非整数阶的幂函数作为形状函数, 因此SBFEM可以灵活处理包含非凸多边形单元或者退化的多边形单元的情形. 而且, 由于SBFEM特殊的单元构造方法, 只要求“比例中心”与边界节点的连线位于单元内部即可, 因此非凸或退化的多边形单元的计算与凸多边形单元一致, 单元之间的协调性不会受到悬节点的影响, 并能获得很好的计算精度^[35]. 最近, 在文献^[36]中, 我们从理论上证明了对任意封闭的多边形单元, SBFEM具有和边界一元多项式插值基函数相同的完备性. 目前比例边界有限元方法主要用于求解平面或者三维的二阶连续体力学问题, 其节点参数是单元边界节点的位移值, 并且其单元形状函数是事先未知的, 本文将克服这一不足使SBFEM应用于偶应力/应变梯度理论的有限元计算.

图 1 两个多边形单元. (a) 非凸的多边形单元; (b) 退化的多边形单元

Figure 1 Two polygonal elements. (a) Nonconvex polygonal element; (b) irregular polygonal element.

多边形单元的研究难点在于插值基函数或形状函数的构造. 在文献[37]中, 我们将多边形进行三角剖分, 采用基于三角形面积坐标表示样条函数(分片多项式)的B网方法构造了只包含边界节点并允许非凸和1-irregular退化的多边形样条插值基函数. 进一步, 再结合离散Kirchhoff理论构造了多边形薄板弯曲单元, 记为DKPS单元. 该单元的插值自由度为各个多边形顶点处的挠度位移和两个转角, 并对位移函数具有2次完备性, 可以处理同时包含凸多边形、非凸多边形和1-irregular退化的网格. 而且采用B网方法, 可以直接通过相应B网系数组成的向量计算样条基函数的导数和积分, 便于得到单元刚度矩阵, 无需计算单元形状函数的表达式. 数值实验显示该单元对畸变网格仍然能保持很好的计算精度.

本文研究用于求解偶应力/应变梯度理论的多边形单元, 其中的难点问题是构造多边形单元上满足分片检验要求的形状函数. 注意到, 在实现有限元算法的程序中, 最终的步骤是求解由单元刚度矩阵组成的有限元线性方程组. 因此, 本文的方法是在理论证明SBFEM和DKPS单元的完备性的基础上, 研究偶应力/应变梯度理论有限元的多边形单元刚度矩阵的构造, 从而避免了单元形状函数表达式的计算.

偶应力/应变梯度理论的单元刚度矩阵包含应变部分和应变梯度部分, 本文采用两个单元结合的方法来分别计算单元应变和应变梯度的刚度矩阵. (1) 对于应变部分, 由于偶应力/应变梯度理论单元的节点参数包含位移的函数值和导数值(混合节点参数), 这要求位移函数在单元边界上具有3次多项式精度. 为了满足这一要求, 本文采用SBFEM的环向3次单元来表示应变, 借助节点参数之间的转化关系, 我们将基于位移节点参数的SBFEM单元刚度矩阵转化为基于混合节点参数的应变单元刚度矩阵, 避免了对形状函数的计算. (2) 对于应变梯度部分, 需要计算位移的二阶导数, 这与薄板单元类似. 本文采用之前构造的基于离散Kirchhoff理论的多边形样条薄板单元的形状函数进行应变梯度单元刚度矩阵的计算.

由于上述两个单元从理论上已证明对多边形(包含非凸多边形和具有1-irregular退化的多边形)

单元位移函数分别具有3次和2次多项式完备性, 并都满足 C^0 连续, 因而符合偶应力/应变梯度理论分片检验的要求. 数值算例显示, 本文提出的这个新的组合单元, 即基于SBFEM和样条插值的多边形偶应力/应变梯度理论单元(记为SBFEMd3-DKPSd2), 对凸多边形、非凸多边形和1-irregular退化的网格都能通过 C^{0-1} 和 C^1 增强2次分片检验, 并在算例中显示了很好的计算精度.

本文结构如下: 第2节简单介绍偶应力/应变梯度理论的基本方程和有限元公式; 第3节基于环向3次插值的比例边界有限元构造单元应变刚度矩阵; 第4节采用多边形样条薄板单元的形状函数构造单元应变梯度刚度矩阵; 最后通过数值实验对本文提出的组合单元进行测试验证.

2 平面偶应力/应变梯度理论简介

2.1 偶应力/应变梯度理论的基本方程

由于偶应力和应变梯度理论的单元节点参数中同时包含了位移及导数(或位移及应变梯度中的应变), 根据节点参数的插值关系, 通常可把偶应力和应变梯度理论单元分为两类, 分别为位移及导数不独立插值的 C^1 类理论和位移及导数独立插值的 C^0 类理论[11,13]. 偶应力理论和应变梯度理论的共同特点是几何方程中引入了位移的二阶导数, 偶应力理论可看作应变梯度理论的一种反对称的特殊情况. 两种理论的应变部分是相同的, 都包含了位移的一阶导数, 在曲率部分包含了位移的二阶导数, 因此两种理论的 C^1 类单元的收敛性是一致的. 所不同的是采用了不同的导数的线性组合系数, 但在收敛意义下可以看成是同一个单元. 本文研究采用 C^1 类理论的偶应力/应变梯度理论的多边形单元.

偶应力/应变梯度理论的本构方程:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - l^2 \nabla^2 \tilde{\varepsilon}_{kl}), \quad (1)$$

其中

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2)$$

u_i 和 ε_{ij} 分别是位移分量和应变分量, σ_{ij} 是应力分量, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, C_{ijkl} 是材料的弹性张

量分量, l 是材料的特征长度参数, 用以描述材料在微观尺度下的本构关系, 当 l 趋近于 0 则回到经典连续介质理论. 需要说明的是, 关于材料的特征长度参数 l 的物理意义以及如何确定具体数值等是一个重要的研究问题 [38, 39]. 由于本文主要针对的是基于偶应力和应变梯度理论的有限元计算问题, 因此, 特征长度参数 l 是作为本构方程或者有限元方程中的一个已知常数, 在后面的数值计算中, 我们将取不同的数值进行测试.

在公式(1)中, 对应变梯度理论, 取

$$\tilde{\varepsilon}_{kl} = \varepsilon_{kl}, \quad (3)$$

对偶应力理论, 取

$$\tilde{\varepsilon}_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} - u_{l,k}). \quad (4)$$

令

$$\sigma_{ij}^0 = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (5)$$

$$m_{kij} = C_{ijmn} l^2 \tilde{\varepsilon}_{mn,k}, \quad (6)$$

则

$$m_{kij,k} = C_{ijkl} l^2 \nabla^2 \tilde{\varepsilon}_{kl}. \quad (7)$$

根据虚功原理

$$\begin{aligned} & \int_V (\sigma_{ij}^0 \delta \varepsilon_{ij} + m_{kij} \delta \varepsilon_{ij,k}) dV \\ &= \int_V f_i \delta u_i dV + \int_{S_\sigma} (t_i \delta u_i + \mu_i n_k \delta u_{i,k}) dS, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 f_i 是体积 V 上的单位体力, n_k 是边界曲面 S 的单位外法向量, t_i 和 μ_i 是曲面 S 上的单位应力和高阶应力张量.

可得平衡方程

$$(\sigma_{ij}^0 - m_{kij,k})_{,j} + f_i = 0, \quad (9)$$

边界力

$$\begin{aligned} t_i &= \sigma_{ij}^0 n_j - n_j m_{kij,k}, \\ \mu_i &= m_{kij} n_j n_k. \end{aligned} \quad (10)$$

2.2 偶应力/应变梯度理论的有限元公式

考虑具有 n 个顶点的多边形单元, 每个顶点 P_i 对应 6 个节点参数 $(u_i, v_i, u_{xi}, v_{xi}, u_{yi}, v_{yi})$, 则单元位移函数表示为

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{q}, \quad (11)$$

其中 $\mathbf{q}$ 是包含 $6n$ 个节点参数的向量

$$\mathbf{q} = (u_1, v_1, u_{x1}, v_{x1}, u_{y1}, v_{y1}, \dots, u_n, v_n, u_{xn}, v_{xn}, u_{yn}, v_{yn})^T, \quad (12)$$

$\mathbf{N}(x, y)$ 表示形状函数(插值基函数)矩阵,

$\mathbf{N}(x, y) =$

$$\begin{bmatrix} N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & \cdots & N_{3n}(x, y) & 0 \\ 0 & N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & \cdots & 0 & N_{3n}(x, y) \end{bmatrix}.$$

应变向量为

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y) \\ \gamma_s(x, y) \end{pmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u}(x, y) = \mathbf{B}(x, y) \mathbf{q}, \quad (13)$$

其中

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

对于应变梯度理论, 其应变梯度向量为

$$\boldsymbol{\chi}(x, y) = \begin{pmatrix} \chi_x(x, y) \\ \chi_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{\varepsilon}(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{\varepsilon}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_x(x, y) \\ \mathbf{B}_y(x, y) \end{pmatrix} \mathbf{q}, \quad (15)$$

对于偶应力理论, 其应变梯度向量为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}(x, y) &= \begin{pmatrix} \chi_x(x, y) \\ \chi_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) (x, y) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) (x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{B}}_x(x, y) \\ \bar{\mathbf{B}}_y(x, y) \end{pmatrix} \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $\chi_x(x, y)$ 和 $\chi_y(x, y)$ 为标量函数.

因此本构关系为

$$\sigma(x, y) = \mathbf{D}\varepsilon(x, y), \quad \mu(x, y) = \bar{\mathbf{D}}\chi(x, y). \quad (17)$$

对于应变梯度理论, $\bar{\mathbf{D}} = l^2\mathbf{D}$, 对于偶应力理论, $\bar{\mathbf{D}} = 4l^2G$.

对于各向同性材料, 我们有

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_1 & \nu D_1 & 0 \\ \nu D_1 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad (18)$$

其中 $D_1 = E(1-\nu)/((1+\nu)(1-2\nu))$, $G = E/(2(1+\nu))$. E 是杨氏模量, ν 为泊松比.

则对一个多边形单元 P^e , 应变梯度理论的单元刚度矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{sg}^e &= \mathbf{K}_{st}^e + \mathbf{K}_{sg-sg}^e \\ &= \iint_{P^e} (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} + l^2 \mathbf{B}_x^T \mathbf{D} \mathbf{B}_x + l^2 \mathbf{B}_y^T \mathbf{D} \mathbf{B}_y) dx dy, \end{aligned} \quad (19)$$

其中, 单元应变刚度矩阵和应变梯度刚度矩阵分别记为

$$\mathbf{K}_{st}^e = \iint_{P^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy,$$

和

$$\mathbf{K}_{sg-sg}^e = l^2 \iint_{P^e} (\mathbf{B}_x^T \mathbf{D} \mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y^T \mathbf{D} \mathbf{B}_y) dx dy.$$

对多边形单元 P^e , 偶应力理论的单元刚度矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{cs}^e &= \mathbf{K}_{st}^e + \mathbf{K}_{cs-sg}^e \\ &= \iint_{P^e} (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} + 4l^2 \bar{\mathbf{B}}_x^T G \bar{\mathbf{B}}_x + 4l^2 \bar{\mathbf{B}}_y^T G \bar{\mathbf{B}}_y) dx dy. \end{aligned} \quad (20)$$

其中, 单元应变梯度刚度矩阵记为

$$\mathbf{K}_{cs-sg}^e = 4l^2 \iint_{P^e} (\bar{\mathbf{B}}_x^T G \bar{\mathbf{B}}_x + \bar{\mathbf{B}}_y^T G \bar{\mathbf{B}}_y) dx dy.$$

3 比例边界有限元构造单元应变刚度矩阵

$\mathbf{K}_{st}^e$

1997年, Song和Wolf^[34,35]提出了比例边界有限元方法, 是一种基于任意多边形单元求解弹性力学方程的半离散半解析的数值方法. 如图2(a)所示为一个多边形单元, 设多边形的各顶点坐标为 $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 在单元内取一点 $P_0 = (x_0, y_0)$, 称为比例中心, 使各连线 $\overline{P_0 P_i}$ (称为径向线)都包含在多边形内部. 在每个小三角形 $\Delta_i = \Delta P_0 P_i P_{i+1}$ 上按如下线性变换建立比例边界坐标系:

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = x_0 + \xi(x_b(\eta) - x_0) \\ \quad = x_0 + \xi \left(\frac{1}{2}(1-\eta)x_i + \frac{1}{2}(1+\eta)x_{i+1} - x_0 \right), \\ y(\xi, \eta) = y_0 + \xi(y_b(\eta) - y_0) \\ \quad = y_0 + \xi \left(\frac{1}{2}(1-\eta)y_i + \frac{1}{2}(1+\eta)y_{i+1} - y_0 \right), \end{cases} \quad (21)$$

即在每个三角形 Δ_i 的局部坐标系 (ξ, η) 下, 比例中心 P_0 对应 $\xi = 0$, 边界 $\overline{P_i P_{i+1}}$ 对应 $\xi = 1$, 内边 $\overline{P_0 P_i}$ 和 $\overline{P_0 P_{i+1}}$ 分别对应 $\eta = -1$ 和 $\eta = 1$, 如图2(b)所示.

对比例边界坐标 ξ 和 η 的偏导数计算为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \xi \end{bmatrix} \mathbf{J}_b(\eta) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

其中边界雅可比矩阵定义为

$$\mathbf{J}_b(\eta) = \begin{bmatrix} x_b(\eta) - x_0 & y_b(\eta) - y_0 \\ x_b(\eta)_{,\eta} & y_b(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix}.$$

则可将平面应变的微分矩阵(14)用比例边界坐标 ξ, η 表示为

$$\mathbf{L} = \mathbf{b}_1(\eta) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{b}_2(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (23)$$

图 2 一个多边形单元与其中小三角形上的比例边界坐标. (a) S-单元; (b) 比例边界坐标

Figure 2 A polygonal element and the scaled boundary coordinates in one triangular sector. (a) S-element; (b) the scaled boundary coordinates.

其中矩阵

$$\mathbf{b}_1(\eta) = \frac{1}{|\mathbf{J}_b(\eta)|} \begin{bmatrix} y_b(\eta)_{,\eta} & 0 \\ 0 & -x_b(\eta)_{,\eta} \\ -x_b(\eta)_{,\eta} & y_b(\eta)_{,\eta} \end{bmatrix}, \quad (24a)$$

$$\mathbf{b}_2(\eta) = \frac{1}{|\mathbf{J}_b(\eta)|} \begin{bmatrix} -(y_b(\eta) - y_0) & 0 \\ 0 & x_b(\eta) - x_0 \\ x_b(\eta) - x_0 & -(y_b(\eta) - y_0) \end{bmatrix}. \quad (24b)$$

对于位移函数 $u(x, y)$, 以均匀节点的3次Lagrange插值为例, 在边界 $\overline{P_i P_{i+1}}$ 上取4个均匀节点, 记为 $P_i = P_{i,0}$, $P_{i,1}$, $P_{i,2}$, $P_{i,3} = P_{i+1}$, 如图2(b)所示. 沿边界 $\overline{P_i P_{i+1}}$ 的3次Lagrange插值基函数记为 $L_0(\eta)$, $L_1(\eta)$, $L_2(\eta)$, $L_3(\eta)$, 并设单元内每条径向线 $\overline{P_0 P_{i,j}}$ 上的位移函数值为 $u_{i,j}(\xi)$, 则在小三角形 $\Delta_i = \Delta P_0 P_i P_{i+1}$ 上, 利用比例边界坐标 (ξ, η) 和3次Lagrange插值基函数, 可近似表示为

$$u(x, y)|_{\Delta_i} \simeq u_h(\xi, \eta)|_{\Delta_i} = \sum_{j=0}^3 u_{i,j}(\xi) L_j(\eta), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

这种表示函数的方法与通常有限元在三角形单元上的面积坐标表示是不同的.

不同于有限元的全离散格式, SBFEM采用半离散半解析的逼近方法. 对一个多边形单元, 只沿单元环向(即多边形边界)进行离散插值, 每条边界上的局部坐标 η 是独立的. 设每条边界上都采用3次Lagrange插值, 则环向共有 $3n$ 个节点参数, 为了方便, 将每个多边形单元边界的节点统一编号, 对应的“分片插值基函数”记为 $\tilde{N}_1(\eta)$, $\tilde{N}_2(\eta)$, $\dots$, $\tilde{N}_{3n}(\eta)$.

则在整个多边形单元上的位移函数表示为

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{N}}(\eta) \mathbf{u}_h(\xi), \quad (25)$$

其中 $\mathbf{u}_h(\xi)$ 是包含 $6n$ 个节点径向位移函数的向量

$$\mathbf{u}_h(\xi) = (u_1(\xi), v_1(\xi), u_2(\xi), v_2(\xi), \dots, u_{3n}(\xi), v_{3n}(\xi))^T,$$

$\tilde{\mathbf{N}}(\eta)$ 表示关于边界局部坐标 η 的Lagrange插值基函数组成的矩阵,

$$\tilde{\mathbf{N}}(\eta) = \begin{bmatrix} \tilde{N}_1(\eta) & 0 & \tilde{N}_2(\eta) & 0 & \dots & \tilde{N}_{3n}(\eta) & 0 \\ 0 & \tilde{N}_1(\eta) & 0 & \tilde{N}_2(\eta) & \dots & 0 & \tilde{N}_{3n}(\eta) \end{bmatrix}.$$

根据公式(24), 令矩阵

$$\mathbf{B}_1(\eta) = \mathbf{b}_1(\eta) \mathbf{N}^u(\eta), \quad \mathbf{B}_2(\eta) = \mathbf{b}_2(\eta) \mathbf{N}^u(\eta)_{,\eta}. \quad (26)$$

由公式(13)得到应变向量为

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\xi, \eta) = \mathbf{B}_1(\eta) \mathbf{u}_h(\xi)_{,\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{B}_2(\eta) \mathbf{u}_h(\xi). \quad (27)$$

由本构关系(17)和(27)得到应力向量为

$$\boldsymbol{\sigma}(\xi, \eta) = \mathbf{D}(\mathbf{B}_1(\eta) \mathbf{u}_h(\xi)_{,\xi} + \frac{1}{\xi} \mathbf{B}_2(\eta) \mathbf{u}_h(\xi)). \quad (28)$$

在多边形单元的每条边界上进行积分, 得到如下矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= \int_{-1}^1 \mathbf{B}_1^T(\eta) \mathbf{D} \mathbf{B}_1(\eta) |\mathbf{J}_b(\eta)| d\eta, \\ \mathbf{e}_1 &= \int_{-1}^1 \mathbf{B}_2^T(\eta) \mathbf{D} \mathbf{B}_1(\eta) |\mathbf{J}_b(\eta)| d\eta, \\ \mathbf{e}_2 &= \int_{-1}^1 \mathbf{B}_2^T(\eta) \mathbf{D} \mathbf{B}_2(\eta) |\mathbf{J}_b(\eta)| d\eta. \end{aligned} \quad (29)$$

进一步, 将所有边界得到的小矩阵 $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 相加组装后分别得到三个 $6n \times 6n$ 阶矩阵 $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$, 即为分片插值基函数 $\tilde{\mathbf{N}}(\eta)$ 经过相应微分算子作用后沿多边形单元环向积分所得.

按照文献[34,35]中弹性力学平面问题的虚功原理, 不考虑体力项时, 可得到每条径向线上未知位移函数 $\mathbf{u}_h(\xi)$ 需要满足如下二阶常微分方程组:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_0 \xi \mathbf{u}_h(\xi)_{,\xi} + \mathbf{E}_1^T \mathbf{u}_h(\xi) = \mathbf{q}_h(\xi), \\ \mathbf{E}_0 \xi^2 \mathbf{u}_h(\xi)_{,\xi\xi} + (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_1) \xi \mathbf{u}_h(\xi)_{,\xi} \\ - \mathbf{E}_2 \mathbf{u}_h(\xi) = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (30)$$

其中 $\mathbf{u}_h(\xi)_{,\xi}$ 和 $\mathbf{u}_h(\xi)_{,\xi\xi}$ 分别表示函数向量对局部坐标 ξ 的一阶导和二阶导, $\mathbf{q}_h(\xi)$ 是沿各径向线的应力近似函数向量.

为了求解上述 $\mathbf{u}_h(\xi)$ 的二阶常微分方程组(30), 将其表示为一些由幂函数确定的“位移模态”的线性组合

$$\mathbf{u}_h(\xi) = c_1 \xi^{\lambda_1} \boldsymbol{\phi}_1 + c_2 \xi^{\lambda_2} \boldsymbol{\phi}_2 + \cdots.$$

将任意模态函数 $\hat{\mathbf{u}}_h(\xi) = \xi^\lambda \boldsymbol{\phi}$ 代入上述微分方程组并取 $\xi = 1$, 可得如下矩阵特征方程组:

$$\mathbf{Z} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\psi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{E}_1^T & \mathbf{E}_0^{-1} \\ \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_0^{-1} \mathbf{E}_1^T & \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\psi} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\psi} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

其中 $\boldsymbol{\psi} = (\mathbf{E}_0 \lambda + \mathbf{E}_1^T) \boldsymbol{\phi}$ 为位移模态函数 $\hat{\mathbf{u}}_h(\xi) = \xi^\lambda \boldsymbol{\phi}$ 对应的边界应力向量. 式(31)中的矩阵 $\mathbf{Z}$ 是一类 Hamiltonian 矩阵, 有关数学理论表明它的特征值是按照 $(\lambda, -\lambda)$ 成对出现的. 由于比例中心 P_0 对应 $\xi = 0$, 因此非负特征值 λ 和相应的特征向量 $\boldsymbol{\phi}$ 对应有限域的位移模态 $\hat{\mathbf{u}}_h(\xi) = \xi^\lambda \boldsymbol{\phi}$, 负特征值 $-\lambda$ 和相应的特征向量 $\boldsymbol{\psi}$ 对应无限域的位移模态 $\hat{\mathbf{u}}_h(\xi) = \xi^{-\lambda} \boldsymbol{\phi}$.

本文考虑有限域问题, 计算矩阵 $\mathbf{Z}$ 的 $6n$ 个非负特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_{6n}$ 及相应特征向量的两部分 $\boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_{6n}$ 和 $\boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_{6n}$, 则得到常微分方程组(30)的解为

$$\mathbf{u}_h(\xi) = \sum_{i=1}^{6n} c_i \xi^{\lambda_i} \boldsymbol{\phi}_i, \quad \mathbf{q}_h(\xi) = \sum_{i=1}^{6n} c_i \xi^{\lambda_i} \boldsymbol{\psi}_i.$$

记 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\mathbf{Q}$ 分别为 $\boldsymbol{\phi}_1, \dots, \boldsymbol{\phi}_{6n}$ 和 $\boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_{6n}$ 组成的 $6n$ 阶方阵, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{6n})^T$, 则单元边界节点位

移向量

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}_h(\xi = 1) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{c}.$$

若矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 可逆, 则

$$\mathbf{q}_h(\xi = 1) = \mathbf{Q} \mathbf{c} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{a},$$

即得到该多边形单元的刚度矩阵为

$$\tilde{\mathbf{K}}_{st}^e = \mathbf{Q} \boldsymbol{\Phi}^{-1}. \quad (32)$$

当得到所有单元节点的位移值

$$\mathbf{a} = (u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_{3n}, v_{3n})^T,$$

再利用 $\mathbf{c} = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{a}$ 和公式(25), 可得每个多边形单元上的位移函数

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \tilde{\mathbf{N}}(\eta) \sum_{i=1}^{6n} c_i \xi^{\lambda_i} \boldsymbol{\phi}_i = \tilde{\mathbf{N}}(\eta) \boldsymbol{\Phi} \xi^\lambda \boldsymbol{\Phi}^{-1} \mathbf{a},$$

其中 ξ^λ 为以 λ 为对角线元素的对角矩阵.

由此, SBFEM 对应多边形位移节点参数的单元形状函数为行向量 $\tilde{\mathbf{N}}(\eta) \boldsymbol{\Phi} \xi^\lambda \boldsymbol{\Phi}^{-1}$ 的 $6n$ 个分量函数. 但这些形状函数是事先未知的, 需要通过计算矩阵 $\mathbf{Z}$ 的特征值 λ 和特征向量 $\boldsymbol{\Phi}$ 后才能得到, 并且包含了非整数次的幂函数, 这是 SBFEM 与传统有限元方法很不一样的地方. 由于整数特征值 λ_i 对应的模态函数 $\xi^{\lambda_i} \boldsymbol{\phi}_i$ 能组成多项式基函数, 在文献[36]中, 我们证明了对多边形单元总是可以得到有足够重数的相应整数特征值, 再补充体力项对应的整数阶幂函数, 从而证明了多边形单元具有和边界多项式插值基函数相同的完备性. 当不考虑体力项时, 利用边界一元 3 次 Lagrange 插值基函数构造的 SBFEM 对多边形单元能精确重构满足体力为零的平衡方程的任意 3 次多项式位移函数, 并且单元之间关于位移函数是 C^0 连续的, 因此满足偶应力/应变梯度理论分片检验条件对单元位移函数的连续性和完备性的要求. 在本文中, 我们用环向 3 次的 SBFEM 单元来表示偶应力/应变梯度理论中的应变部分. 但为了避免计算单元形状函数的表达式, 我们直接构造采用 SBFEM 计算单元应变的刚度矩阵, 即应变梯度理论单元刚度矩阵(19)和偶应力理论单元刚度矩阵(20)中的应变部分刚度矩阵 $\mathbf{K}_{st}^e$.

注意到, SBFEM的未知量是按照多边形边界 $6n$ 个节点位移组成的向量, 即

$$\mathbf{a} = (u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_{3n}, v_{3n})^T, \quad (33)$$

需要转化为偶应力/应变梯度理论有限元中多边形单元 n 个顶点处的函数值和导数值组成的节点参数向量 $\mathbf{q}$,

$$\mathbf{q} = (u_1, v_1, u_{x1}, v_{x1}, u_{y1}, v_{y1}, \dots, u_n, v_n, u_{xn}, v_{xn}, u_{yn}, v_{yn})^T. \quad (34)$$

由上述关于 SBFEM 的计算过程可知, 其单元节点参数对应的形状函数不是事先给定的, 所以不能直接进行基函数的转换, 但可以通过节点向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{q}$ 的关系得到两个单元刚度矩阵之间的转化关系.

从数学上看, 节点向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{q}$ 分别对应平面多边形单元的 Lagrange 插值和 Hermite 插值, 分别记相应的基函数为 $L_i(x, y)$ 和 $H_i(x, y)$, $i = 1, 2, \dots, 3n$, 则位移函数可分别表示为

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{3n} u_i L_i(x, y) = \sum_{i=1}^{3n} q_i H_i(x, y), \quad (35)$$

其中, u_i 和 q_i 分别表示向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{q}$ 中的关于位移函数 $u(x, y)$ 的各自节点参数分量, $i = 1, 2, \dots, 3n$.

虽然 SBFEM 在多边形单元上对应的插值基函数 $L_i(x, y)$ 和 $H_i(x, y)$ 是事先未知的, 没有具体的表达式, 但当限制在每条边界上, 则都对应为一元的 3 次多项式 Lagrange 插值和 Hermite 插值.

以四边形 $P_1 P_2 P_3 P_4$ 为例, 四个顶点的直角坐标为 $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, 4$. 设 $\mathbf{n}_i$ 和 $\mathbf{s}_i$ 分别为各边的单位法向量和单位切向量, 边长为 $l_i = |\overline{P_i P_{i+1}}|$, $i = 1, 2, 3, l_4 = |\overline{P_4 P_1}|$, 如图 3 所示. 设

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1, \quad \Delta x_2 = x_3 - x_2,$$

$$\Delta x_3 = x_4 - x_3, \quad \Delta x_4 = x_1 - x_4,$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \Delta y_2 = y_3 - y_2,$$

$$\Delta y_3 = y_4 - y_3, \quad \Delta y_4 = y_1 - y_4,$$

则每条边的切矢与直角坐标的方向余弦为 $(\frac{\Delta x_i}{l_i}, \frac{\Delta y_i}{l_i})$, 其中

$$l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

图 3 四边形单元的几何参数

Figure 3 The geometric parameters for a quadrilateral element.

对 $\overline{P_1 P_2}$ 边, 其上的 4 个 Lagrange 插值节点为 P_1, P_5, P_6, P_2 , 局部坐标为 $\eta \in [-1, 1]$, 则 $\frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{2}{l_1} \frac{du}{d\eta}$. 根据 3 次 Lagrange 插值公式, 沿 $\overline{P_1 P_2}$ 的位移函数为

$$u(\eta) = u(P_1)L_0(\eta) + u(P_5)L_1(\eta) + u(P_6)L_2(\eta) + u(P_2)L_3(\eta),$$

则

$$\begin{cases} \left. \frac{du}{d\eta} \right|_{\eta=-1} = \frac{1}{4}(-11u(P_1) + 18u(P_5) - 9u(P_6) + 2u(P_2)), \\ \left. \frac{du}{d\eta} \right|_{\eta=1} = \frac{1}{4}(-2u(P_1) + 9u(P_5) - 18u(P_6) + 11u(P_2)). \end{cases} \quad (36)$$

于是

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial u}{\partial s_1} \right|_{P_1} = \frac{\Delta x_1}{l_1} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{P_1} + \frac{\Delta y_1}{l_1} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{P_1} \\ = \frac{1}{2l_1}(-11u(P_1) + 18u(P_5) - 9u(P_6) + 2u(P_2)), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial s_1} \right|_{P_2} = \frac{\Delta x_1}{l_1} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{P_2} + \frac{\Delta y_1}{l_1} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{P_2} \\ = \frac{1}{2l_1}(-2u(P_1) + 9u(P_5) - 18u(P_6) + 11u(P_2)). \end{cases} \quad (37)$$

按上述公式(37), 对 n 边形的各边循环, 注意到对 $\overline{P_i P_{i+1}}$ 边, 其上的 4 个 Lagrange 插值节点为 $P_i, P_{n+2i-1}, P_{n+2i}, P_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, 对 $\overline{P_n P_1}$ 边, 其上的 4 个

Lagrange插值节点为 $P_n, P_{3n-1}, P_{3n}, P_1$, 于是得到一般公式为

$$\begin{cases} (-11, 18, -9, 2) \cdot (u_i, u_{n+2i-1}, u_{n+2i}, u_{i+1})^T \\ = (2\Delta x_i, 2\Delta y_i) \cdot ((u_x)_i, (u_y)_i)^T, \\ (-2, 9, -18, 11) \cdot (u_i, u_{n+2i-1}, u_{n+2i}, u_{i+1})^T \\ = (2\Delta x_i, 2\Delta y_i) \cdot ((u_x)_{i+1}, (u_y)_{i+1})^T, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ (-11, 18, -9, 2) \cdot (u_n, u_{3n-1}, u_{3n}, u_1)^T \\ = (2\Delta x_n, 2\Delta y_n) \cdot ((u_x)_n, (u_y)_n)^T, \\ (-2, 9, -18, 11) \cdot (u_n, u_{3n-1}, u_{3n}, u_1)^T \\ = (2\Delta x_n, 2\Delta y_n) \cdot ((u_x)_1, (u_y)_1)^T. \end{cases} \quad (38)$$

将公式(38)表示为矩阵形式,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 \cdot (u_1, u_2, \dots, u_{3n})^T \\ = \mathbf{T}_2 \cdot (u_1, u_{x1}, u_{y1}, \dots, u_n, u_{xn}, u_{yn})^T, \end{aligned} \quad (39)$$

即得到多边形边界 $3n$ 个节点位移值的向量与 $3n$ 个顶点位移值和导数值组成的向量之间的转化矩阵,

$$\begin{aligned} (u_1, u_2, \dots, u_{3n})^T \\ = \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2 \cdot (u_1, u_{x1}, u_{y1}, \dots, u_n, u_{xn}, u_{yn})^T. \end{aligned} \quad (40)$$

类似地, 可以得到位移函数 $v(x, y)$ 对应的 $3n$ 个节点位移值的向量与 $3n$ 个顶点位移值和导数值组成的向量之间的相同转化矩阵,

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, \dots, v_{3n})^T \\ = \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2 \cdot (v_1, v_{x1}, v_{y1}, \dots, v_n, v_{xn}, v_{yn})^T. \end{aligned} \quad (41)$$

进一步, 将矩阵 $\mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2$ 按照两个位移函数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 的 $6n$ 个节点位移按照公式(33)中的向量 $\mathbf{a}$ 升阶排序后得到的矩阵记为 $\mathbf{T}$, 则有

$$\mathbf{a} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{q}. \quad (42)$$

例如, 对四边形单元, 两个矩阵为

$$\mathbf{T}_1 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & 2 & 0 & 0 & 18 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 11 & 0 & 0 & 9 & -18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 2 & 0 & 0 & 0 & 18 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 11 & 0 & 0 & 0 & 9 & -18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & -9 \\ 11 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & -18 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

$$\mathbf{T}_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\Delta x_1 & 2\Delta y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\Delta x_1 & 2\Delta y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\Delta x_2 & 2\Delta y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\Delta x_2 & 2\Delta y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\Delta x_3 & 2\Delta y_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\Delta x_3 & 2\Delta y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\Delta x_4 & 2\Delta y_4 \\ 0 & 2\Delta x_4 & 2\Delta y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

分别用节点参数 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{q}$ 表示的单元应变为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \mathbf{L}\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{L}\tilde{\mathbf{N}}(x, y)\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{B}}(x, y)\mathbf{a} \\ = \tilde{\mathbf{B}}(x, y)\mathbf{T} \cdot \mathbf{q}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \mathbf{L}\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{L}\mathbf{N}(x, y)\mathbf{q} = \mathbf{B}(x, y)\mathbf{q}, \end{cases} \quad (45)$$

比较公式(45)的两端, 得到 $\mathbf{B}(x, y) = \tilde{\mathbf{B}}(x, y)\mathbf{T}$. 再由各自表示的单元刚度矩阵为

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{K}}_{st}^e = \iint_{Pe} \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}} dx dy, \\ \mathbf{K}_{st}^e = \iint_{Pe} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy. \end{cases} \quad (46)$$

因此, 两个单元刚度矩阵的转化关系为

$$\mathbf{K}_{st}^e = \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{K}}_{st}^e \mathbf{T}, \quad (47)$$

其中, $\mathbf{K}_{st}^e$ 即为用SBFEM计算的偶应力/应变梯度理论的单元应变刚度矩阵, $\tilde{\mathbf{K}}_{st}^e$ 由SBFEM按式(32)所得单元刚度矩阵, 避免了SBFEM单元形状函数表达式的计算.

4 多边形样条单元构造单元应变梯度刚度矩阵 $\mathbf{K}_{sg-sg}^e$ 和 $\mathbf{K}_{cs-sg}^e$

对于应变梯度部分, 由公式(15)和(16), 对偶应力理论和应变梯度理论, 两个应变梯度向量 χ 都需要对位移函数计算二阶导数, 或是对应变向量 ϵ 计算一阶导数. 由于SBFEM的形状函数事先未知, 如果对其表示的位移函数计算二阶导数, 则对应常微分方程组(30)变为四阶方程组, 造成了求解困难. 因此我们采用文献[37]中基于Kirchhoff假设的多边形薄板弯曲单元表示应变梯度向量, 并采用类似的方法计算单元应变梯度刚度矩阵.

由公式(15), 应变梯度向量的两部分可表示为

$$\begin{cases} \chi_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \epsilon(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{L} \mathbf{u}(x, y) \\ \quad = \mathbf{L} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \right)^T, \\ \chi_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \epsilon(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{L} \mathbf{u}(x, y) \\ \quad = \mathbf{L} \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y), \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \right)^T. \end{cases} \quad (48)$$

在基于离散Kirchhoff理论是构造薄板单元的方法中, 薄板的挠度和转角函数分别记为 $w(x, y)$, $\theta_x(x, y) = \frac{\partial w}{\partial x}(x, y)$, $\theta_y(x, y) = \frac{\partial w}{\partial y}(x, y)$, 则薄板的曲率向量为

$$\begin{aligned} \kappa &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, y) \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, y) \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial xy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \theta_x}{\partial x}(x, y) \\ -\frac{\partial \theta_y}{\partial y}(x, y) \\ -\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}(x, y) \right) \end{pmatrix} \\ &= -\mathbf{L} \begin{pmatrix} \theta_x(x, y) \\ \theta_y(x, y) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (49)$$

在文献[37]中, 我们构造了基于 n 边形的各顶点和各边中点为插值节点的 $2n$ 个样条插值基函

数, 记为 $S_1(x, y), S_2(x, y), \dots, S_{2n}(x, y)$, 这些基函数是以B网向量表示形式给出的, 并且从理论上证明了这组样条插值基函数对任意允许非凸或者1-irregular退化顶点的多边形单元位移函数都具有2次完备性.

根据离散Kirchhoff假设条件, 构造了以

$$\mathbf{q}_w = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \cdots \ w_n \ \theta_{xn} \ \theta_{yn}]^T$$

为节点自由度表示的两个转角函数

$$\theta_x = \mathbf{H}^x \mathbf{q}_w, \quad \theta_y = \mathbf{H}^y \mathbf{q}_w,$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^x &= [H_1^x, H_2^x, \dots, H_{3n}^x], \quad \mathbf{H}^y = [H_1^y, H_2^y, \dots, H_{3n}^y], \\ H_1^x &= -a_{2n} S_{2n} + a_{n+1} S_{n+1}, \\ H_2^x &= -S_1 + c_{2n} S_{2n} + c_{n+1} S_{n+1}, \\ H_3^x &= b_{2n} S_{2n} + b_{n+1} S_{n+1}, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} H_1^y &= -d_{2n} S_{2n} + d_{n+1} S_{n+1}, \\ H_2^y &= H_3^x, H_3^y = -S_1 + e_{2n} S_{2n} + e_{n+1} S_{n+1}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{3}{2} x_{ij} / l_{ij}^2, \quad b_k = \frac{3}{4} x_{ij} y_{ij} / l_{ij}^2, \\ c_k &= \left(\frac{1}{4} x_{ij}^2 - \frac{1}{2} y_{ij}^2 \right) / l_{ij}^2, \quad d_k = -\frac{3}{2} y_{ij} / l_{ij}^2, \\ e_k &= \left(-\frac{1}{2} x_{ij}^2 + \frac{1}{4} y_{ij}^2 \right) / l_{ij}^2, \quad k = n+1, \dots, 2n. \end{aligned}$$

对边 $ij = 12, 23, \dots, n1$ 来说, 分别有 $k = n, n+1, \dots, 2n$, 而且有 $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$ 和 $l_{ij}^2 = x_{ij}^2 + y_{ij}^2$.

函数 $H_4^x, H_5^x, H_6^x, H_4^y, H_5^y, H_6^y$ 可以分别由上式把基函数 S_1 替换为 S_2 , 下标 $2n$ 和 $n+1$ 轮换为 $n+1$ 和 $n+2$ 得出. 第 i 组基函数 H_{3i-2}^x, H_{3i-1}^x 和 H_{3i-2}^y, H_{3i-1}^y 可以分别由上式把基函数 S_1 替换为 S_i , 下标 $2n$ 和 $n+1$ 轮换为 $n+i-1$ 和 $n+i$ 得出.

对比偶应力/应变梯度理论有限元的节点自由度向量 $\mathbf{q}$, 令

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_u^x &= [H_1^x, 0, H_2^x, 0, \dots, H_{3n}^x, 0], \\ \mathbf{H}_u^y &= [H_1^y, 0, H_2^y, 0, \dots, H_{3n}^y, 0], \\ \mathbf{H}_v^x &= [0, H_1^x, 0, H_2^x, \dots, 0, H_{3n}^x], \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_v^y = [0, H_1^y, 0, H_2^y, \dots, 0, H_{3n}^y],$$

则有

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \mathbf{H}_u^x \mathbf{q}, & \frac{\partial u}{\partial y} = \mathbf{H}_u^y \mathbf{q}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \mathbf{H}_v^x \mathbf{q}, & \frac{\partial v}{\partial y} = \mathbf{H}_v^y \mathbf{q}. \end{cases} \quad (51)$$

结合公式(15)和(48), 则应变梯度理论的应变梯度部分的单元刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_{sg-sg}^e = l^2 \iint_{P^e} (\mathbf{B}_x^T \mathbf{D} \mathbf{B}_x + \mathbf{B}_y^T \mathbf{D} \mathbf{B}_y) dx dy, \quad (52)$$

其中

$$\mathbf{B}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_u^x \\ \mathbf{H}_v^x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_u^y \\ \mathbf{H}_v^y \end{bmatrix}. \quad (53)$$

由公式(16), 偶应力理论的应变梯度部分的单元刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_{cs-sg}^e = 4l^2 \iint_{P^e} (\bar{\mathbf{B}}_x^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{B}}_x + \bar{\mathbf{B}}_y^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{B}}_y) dx dy, \quad (54)$$

其中

$$\bar{\mathbf{B}}_x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{H}_v^x - \mathbf{H}_u^y), \quad \bar{\mathbf{B}}_y = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{H}_v^x - \mathbf{H}_u^y). \quad (55)$$

具体刚度矩阵的计算, 可采用和文献[37]一致的B网方法进行计算, 不必计算形状函数的表达式。

由此, 我们将SBFEM环向3次的单元(记为SBFEMd3)计算的单元应变刚度矩阵(47)和基于Kirchhoff理论的多边形样条薄板单元(记为DKPS2)

分别计算的单元应变梯度刚度矩阵(52)或(54), 相加即可得到基于多边形的应变梯度理论单元刚度矩阵(19)或者偶应力理论的单元刚度矩阵(20). 结合文献[36, 37]的理论结果, 可知组合单元SBFEMd3-DKPS2对偶应力和应变梯度理论都能精确重构满足体力为零的平衡方程的任意2次多项式位移函数。

5 数值算例

本节通过几个数值算例来测试本文提出的多边形组合单元的精度, 基于偶应力理论的单元记为“CS-SBFEMd3-DKPSd2”, 应变梯度理论的单元记为“SG-SBFEMd3-DKPSd2”. 为了验证算法的有效性, 对下面进行测试的几个算例, 根据理论解的唯一性^[40], 我们通过位移函数的精确解, 得到相应的边界条件, 再根据上述两个单元计算数值解, 并与精确解进行比较。

例5.1 分片检验

如图4所示的一个矩形区域, 分别测试四边形单元, 含有非凸多边形单元(图4(b)), 和含有1-irregular退化单元(图4(c))的情形. 对分片检验函数, 分别取满足体力为零的平衡方程的 C^{0-1} 分片检验函数(2次位移函数)^[12]:

$$\begin{cases} u = 1 + 4x + 6y + 2xy + 5(-x^2 + y^2) \\ \quad - 5\mu x + 4(y^2 + \mu x^2), \\ v = 2 + 5y + 2xy + \frac{9}{2}(x^2 - y^2) - 4\mu y \\ \quad + \frac{7}{2}(x^2 + \mu y^2), \end{cases} \quad (56)$$

图4 (网络版彩图)分片检验. (a) 四边形单元情形; (b) 含有非凸多边形单元的情形; (c) 含有1-irregular退化单元的情形

Figure 4 (Color online) Patch test. (a) Quadrilateral elements; (b) with concave elements; (c) with 1-irregular elements.

以及 C^1 增强分片检验函数(2次位移函数)^[13]:

$$\begin{cases} u = 1 + 2x + 3y - (11 - \mu)x^2/4 + 5xy + 3y^2, \\ v = 1 + 2x + 3y + 2x^2 + 5xy - (9 + \mu)y^2/4. \end{cases} \quad (57)$$

表1中显示了对于图4(a)中四边形网格中顶点1处的6个节点自由度的计算结果. 事实上, 对于上述三个剖分, 计算结果显示所有节点自由度的数值误差都达到 10^{-10} 量级, 表明组合单元SBFEMd3-DKPSd2对偶应力理论和应变梯度理论均能精确重构 C^{0-1} 分片检验函数(56)和 C^1 分片检验函数(57)中的2次位移函数, 与理论分析结果一致.

例5.2 纯弯曲问题

类似于Stolken的微观弯曲试验^[41], 如图5(a)所示为一个微观尺度的悬臂梁, 材料常数: 梁长 $L = 250 \mu\text{m}$, 厚度 $h = 12.5 \mu\text{m}$, 弹性模量 $E = 220 \text{ GPa}$, 泊松比 $\mu = 0.31$, 右端弯矩 $M = 50 \text{ N} \mu\text{m}$. 文献[42]中分别给出了偶应力理论的位移精确解为

$$v_{CS} = -\frac{6M(1-\mu^2)}{Eh[h^2 + 24(1-\mu)l^2]} \left(x^2 + \frac{\mu}{1-\mu}y^2 \right). \quad (58)$$

应变梯度理论的位移精确解为

$$v_{SG} = -\frac{6M(1-\mu^2)}{Eh(h^2 + 12l^2)} \left(x^2 + \frac{\mu}{1-\mu}y^2 \right). \quad (59)$$

本例中采用 10×1 的六边形网格进行计算, 图5(a)所示网格(1)中的矩形网格为1-irregular退化的六边形单元(竖直边的三个顶点共线); 图5(b)所示网格(2)中的四边形网格为网格(1)产生畸变后的情况; 图5(c)所示网格(3)中同时包含了1-irregular退化六边形和非凸六边形的情况.

表1 图4(a)中网格分片检验结果

Table 1 Numerical results of patch test for the mesh in Figure 4(a)

检验函数	单元	u_1	v_1	$\partial u_1 / \partial x$	$\partial v_1 / \partial x$	$\partial u_1 / \partial y$	$\partial v_1 / \partial y$
C^{0-1} 检验函数(56)	CS-SBFEMd3-DKPSd2	1.21267	2.0864	2.08	0.68	6.44	3.61333
	SG-SBFEMd3-DKPSd2	1.21267	2.0864	2.08	0.68	6.44	3.61333
	Exact	1.21267	2.0864	2.08	0.68	6.44	3.61333
C^1 检验函数(57)	CS-SBFEMd3-DKPSd2	1.14093	1.14627	1.88667	2.26	3.32	3.10667
	SG-SBFEMd3-DKPSd2	1.14093	1.14627	1.88667	2.26	3.32	3.10667
	Exact	1.14093	1.14627	1.88667	2.26	3.32	3.10667

图5 (网络版彩图)纯弯曲问题的模型及网格. (a) 网格(1); (b) 网格(2); (c) 网格(3)

Figure 5 (Color online) Model of pure bending beam and meshes. (a) Mesh (1); (b) mesh (2); (c) mesh (3).

选择不同的材料长度参数 $l = (0, 1/10, 1/5, 1/3, 1/2)$ 以检测尺度效应. 图6(a)和(b)分别显示了偶应力理论和应变梯度理论多边形单元基于网格(1)计算的梁中线节点处位移的数值结果与精确解的比较. 图7(a)和(b)分别显示了应变梯度理论多边形单元基于 10×1 和 10×2 六边形网格计算的梁右端节点处沿 x 方向的正应力的数值结果与精确解的比较. 可以看到, 随着网格加密, 关于正应力的计算精度得到了提高. 表2中显示了当材料长度参数 l 变化时, 三个网格计算位移数值结果的最大误差, 可以看出本文的多边形单元对含有非凸单元和1-irregular退化的网格均能得到很好的计算精度.

例5.3 纯剪切问题

本算例来自文献[43], 也是一个标准测试问题. 如图8所示, 假设长宽高分别为 L, w, h 的块体(长度 L 和宽度 w 远大于厚度 h), 顶部边界 $y = h$ 受到剪切作用, 由此产生变形 $\bar{u}_0$. 取材料常数为: $E = 1.44 \text{ GPa}$, $\mu = 0.38$, $L = 2000 \mu\text{m}$, $h = 100 \mu\text{m}$,

图 6 (网络版彩图) 纯弯曲问题中不同材料长度参数比值 l/h 对应的位移数值结果. (a) 偶应力理论; (b) 应变梯度理论

Figure 6 (Color online) The deflections of pure bending for various ratios l/h by the SBFEM3-DKPSd2 element. (a) For couple stress theory; (b) for strain gradient elasticity theory.

图 7 (网络版彩图) 纯弯曲问题中不同材料长度参数比值 l/h 对应右端正应力的应变梯度理论单元计算结果. (a) 10×1 的六边形网格结果; (b) 10×2 的六边形网格结果

Figure 7 (Color online) The stresses of pure bending for various ratios l/h by the SBFEM3-DKPSd2 element for strain gradient elasticity theory. (a) 10×1 hexagonal meshes; (b) 10×2 hexagonal meshes.

$\bar{u}_0 = 1 \mu\text{m}$. 为了显示受材料长度参数 l 的影响, 分别取 $l = 0, 8.8, 1.76, 176 \mu\text{m}$. 采用本文单元按 20×10 的矩形网格分别计算偶应力和应变梯度理论的结果, 图9(a)和(b)分别显示了中截面的位移和剪切应变, 可以清楚地看到长度参数的变化对两种理论的数值结果的影响.

图 8 纯剪切问题的模型

Figure 8 Model of simple shear problem.

6 结论

本文研究用于求解偶应力/应变梯度理论的多边形单元, 节点参数为各顶点处的函数值和导数值(混合参数), 其中的难点问题是如何构造多边形单元上满足分片检验要求的形状函数, 即要求单元对位移函数满足2次完备性和 C^0 连续. 本文的方法是在理论证明 SBFEM 和 DKPS 单元的完备性的基础上, 研究偶应力/应变梯度理论有限元的多边形单元刚度矩阵的构造, 从而避免了单元形状函数表达式的计算. 偶应力/应变梯度理论的单元刚度矩阵包含应变部分和应变梯度部分, 本文采用两个单元结合的方法来分别计算单元应变和应变梯度的刚度矩阵. (1) 对于应变部分, 为了满足位移函

表 2 纯弯曲问题中三个网格计算位移数值结果的最大误差

Table 2 The maximum errors for the pure bending problem with three meshes

	l/h	10^{-6}	$1/10$	$1/5$	$1/3$	$1/2$
CS-SBFEMd3-DKPSd2	网格(1)	5.67×10^{-11}	4.00×10^{-6}	2.06×10^{-5}	4.09×10^{-5}	4.92×10^{-5}
	网格(2)	3.55×10^{-11}	4.50×10^{-6}	2.41×10^{-5}	4.91×10^{-5}	6.03×10^{-5}
	网格(3)	1.78×10^{-10}	3.23×10^{-6}	2.16×10^{-5}	4.70×10^{-5}	5.96×10^{-5}
SG-SBFEMd3-DKPSd2	网格(1)	1.00×10^{-11}	8.08×10^{-7}	2.40×10^{-6}	2.85×10^{-6}	3.53×10^{-6}
	网格(2)	2.96×10^{-11}	1.22×10^{-6}	4.50×10^{-6}	6.58×10^{-6}	5.80×10^{-6}
	网格(3)	1.33×10^{-10}	1.07×10^{-6}	3.23×10^{-6}	4.35×10^{-6}	4.88×10^{-6}

图 9 (网络版彩图)纯剪切问题中不同材料长度参数 l 对应的SBFEMd3-DKPSd2单元数值结果. (a) 位移结果; (b) 剪切应变结果
Figure 9 (Color online) The numerical results of the simple shear problem for various l by the SBFEMd3-DKPSd2 element. (a) Displacements; (b) shear strains.

数在单元边界上具有3次多项式精度的要求, 采用比例边界有限元方法(SBFEM)中环向3次单元来表示应变, 但SBFEM是一种半离散半解析的方法, 其单元形状函数没有显式表示并且事先未知. 借助节点参数之间的转化关系, 我们将基于位移节点参数的SBFEM单元刚度矩阵转化为基于混合节点参数的应变单元刚度矩阵, 避免了对形状函数的计算. (2) 对于应变梯度部分, 需要计算位移的二阶导数, 这与薄板单元类似. 故采用之前构造的基于离

散Kirchhoff理论的多边形样条薄板单元的形函数进行应变梯度单元刚度矩阵的计算. 本文提出的这个新的组合单元, 即基于SBFEM和样条插值的多边形偶应力/应变梯度理论单元(SBFEMd3-DKPSd2), 对任意多边形(包含非凸多边形和具有1-irregular退化的多边形)单元位移函数都能满足偶应力/应变梯度理论分片检验的要求. 数值算例显示, 该组合单元能通过 C^{0-1} 和 C^1 增强2次分片检验, 并在算例中显示了很好的计算精度.

参考文献

- Wei Y G, Wang X Z, Wu X L, et al. Theoretical and experimental researches of size effect in micro-indentation test. *Sci China Ser A*, 2001, 44: 74–82 [魏悦广, 王学铮, 武晓雷, 等. 微压痕尺度效应的理论和实验. *中国科学A辑*, 2000, 30: 1025–1032]
- Zhao Y P. Modern Continuum Mechanics (in Chinese). Beijing: Science Press, 2016 [赵亚溥. 近代连续介质力学. 北京: 科学出版社, 2016]
- Eringen A C, Edelen D G B. On nonlocal elasticity. *Int J Eng Sci*, 1972, 10: 233–248
- Eringen A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *J Appl Phys*, 1983, 54: 4703–4710
- Toupin R A. Elastic materials with couple-stresses. *Arch Rational Mech Anal*, 1962, 11: 385–414

- 6 Koiter W T. Couple stresses in the theory of elasticity, I and II. In: Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (B). Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1964. 67: 17–44
- 7 Mindlin R D. Micro-structure in linear elasticity. [Arch Rational Mech Anal](#), 1964, 16: 51–78
- 8 Altan S B, Aifantis E C. On the structure of the mode III crack-tip in gradient elasticity. [Scripta Metall Mater](#), 1992, 26: 319–324
- 9 Fleck N A, Muller G M, Ashby M F, et al. Strain gradient plasticity: Theory and experiment. [Acta Metall Mater](#), 1994, 42: 475–487
- 10 Yang F, Chong A C M, Lam D C C, et al. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. [Int J Solids Struct](#), 2002, 39: 2731–2743
- 11 Chen S H, Wang Z Q. Advances in strain gradient theory (in Chinese). [Adv Mech](#), 2003, 33: 207–216 [陈少华, 王自强. 应变梯度理论进展. 力学进展, 2003, 33: 207–216]
- 12 Soh A K, Chen W J. Finite element formulations of strain gradient theory for microstructures and the C^{0-1} patch test. [Int J Numer Meth Engng](#), 2004, 61: 433–454
- 13 Chen W J. C^0 and C^1 theories and test functions for FEM patch test in micromechanics (in Chinese). [Sci China Ser G-Phys Mech Astron](#), 2009, 39: 1480–1486 [陈万吉. 细观尺度 C^0 和 C^1 理论及有限元分片检验函数. 中国科学G辑: 物理学 力学 天文学, 2009, 39: 1480–1486]
- 14 Zhao J, Chen W J, Lo S H. A refined nonconforming quadrilateral element for couple stress/strain gradient elasticity. [Int J Numer Meth Engng](#), 2011, 85: 269–288
- 15 Ma X, Chen W. Refined 18-DOF triangular hybrid stress element for couple stress theory. [Finite Elem Anal Des](#), 2013, 75: 8–18
- 16 Ma X, Chen W. 24-DOF quadrilateral hybrid stress element for couple stress theory. [Comput Mech](#), 2014, 53: 159–172
- 17 Chen J, Li C J. A quadrilateral spline element for couple stress/strain gradient elasticity. [Comput Struct](#), 2014, 138: 133–141
- 18 Wang C, Zhang X, Hu P. A 4-node quasi-conforming quadrilateral element for couple stress theory immune to distorted mesh. [Comput Struct](#), 2016, 175: 52–64
- 19 Li H, Ming P, Shi Z. Two robust nonconforming H^2 -elements for linear strain gradient elasticity. [Numer Math](#), 2017, 137: 691–711
- 20 Choi J H, Lee B C. A 3-node C^0 triangular element for the modified couple stress theory based on the smoothed finite element method. [Int J Numer Methods Eng](#), 2018, 114: 1245–1261
- 21 Shang Y, Qian Z H, Cen S, et al. A simple unsymmetric 4-node 12-DOF membrane element for the modified couple stress theory. [Int J Numer Methods Eng](#), 2019, 119: 807–825
- 22 Zhang B, Li H, Kong L, et al. Strain gradient differential quadrature beam finite elements. [Comput Struct](#), 2019, 218: 170–189
- 23 Song Y, Voyiadjis G Z. Strain gradient finite element model for finite deformation theory: Size effects and shear bands. [Comput Mech](#), 2020, 65: 1219–1246
- 24 Fan Y L, Zhang Y G, Lu M W. Arbitrarily polygonal 2-D finite element (in Chinese). [Acta Mech Sin](#), 1995, 27: 742–746 [范亚玲, 张远高, 陆明万. 二维任意多边形有限单元. 力学学报, 1995, 27: 742–746]
- 25 Wang Z Q. Advances in polygonal finite element method (in Chinese). [Adv Mech](#), 2006, 36: 344–353 [王兆清. 多边形有限元研究进展. 力学进展, 2006, 36: 344–353]
- 26 Sukumar N, Malsch E A. Recent advances in the construction of polygonal finite element interpolants. [Arch Computat Methods Eng](#), 2006, 13: 129–163
- 27 Nguyen-Xuan H. A polygonal finite element method for plate analysis. [Comput Struct](#), 2017, 188: 45–62
- 28 Katili I, Maknun I J, Katili A M, et al. A unified polygonal locking-free thin/thick smoothed plate element. [Composite Struct](#), 2019, 219: 147–157
- 29 Videla J, Natarajan S, Bordas S P A. A new locking-free polygonal plate element for thin and thick plates based on Reissner-Mindlin plate theory and assumed shear strain fields. [Comput Struct](#), 2019, 220: 32–42
- 30 Wachspress E L. A Rational Finite Element Basis. New York: Academic Press Inc., 1975
- 31 Floater M S. Mean value coordinates. [Comput Aided Geometric Des](#), 2003, 20: 19–27
- 32 Sukumar N, Tabarraei A. Conforming polygonal finite elements. [Int J Numer Meth Engng](#), 2004, 61: 2045–2066
- 33 Dai K Y, Liu G R, Nguyen T T. An n -sided polygonal smoothed finite element method (n SFEM) for solid mechanics. [Finite Elem Anal Des](#), 2007, 43: 847–860
- 34 Song C, Wolf J P. The scaled boundary finite-element method-alias consistent infinitesimal finite-element cell method-for elastodynamics. [Comput Methods Appl Mech Eng](#), 1997, 147: 329–355
- 35 Song C M. The Scaled Boundary Finite Element Method Introduction to Theory and Implementation. Hoboken: John Wiley & Sons Ltd, 2018
- 36 Jia Y M, Li C J, Zhang Y, et al. The high-order completeness analysis of the scaled boundary finite element method. [Comput Methods Appl Mech Eng](#), 2020, 362: 112867
- 37 Chen J, Li C J. The polygonal spline thin plate element based on the discrete Kirchhoff theory (in Chinese). [Sci Sin-Phys Mech Astron](#), 2020, 50: 044601 [陈娟, 李崇君. 基于离散Kirchhoff理论的多边形样条薄板单元. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 044601]

- 38 Zhang Y, Zhao Y P. Measuring the nonlocal effects of a micro/nanobeam by the shifts of resonant frequencies. *Int J Solids Struct*, 2016, 102-103: 259–266
- 39 Zhang Y. Frequency spectra of nonlocal Timoshenko beams and an effective method of determining nonlocal effect. *Int J Mech Sci*, 2017, 128-129: 572–582
- 40 Gao M N, Zhao Y P. Some uniqueness theorems of solutions for the problems of elasticity (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2020, 50: 084601 [高梦霓, 赵亚溥. 若干弹性力学问题解的唯一性定理. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, 50: 084601]
- 41 Stölken J S, Evans A G. A microbend test method for measuring the plasticity length scale. *Acta Mater*, 1998, 46: 5109–5115
- 42 Ji B, Chen W J. A new analytical solution of pure bending beam in couple stress elasto-plasticity: Theory and applications. *Int J Solids Struct*, 2010, 47: 779–785
- 43 Park S K, Gao X L. Variational formulation of a modified couple stress theory and its application to a simple shear problem. *Z Angew Math Phys*, 2008, 59: 904–917

A polygonal element for couple stress/strain gradient elasticity based on SBFEM and spline interpolation

CHEN Juan¹ & LI Chong-Jun^{2*}

¹*School of Mathematics, Dongbei University of Finance & Economics, Dalian 116025, China;*

²*School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China*

The couple stress and strain gradient elasticities have been developed to extend the continuum elasticity to the micro-scale enabling describing the scale effects. The basic equations are fourth-order differential equations by adding the scaled parameter to the conventional second-order elasticity equations. To pass the C^{0-1} and C^1 enhanced patch test of the convergence condition, the elements of the couple stress or the strain gradient elasticity must satisfy C^0 continuity and possess second-order completeness for displacements simultaneously with the nodal parameters, including the displacements and their first-order derivatives. Meanwhile, polygonal elements are suitably flexible for meshing of complex regions. However, no polygonal element is available for couple stress or strain gradient elasticity, because polygonal shape functions with high-order completeness are difficult to construct. This paper presents a polygonal element for couple stress/strain gradient elasticity, which combines the scaled boundary finite element method (SBFEM) with a polygonal spline thin-plate element based on discrete Kirchhoff theory (DKPS). The stiffness matrix of the element includes two parts, one for standard strains and the other for strain gradients, which are computed by the SBFEM and DKPS elements, respectively. This approach avoids the computation of shape functions. The new combined element (SBFEMd3-DKPSd2) satisfies the patch-test conditions of couple stress/strain gradient elasticity. In numerical examples, the proposed element can obtain good accuracy for both couple stress and strain gradient elasticities on convex, non-convex, and irregular polygonal meshes.

polygonal element, couple stress/strain gradient elasticity, SBFEM, spline interpolation basis, element stiffness matrix

PACS: 02.60.Cb, 02.60.Ed, 02.70.Dh, 46.70.De

doi: [10.1360/SSPMA-2020-0168](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2020-0168)